МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

MATHEMATICAL JOURNAL

2001 том 1 № 2

Институт математики МО и Н РК
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 1 № 2 2001

Периодичность — 4 номера в год

Адрес редколлегии и редакции: 480100, г.Алматы, Пушкина ул., 125, к. 205
Телефон 8-(3272)-91-19-04, journal@math.kz, http://www.math.kz

ISSN - 1682 - 0525

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 1, № 2, 2001

Математический метод оценки параметров качества обслуживания сети передачи данных
М. Б. Айдарханов, Д. У. Ашигалиев 3

Об оценке роста решений системы дифференциальных уравнений
Т. М. Алдибеков 10

Модифицированные уравнения Максвелла и их обобщенные решения
Л. А. Алексеева 15

Исследование абсолютной устойчивости нелинейных разностных интервальных включений
Ж. А. Байкенова, Р. С. Ивлев 25

Спектральные вопросы квазирегулярной задачи Дирихле и ее сопряженной для уравнения Лаврентьева-Бицадзе
М. А. Бименов, М. А. Джаманкараева, Т. Ш. Кальменов 32

Асимптотическое решение сингулярно возмущенных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с начальными скачками любого порядка
М. К. Даулбаев 42

О степени точности на полиномах квадратур для неположительных функционалов
В. В. Жук 52

Класс целых функций, имеющих интегральное представление и порождаемых линейными дифференциальными выражениями, зависящими от комплексного параметра
Б. Е. Кангужин 59

Об асимптотической устойчивости интервально-заданного объекта с запаздыванием
Г. Н. Пащенко, Е. Т. Аяганов 66

Соотношение топологической структуры векторного расслоения и условия равномерной экспоненциальной разделенности семейства его автоморфизмов
М. И. Рахимбердиев 73

Явление буферности в распределенном генераторе Ван дер Поля
Н. Х. Розов 76

Исследование разрешимости линеаризованной задачи Гиббса-Томсона в гельдеровских пространствах
А. С. Сарсекеева 85

Собственные полиномы одной специальной системы дифференциальных уравнений в частных производных
Ж. Н. Тасмамбетов 93

Метод функций Ляпунова в задаче стохастической устойчивости программного движения
М. И. Тлеубергенов 98

Об одном непрерывном методе суммирования коэффициентов Фурье
Л. П. Фалалеев 107

ХРОНИКА

Международная конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения" (Алматы, 26–28 сентября, 2001) 111

Орымбек Ахметбекович Жаутыков 112

Енгван Инсугович Ким 113

Семинар Института математики МОН РК 114

Рефераты 120

Математический журнал. *Алматы. 2001. Том 1. № 2. С. 3 — 9*

УДК 621.391

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ КАЧЕСТВА ОБСЛУЖИВАНИЯ СЕТИ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ

М. Б. Айдарханов, Д. У. Ашигалиев

Институт проблем информатики и управления МОН РК
480100, Алматы, Пушкина ул., 125, amb@ipic.kz

1. Постановка задачи и общее описание модели. При проектировании сетей передачи данных с использованием концепции виртуальных соединений с обходными направлениями и при управлении такими сетями часто появляется необходимость в определении статистических параметров, характеризующих качество обслуживания на сети. В настоящее время существует много работ, посвященных этой проблеме. Однако все они основаны на итерационных процессах построения имитационных моделей, с помощью которых в конечном итоге предоставляется возможность вычислять лишь приближенные значения этих параметров.

В данной работе представлен аналитический подход к вычислению основных характеристик качества обслуживания сетей передачи данных с использованием концепции виртуальных соединений для передачи многоканальных вызовов по обходным направлениям. При этом, как и во всех других работах, для расчета параметров качества обслуживания сети делается ряд допущений, которые с достаточной степенью точности позволяют приближать рассматриваемую модель к реально функционирующим сетям передачи данных. Параметры качества обслуживания рассчитываются для заданной структуры сети, тяготений между парами узлов, представляющих собой среднее значение поступающего трафика между соответствующими парами узлов в час наибольшей нагрузки (ЧНН) и неизменного статистического плана распределения потоков.

Главным объектом исследования является сеть передачи данных с обходными направлениями виртуальных трактов. Создание таких сетей базируется на основе применения асинхронного режима переноса [1]. В зарубежных аналогах такие сети называют сети ATM (Asynchronous Transfer Mode). Разработка метода расчета параметров качества обслуживания для обычных сетей — с синхронным режимом переноса — была технологически трудно осуществима из-за сложности процедуры коммутации временных каналов в узлах групповой коммутации. Режим ATM упрощает реализацию метода путем использования концепции виртуального тракта. Виртуальный тракт — прямая логическая линия, соединяющая пару корреспондирующих узлов.

В описываемой модели сеть ATM рассматривается как система массового обслуживания (СМО) с явными потерями. Качество обслуживания на этой сети обычно оценивается значениями элементов некоторого множества $P = \{p_{ik}\}$, где p_{ik} — вероятность потерь нагрузки на

Keywords: *quality of service, multichannel calls*
2000 Mathematics Subject Classification: 90B15

ветви (ik), i,k — соседние узлы сети. Так как сеть АТМ представляется как СМО с явными потерями, то для всех $(ik) \in L$ величина p_{ik} принимает значения в интервале $(0;1]$. Если $(ik) \notin L$, то $p_{ik} = 0$, где L — множество ветвей сети.

Также, как и в работе [2, с.43], в качестве внешних нагрузок для сети АТМ рассматривается поток многоканальных вызовов (МВ). Пусть $r_i(j)$ — есть средняя интенсивность входящего в узел i потока МВ, подлежащих передаче в узел j. Величину $r_i(j)$ в дальнейшем будем называть внешней нагрузкой сети. Она представляет собой среднее значение поступающего потока МВ между соответствующими парами узлов в ЧНН. Пусть $t_i(j)$ — интенсивность потока МВ, формируемая на узле i и предназначенная для узла-адресата j. Величину $t_i(j)$ будем называть суммарной нагрузкой узла i. Она включает в себя как внешнюю нагрузку $r_i(j)$, так и суммарные нагрузки $t_i(j)$, поступающие в узел i со всех смежных с ним узлов.

При нахождении параметров качества обслуживания на сети АТМ обычно делаются следующие допущения, определяющие наибольшую степень приближения рассматриваемой модели к реальной сети и точность расчета ее характеристик [3, с.150]:

— исходные потоки МВ являются пуассоновскими;

— СМО находится в состоянии статистического равновесия;

— СМО с явными потерями;

— не учитываются потери в коммутационных и управляющих устройствах;

— время установления соединения каждого пути равно нулю.

Исходными данными при определении параметров качества обслуживания на сети АТМ являются:

— структура (расположение узлов, емкость ветвей);

— входная нагрузка для обслуживания в ЧНН между узлами каждой пары;

— план распределения потоков на сети АТМ;

— вероятность потерь между узлами каждой пары.

В процессе расчетов для сети АТМ определяются следующие параметры качества обслуживания:

— вероятность потерь на ветвях;

— вероятности обслуживания нагрузки каждой ветвью;

— величина суммарной нагрузки (поступающей на каждую ветвь, пропущенной каждой ветвью и избыточной для каждой ветви);

— вероятность потерь в среднем на сети АТМ (отношение нагрузки, потерянной на всей сети, к поступившей на обслуживание);

— величины нагрузок, обслуженных и потерянных в каждом транзитном узле и на всей сети в целом.

Порядок выбора исходящих из узла i направлений для передачи нагрузки $t_i(j)$ ко всем остальным соседним узлам, т.е. план ее распределения, представляется матрицей маршрутов M_i для узла i. В матрице маршрутов число столбцов равно $n-1$ (столбец в матрице M_i для узла i отсутствует), а число строк — числу S_i соседних с рассматриваемым i узлов. Элемент $m_{ik_{S_i},j}$ матрицы M_i указывает номер очередности выбора ветви (ik_{S_i}) при установлении соединения к узлу j, т.е. $m_{ik_{S_i},j} \in \{1, 2, \ldots, S_i\}$.

Обозначим через $K_i(j)$ упорядоченное множество таких узлов k, которые для адресата j образуют все исходящие из узла i направления передачи (ik). В дальнейшем для тех величин, которые обозначены с помощью индекса k, будем считать, что $k \in K_i(j)$. Упорядочение элементов множества $K_i(j)$ производится в соответствии с выбором для узла j исходящего направления приоритетной очередности в матрице маршрутов M_i.

Величина пропущенной или избыточной нагрузки зависит от вероятности потерь трафика $t_i(j)$, распределяемого на ветвь (ik). Пусть $j \in J$, где J — множество всех узлов адресатов. Тогда для случая $\mid J \mid \geq 1$ предполагаем, что расположенная на каждом узле система распределения нагрузки функционирует в режиме разделенного обслуживания (отдельно по каждому адресату). Это означает, что на ветви (ik) число временных каналов подразделяется на разряды, каждый из которых представляет собой группу обслуживающих устройств в составе временного цикла, необходимую для передачи нагрузки только по адресату j.

Пусть $p_{ik}(j)$ — вероятность потерь нагрузки $t_i(j)$ на ветви (ik). Так как сеть ATM представляется системой обслуживания с явными потерями, то $p_{ik}(j)$ принимает значения в интервале $(0;1]$ для каждой ветви (ik), участвующей в передаче нагрузки $t_i(j)$. В противном случае или при $(ik) \notin L$ полагаем $p_{ik}(j) = 0$. Расчет вероятностей потерь относительно каждого адресата в сети ATM с обходными направлениями осложняется тем, что они в общем случае зависят от вероятностей потерь на всех остальных ветвях. Эта зависимость с учетом заданного плана распределения потоков информации представляется сложной системой нелинейных уравнений, которая будет описана ниже.

Пусть $\varphi_{ik}(j)$ — мера, характеризующая значение избыточной нагрузки сети ATM для всех ветвей, предшествующих по выбору направлению (ik). Величина $\varphi_{ik}(j)$ есть доля нагрузки $t_i(j)$, поступающая на ветвь (ik) в соответствии с планом распределения. Она равна 0, если ветвь (ik) не используется ни в одном из путей, соединяющих узлы i, j, и равна 1, если ветвь (ik) является ветвью пути первого выбора. В состав доли $\varphi_{ik}(j)$ включаются вероятности потерь всех предшествующих данной ветви (ik) направлений. Обозначим через $\widetilde{K}_{ik}(j)$ множество таких узлов $\widetilde{k}$, которые из узла i образуют все предшествующие ветви $(i\widetilde{k})$. Величина $\varphi_{ik}(j)$ представляет собой вероятность занятости обслуживанием направлений $(i\widetilde{k})$, то есть

$$\varphi_{ik}(j) = \varphi_{i\widetilde{k}}(j) p_{i\widetilde{k}}(j) = \prod_{\widetilde{k} \in \widetilde{K}_i(j)} p_{i\widetilde{k}}(j).$$

Произведение $\varphi_{i\widetilde{k}}(j) p_{i\widetilde{k}}(j)$ есть доля избыточной нагрузки на ветви (ik), которая в зависимости от плана распределения нагрузок будет передаваться на другие свободные для узла i направления, а в отсутствии таковых она в узле i будет теряться. При этом нагрузка $t_i(j)$ считается потерянной в узле i, если заняты временные каналы на всех исходящих направлениях (ik). Обозначим

$$h_{ik}(j) = \varphi_{ik}(j)[1 - p_{ik}(j)] \ \ \forall i, k, j \in V, \tag{1}$$

где $h_{ik}(j) \in [0;1)$ — характеристика пропущенной ветвью (ik) нагрузки $t_i(j)$. Величина $h_{ik}(j)$ представляет собой условную вероятность прохождения нагрузки $t_i(j)$ через ветвь (ik) при занятости обслуживанием всех предшествующих этой ветви направлений. В дальнейшем $h_{ik}(j)$ будем называть вероятностью обслуживания ветви (ik), а значение $h_{ik}(j)t_i(j)$ — пропущенной ветвью (ik) нагрузкой.

2. Распределение входной нагрузки по дереву путей. Пусть $G_u(j) = (V_u(j), L_u(j))$ — дерево путей передачи информации от узла-отправителя u до узла-адресата j. При этом $V_u(j)$ — множество всех узлов дерева, $L_u(j) = \{(ik) \mid \ i, k \in V_u(j)\}$ — множество его ветвей. Обозначим через $K_i^u(j)$ — упорядоченное множество узлов k, образующих всевозможные исходящие из узла i направления (ik) в дереве путей $G_u(j)$. Для построения дерева путей между любой парой узлов выбираются соответствующие столбцы матриц маршрутов начального узла (узла-отправителя) и всех транзитных узлов.

При распределении входной нагрузки между парой узлов по дереву путей в первую очередь выбирается прямой путь к узлу назначения, если он имеется и свободен. При занятости прямого пути или же его отсутствии входная нагрузка направляется по одному из исходящих направлений обходного пути, порядок выбора которого определяется его длиною и числом транзитов (в первую очередь занимаются кратчайшие пути и пути, имеющие меньшее число транзитных участков). В последнюю очередь занимается путь последнего выбора. Эта процедура выбора исходящих направлений используется как для начального узла, так и для всех транзитных узлов дерева путей. Процесс передачи входной нагрузки начинается от начального узла ко всем транзитным узлам дерева путей. Для каждой пары узлов распределение нагрузок по дереву путей производится на основе вероятностей обслуживания на всех последовательных ветвях дерева. Пропущенная ветвью $(li) \in L_u(j)$ нагрузка в свою очередь является входной нагрузкой относительно узла i. Такую нагрузку будем называть транзитной нагрузкой на узле i. Пусть $t_i^u(k,j)$ — транзитная нагрузка на узле $i \in V_u(j)$, образованная в процессе распределения входной нагрузки $r_i(j)$ по дереву путей $G_u(j)$ и предназначенная для передачи узлу j через соседний узел $k \in K_i^u(j)$. Нахождение транзитных нагрузок на каждом узле дерева осуществляется с помощью следующей формулы

$$t_i^u(k,j) = t_l^u(i,j) h_{li}(j),$$

где $(li) \in L_u(j),\ i,j,k,l,u \in V_u(j)$. Без потери общности полагаем, что для всех узлов дерева $i = u$, значение $t_i^i(k,j) = r_i(j)$, а для всех узлов $i, k = j$ значение $t_i^u(j,j) = t_i^u(j)$.

Следует отметить, что так как в любой узел дерева путей кроме начального входит только одна ветвь, то на этом узле, независимо от выбора исходящих из него направлений, значения всех транзитных нагрузок будут одинаковыми. Одновременно для этого узла транзитные нагрузки являются и входными нагрузками. Таким образом, для любого узла $i \in V_u(j)$ $(i \neq u)$ и всех узлов $k_a \in K_i^u(j),\ a = 1, 2, \ldots, s,\ (s \leq S)$ имеют место равенства

$$t_i^u(k_1;j) = t_i^u(k_2;j) = \cdots = t_i^u(k_s;j) = r_i^u(j), \tag{2}$$

где $r_i^u(j)$ — входная нагрузка, поступающая на узел i и предназначенная узлу j. В этом случае транзитная и входная нагрузки принципиально не отличаются друг от друга. Как будет показано ниже, транзитные нагрузки удобно использовать при вычислении узловых нагрузок на любом узле графа G, которые в свою очередь передаются соседним узлам по строго установленным направлениям. Другими словами транзитные нагрузки вводятся для того, чтобы в процессе их передачи по каналам связи исключать циклические маршруты. Входная нагрузка $r_i^u(j)$ для любого узла i распределяется по всем исходящим направлениям $(ik) \in L^u(j)$. Пусть $g_{ik}^u(j)$ — средняя интенсивность нагрузки адреса j, пропущенная ветвью $(ik) \in L_u(j)$. Очевидно, что

$$g_{ik}^u(j) = t_{k,j}^u(j) h_{ik}(j).$$

Эта формула однозначно определяет структуру распределения входной нагрузки $r_i(j)$ по ветвям дерева путей $G_u(j)$.

3. Расчет суммарной пропущенной нагрузки. Обозначим через $g_{ik}(j)$ суммарную нагрузку, пропущенную ветвью (ik). Процесс вычисления этой нагрузки для каждой ветви производится путем последовательного накопления на ней всех пропущенных нагрузок каждого дерева путей, то есть

$$g_{ik}(j) = \sum_u g_{ik}^u(j).$$

Пусть $t_i(k,j)$ — узловая нагрузка адреса j, которая формируется на узле i при распределении входных нагрузок по соответствующим деревьям путей и предназначена для передачи соседнему узлу k. Узловая нагрузка $t_i(k,j)$ рассматривается как совокупность транзитных нагрузок, образованных на узле i от всех деревьев путей, то есть

$$t_i(k,j) = \sum_u t_i^u(k,j). \tag{3}$$

Справедлива следующая теорема, позволяющая формировать узловые нагрузки.

Теорема 1. *Для любого узла i формирование узловой нагрузки производится по формуле*

$$t_i(k,j) = r_i(j) + \sum_l t_l(k,j) h_{li}(j), \quad \forall i,k,j \in V. \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Используя формулы (2) и (3), покажем справедливость формулы (4). На каждом узле i и для каждого направления (ik) образуется узловая нагрузка, равная

$$\begin{aligned} t_i(k,j) = & \sum_u t_i^u(k,j) = t_i^i(k,j) + \sum_{u \neq i} t_i^u(k,j) = r_i(j) + \sum_{u \neq i} t_l^u(i,j) h_{li}(j) = \\ = & \ r_i(j) + t_l(i,j) h_{li}(j). \end{aligned}$$

Следовательно, нагрузка на узле i определяется суммой входной и узловой нагрузок, поступивших в этот узел от соседнего узла l. Тогда для всех входящих в узел i направлений (li) получим следующее выражение

$$t_i(k,j) = \sum_l [r_i(j) + t_l(i,j) h_{li}(j)] = r_i(j) + \sum_l t_l(i,j) h_{li}(j),$$

что и требовалось доказать.

4. Оценка качества обслуживания. Пусть $P_i^u(j)$ — текущая вероятность потерь входной нагрузки $r_i^u(j)$ на всем протяжении дерева путей от узла i до узла j. Величина $Q_i^u(j) = 1 - P_i^u(j)$ представляет собой вероятность обслуживания узловой нагрузки на протяжении всех путей между парой узлов i и j. Имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *При наличии $k \in K_i^u(j)$ исходящих из узла i направлений в дереве путей $G_u(j)$ вероятность обслуживания входной нагрузки $r_i^u(j)$ определяется по формуле*

$$1 - P_i^u(j) = \sum_{k \in K_i(j)} h_{ik}(j)[1 - P_k^u(j)]. \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $A_{ik}^u(j)$ событие того, что входная нагрузка $r_i^u(j)$ будет обслужена временными каналами ветви (ik). Пусть $A_k^u(j)$ — событие того, что пропущенная ветвью $(ik) \in L_u(j)$ входная нагрузка $r_i^u(j)$ будет обслужена всеми ветвями на протяжении поддерева путей от узла k до узла j. Очевидно, что событие $A_k^u(j)$ осуществляется при условии выполнения события $A_{ik}^u(j)$. Тогда вероятность обслуживания входной нагрузки $r_i^u(j)$ от узла $i \in V_u(j)$ до j равна совмещению двух событий: $A_{ik}^u(j)$ и $A_k^u(j)$ — соответственно, прохождения входной нагрузки $r_i^u(j)$ через ветвь $(ik) \in L_u(j)$ и далее от узла k до узла j, т.е.

$$Q_i(k;j) = Q(A_{ik}(j) A_k(j)) = Q(A_{ik}(j)) Q(A_k(j)/A_{ik}(j)). \tag{6}$$

Если учесть, что условная вероятность $Q(A_k(j)/A_{ik}(j)) = Q_k(j) = 1 - P_i^u(j)$ и по определению величины $\varphi_{ik}(j)$ $Q(A_{ik}(j)) = \varphi_{ik}(j)[1 - P_i(j)]$, то выражение (6) принимает вид

$$Q_i(k;j) = 1 - P_i^u(j) = \varphi_{ik}(j)[1 - p_{ik}(j)][1 - P_k(j)] = h_{ik}(j)][1 - P_k(j)].$$

При наличии $k \in K_i(j)$ исходящих из узла i направлений воспользуемся формулой сложения вероятностей

$$1 - P_i^u(j) = \sum_{k \in K_i(j)} h_{ik}(j)[1 - P_k^u(j)].$$

Теорема доказана.

Т е о р е м а 3. *Для всех $(ik) \in L_u(j), i \in V_u(j), k \in K_i^u(j)$, таких, что $P_k^u(j) < P_i^u(j)$, справедливо следующее неравенство*

$$\sum_{k \in K_i^u(j)} h_{ik}(j) < 1.$$

Доказательство. Условие $P_k^u(j) < P_i^u(j)$ можно записать в виде

$$1 - P_k^u(j) = \theta_k^u(j) > 1 - P_i^u(j) = \theta_i^u(j). \tag{7}$$

Среди всех $k \in K_i^u(j)$, образующих исходящие направления $(ik) \in L_u(j)$ в дереве путей $G_u(j)$, выбираем $\min\limits_{k \in K_i^u(j)} \{1 - P_k^u(j)\} = \theta_{\widetilde{k}}^u(j)$. Так как $\theta_{\widetilde{k}}^u(j) > 0$ и $P_k^u(j), P_i^u(j) > 0$, из равенства (5) получим

$$1 - P_i^u(j) = \sum_{k \in K_i^u(j)} h_{ik}(j)[1 - P_k^u(j)] > \theta_{\widetilde{k}}^u(j) \times \sum_{k \in K_i^u(j)} h_{ik}(j),$$

или с учетом (7) окончательно будем иметь

$$\sum_{k \in K_i^u(j)} h_{ik}(j) = \frac{1 - P_k^u(j)}{\theta_{\widetilde{k}}^u(j)} < 1.$$

Теорема доказана.

Нагрузка будет считаться потерянной в узле, если на всех исходящих из него направлений временные каналы заняты обслуживанием других нагрузок. Пусть $\pi_i^u(j)$ — вероятность потерь входной нагрузки $r_i^u(j)$ в узле i. Тогда

$$\pi_i^u(j) = \prod_{k \in K_i^u(j)} p_{ik}(j).$$

Теорема 4. *Для всех ветвей $(ik) \in L_u(j)$ справедлива формула*

$$\sum_{k \in K_i^u(j)} h_{ik}(j) = 1 - \pi_i^u(j). \tag{8}$$

Доказательство. Упорядочим все направления $(ik) \in L_u(j)$. Пусть s — номер выбираемого направления $(ik_s) \in L_u(j), k_s \in K_i^u(j)$. Тогда, полагая в (1) $k = k_s$ и $\widetilde{k} = k_{s-1}$, получим $\varphi_{ik_s}(j) = \varphi_{ik_{s-1}}(j) p_{ik_{s-1}}(j)$. Имеем

$$\begin{aligned} &\sum_{k \in K_i^u(j)} h_{ik}(j) = \sum_{k_s \in K_i^u(j)} h_{ik_s}(j) = \varphi_{ik_1}(j)[1 - p_{ik_1}(j)] + \varphi_{ik_2}(j)[1 - p_{ik_2}(j)] + \\ &+ \cdots + \varphi_{ik_{s-1}}(j)[1 - p_{ik_{s-1}}(j)] + \varphi_{ik_s}(j)[1 - p_{ik_s}(j)] = \varphi_{ik_1}(j) - \varphi_{ik_1}(j) p_{ik_1}(j) + \\ &+ \varphi_{ik_2}(j) - \varphi_{ik_2}(j) p_{ik_2}(j) + \cdots + \varphi_{ik_{s-1}}(j) - \varphi_{ik_{s-1}}(j) p_{ik_{s-1}}(j) = \varphi_{ik_1}(j) - \varphi_{ik_s}(j). \end{aligned} \tag{9}$$

Из (9) с учетом формулы (1) получим

$$\pi_i^u(j) = \prod_{k_s \in K_i^u(j)} p_{ik_s}(j) = \varphi_{ik_s}(j) p_{ik_s}(j).$$

Подставляя последнее выражение в (9), и принимая во внимание, что $\varphi_{ik_1}(j) = 1$, получим равенство (8). Теорема доказана.

С помощью теорем 2 и 4 для заданного множества H на каждом узле дерева путей легко вычисляются все текущие значения вероятностей потерь. Кроме того, с этой целью можно воспользоваться классической формулой Эрланга, математические преобразования которой представлены в работе [4]. Однако более удобно определять долю нагрузки, потерянную в поддереве путей, последовательно суммируя доли нагрузки, потерянные в транзитных узлах этого дерева. Вероятность потерь между парой узлов i и j определяется как отношение нагрузки, потерянной во всех узлах путей, к поступившей [5, с.188]. В этом случае вероятность потерь для дерева путей между парой узлов i и j равна

$$P_i^u(j) = \frac{\sum\limits_{s \in \widetilde{V}_u(j)} r_s^u(j) \pi_s^u(j)}{r_s^u(j)}.$$

где $\widetilde{V}_u(j)$ — подмножество всех узлов поддерева путей между парой узлов i и j.

Цитированная литература

1. **Shioda Shigeo, Vose Hisae** Virtual pach bandwidht control method for ATM networks: Successive modification method. "Denshijoho tsushin gakkai ronbunshi. B2- Trans. Inst. Electron., Inf. and Commun. Eng. B2.", 1991. 74. №12. P. 4081 – 4082.

2. **Боккер П.** Цифровая сеть с интеграцией служб. Понятия, методы, системы. М.: Радио и связь, 1991, 304 с.

3. **Под ред. Глушкова В. М.** Сети ЭВМ. М: Связь, 1977, 280 с.

4. **Айдарханов М. Б., Ашигалиев Д. У., Узбеков Е. М.** // Научный журнал Министерства науки и Высшего Образования "Поиск". 1999, №6. С. 167 – 171.

5. **Лазарев В. Г., Лазарев Ю. В.** Динамическое управление потоками информации в сетях связи. М.: Радио и связь, 1983, с.216.

Поступила в редакцию 15.11.2001г.

Математический журнал. *Алматы. 2001. Том 1. № 2. С. 10 — 14*

УДК 517.938

ОБ ОЦЕНКЕ РОСТА РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Т. М. Алдибеков

АГУ им. Абая
480012, Алматы, Толе би ул., 86

Получен аналог теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению для неограниченных дифференциальных уравнений.

Центральным понятием первого метода Ляпунова является показатель Ляпунова. По теории показателей Ляпунова кроме [1] имеются также книга [2] и обзор [3]. Характеристические показатели линейных систем дифференциальных уравнений находят все более широкое применение в различных областях теории дифференциальных уравнений и ее приложений. Обычно показатели определяются для линейных систем дифференциальных уравнений, удовлетворяющих тому или иному условию ограниченности коэффициентов. Между тем в ряде приложений теории дифференциальных уравнений такие условия не выполняются.

Для линейных систем дифференциальных уравнений с непрерывными и неограниченными коэффициентами показатели могут не иметь конечного значения. Это лишает возможности пользоваться в таких ситуациях результатами теории показателей Ляпунова, так как даже само исходное определение оказывается тогда не совсем пригодным. В работах В. М. Миллионщикова [4–6] благодаря введенным формулам условия ограниченности коэффициентов системы сняты, но показатели Ляпунова принимают значения на расширенной числовой прямой. У нас другой подход. Мы хотим, чтобы каждому решению системы приписывалась определенная числовая характеристика. С этой целью в данной работе вводятся обобщенные показатели Ляпунова, определяются обобщенно правильные системы. Выделяется класс систем, для которых остается справедливым аналог теоремы Ляпунова об устойчивости тривиального решения при возмущениях выше первого порядка. Используя только показатели Ляпунова, нельзя утверждать, что нулевое решение уравнения $x' = -tx + x^4$ экспоненциально устойчиво, но это утверждение легко установить, если используются обобщенные показатели Ляпунова.

Пусть $f(t)$ — в общем случае комплекснозначная функция, определенная в $J = [t_0, +\infty)$, $t_0 \in R$. Q — множество положительных монотонно возрастающих, непрерывно дифференцируемых функций, определенных в J.

Определение 1. *Число или символ $-\infty$ или $+\infty$ определенное формулой*

$$\chi[f,q] = \begin{cases} \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \frac{1}{q(t)} ln|f(t)|, & при \quad f(t) \neq 0, \quad t \in J \\ -\infty, & при \quad f(t) = 0, \quad t \in J \end{cases},$$

Keywords: *Liapunov's exponents, differential equations' system*
2000 Mathematics Subject Classification: 34D08

где $q(t) \in Q$, будем называть верхним обобщенным характеристическим показателем Ляпунова, короче обобщенным показателем $f(t)$ относительно $q(t)$.

Если $q(t) = t$, то получаем обычное определение показателя Ляпунова $f(t)$ в форме Перрона. Мы рассматриваем $q(t) > t$. Отметим, что для любой $f(t) \neq 0,\ t \in I$ всегда найдется функция $q(t) \in Q$ такая, что обобщенный показатель $\chi[f, q]$ принимает конечное значение. Таким образом, мы сравниваем рост функций с более общей шкалой $\exp q(t)$, где $q(t) \in Q$. Аналогично, используя функции $q(t) \in Q$, определяются обобщенные показатели от норм непрерывной вектор функции, непрерывной матрицы, заданных на I.

Легко проверяются общие свойства показателей Ляпунова для обобщенных показателей.

Теорема 1. *Если векторная функция $F(t, x)$ непрерывна в области $G = I \times D$, $D \subset R^n$, $F(t, 0) = 0$ и удовлетворяет условию*

$$|F(t,x)| \leq K\psi(t)|x|, \tag{1}$$

где $\psi(t)$ — непрерывная положительная в I функция, K — положительная постоянная, то все ненулевые решения векторного уравнения $x' = F(t, x)$ имеют конечные обобщенные показатели относительно $q(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau)d\tau$.

Доказательство. Вычисляя производную от $|x|^2 = (x, x)$ и применяя неравенство Буняковского, получаем

$$\left|\frac{d}{dt}(x,x)\right| = |2Re(F(t,x),x)| \leq 2k\psi(t)(x,x). \tag{2}$$

Так как условие (1) обеспечивает единственность нулевого решения, то всякое другое решение $x(t)$ не обращается в нуль ни при каком $t \in I$. Разделив обе части неравенства (2) на квадрат его нормы, получим $-K\psi(t) \leq \frac{d}{dt} ln|x| \leq K\psi(t)$. Откуда $-K \leq \lambda[x, q] \leq K$, где $q(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau)d\tau$. Теорема доказана.

В частности, теорема справедлива для линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x \tag{3}$$

с непрерывной матрицей $A(t)$, удовлетворяющей условию

$$||A(t)|| \leq K\psi(t). \tag{4}$$

Теорема 2. *Линейная однородная система (3) с непрерывной матрицей, удовлетворяющей оценке (4), имеет не более $n \in N$ различных обобщенных показателей относительно $q(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau)d\tau$.*

Доказательство следует из свойств обобщенных показателей и того факта, что система (3) имеет всего n линейно независимых решений.

Легко доказывается

Теорема 3. *Если все обобщенные показатели относительно $q(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau)d\tau$ отрицательные, то линейная однородная система (3) асимптотически устойчива.*

Определение 2. *Действительная линейная однородная система называется обобщенно правильной по Ляпунову относительно $q(t) \in Q$, если имеется ее фундаментальная система решений $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$, для которой выполнено числовое равенство*

$$\sum_{i=1}^{n} \chi[x^{(i)}, q] = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{q(t)} \int_{t_0}^{t} SpA(\tau) d\tau.$$

Имеет место

Лемма 1. *Пусть линейная однородная система (3) обобщенно правильна по Ляпунову относительно $q(t) \in Q$. Тогда преобразование $x = ye^{-\alpha[q(t)-q(t_0)]}$, где α — фиксированная положительная постоянная, не нарушает обобщенную правильность, т.е. линейная однородная система*

$$y' = B(t)y, \tag{5}$$

полученная после преобразования из (3), является обобщенно правильной системой по Ляпунову относительно $q(t)$.

Доказательство. Учитывая обобщенную правильность системы (3) и равенство $B(t) = A(t) + \alpha q'(t)E$, имеем

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{q(t)} \int_{t_0}^{t} SpB(\tau) d\tau = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{q(t)} \int_{t_0}^{t} [SpA(\tau) + n\alpha q'(\tau)] d\tau =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{q(t)} \int_{t_0}^{t} SpA(\tau) d\tau + n\alpha = \sum_{i=1}^{n} [\chi[x^{(i)}, q] + \alpha] = \sum_{i=1}^{n} \chi[y^{(i)}, q].$$

Следовательно, система (5) — обобщенно правильная по Ляпунову относительно $q(t)$. Лемма доказана.

Легко проверяется

Лемма 2. *Если линейная однородная система (3) — обобщенно правильная относительно $q(t) \in Q$ и все обобщенные показатели относительно $q(t) \in Q$ отрицательные, то существует такая постоянная $C > 0$, что для матрицы Коши $K(t, \tau)$ этой системы в области $t_0 \le \tau \le t$ имеет место оценка $||K(t, \tau)|| \le Ce^{\varepsilon q(\tau)}$.*

Теорема 4. *Пусть система*

$$x' = A(t)x + f(t, x) \tag{6}$$

удовлетворяет следующим условиям:
1) соответствующая линейная однородная система (3) с непрерывной матрицей — обобщенно правильная по Ляпунову относительно $q(t) \in Q$;
2) все обобщенные показатели Ляпунова относительно $q(t) \in Q$ линейной однородной системы (3) отрицательные, функция $f(t, x)$ непрерывна по t в I и непрерывно дифференцируема по x в области $||x|| < h$;
3) функция $f(t, x)$ удовлетворяет неравенству $||f(t, x)|| \le \phi(t)||x||^m$, где $m > 1$ и $\phi(t)$ — непрерывная положительная функция на I с нулевым обобщенным показателем Ляпунова относительно $q(t) \in Q$.
Тогда нулевое решение нелинейной системы (6) экспоненциально устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Пусть $\lambda_1(q)$ — наибольший обобщенный показатель линейной однородной системы (3). Возьмем число α такое, что $0 < \alpha < |\lambda_1(q)|$ и выполним преобразование: $x = ye^{-\alpha[q(t)-q(t_0)]}$. Тогда из линейной системы (6) получим

$$y' = B(t)y + g(t,y), \tag{7}$$

где $B(t) = A(t) + \alpha q'(t)E$, $g(t,y) = e^{\alpha[q(t)-q(t_0)]} \cdot f(t, ye^{-\alpha[q(t)-q(t_0)]})$. Здесь функция $g(t,y)$ непрерывна по t в области I и непрерывно дифференцируема по y в области $||y|| < he^{\alpha[q(t)-q(t_0)]}$. По лемме 1 линейная однородная система (5), соответствующая нелинейной системе (7), — обобщенно правильная по Ляпунову относительно $q(t) \in Q$.

Нелинейное дифференциальное векторное уравнение (7) с начальным условием $y(t_0) = x(t_0) = x_0$ эквивалентно интегральному уравнению

$$y(t) = H(t)y(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} K(t,\tau)g(\tau, y(\tau))d\tau, \tag{8}$$

где $K(t,\tau) = H(t)H^{-1}(\tau)$ — матрица Коши, $H(t)$ — нормированная фундаментальная матрица линейно однородной системы (5). В силу выбора α все обобщенные показатели системы (5) отрицательные, поэтому существует $c_1 > 1$, что $||H(t)|| < c_1$ в I. Из леммы 2 следует, что в области $t_0 \le \tau \le t < +\infty$ для матрицы Коши имеет место оценка

$$||K(t,\tau) < c_2 e^{\varepsilon[q(\tau)-q(t_0)]},$$

где c_2 — положительная постоянная. Далее, имеет место неравенство

$$||g(t,y)|| \le c_3 e^{[\varepsilon-(m-1)\alpha][q(t)-q(t_0)]}||y||^m,$$

где $c_3 > 0$ — некоторая постоянная.

Оценивая по норме в полуинтервале $t_0 \le t < t_0 + e$ существование решений интегрального уравнения (8) будем иметь

$$||y(t)|| \le c_1||y(t_0)|| + \int\limits_{t_0}^{t} c_2c_3 e^{[2\varepsilon-(m-1)\alpha][q(\tau)-q(t_0)]}||y||^m d\tau. \tag{9}$$

Если $\delta = (m-1)\alpha - 2\varepsilon > 0$ и

$$(m-1)c_1^{m-1}||y(t_0)||^{m-1} \int\limits_{t_0}^{t} c_2c_3 e^{-\delta[q(\tau)-q(t_0)]}d\tau < 1, \tag{10}$$

то, используя лемму Бихари, находим

$$||y(t)|| \le \frac{c_1||y(t_0)||}{[1-(m-1)c_1^{m-1}||y(t_0)||^{m-1}\int\limits_{t_0}^{t} c_2c_3e^{-\delta[q(\tau)-q(t_0)]}d\tau]^{\frac{1}{m-1}}} \,. \tag{11}$$

Так как

$$\int\limits_{t_0}^{t} e^{-\delta[q(\tau)-q(t_0)]}d\tau < \frac{1}{\delta}e^{\delta[q(\tau)-q(t_0)]} \,,$$

то неравенство (10) всегда имеет место за счет выбора $x(t_0) = y(t_0)$. Из (11) также следует, что решение $y(t)$ определено в I и

$$||y|| \le N||y(t_0)|| < h/2, \qquad N = N(t_0) > 0.$$

Возвращаясь к переменной x, при $t_0 \le t < \infty$ и $||x(t_0)|| < \Delta < h$ имеем

$$||x(t)|| \le N||x(t_0)||e^{-\delta[q(t)-q(t_0)]}, \tag{12}$$

где $\Delta > 0$ достаточна мала.

Таким образом, нулевое решение $x = 0$ нелинейной системы (6) экспоненциально устойчиво по Ляпунову при $t \to +\infty$. Теорема доказана.

Заметим, что при $q(t) = t$ теорема 4 превращается в известную теорему Ляпунова по первому приближению. Для исследования процессов, происходящих быстрее, чем обычная экспоненциальная функция $e^{\lambda t}$, целесообразно использовать обобщенные показатели.

Цитированная литература

1. **Ляпунов А. М.** Собрание сочинений. М.-Л. 1956. Т.2. 472 с.
2. **Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.** Теория показателей Ляпунова и ее приложение к вопросам устойчивости. М. 1966. 576 с.
3. **Изобов Н. А.** Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. – В кн.: Итоги науки и техники (Мат. анализ). М. 1974. Т.12. С. 71 – 146.
4. **Миллионщиков В. М.** // Мат. заметки. 1985. Т. 38, вып. 1. С. 92 – 109.
5. **Миллионщиков В. М.** // Мат. заметки. 1986. Т. 39, вып. 1. С. 29 – 51.
6. **Миллионщиков В. М.** // Известия АН КазССР. Серия физ.-мат. 1986. №1. С. 36 – 40.

Поступила в редакцию 15.11.2001г.

Математический журнал. *Алматы. 2001. Том 1. № 2. С. 15 — 24*

УДК 538.3+538.56

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И ИХ ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

Л. А. Алексеева

Институт математики МОН РК
480100, Алматы, Пушкина ул., 125, alexeeva@math.kz

Построено дифференциальное уравнение для трехмерного комплексного A-поля, эквивалентное системе уравнений Максвелла для электромагнитных полей. С использованием теории обобщенных функций рассмотрены сильные ударные ЭМ волны, получены условия на фронтах для скачков напряженностей A, E, H и обобщенные законы сохранения. Построено обобщенное решение задачи Коши для модифицированных уравнений. Доказана единственность классического решения, в том числе и при наличии ударных волн. Показано, что ударные волны являются поперечными.

Система уравнений Максвелла для описания электромагнитных полей обладает симметрией относительно векторов напряженностей электрического и магнитного полей (E, H). Этот факт хорошо известен в электродинамике и используется при построении ее решений. Решение задачи определения электромагнитного поля при действии электрических источников в среде часто можно использовать для построения решения аналогичной задачи при действии соответствующих магнитных источников простой заменой $E \rightleftarrows H$ и констант электрической и магнитной проницаемости $(-\varepsilon \leftrightharpoons \mu)$. Симметрию этих уравнений нарушает только условие отсутствия магнитных зарядов и, соответственно, магнитных токов.

Здесь мы эти условия снимаем и строим одно комплексное дифференциальное уравнение для комплексного трехмерного векторного A-поля, эквивалентное системе уравнений Максвелла. Для исследования этого уравнения, которое называем модифицированным (точнее, комплексифицированным) уравнением Максвелла, здесь используются методы теории обобщенных функций, а именно подход для решения нестационарных краевых задач электродинамики, разработанный в [1]. Он позволяет сравнительно просто строить и исследовать разрывные решения уравнений со скачком не только производных, но и самих искомых функций. Последнее имеет важное значение для изучения нестационарных волновых процессов типа ударных волн.

1. Классические уравнения Максвелла. Система уравнений Максвелла для однородной изотропной среды имеет следующий вид [2]:

$$-\varepsilon\,\partial_t E + \operatorname{rot} H = j^E, \quad \mu\,\partial_t H + \operatorname{rot} E = j^H. \tag{1}$$

Keywords: *complex form of Maxwell equation, generalized solution, Green tensor, shock electromagnetic waves, conditions at wave front*
2000 Mathematics Subject Classification: 35Q60

Здесь электрические и магнитные проницаемости $\varepsilon,\ \mu$ — положительные константы, E, H — напряженности электрического и магнитного полей, $j^E(x,t), j^H(x,t)$ — плотности электрических и магнитных токов, $x = (\,x_1,\, x_2,\, x_3),\ t \geq 0$.

Согласно полной системе уравнений Максвелла

$$\varepsilon \operatorname{div} E = \rho^E, \quad -\mu \operatorname{div} H = \rho^H, \quad \rho^H = 0, \quad j^H = 0, \tag{2}$$

ρ^E, ρ^H — объемные плотности электрических и магнитных зарядов. Далее последние два условия отсутствия магнитных зарядов и токов снимаем.

Взяв дивергенцию в (1), получим в дифференциальной форме

закон сохранения зарядов:

$$\partial_t \rho^E + \operatorname{div} j^E = 0, \quad \partial_t \rho^H + \operatorname{div} j^H = 0. \tag{3}$$

Если уравнения (1) скалярно умножить на E и H соответственно и вычесть, получим в дифференциальной форме

закон сохранения энергии:

$$\partial_t W + \operatorname{div} P = (j^H, H) - (j^E, E). \tag{4}$$

Здесь $P = E \times H$ — вектор Пойнтинга, $W = 0,5\left(\varepsilon\,\|E\|^2 + \mu\,\|H\|^2\right)$ — плотность энергии.

При заданных токах уравнения (1) достаточны для определения ЭМ поля (E, H). В этом случае равенства (2) служат для определения заряда, а законы сохранения выполняются тождественно.

2. Модификация уравнений Максвелла. Удобно ввести комплексный вектор напряженности:

$$A = \sqrt{\varepsilon}\, E + i\,\sqrt{\mu}\, H. \tag{5}$$

Тогда систему (1) можно записать в виде одного векторного уравнения:

$$-c^{-1}\partial_t A + i \operatorname{rot} A = j, \quad c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}, \tag{6}$$

где c — скорость ЭМ волн, а комплексные токи определяются выражением

$$j = \sqrt{\mu}\, j^E - i\,\sqrt{\varepsilon}\, j^H.$$

Будем называть это уравнение комплексифицированным уравнением Максвелла.

Определение 1. *Назовем комплексным зарядом величину*

$$\rho = c^{-1} div\, A = \sqrt{\mu}\,\rho^E - i\,\sqrt{\varepsilon}\,\rho^H. \tag{7}$$

Если взять дивергенцию (6), то получим для комплексного заряда тот же

закон сохранения заряда:

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} j = 0. \tag{8}$$

Заметим, что энергия ЭМ поля при такой записи определяется через модуль комплексного вектора поля:

$$W = 0,5\,\|A\|^2 = 0,5(A, A^*), \tag{9}$$

а вектор Пойнтинга есть

$$P = -\frac{ic}{2} A \times A^*. \tag{10}$$

Здесь A^* — комплексно-сопряженное A. Последнее следует из равенства:

$$A \times A^* = (\sqrt{\varepsilon}\, E + i\,\sqrt{\mu}\, H) \times (\sqrt{\varepsilon}\, E - i\,\sqrt{\mu}\, H) = 2\,\sqrt{\varepsilon\mu}\, i\, E \times H. \tag{11}$$

Умножим скалярно (6) на комплексно-сопряженное A^*, сложим это равенство с комплексно-сопряженным. В результате получим

закон сохранения энергии:

$$\partial_t W + \operatorname{div} P = -\operatorname{Re}(j, A^*). \tag{12}$$

Таким образом, вместо обычной системы уравнений Максвелла имеем ее комплексную форму в виде одного векторного уравнения, которую гораздо удобнее исследовать, т.к. она содержит в два раза меньше уравнений, зависит только от одной постоянной c — скорости света и полностью определяет ЭМ поле, токи и заряды. При этом законы сохранения заряда и энергии имеют свою обычную формулировку.

3. Ударные волны. Обозначим $L(\partial_x, \partial_t)$ — матричный дифференциальный оператор уравнений (6), компоненты которого имеют вид:

$$L_{kj}(\partial_x,\, \partial_t) \;=\; -\,c^{-1}\,\delta_{kj}\,\partial_t \;+\; i\,e_{klj}\,\partial_l, \quad l, j, k = 1, 2, 3,$$

где δ_{kj} — символ Кронекера, e_{jlk} — единичный кососимметричный псевдотензор Леви-Чивита. Здесь и всюду по повторяющимся индексам суммирование от 1 до 3 (тензорная свертка).

Легко видеть, что характеристическое уравнение (6): $\det\{L_{kj}(\nu, \nu_t)\} = 0$ в пространстве $R^4 = \{\mathbf{x} = (x, x_4 = ct)\}$ приводится к виду:

$$\nu_4(\nu_4^2 - \nu_1^2 - \nu_2^2 - \nu_3^2) = 0. \tag{13}$$

В частности, оно справедливо при $\nu_4 = 0$, что соответствует поверхности вида $F(x) = \mathrm{const}$, которая не зависит от времени. В окрестности таких поверхностей задача Коши, согласно теореме С. Ковалевской [3], неразрешима. Т.е., зная поле на какой-то неподвижной поверхности, невозможно восстановить его в ее окрестности. Это также говорит о том, что в статической постановке эти три уравнения не являются независимыми и недостаточны для решения краевых задач.

Характеристическое уравнение системы (1) имеет аналогичный вид [1]:

$$\big(\nu_4(\nu_4^2 - \nu_1^2 - \nu_2^2 - \nu_3^2)\big)^2 = 0.$$

Эти уравнения содержат также конус характеристических нормалей — классический световой конус: $\nu_4^2 = \|\nu\|^2, \quad \|\nu\| = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2}$. Как известно, на характеристических поверхностях решения и их производные могут терпеть скачки. Обозначим через F такую поверхность, $(\nu, \nu_4) = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$ — нормаль к ней в R^4. В пространстве координат R^3 ей соответствует волновой фронт F_t, движущийся со скоростью c, $n = (n_1, n_2, n_3)$ — единичный вектор нормали к фронту волны, направленный в сторону ее движения. Легко показать, что

$$\nu_4 = -\,\|\nu\|\,, \quad n_i = \nu_i / \,\|\nu\|\,, \quad i = 1, 2, 3. \tag{14}$$

Далее для вывода условий на фронтах используем методы теории обобщенных функций. Введем пространство обобщенных вектор-функций $D_3'(R^4) = \left\{\hat{f}(\mathbf{x}) = (\hat{f}_1, \hat{f}_2.\hat{f}_3)\right\}$ — непрерывных линейных функционалов, определенных на пространстве бесконечно дифференцируемых финитных функций $D_3(R^4) = \{\varphi(\mathbf{x}) = (\varphi_1, \ldots, \varphi_3)\}$, $\hat{f}_k \in D'(R^4)$, $\varphi_k \in D(R^4)$: $(\hat{f}, \varphi) = \sum\limits_{k=1}^{3} (f_k,\, \varphi_k)$.

Если A — решение (6) с конечным разрывом на F, то в $D_3'(R^4)$, согласно правилам дифференцирования обобщенных функций [3]

$$\partial_j \hat{A} = A_{,j} + [A]_F \nu_j \, \delta_F(\mathbf{x}), \quad j = 1, \ldots, 4. \tag{15}$$

Здесь первое слагаемое справа — классическая производная по x_j, $\|\nu\| = 1$, δ_F — простой слой на F, плотность которого определяется через скачок: $[A]_F = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \left(A(\mathbf{x} + \varepsilon\nu) - A(\mathbf{x} - \varepsilon\nu) \right).$

В силу непрерывности вне фронта волны и поскольку поверхность $t = \text{const}$ не является характеристической

$$[A]_F = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(A(x + \varepsilon\, n, t) - A(x - \varepsilon\, n, t) \right) = A^+(x,t) - A^-(x,t) = [A]_{F_t}.$$

Операция дифференцирования обобщенных функций позволяет ввести точное определение понятия поверхностных зарядов.

Определение 2. *Обобщенным зарядом A-поля будем называть* $\hat{\rho} = c^{-1} \operatorname{div} \hat{A}$.

Если на поверхности $S \in R^3$ поле терпит скачок, то $\hat{\rho} = c^{-1} \operatorname{div} A + c^{-1}(n, [A]_S)\delta_S(x)$, где n — единичная нормаль к S. Первое слагаемое описывает плотность обычных объемных зарядов, а второе — поверхностных.

Определение 3. *Назовем поверхностной дивергенцией вектора A простой слой*

$$\operatorname{div}_S A = (n,\, [A]_S)\, \delta_S(x).$$

Предполагается, что нормаль n существует почти всюду на S, а скачок A принадлежит классу суммируемых на S функций: $[A]_S \in L_1(S)$.

Определение 4. *Поверхностным зарядом A-поля будем называть выражение вида*

$$\hat{\rho}_S = c^{-1}(n, [A]_S)\delta_S(x) = c^{-1} \operatorname{div}_S A.$$

Заметим, что формула для поверхностного заряда подобна формуле заряда (7).

Определение 5. *Назовем решение уравнений (6) обобщенным, если*

$$(L(\partial_x, \partial_t)\hat{u}, \varphi) \equiv (L_{ik}\hat{u}_k, \varphi_i) = -(\hat{u}_k, L_{ik}\varphi_i) = (j_k, \varphi_k), \quad \forall \varphi \in D_3(R^4).$$

Если A — классическое решение уравнения (6), разрывное на F, то рассматриваемое как обобщенное, оно удовлетворяет следующей системе:

$$L_{kj}\,(\partial_x, \partial_t) A_j + G_{kj}[A_j]_F \;\delta_F = j_k, \quad G_{kj} = -\delta_{kj}\nu_4 + i e_{kmj}\nu_m. \tag{16}$$

Из (16) следует

Теорема 1. *Для того, чтобы A было обобщенным решением (6), необходимо выполнение условия:*

$$G_{kj}[A_j]_F = 0, \quad k = 1, 2, 3. \tag{17}$$

Т.е. обобщенное решение может быть разрывным на фронтах. Такие решения описывают ударные ЭМ волны.

С учетом введенных обозначений равенство (17) на подвижных волновых фронтах в R^3 приобретает вид, который представим в следующей теореме.

Т е о р е м а 2. *Решение уравнения (6), непрерывное и дифференцируемое всюду, за исключением волновых фронтов, на которых выполняются условия (14), является его обобщенным решением, если*

$$[A]_{F_t} = -i\,[A]_{F_t} \times m, \tag{18}$$

или для векторов электрической и магнитной напряженностей

$$\varepsilon^{1/2}\,[E]_{F_t} = \mu^{1/2}\,[H]_{F_t} \times m, \quad \mu^{1/2}\,[H]_{F_t} = \varepsilon^{1/2} m \times [E]_{F_t}. \tag{19}$$

(Здесь и выше знак "$\times$" обозначает векторное произведение. Далее скалярное и векторное произведения a и b обозначаются, соответственно, $(a,b) = a_j b_j$, $[a,b] : [a,b]_l = e_{ljk} a_j b_k$.)

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из теоремы 1 следует: $\nu_4\,[A_k]_F = ie_{kmj}\nu_m\,[A_j]_F$. Отсюда, с учетом (14), получим: $[A_k]_F = -ie_{kmj}n_m\,[A_j]_F$, что соответствует векторной записи формул теоремы.

Из этой теоремы легко выводится ряд полезных следствий.

С л е д с т в и е 1. *На фронтах ударных ЭМ волн*

$$([A]_{F_t}, n) = 0 \quad \Rightarrow \quad ([E]_{F_t}, n) = 0, \quad ([H]_{F_t}, n) = 0. \tag{20}$$

Т.е. на фронтах ударных волн отсутствуют поверхностные заряды.

С л е д с т в и е 2. *Если перед фронтом волны ЭМ поля отсутствуют* ($E^+ = 0$, $H^+ = 0$), *то на фронте тройка векторов* E, H, m *— взаимно ортогональна.*

Т.е. векторы E, H лежат в касательной плоскости к фронту волны, а вектор Пойнтинга P параллелен волновому вектору. Следовательно, ударные ЭМ волны являются поперечными.

С л е д с т в и е 3. $[E]_{F_t} = 0 \rightleftarrows [H]_{F_t} = 0$.

Т.е., если электрическое поле непрерывно, то и магнитное — непрерывно и, наоборот.

Рассмотрим скачок энергии поля на фронте волны.

Т е о р е м а 3. *На фронте ударной волны*

$$[W(x,t)]_{F_t} = c^{-1}(m, [P]_{F_t}). \tag{21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Умножим (18) скалярно на комплексно-сопряженное

$$[A_l]_{F_t} A_l^{*-} = -ie_{ljk}\,[A_k]_{F_t} A_l^{*-} m_j.$$

Аналогично, соответствующее комплексно сопряженное выражение умножим на A_l^+:

$$[A_l^*]_{F_t} A_l^+ = ie_{ljk}\,[A_k^*]_{F_t} A_l^+ m_j.$$

Складывая эти два выражения, с учетом тождества $[ab] = a^+b^+ - a^-b^- = a^+[b] + b^-[a]$, получим формулу теоремы.

Из этой теоремы следует, что закон сохранения энергии (12) верен и в $D_3'(R_4)$. Действительно, с учетом (14) и (21), имеем:

$$\partial_t \hat{W} + \operatorname{div} \hat{P} = \partial_t W + \operatorname{div} P + (c\nu_4 [W]_F + [(\nu, P)]_F) = -\mathrm{Re}(\hat{j}, \hat{A}^*).$$

В силу (12) скачок должен равняться нулю.

Пусть поле A непрерывно по времени и терпит разрыв на неподвижной поверхности $S \in R^3$ (такие поля возникают при дифракции волн на поверхностях с краем). В этом случае оно удовлетворяет уравнению:

$$-c^{-1}\partial_t \hat{A} + i\operatorname{rot} \hat{A} = \hat{j} + in \times [A]_S \delta_S(x). \tag{22}$$

Это уравнение позволяет естественным образом ввести понятие поверхностных токов.

Определение 6. *Поверхностным током называется простой слой вида*

$$j_S = i\, n \times [A]_S \delta_S(x).$$

Определение 7. *Поверхностным ротором вектора A на S называется простой слой вида: $rot_S A = n \times [A]_S \delta_S(x)$.*

Таким образом, поверхностные токи определяются через поверхностный ротор, а поверхностные заряды – через поверхностную дивергенцию. При наличии таких поверхностей из (22) следует

обобщенный закон сохранения заряда:

$$\partial_t \hat{\rho} + \mathrm{div} \hat{j} + i \, \mathrm{div}\, (n \times [A]_S \delta_S(x)) = 0. \tag{23}$$

В силу (7) для объемных зарядов отсюда следует

Теорема 4. (Закон сохранения поверхностных зарядов)

$$c^{-1}\partial_t (n, [A]_S) \delta_S(x) + (n, [j]_S)\, \delta_S(x) + i \, \mathrm{div}\ (n \times [A]_S \delta_S(x)) = 0. \tag{24}$$

Закон записывается проще, если использовать введенные определения:

$$\partial_t \hat{\rho}_S + \mathrm{div}_S \hat{j} + i \, \mathrm{div}\, \mathrm{rot}_S A = 0. \tag{25}$$

Заметим, что в отличие от обычного ротора, дивергенция поверхностного ротора не равна нулю. Это сингулярная обобщенная функция "типа двойного слоя".

Далее, для построения решений краевых задач будем рассматривать уравнение (6) и законы сохранения в пространстве обобщенных функций. Соответствующие решения будем называть *обобщенными.*

4. Тензор Грина. При построении решений модифицированного уравнения (6) удобно пользоваться фундаментальным решением этого уравнения — тензором Грина.

Определение 8. *Назовем $U_k^l(x,t)$ тензором Грина уравнения (6), если он является его обобщенным решением, соответствующим $j_k = \delta_k^l \delta(x,t)$ (где $\delta(x,t)$ — δ-функция, δ_k^l — символ Кронекера), и удовлетворяет условию излучения :*

$$U_j^k = 0, \quad \|x\| > ct > 0; \quad t < 0. \tag{26}$$

Для его построения воспользуемся преобразованием Фурье обобщенных функций [3], которое будем помечать черточкой: $\bar{f}(\xi, \omega) = F[f(x,t)]$.

Уравнение (6) для функции Грина в пространстве преобразований Фурье преобразуется в матричное алгебраическое уравнение вида

$$L_{mj}(-i\xi, -i\omega) \bar{U}_j^k = (i\, \omega\, c^{-1}\, \delta_{mj} \ + \ e_{mlj}\, \xi_l)\, \bar{U}_j^k \ = \ \delta_m^j, \quad m, l, j, k = 1, 2, 3. \tag{27}$$

Здесь (ξ, ω) — переменные Фурье, соответствующие (x, t). Выпишем матрицу этой системы и ее символ:

$$\mathbf{M}(-i\xi, -i\omega) = \left\{ \begin{array}{ccc} i\omega c^{-1} & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & i\omega c^{-1} & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & i\omega c^{-1} \end{array} \right\}, \quad \det \mathbf{M} \ = \ \frac{i\, \omega}{c} \left(\|\xi\|^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right).$$

Разрешая (27), найдем трансформанту Фурье функции Грина:

$$\bar{U}_j^k = -\frac{c\, Q_{jk}(-i\xi, -i\, \omega)}{i\omega \left((\omega/c)^2 - \|\xi\|^2 \right)}, \tag{28}$$

где

$$\mathbf{Q} = \{Q_{jk}\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \xi_1^2 - (w/c)^2 & i\omega\xi_3/c + \xi_1\xi_2 & -i\omega\xi_2/c + \xi_1\xi_3 \\ -i\omega\xi_3/c + \xi_1\xi_2 & \xi_2^2 - (w/c)^2 & i\omega\xi_1/c + \xi_2\xi_3 \\ i\omega\xi_2/c + \xi_1\xi_3 & -i\omega\xi_1/c + \xi_2\xi_3 & \xi_3^2 - (w/c)^2, \end{array} \right\}$$

или

$$Q_{km}(-i\xi, -i\omega) = \left\{ (-i\omega/c)^2 \,\delta_{km} - (-i\xi_k)\,(-i\xi_m) - ic^{-1}(-i\omega)(-i\xi_j)e_{kmj} \right\}.$$

Введем функцию $\bar{\psi}(\xi,\omega) = \left((\omega/c)^2 - \|\xi\|^2\right)^{-1}$ — преобразование Фурье функции Грина волнового уравнения:

$$\Delta\psi - c^{-2}\psi_{,tt} = \delta(x,t)$$

($\triangle$ — оператор Лапласа), которая имеет вид:

$$\psi = -(4\pi R)^{-1}\delta(t - R/c), \quad R = \|x\|\,. \tag{29}$$

Будем называть ψ волновой функцией. Это простой слой на световом конусе — расширяющейся сфере радиуса $R = ct$ ($R = \|x\|$), определяющий линейный функционал вида [2]:

$$(\psi, \varphi) = (4\pi)^{-1} \int\limits_{R^3} \|x\|^{-1} \varphi(x, \|x\|/c) dV(x), \forall\varphi \in D(R^4).$$

Носителем этой функции является поверхность этого конуса.

В статье [1] приведены ряд формул сверток с ψ, которые далее будем использовать для интегральной записи сверток.

Заметим, что знаменатель в представлении (27) с учетом носителя функций является трансформантой Фурье по времени первообразной по t волновой функции:

$$\chi = \psi \underset{t}{*} \theta(t) = -(4\pi R)^{-1}\theta(t - R), \quad \partial_t\chi = \psi. \tag{30}$$

Здесь $\theta(t)$ — функция Хевисайда; переменная под звездочкой ($*$) — знаком свертки — означает неполную свертку только по этому аргументу. Носителем χ является внутренность светового конуса $R = ct$, $R = \|x\|$.

Пользуясь свойствами преобразования Фурье свертки и производных, из (27) получим искомую функцию Грина:

$$U_j^k(x,t) = c\, Q_{jk}(\partial_x, \partial_t)\chi(R,t), \tag{31}$$

Легко видеть, что условия излучения выполняются в силу свойств волновой функции и ее первообразной. С учетом (28) результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 5. *Функция Грина модифицированных уравнений Максвелла (6) представима в виде:*

$$U_j^k(x,t) = c^{-1}\delta_{jk}\partial_t\psi(R,t) - \partial_j\partial_k\chi(R,t) - ie_{jkl}\partial_l\psi.$$

Из свойств функции Грина следует

Теорема 6. *Если токи $\hat{j}(x,t) \in D'_+(R^4)$ и $\underset{x}{\operatorname{supp}}\,\hat{j}$ ограничен, то обобщенное решение уравнений (6), соответствующее излучаемым и затухающим на бесконечности волнам, представимо в виде полной свертки*

$$\hat{A}_m = c\,\chi(R,t) * Q_{mk}(\partial_x, \partial_t)\hat{j}_k,$$

или

$$\hat{A} = c^{-1}\partial_t\hat{j} * \psi + i\operatorname{rot}\hat{j} * \psi + c\operatorname{grad}\,(\hat{\rho} * \psi)\,.$$

Доказательство. Рассмотрим свертку $\hat{A}_m = U_m^k * \hat{j}_k$. Легко показать, используя свойство дифференцирования свертки, что это — обобщенное решение уравнений (6)

$$L_{lm}(\partial_x, \partial_t)\hat{A}_m = L_{lm}\left\{U_m^k * \hat{j}_k\right\} = \left\{L_{lm}U_m^k\right\} * \hat{j}_k = \delta_l^k \delta(x,t) * \hat{j}_k = \hat{j}_l.$$

Далее, пользуясь (31), имеем: $\hat{A}_m = c\,Q_{mk}(\partial_x, \partial_t)\chi(R,t) * \hat{j}_k = c\chi(R,t) * Q_{mk}(\partial_x, \partial_t)\hat{j}_k$, либо, исходя из теоремы 5, $\hat{A} = c^{-1}\partial_t \hat{j} * \psi + i\mathrm{rot}\,\hat{j} * \psi + c\,\mathrm{grad}\,(\hat{\rho} * \psi)$. Отсюда, с учетом закона сохранения заряда (7), получим вторую формулу теоремы. Все свертки существуют в силу полуограниченности носителя по времени и ограниченности носителя волновой функции по x.

Излучение и затухание волн на бесконечности следует из условий излучения для волновой функции и из свойства убывания плотности потенциала простого слоя на конусе как $1/R$.

Замечание. В зависимости от свойства дифференцируемости компонент свертки знак дифференцирования в формулах теоремы можно перебрасывать на токи и заряды.

5. Постановка задачи Коши, единственность решений. Рассматривается A- поле, порождаемое нестационарным током с плотностью из класса интегрируемых функций с компактным носителем в R^3: $\underset{x}{\mathrm{supp}}\, j = \{(x,t) : \|x\| < \mathrm{const},\, t > 0\}$ ограничен для любого t.

Начальные условия известны:

$$A(x,0) = A^0(x), \quad A^0 = 0, \quad \|x\| > \mathrm{const}. \tag{32}$$

Должны удовлетворяться условия излучения:

$$A(x,t) = 0, \quad \|x\| > \mathrm{const} + ct, \quad \forall t \geq 0. \tag{33}$$

Определение 9. *Назовем решение задачи Коши классическим, если оно удовлетворяет условиям (32) и (33), непрерывно и дифференцируемо почти всюду кроме, быть может, конечного числа волновых фронтов, на которых удовлетворяет условиям на скачки (18), а в области гладкости — уравнениям (6).*

Запишем интегральную форму закона сохранения энергии для решений задачи Коши, в том числе для ударных волн. Пусть S^- — произвольное открытое множество в R^3, ограниченное гладкой замкнутой поверхностью S, n — единичный вектор нормали к S.

Теорема 7. (Закон сохранения энергии) *Если $A(x,t)$ — классическое решение задачи Коши, то*

$$\int_{s^-} (W(x,t) - W(x,0))\,dV(x) + \int_0^t dt \int_s (n,P)\,dS(x) = -\mathrm{Re}\int_0^t dt \int_{s^-} (j, A^*)\,dV(x),$$

$$\int_{R^3} (W(x,t) - W(x,0))\,dV(x) = -\mathrm{Re}\int_0^t dt \int_{R^3} (j, A^*)\,dV(x),$$

где $dV(x) = dx_1 dx_2 dx_3$.

Доказательство. Проинтегрируем (12) в R^4 по области $D_t^- = S^- \times (0,t)$ и, пользуясь формулой Остроградского-Гаусса с учетом возможных разрывов решений на фронтах, получим:

$$\int_{S^-} (W(x,t) - W(x,0))\,dV(x) + \int_0^t dt \int_S (n,P)\,dS(x) + \int_F (\nu_j[P_j] + \nu_4[W(x,t)])\,dF =$$

$$= -\mathrm{Re}\int\limits_0^t dt \int\limits_{S^-} (j, A^*)\, dV(x), \tag{34}$$

где dF — дифференциал площади характеристической поверхности F, в квадратных скобках стоят скачки соответствующих выражений на F.

Скачок на волновых фронтах подынтегрального выражения в третьем интеграле, в силу условия на фронтах (21), равен нулю. В результате получаем первую формулу теоремы. Вторая формула следует из (34) с учетом условия на бесконечности (33).

Ясно, что условия ограниченности на токи можно ослабить. Достаточно, чтобы интегралы, их содержащие, существовали.

Следствием теоремы 2 в силу положительной определенности W является

Теорема 8. *Классическое решение задачи Коши единственно.*

Доказательство. Докажем от противного. Пусть есть два решения. Тогда интеграл энергии для их разности A имеет вид:

$$\int\limits_{R^3} W(x,t)\, dV(x) = 0.$$

В силу положительной определенности W получим: $A = 0$. Следовательно, эти решения совпадают.

6. Постановка задачи Коши в $D'_3(R^4)$ и ее решение. Рассмотрим уравнения (6) на $D'_3(R^4)$. Решения из этого пространства будем называть обобщенными. Сформулируем в нем исходную краевую задачу.

Пусть A — классическое решение краевой задачи. Доопределим его на всем пространстве, а именно, введем обобщенную функцию $\hat{A} = A\theta(t)$, где $\theta(t)$ — функция Хевисайда. Аналогично строим продолжение на R^4 для токов $\hat{j}$ и будем их рассматривать как обобщенные функции на $D'_3(R^4)$. Подействуем на A оператором L. С учетом (6), получим

$$L_{kl}(\partial_x, \partial_t)\, \hat{A}_l = \hat{j}_k - c^{-1}\, A_k^0 \delta(t). \tag{35}$$

Сравнивая вторые слагаемые в правой части с (6), видим, что начальные условия работают как импульсные объемные токи.

Обобщенное решение (35) строится с помощью функции Грина $U(x,t)$ (см. теорему 5).

Теорема 9. *Если $A_0 \in D'_3(R^3)$, $\hat{j} \in D'_3(R^4_+)$, то*

$$\hat{A} = c^{-1}\partial_t \psi * \hat{j} + \nabla\psi * \hat{\rho} + i\left[\nabla, \psi * \hat{j}\right] - c^{-2}\partial_t\psi \underset{x}{*} \hat{A}^0 - \nabla\psi \underset{x}{*} \hat{\rho}^0 - ic^{-1}\left[\nabla, \psi \underset{x}{*} \hat{A}^0\right],$$

$$\hat{\rho} = \rho_0\theta(t) - \mathrm{div}\,(\hat{j} \underset{t}{*} \theta(t)), \quad \hat{\rho}_0 = c^{-1}\mathrm{div}\,\hat{A}_0.$$

Доказательство. Используя свойство функции Грина, представим решение в виде свертки:

$$\hat{A}_l = U_l^k * \hat{j}_k - c^{-1} U_l^k \underset{x}{*} A_k^0 \tag{36}$$

(здесь знак "$\underset{x}{*}$" указывает неполную свертку только по x). Далее покомпонентно берем все свертки, которые существуют в силу полуограниченности по t носителей входящих в них функций и ограниченности по x при фиксированном t носителя волновой функции и ее первообразной по времени. С учетом формулы заряда (7) и закона сохранения заряда в результате получим утверждение теоремы.

Для того чтобы записать решение в интегральном виде, следует воспользоваться формулами для сверток с $\psi(x,t)$ (см.п.5). Из теоремы 9 следует

Т е о р е м а 10. *Если начальное поле и заряды — регулярные обобщенные функции, то*

$$4\pi A = -c\int\limits_{r<ct} r^{-1}\nabla_y\rho(y,t-r/c)\,dV(y) - c^{-1}\partial_t\int\limits_{r<ct} r^{-1}j(y,t-r/c)\,dV(y) -$$

$$-i\int\limits_{r<ct} r^{-1}\left[\nabla_y, j(y,t-r/c)\right]dV(y) + (ct)^{-1}\int\limits_{r=ct} r^{-1}\nabla\rho_0(y)\,dV(y) +$$

$$+c^{-2}\partial_t((ct)^{-1}\int\limits_{r=ct} A^0(y)\,dS(y)) + ic^{-1}(ct)^{-1}\int\limits_{r=ct}\left[\nabla, A^0(y)\right]\,dS(y).$$

Запись решения в сверточном виде очень удобна для перехода к их интегральным представлениям, т.к. в зависимости от свойств гладкости входящих в свертки функций, можно перебрасывать дифференцирование на ее составляющие, допускающие обычное дифференцирование, что позволяет вводить знак дифференцирования под интегралы с переменной областью интегрирования. Последнее является характерной особенностью нестационарных задач и достаточно затруднительно при применении классических методов.

П р и м е р (распространение ударных волн). Предположим, что только в области S^-, ограниченной замкнутой поверхностью S, которая является фронтом ударной волны, начальное поле отлично от нуля и $A^0 \in C^1(S^-)$. Пусть токи отсутствуют ($j = 0$) и начальный заряд $\rho_0 = \operatorname{div} A^0 = 0$. Найдем поле в R^3 при $t > 0$.

Введем характеристическую функцию $H_S^-(x)$ множества S^-, равную 1 на S^- и 0 вне его замыкания. В силу условий на фронтах $\hat\rho_0 = \rho_0 + \rho_S = 0$. Согласно теореме 9 в этом случае

$$\hat A_m = -\,c^{-2}\,\partial_t\,\psi \underset{x}{*} \hat A^0_m - i\,c^{-1}e_{mlk}\,\partial_l\psi \underset{x}{*} \hat A^0_k.$$

Интегральное представление свертки имеет вид:

$$4\pi A = c^{-2}\partial_t(t^{-1}\int\limits_{r=ct} A^0(y)H_S^-(y)dS(y)) + i(ct)^{-1}\int\limits_{r=ct}\operatorname{rot} A^0(y)dS(y).$$

Формула описывает ЭМ поле при распространении ударных волн.

Заключение. Обозначим <a> размерность a. Согласно (9) квадрат модуля A равен плотности энергии, т.е $<\|A\|^2>$=(дж/м^3). Поэтому это A-поле можно назвать энергетическим. Возможность описания ЭМ поля через один вектор убедительно свидетельствует о неразрывной связи между электричеством и магнетизмом, которые просто являются физическим проявлением комплексного A-поля. Единственной константой этого поля является скорость ЭМ волн c, а не две $(\varepsilon, \mu\ )$ ЭМ поля. Заметим, что многие формулы электродинамики можно упростить, если использовать A-вектор.

Цитированная литература

1. **Алексеева Л. А.** // Математический журнал. 2001. Т. 1, №1. С. 3 – 13.
2. **Тамм И. Е.** Основы теории электричества. М., 1989. 604 с.
3. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. М., 1981. 512 с.

Поступила в редакцию 31.10.2001г.

УДК 681.5

ИССЛЕДОВАНИЕ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Ж. А. Байкенова, Р. С. Ивлев

Институт проблем информатики и управления МОН РК
480100, Алматы, Пушкина ул., 125, zhansulu@netscape.net, ivlevruslan@newmail.ru

В работе получены достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейных разностных интервальных включений, заданных в пространстве состояний, со стационарной нелинейностью секторного типа на основе методов интервального анализа и прямого метода Ляпунова.

1. Введение

Обширный класс прикладных задач допускает математическое описание в виде нелинейной дискретной динамической системы, содержащей отдельно линейную и нелинейную части, при этом нелинейность удовлетворяет ограничениям секторного типа. Исследование нелинейных динамических систем с нелинейностью секторного типа приводит к задаче анализа абсолютной устойчивости нелинейных систем, которая с точки зрения современной теории управления сохраняет свою актуальность на сегодняшний день. Так, например, в работе [1] получены новые условия абсолютной устойчивости дискретных систем, которые значительно проще классических частотных условий, но и грубее их. Честь быть в числе исторически первых работ, посвященных исследованию нелинейной дискретной системы А. И. Лурье, выпала на долю работ Я. З. Цыпкина [2]–[4], который внес весомый вклад в теорию нелинейных импульсных автоматических систем. В настоящее время задача анализа абсолютной устойчивости как для дискретных, так и для непрерывных систем [5], математические модели которых точно известны, получила исчерпывающее решение. На практике, однако, как линейная, так и нелинейная части могут содержать в параметрах неопределенности интервального типа, которые с успехом могут быть охарактеризованы заданием нижних и верхних границ возможных значений параметров. Среди современных работ, в которых развиваются методы исследования дискретных систем А. И. Лурье в свете новоявленных научных направлений, характеризующихся наличием параметрической неопределенности, можно отметить работу [6]. В этой работе получены робастные модификации частотных критериев абсолютной устойчивости при неопределенности в линейной части системы. В отличие от работы [6], в которой линейная часть задана в виде семейства полиномов, наибольший интерес в этой области представляет исследование нелинейных систем, заданных в пространстве состояний. Основная трудность исследования

Keywords: *absolute stability, interval analysis, difference inclusions, direct method of Lyapunov*
2000 Mathematics Subject Classification: 65G40

параметрически неопределенных систем в пространстве состояний заключается в том, что такие задачи являются NP-полными, что в совокупности с большим числом неопределенных параметров приводит к практически неприемлемому росту вычислительных затрат. Указанное обстоятельство оставляет открытым вопрос анализа абсолютной устойчивости параметрически неопределенных нелинейных динамических систем, заданных в пространстве состояний. В связи с этим в работе решается задача исследования абсолютной устойчивости нелинейной системы разностных уравнений с многозначными правыми частями интервального типа (интервальных разностных включений), заданных в пространстве состояний, для которых на основе второго метода Ляпунова и методов интервального анализа [7] получены достаточные условия абсолютной устойчивости, не требующие больших вычислительных затрат.

2. Постановка задачи и обозначения

Всюду в работе полужирным шрифтом будут обозначаться интервальные величины, в то время как обычным шрифтом — неинтервальные. Символом нижнего и верхнего подчеркивания будут обозначаться, соответственно, нижняя и верхняя границы интервала;
$\mathrm{mid}\,\mathbf{a}$ — середина интервала $\mathbf{a}$;
$\mathrm{rad}\,\mathbf{a}$ — радиус интервала $\mathbf{a}$.
Операции $\mathrm{mid}, \mathrm{rad}$, взятия нижней и верхней границ интервалов применительно к матрицам и векторам будут пониматься в поэлементном смысле. Итак, объектом исследования работы является следующая система нелинейных разностных включений интервального типа:

$$x(k+1) \in \mathbf{A}x(k) + \mathbf{b}u, \qquad x(0) = x_0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где k — дискретное время; $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — n -мерный вектор состояний; $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ — интервальная матрица размерности $n \times n$; $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$, $\mathbf{a}_{ij} = [\underline{\mathbf{a}}_{ij}, \overline{\mathbf{a}}_{ij}]$, $1 \le i, j \le n$, $\mathbb{IR}$ — множество всех вещественных интервалов, $\mathbb{IR} = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{\mathbf{x}} \le x \le \overline{\mathbf{x}},\ \underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}\}$; $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^n$ — интервальный вектор размерности $n \times 1$; $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_i)$, $\mathbf{b}_i = [\underline{\mathbf{b}}_i, \overline{\mathbf{b}}_i]$, $1 \le i \le n$; $u \in \mathbb{R}$ — управление, которое удовлетворяет соотношению

$$u \in \mathbf{f}(\mathbf{s}), \tag{2}$$

где $\mathbf{f}(\cdot)$ — многозначная функция, полунепрерывная сверху, действующая в $\mathbb{IR}$ и имеющая своими значениями замкнутые ограниченные связные подмножества числовой прямой, т.е. $\mathbf{f} : \mathbb{IR} \to \mathbb{IR}$, такая, что имеет место неравенство

$$\mathbf{F}(x, u) \ge 0, \tag{3}$$

где $\mathbf{F}(x, u)$ — вещественная интервально-значная квадратичная форма переменных x и u; $\mathbf{s} \in \mathbb{IR}$ — интервальная величина, определяемая согласно выражению

$$\mathbf{s} = \mathbf{r}^T x(k), \tag{4}$$

где $\mathbf{r} \in \mathbb{IR}^n$ — интервальный вектор размерности $n \times 1$.

Определение 1. *Под решением (1)–(4) будем понимать всякую последовательность $\{x(k)\}$, удовлетворяющую при некоторых значениях $A \in \mathbf{A}$, $b \in \mathbf{b}$ и $r \in \mathbf{r}$ и некоторой функции $f(\cdot)$, являющейся сужением $\mathbf{f}$ на $\mathbb{R}$, следующей нелинейной системе разностных уравнений*

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + bu, \qquad x(0) = x_0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \\ u = f(s),\ \ s = r^T x(k). \end{cases} \tag{5}$$

Определение 2. *Система нелинейных разностных включений (1)-(4) обладает некоторым свойством $\mathcal{P}$, если этим свойством обладает любая система (5) для $A \in \mathbf{A}$, $b \in \mathbf{b}$ и $r \in \mathbf{r}$.*

По поводу обозначений, используемых в работе, необходимо сделать ряд содержательных разъяснений, а именно, может возникнуть вопрос об уместности использования знака включения в выражении (1) в свете вышеприведенных определений 1 и 2. Дело в том, что в исторически первых научных работах, посвященных решению задач теории управления в условиях интервальной неопределенности параметров, например в [8], использовался знак равенства для этой цели. Многозначность правых частей подобных систем явилась, по-видимому, одной из главных причин, в силу которой использование знака равенства в таких случаях было не совсем удачным. Об этом свидетельствует наметившаяся в современных научных работах тенденция, в рамках которой в подобных случаях некоторые авторы используют теоретико-множественную нотацию, как, например, в [6] для обозначения семейства полиномов и т.д., иные же авторы используют знак включения для описания динамических систем в условиях параметрической неопределенности, например [9]. Поэтому использование знака включения в (1) не может вызывать каких-либо недоразумений по этому поводу.

Будем предполагать, что пара интервальных матриц $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ стабилизируема, т.е. для любых $A \in \mathbf{A}$ и $b \in \mathbf{b}$ стабилизируема пара (A, b).

Одно из центральных мест в теории абсолютной устойчивости занимает исследование нелинейных динамических систем с нелинейностью секторного типа (когда график функции $\mathbf{f}$, т.е. совокупность точек (s, u), $s \in \mathbf{s}$, $u \in \mathbf{f}(\mathbf{s})$, расположен в секторе между прямыми $u = \mu_1 s$ и $u = \mu_2 s$).

В формальном виде ограничения секторного типа могут быть записаны

$$\mu_1 \leq u/s \leq \mu_2, \tag{6}$$

для всех $u \in \mathbf{f}(\mathbf{s})$ и $s \in \mathbf{s}$, $s \neq 0$ и при $s = 0$ необходимо $\mathbf{f}(0) = 0$.

Двойное неравенство (6) можно переписать в виде одного неравенства

$$(u - \mu_1 s)(\mu_2 s - u) \geq 0, \tag{7}$$

для $u \in \mathbf{f}(\mathbf{s})$ и $s \in \mathbf{s}$, $s \neq 0$. Учитывая выражение для s, левую часть неравенства (7) представим следующим образом:

$$\begin{aligned} &(u - \mu_1 s)(\mu_2 s - u) = (u - \mu_1 s)^T(\mu_2 s - u) = \\ &= u^T \mu_2 s + (\mu_1 s)^T u - u^T u - (\mu_1 s)^T \mu_2 s = \\ &= \mu_2 u^T r^T x(k) + \mu_1 x^T(k) r u - u^T u - \mu_1 \mu_2 x^T(k) r r^T x(k) = F\left(x(k), u\right) \geq 0, \end{aligned} \tag{8}$$

где $r \in \mathbf{r}$. Левая часть неравенства (8) представляет собой квадратичную форму переменных x и u, естественное интервальное расширение которой определяет нелинейное ограничение на x и u вида (3). Таким образом, динамическая система с нелинейностью секторного типа является частным случаем модели более общего вида (1)–(4).

З а д а ч а : *требуется определить условия наличия свойства абсолютной устойчивости положения равновесия $x(k) \equiv 0$ динамической системы (1)–(4) с нелинейностью секторного типа (6) в смысле определения 2 на основе второго метода Ляпунова.*

В настоящей работе в отличие от уже существующих и частично процитированных во введении работ параметрически неопределенная математическая модель задана *в пространстве состояний.* Для ее исследования в работе развивается прямой метод Ляпунова, на основе которого получены простые в вычислительном плане алгебраические условия абсолютной устойчивости. Последнее крайне важно в свете сказанного выше.

3. Второй метод Ляпунова для систем с многозначной правой частью

Суть второго метода Ляпунова исследования устойчивости дискретных динамических систем вкратце заключается в построении такой функции $V\left(x(k)\right) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ переменной $x(k)$, играющей роль обобщенного расстояния до начала координат в $\mathbb{R}^n$, убывание значений которой вдоль траекторий движения исследуемой системы означает наличие исследуемого свойства устойчивости у рассматриваемой системы. Для этого достаточно, чтобы первая разность функции, вычисленная в силу уравнений динамической системы,

$$\Delta V\left(x(k)\right)|_{(1)-(4)} = \left(V\left(x(k+1)\right) - V\left(x(k)\right)\right)|_{(1)-(4)} < 0 \tag{9}$$

была отрицательно определена.

Основная трудность применения данного метода к решению задач исследования динамических свойств у систем с параметрически неопределенными правыми частями, заключается в многозначности первой разности функции Ляпунова, вычисленной в силу уравнений исследуемой системы. В данной работе предлагается методика вычисления однозначной функции Ляпунова, удовлетворяющей (9) при любых значениях параметров модели исследуемой динамической системы, позволяющая преодолеть указанную трудность.

3.1. Выбор функции Ляпунова в виде квадратичной формы

Во многих важных практических случаях выбор функции Ляпунова удобно осуществлять в классе вещественных квадратичных форм, т.е.

$$V\left(x(k)\right) = x^T(k)Hx(k), \tag{10}$$

где $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $H = H^T \triangleright 0$ — симметрическая положительно-определенная матрица. Содержательно суть предлагаемого в данной работе подхода к построению функции Ляпунова заключается в следующем: наличие свойства абсолютной устойчивости при всевозможных значениях параметров $A \in \mathbf{A}$, $b \in \mathbf{b}$, $r \in \mathbf{r}$ и секторных ограничениях (6) можно обеспечить построением вещественной квадратичной положительно-определенной функции вида (10). Эта функция имеет первую разность (9), вычисленную в силу уравнений (5), отрицательно-определенной при любых значениях $A \in \mathbf{A}$, $b \in \mathbf{b}$ и $r \in \mathbf{r}$ в области пространства $\mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}$, выделяемой неравенством (8).

В рамках сформулированного подхода вычислим первую разность для (10) в силу уравнений (5) для произвольных, но фиксированных $A \in \mathbf{A}$, $b \in \mathbf{b}$ и $r \in \mathbf{r}$

$$\begin{aligned}
&\Delta V\left(x(k)\right) = V\left(x(k+1)\right) - V\left(x(k)\right) = x^T(k+1)Hx(k+1) - x^T(k)Hx(k) = \\
&= \left(Ax(k)+bu\right)^T H\left(Ax(k)+bu\right) - x^T(k)Hx(k) = \\
&= x^T(k)A^THAx(k) + ub^THAx(k) + x^T(k)A^THbu + u^Tb^THbu - x^T(k)Hx(k) = \\
&= x^T(k)(A^THA - H)x(k) + ub^THAx(k) + x^T(k)A^THbu + ub^THbu.
\end{aligned}$$

Легко видеть, что полученная первая разность является квадратичной формой переменных x и u, которую можно переписать в более компактном виде

$$\begin{aligned}
&\Delta V\left(x(k),u\right) = x^T(k)(A^THA - H)x(k) + ub^THAx(k) + x^T(k)A^THbu + ub^THbu = \\
&= \left(x^T(k)u\right)\begin{pmatrix} A^THA - H & A^THb \\ b^THA & b^THb \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(k) \\ u \end{pmatrix} = z^T(k)D_1z(k),
\end{aligned} \tag{11}$$

где $z(k) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $D_1 \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ — вектор и матрица размерностей $(n+1)\times 1$ и $(n+1)\times(n+1)$, соответственно, выражения для которых ясны из (11).

При получении выражения для первой разности (11) не были использованы ограничения секторного типа (6), поэтому, как следует из (11), отрицательная определенность матрицы D_1 при всевозможных значениях $A \in \mathbf{A}$ и $b \in \mathbf{b}$ влечет выполнение неравенства

$$\Delta V\left(x(k),u\right) < 0$$

во всем пространстве. Обеспечение отрицательной определенности первой разности функции Ляпунова во всем пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ может оказаться сильно избыточным условием обеспечения абсолютной устойчивости исследуемой системы. Для уменьшения избыточности достаточно обеспечить отрицательную определенность первой разности только в той части пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, которую выделяют ограничения секторного типа (8). Определение условий отрицательной определенности первой разности функции Ляпунова, являющейся квадратичной формой переменных x и u, в области неотрицательной определенности другой квадратичной формы тех же переменных является весьма трудоемкой задачей. В классической теории асимптотической устойчивости (например, в [5]) эту задачу сводят к другой более простой задаче с помощью специального приема, называемого S-процедурой. Следует отметить, что упомянутый прием сводит исходную задачу к другой более простой, не всегда являющейся эквивалентной первой. В этом случае говорят, что S-процедура "ущербна" [5]. Однако в нашем случае, как следует из [5], S-процедура будет неущербной. Сущность S-процедуры согласно [5] заключается для рассматриваемого случая в эквивалентности следующих двух утверждений:

1. первая разность $\Delta V\left(x(k), u\right)$ функции Ляпунова отрицательно определена в области пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, выделяемой неравенством $F\left(x(k), u\right) > 0$;

2. существует неотрицательное число $\tau \geq 0$ такое, что форма

$$S\left(x(k), u\right) = \Delta V\left(x(k), u\right) + \tau F\left(x(k), u\right) \tag{12}$$

   отрицательно определена при $x \neq 0$ и $u \neq 0$, т.е. $\exists \tau \geq 0 : S\left(x(k), u\right) < 0$ при $x \neq 0$ и $u \neq 0$.

Выполнение второго утверждения влечет, очевидно, выполнение первого, проверка выполнимости второго же заметно проще. Анализируя выражение для формы $S\left(x(k), u\right)$ и первой разности $V\left(x(k), u\right)$ функции Ляпунова, можно заключить, что достаточно рассмотреть два случая: $\tau = 0$ и $\tau > 0$. Для случая $\tau = 0$ получаем квадратичную форму (11). При $\tau > 0$ после деления обеих частей неравенства $S\left(x(k), u\right) < 0$ на $\tau > 0$ и введения переобозначения для H приходим к случаю $\tau = 1$.

В соответствии с описанным приемом применим S-процедуру к нахождению условий абсолютной устойчивости исследуемой системы. Для этого в предположении существования неотрицательного числа τ составим форму (12), где первая разность функции Ляпунова вычисляется при произвольных значениях $A \in \mathbf{A}$ и $b \in \mathbf{b}$, а неравенство (7) — при произвольном $r \in \mathbf{r}$.

$$\begin{aligned}
&S\left(x(k), u\right) = \Delta V\left(x(k), u\right) + \tau F\left(x(k), u\right) = V\left(x(k+1), u\right) - V\left(x(k), u\right) = \\
&= x^T(k+1) H x(k+1) + \tau\left(u - \mu_1 s\right)\left(\mu_2 s - u\right) = \left(Ax(k) + bu\right)^T H \left(Ax(k) + bu\right) - \\
&- x^T(k) H x(k) + \tau \mu_2 u^T r^T x(k) + \tau \mu_1 x^T(k) r u - \tau u^T u - \tau \mu_1 \mu_2 x^T(k) r r^T x(k) = \\
&= x^T(k)\left(A^T H A - H - \tau \mu_1 \mu_2 r r^T\right) x(k) + x^T(k)\left(A^T H b + \tau \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} r\right) u + \\
&+ u\left(b^T H A + \tau \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} r^T\right) x(k) + u\left(b^T H b - \tau\right) u.
\end{aligned} \tag{13}$$

Введем в рассмотрение матрицу $D_2 \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$

$$D_2 = \begin{pmatrix} A^T H A - H - \tau \mu_1 \mu_2 r r^T & A^T H b + \tau \frac{\mu_1+\mu_2}{2} r \\ b^T H A + \tau \frac{\mu_1+\mu_2}{2} r^T & b^T H b - \tau \end{pmatrix}, \tag{14}$$

тогда выражение для квадратичной формы (13) можно записать в следующем компактном виде

$$S\left(x(k), u\right) = \Delta V\left(x(k), u\right) + \tau F\left(x(k), u\right) = z^T(k) D_2 z(k),$$

где вектор $z(k) \in \mathbb{R}^{n+1}$ определяется аналогично используемому в (11). Заметим, что при $\tau = 0$ матрица D_2 превращается в матрицу D_1.

Для проведения дальнейших рассуждений потребуются следующие базовые определения и понятия из интервального анализа.

Определение 3. *Интервальную квадратную матрицу $\mathbf{Q} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$, $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_{ij})$, $\mathbf{q}_{ij} = [\underline{\mathbf{q}}_{ij}, \overline{\mathbf{q}}_{ij}]$ будем называть положительно-определенной и записывать $\mathbf{Q} \rhd 0$, если положительно определена любая матрица $Q \in \mathbf{Q}$, т.е. $\forall Q \in \mathbf{Q}$ квадратичная форма $x^T Q x > 0$ $\forall x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.*

Определение 4. [10] *Множество матриц вида*

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}} = [\underline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}}, \overline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}}] = \left\{ Q \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid Q = Q^T,\ \underline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}} \leq Q \leq \overline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}} \right\}, \tag{15}$$

где знак неравенства понимается в поэлементном смысле, будем называть симметрической интервальной матрицей и записывать $\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}} = (\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}})^T$.

Из определения 4 ясно, что $\underline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}}, \overline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\underline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}} = \left(\underline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}}\right)^T$, $\overline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}} = \left(\overline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}}\right)^T$.

Множество квадратных матриц вида

$$\Sigma_{\forall\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}) = \left\{ H \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\exists Q \in \mathbf{Q}^{\mathrm{sym}})(A^T H A - H = -Q) \right\} \tag{16}$$

называется допустимым множеством решений интервального матричного дискретного уравнения Ляпунова [11]

$$\mathbf{A}^T H \mathbf{A} - H = -\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}. \tag{17}$$

Теорема. *Пусть для заданной интервальной матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ и некоторой интервальной симметрической положительно-определенной матрицы $\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}$ допустимое множество решений (16) интервального матричного уравнения Ляпунова (17) непусто, т.е. $\Sigma_{\forall\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}) \neq \oslash$, некоторая симметрическая матрица принадлежит данному множеству $H^* = (H^*)^T \in \Sigma_{\forall\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{Q}^{\mathrm{sym}})$ и существует такое неотрицательное число $\tau \geq 0$, что при заданном интервальном векторе $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^n$ следующая интервальная матрица*

$$\mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T H^* \mathbf{A} - H^* - \tau\mu_1\mu_2 \mathbf{r}\mathbf{r}^T & \mathbf{A}^T H^* \mathbf{b} + \tau\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\mathbf{r} \\ \mathbf{b}^T H^* \mathbf{A} + \tau\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\mathbf{r}^T & \mathbf{b}^T H^* \mathbf{b} - \tau \end{pmatrix} \tag{18}$$

отрицательно определена. Тогда интервально-заданная система (1)–(4) абсолютно устойчива в выбранном классе нелинейностей.

Доказательство. Пусть условия теоремы выполнены. Положительная определенность симметрической матрицы $H^* \in \Sigma_{\forall\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{Q}^{\mathrm{sym}})$ влечет асимптотическую устойчивость интервальной матрицы $\mathbf{A}$. Действительно, в силу построения множества (16) для любой матрицы $A \in \mathbf{A}$ существует такая симметрическая матрица $Q^* \in \mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}$, что

$$A^T H^* A - H^* = -Q^*.$$

Другими словами, матрица $A^T H^* A - H^*$ является симметрической отрицательно-определенной, что означает в силу хорошо известных результатов асимптотическую устойчивость матрицы A, а это, в свою очередь, влечет асимптотическую устойчивость интервальной матрицы $\mathbf{A}$ в силу произвольности выбора $A \in \mathbf{A}$. Отрицательная определенность интервальной матрицы $\mathbf{D}_2$ согласно определению 3 означает, что для произвольных матриц $A \in \mathbf{A}$, $b \in \mathbf{b}$ и $r \in \mathbf{r}$ матрица

$$D_2^* = \begin{pmatrix} A^T H^* A - H^* - \tau\mu_1\mu_2 r r^T & A^T H^* b + \tau\frac{\mu_1+\mu_2}{2} r \\ b^T H^* A + \tau\frac{\mu_1+\mu_2}{2} r^T & b^T H^* b - \tau \end{pmatrix}$$

будет отрицательно определена. Тогда квадратичная форма (12) будет отрицательной на траекториях системы (5) при произвольных значениях $A \in \mathbf{A}$, $b \in \mathbf{b}$ и $r \in \mathbf{r}$, что влечет абсолютную устойчивость исследуемой системы в смысле определения 2. Теорема доказана.

Приведем алгоритм исследования абсолютной устойчивости рассматриваемой системы в выбранном классе нелинейностей.

А л г о р и т м .

Шаг 1. Построение интервальной положительно-определенной симметрической матрицы $\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}$.

Шаг 2. Исследование непустоты допустимого множества (16) для заданной интервальной матрицы $\mathbf{A}$ и построенной $\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}$. Решение этой задачи приведено в работе [11]. Пусть указанное множество непусто, тогда $H^* = (H^*)^T \in \Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{Q})$.

Шаг 3. Проверка положительной определенности матрицы H^* (критерий Сильвестра). Если H^* положительно определена, то $\mathbf{A}$ — асимптотически устойчива по Шуру.

Шаг 4. Проверка отрицательной определенности матрицы D_2 при всевозможных значениях $A \in \mathbf{A}$, $b \in \mathbf{b}$ и $r \in \mathbf{r}$. Для этого достаточно, чтобы интервальная матрица (18) была отрицательно определена, т.е. $\mathbf{D}_2 \lhd 0$, где произведения интервальных матриц могут выполняться в произвольном порядке.

4. Заключение

Полученный в работе на основе прямого метода Ляпунова алгебраический критерий позволяет исследовать свойство абсолютной устойчивости нелинейной системы разностных включений интервального типа и не требует больших вычислительных затрат. На основании полученного критерия построен алгоритм анализа исследуемого свойства.

Цитированная литература

1. **Родионов А. М.** // АиТ. 1998. №12. С. 127 – 131.
2. **Цыпкин Я. З.** // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145, №1. С. 52 – 55.
3. **Цыпкин Я. З.** // АиТ. 1964. Т. XXV, №7. С. 1030 – 1036.
4. **Цыпкин Я. З.** // Докл. АН СССР. 1964. Т. 155, №5. С. 1029 – 1032.
5. **Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.** Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.
6. **Джури Э. И., Премаратне К., Эканайаке М. М.** // АиТ. 1999. №3. С. 97 – 118.
7. **Алефельд Г., Херцбергер Ю.** Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.
8. **Khlebalin N. A.** Analitical methods of regulators synthesis. Saratov. Polytechnical Institute. 1981. P. 107 – 123.
9. **Даймонд Ф., Опойцев В. И.** // АиТ. 2001. №5. С. 22 – 30.
10. **Jansson C.** // Computing 46. Hamburg-Harburg. 1990.
11. **Абрамов Б. А., Ивлев Р. С., Соколова С. П.** // Докл. НАН РК. 2000. Т. 4. С. 29 – 32.

Поступила в редакцию 3.11.2001г.

Математический журнал. *Алматы. 2001. Том 1. № 2. С. 32 — 41*

УДК 517.9

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ КВАЗИРЕГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ И ЕЕ СОПРЯЖЕННОЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ

М. А. Бименов, М. А. Джаманкараева, Т. Ш. Кальменов

ЮКГУ имени М. О. Ауэзова
486018, Шымкент, пр. Тауке-хана, 5

Пусть $\Omega \subset R^2$ — конечная область, ограниченная при $y > 0$ гладкой кривой Жордана σ, а при $y < 0$ — характеристиками $AC : x + y = 0$, $BC : x - y = 1$ уравнения

$$Lu = -\mathrm{sgn}\{y\}u_{xx} - u_{yy} = f(x, y). \tag{1}$$

Положим $\Omega_1 = \Omega \cap \{y > 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{y < 0\}$ и в дальнейшем будем предполагать эллиптическую часть границы $\partial\Omega = \sigma \cup AB$ достаточно гладкой.

Квазирегулярная задача Дирихле (задача КД).

Найти функцию $u \in C^{\beta}(\bar{\Omega}) \cap C^{2+\beta}(\bar{\Omega}_1) \cap C^{2+\beta}(\bar{\Omega}_2), 0 < \beta < 1$, удовлетворяющую уравнению (1) в областях Ω_1 и Ω_2 соответственно и краевым условиям:

$$u|_{\sigma \cup AC \cup BC} = 0. \tag{2}$$

Имеет место

Теорема 1. *Пусть $f \in C^{\beta}(\bar{\Omega}_1) \cap C^{1+\beta}(\bar{\Omega}_2)$, $0 < \beta < 1$. Тогда существует единственное решение $u \in C^{\beta}(\Omega) \cap C^{2+\beta}(\bar{\Omega}_1) \cap C^{2+\beta}(\bar{\Omega}_2)$ квазирегулярной задачи Дирихле, удовлетворяющее неравенствам:*

$$\|u\|_{C^{\beta}(\bar{\Omega})} + \|u\|_{C^{2+\beta}(\bar{\Omega}_1)} + \|u\|_{C^{2+\beta}(\bar{\Omega}_2)} \le C(\|f\|_{C^{\beta}(\bar{\Omega}_1)} + \|f\|_{C^{1+\beta}(\bar{\Omega}_2)}), \tag{3}$$

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \le C\|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{4}$$

В (3)–(4) и в дальнейшем символом C будет обозначаться положительная постоянная, не зависящая от $u(x, y)$, не обязательно одна и та же.

Доказательство. Решение квазирегулярной задачи Дирихле в области Ω_2 сводится к решению задачи Гурса:

$$Lu = u_{xx} - u_{yy} = f(x, y), \quad u|_{AC \cup BC} = 0. \tag{5}$$

Keywords: *quaziregularness, completeness, adjoint, root functions, Rissa basis, Riemann function, Green function, conormal derivatives, Bessel function*
2000 Mathematics Subject Classification: 35M10, 35P05

Единственное решение задачи (5) представимо в виде:

$$u = \int\limits_0^\xi d\xi_1 \int\limits_1^\eta f_1(\xi_1, \eta_1) d\eta_1 \equiv L_\Gamma^{-1} f, \tag{6}$$

где L_Γ^{-1} — оператор, определяемый граничной задачей (5), и

$$4f_1(\xi, \eta) = f((\xi + \eta)/2, (\xi - \eta)/2), \quad \xi = x + y, \ \eta = x - y. \tag{7}$$

Если $f \in C^{1+\beta}(\bar{\Omega}_2)$, то из соотношений (6), (7) легко проверить, что

$$\|u\|_{C^{2+\beta}(\bar{\Omega}_2)} \le C\|f\|_{C^{1+\beta}(\bar{\Omega}_2)}, \tag{8}$$

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega_2)} \le C\|f\|_{L_2(\Omega_2)}. \tag{9}$$

Из соотношений (6), (7) при $y = 0$ получим:

$$\tau_f(x) \ = \ u|_{y=0^-} \ = \ \int\limits_0^x d\xi_1 \int\limits_1^x f_1(\xi_1, \eta_1) d\eta_1 = (L_\Gamma^{-1} f)|_{y=0}(x). \tag{10}$$

Отсюда находим, что $\tau_f(x) \ \in \ C^{2+\beta}[0,1]$ и удовлетворяет неравенствам:

$$\|\tau_f(x)\|_{C^{2+\beta}[0,1]} \le C\|f\|_{C^{1+\beta}(\bar{\Omega}_2)}, \tag{11}$$

$$\|\tau_f\|_{\dot{W}_2^1(0,1)} \le C\|f\|_{L^2(\Omega_2)}. \tag{12}$$

В (12) через $\dot{W}_2^1(0,1)$ обозначено пространство функций из $W_2^1(0,1)$, обращающихся в нуль на концах отрезка $[0,1]$.

Теперь решим квазирегулярную задачу Дирихле в области Ω_1. Поскольку $u \in C^\beta(\bar{\Omega})$, то эта задача в области Ω_1 сводится к задаче Дирихле:

$$Lu = -u_{xx} - u_{yy} = f(x,y), \quad u|_\sigma = 0, \ \ u|_{y=0} = \tau_f(x), \tag{13}$$

где функция $\tau_f(x)$ определяется из области гиперболичности уравнения (1) по формуле (10).

По предположению граница области $\Omega_1 : \partial\Omega_1 = \sigma \cup AB$ является гладкой кривой Жордана. Поэтому для любой $f \in C^\beta(\bar{\Omega}_1)$ существует единственное решение задачи (13) $u \in C^{2+\beta}(\bar{\Omega}_1)$, удовлетворяющее неравенствам:

$$\|u\|_{C^{2+\beta}(\bar{\Omega}_1)} \le C(\|f\|_{C^\beta(\bar{\Omega}_1)} + \|\tau_f(x)\|_{C^{2+\beta}[0,1]}) \le C(\|f\|_{C^\beta(\bar{\Omega}_1)} + \|f\|_{C^{1+\beta}(\bar{\Omega}_2)}, \tag{14}$$

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega_1)} \le C(\|f\|_{L_2(\Omega_1)} + \|\tau_f\|_{\dot{W}_2^1(0,1)}) \le C(\|f\|_{L_2(\Omega_1)} + \|f\|_{L_2(\Omega_2)}) \le C\|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{15}$$

Так как $u(x, 0+) = u(x, 0-)$, то в силу неравенств (8)–(9), (14)–(15) следует справедливость теоремы 1.

Теперь найдем сопряженную задачу к квазирегулярной задаче Дирихле (задаче КД), т.е. к задаче (1)–(2).

Пусть $v \in C^2(\bar{\Omega}), v|_\sigma = 0$.

Тогда для любой функции $u \in C^\beta(\bar{\Omega}) \cap C^2(\bar{\Omega}_1) \cap C^2(\bar{\Omega}_2), u|_{\sigma \cup AC \cup BC} \ = \ 0$, учитывая, что $\frac{\partial u}{\partial n}|_{AC \cup BC} = 0$, непосредственным интегрированием по частям убеждаемся в том, что

$$(Lu, v)_0 = (Lu, v)_{L_2(\Omega_1)} + (Lu, v)_{L_2(\Omega_2)} = \int\limits_{AB} \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0+)v - \frac{\partial v}{\partial y} u(x, 0+)\right] dx +$$

$$+ (u, Lv)_{L_2(\Omega_1)} + \int\limits_{AB} \left[-\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0-)v + \frac{\partial v}{\partial y} u(x, 0-)\right] dx + (u, Lv)_{L_2(\Omega_2)} =$$

$$= \int\limits_{AB} \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0+) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0-)\right) v(x, 0) dx + (u, Lv)_{L_2(\Omega)}. \tag{16}$$

Отсюда в силу произвольности $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0+) - \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0-)$ равенство $(Lu,v)_0 = (u,Lv)_0$ возможно тогда и только тогда, когда $v(x,0)=0$.

Таким образом, множество функций v таких, что $v \in C^2(\bar\Omega),\ v|_\sigma = 0$, принадлежит области определения сопряженной задачи, если и только если $v(x,0)=0$. Тем самым доказана

Лемма 1. *Пусть $u \in C^\beta(\bar\Omega) \cap C^2(\bar\Omega_1) \cap C^2(\bar\Omega_2)$, $u|_{\sigma\cup AC\cup BC} = 0$, $v \in C^2(\bar\Omega),\ v|_{\sigma\cup AB} = 0$. Тогда $(Lu,v)_0 = (u,Lv)_0$.*

Задача ДК. Найти регулярное решение $v \in C^1(\bar\Omega) \cup C^2(\Omega)$ уравнения

$$Lv = -\mathrm{sgn}\{y\} v_{xx} - v_{yy} = g(x,y), \tag{17}$$

удовлетворяющее условиям

$$v|_{\sigma\cup AB} = 0. \tag{18}$$

Теперь покажем, что задача ДК действительно является сопряженной задачей к квазирегулярной задаче Дирихле (1)–(2).

Через L_{KD} обозначим замыкание в $L_2(\Omega)$ дифференциального оператора L, заданного на подмножестве функций

$$u \in C^\beta(\bar\Omega) \cap C^2(\bar\Omega_1) \cap C^2(\bar\Omega_2), \quad (0<\beta<1), \quad u|_{\sigma\cup AC\cup BC} = 0$$

уравнением (1).

В силу априорных оценок (3), (4) такое замыкание L_{KD} возможно, и обратный оператор L_{KD}^{-1} вполне непрерывен на всем $L_2(\Omega)$, т.е. операторное уравнение

$$L_{KD} u = f \tag{19}$$

однозначно разрешимо для любой $f \in L_2(\Omega)$, и обратный оператор L_{KD}^{-1} удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} = \|L_{KD}^{-1} f\|_{W_2^1(\Omega)} \le C\|f\|_{L_2(\Omega)}, \tag{20}$$

т.е. является вполне непрерывным на всем $L_2(\Omega)$.

Пусть L_{DK} — замыкание в $L_2(\Omega)$ дифференциального оператора L, заданного на подмножестве функций $v \in C^2(\Omega),\ v|_{\sigma\cup AB} = 0$ уравнением (17).

Исследуем вопрос об однозначной разрешимости задачи ДК. Имеет место

Теорема 2. *Для любой $g \in C^\beta(\bar\Omega_1) \cap C^{1+\beta}(\bar\Omega_2)$ существует единственное решение $v \in C^{2+\beta}(\Omega)$ задачи ДК (17)–(18), удовлетворяющее неравенствам*

$$\|v\|_{C^{2+\beta}(\bar\Omega)} \le C(\|g\|_{C^\beta(\bar\Omega_1)} + \|g\|_{C^{1+\beta}(\bar\Omega_2)}), \tag{21}$$

$$\|v\|_{W_2^1(\Omega)} \le C\|g\|_{L_2(\Omega)}. \tag{22}$$

Доказательство. Действительно, на основании известных свойств решений задачи Дирихле (17)–(18) в области Ω_1 имеем, что для любой $g \in C^\beta(\bar\Omega_1)$ решение задачи (17)–(18) в области Ω_1 принадлежит классу $C^{2+\beta}(\bar\Omega_1)$ (см.[1]) и удовлетворяет неравенствам

$$\|v\|_{C^{2+\beta}(\bar\Omega_1)} \le C\|g\|_{C^\beta(\bar\Omega_1)}, \tag{23}$$

$$\|v\|_{W_2^1(\Omega_1)} \le C\|g\|_{L_2(\Omega_1)}. \tag{24}$$

Отсюда имеем, что след нормальной производной

$$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=0+} = \nu_g(x) \in C^{1+\beta}[0,1],$$

если $g \in C^{\beta}(\bar{\Omega}_1)$ и $\nu_g(x) \in L_2(0,1)$, если $g \in L_2(\Omega_1)$ и удовлетворяет неравенствам:

$$\|\nu_g(x)\|_{C^{1+\beta}[0,1]} \leq C\|g\|_{C^{\beta}(\bar{\Omega}_1)}, \tag{25}$$

$$\|\nu_g(x)\|_{L_2(0,1)} \leq C\|g\|_{L_2(\Omega_1)}. \tag{26}$$

В области Ω_2 решение задачи ДК сводится к решению задачи Коши:

$$Lv = v_{xx} - v_{yy} = g, \tag{27}$$

$$v|_{y=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=0-} = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=0+} = \nu_g. \tag{28}$$

Если $g \in C^{1+\beta}(\bar{\Omega}_2)$, то $\nu_g(x) \in C^{1+\beta}[0,1]$, поэтому решение задачи Коши (27)–(28) представимо в виде (см. [2]):

$$v(x,y) = \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y} \nu_g(t)dt + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{y} dy_1 \int\limits_{x+y_1-y}^{x+y-y_1} g(x_1,y_1)dx_1. \tag{29}$$

Поэтому

$$v \in C^{2+\beta}(\bar{\Omega}_2) \tag{30}$$

и на основании неравенств (25)–(26) удовлетворяет неравенствам:

$$\|v\|_{C^{2+\beta}(\bar{\Omega}_2)} \leq C(\|g\|_{C^{1+\beta}(\bar{\Omega}_2)} + \|\nu_g\|_{C^{1+\beta}[0,1]}) \leq C(\|g\|_{C^{1+\beta}(\bar{\Omega}_2)} + \|g\|_{C^{\beta}(\bar{\Omega}_1)}), \tag{31}$$

$$\|v\|_{W_2^1(\Omega_2)} \leq C(\|g\|_{L_2(\Omega_2)} + \|g\|_{L_2(\Omega_1)}) = C\|g\|_{L_2(\Omega)}. \tag{32}$$

По построению решение задачи ДК $v(x,y) \in C^{1+\beta}(\bar{\Omega}) \cap C^{2+\beta}(\bar{\Omega}_1) \cap C^{2+\beta}(\bar{\Omega}_2)$. Поэтому $v_{xx} \in C^{\beta}(\bar{\Omega})$. Так как $v_{xx}(x,0+) = v_{xx}(x,0-) = 0$, то из уравнения (17) при $y = 0$ имеем

$$Lv = -v_{xx}|_{y=0+} - v_{yy}|_{y=0+} = -v_{yy}|_{y=0-} = g|_{y=0-} \;. \tag{33}$$

Отсюда $v_{yy} \in C^{\beta}(\bar{\Omega})$. Следовательно $v_{yx}, v_{xy} \in C^{\beta}(\bar{\Omega})$. Из неравенств (23)–(24), (31)–(32) следует справедливость теоремы 2 и выполнение неравенств (21), (22). Теорема 2 доказана. Из теоремы 2 следует

Теорема 3. *Оператор L_{DK} обратим на всем $L_2(\Omega)$ и обратный оператор L_{DK}^{-1} вполне непрерывен на всем $L_2(\Omega)$.*

Доказательство. Действительно, для любой $g \in C^{\beta}(\bar{\Omega}_1) \cap C^{1+\beta}(\bar{\Omega}_2)$ согласно теореме 2 существует единственное решение $v \in C^{2+\beta}(\bar{\Omega})$ задачи ДК, т.е. операторное уравнение $L_{DK}\ v = g$ разрешимо для всюду плотного множества в $L_2(\Omega)$.

Из неравенства (22) следует, что оператор L_{DK} замыкаем в $L_2(\Omega)$ и операторное уравнение

$$L_{DK}\ v = g \tag{34}$$

разрешимо для любой $g \in L_2(\bar{\Omega})$, причем обратный оператор допускает оценку:

$$\|v\|_{W_2^1(\Omega)} = \|L_{DK}^{-1}\ g\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C\|g\|, \tag{35}$$

т.е. вполне непрерывен на всем $L_2(\Omega)$. Теорема 3 доказана.

Теперь докажем сопряженность операторов L_{KD} и L_{DK}. Имеет место

Т е о р е м а 4. *Операторы L_{KD} и L_{DK} образуют фредгольмову (взаимно-сопряженную) пару в $L_2(\Omega)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Если $u \in D(L_{KD})$, $v \in D(L_{DK})$ и $L_{KD}\ u = f$ и $L_{DK}\ v = g$, то согласно теоремам 1, 2 существует последовательность функций

$$u_n \in C^{\beta}(\bar{\Omega}) \cap C^{2+\beta}(\bar{\Omega}_1) \cap C^{2+\beta}(\bar{\Omega}_2), \quad u_n|_{\sigma\cup AC\cup BC} = 0, \quad v_m \in C^{2+\beta}(\bar{\Omega}), \quad v_m|_{\sigma\cup AB} = 0$$

таких, что $u_n \to u$, $v_m \to v$; $L_{KD}\ u_n = f_n$ и $L_{DK}\ v_m = g_m$ сходятся в $L_2(\Omega)$ к f и g, соответственно.

Согласно лемме 1 имеем

$$\begin{gathered}(L_{DK}\ u_n, v_m)_0 = (L\ u_n, v_m)_{L_2(\Omega_1)} + (L\ u_n, v_m)_{L_2(\Omega_2)} = \\ = (u_n, L\ v_m)_{L_2(\Omega_1)} + (u_n, L\ v_m)_{L_2(\Omega_2)} = (u_n, L_{DK}\ v_m)_0\ .\end{gathered} \tag{36}$$

Устремляя n, m $\to \infty$, предельным переходом из соотношения (36) получим:

$$(L_{DK}\ u, v)_0 = (u, L_{DK}\ v)_0\ . \tag{37}$$

Теорема 4 доказана. Тем самым установлена сопряженность задачи ДК к квазирегулярной задаче Дирихле (задаче КД).

Пример.

Задача КД. Найти квазирегулярное решение $u \in C^2[-1,0) \cap C^2(0,1] \cap C[-1,1]$ уравнения

$$Lu = -u'' = f, \quad x \in [-1,0), \quad x \in (0,1], \tag{38}$$

удовлетворяющее условиям

$$u'(-1) = u(-1) = 0, \quad u(1) = 0. \tag{39}$$

Задача ДК. Найти регулярное решение $u \in C^2[-1,1]$ уравнения

$$Lv = -v'' = g, \tag{40}$$

удовлетворяющее условию

$$v(0) = v(1) = 0. \tag{41}$$

Легко проверить, что задача КД (38), (39) и задача КД (40), (41) являются взаимно-сопряженными задачами в $L_2(-1,1)$.

Рассмотрим спектральные вопросы операторов L_{KD} и L_{DK}. Имеет место

Т е о р е м а 5. *Собственные функции оператора L_{KD} (квазирегулярной задачи Дирихле (1), (2)) образуют полную ортонормированную систему в $L_2(\Omega_1)$ и тождественно равны нулю в области Ω_2.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Собственные функции оператора L_{KD} в области Ω_2 совпадают с собственными функциями вольтерровой задачи Гурса:

$$L_{KD}\ u_n = -u_{nxx} - u_{nyy} = \lambda_n u_n, \quad u_n|_{AC\cup AB} = 0. \tag{42}$$

Поэтому $u_n \equiv 0$ в Ω_2. Следовательно, собственные функции оператора L_{KD} в области Ω_1 совпадают с собственными функциями оператора задачи Дирихле:

$$L_{KD}\ u_n = -u_{nxx} - u_{nyy} = \lambda_n u_n, \quad u_n|_{\sigma\cup AB} = 0. \tag{43}$$

Согласно [2] задача (43) и, тем самым, оператор L_{KD} имеет полную ортонормированную систему в $L_2(\Omega_1)$. Теорема 5 доказана.

Поскольку собственные функции операторов L_{KD} и L_{DK} совпадают в Ω_1, то справедлива следующая

Лемма 2. *Оператор L_{DK} имеет полную ортонормированную систему собственных функций в $L_2(\Omega_1)$.*

Для полного исследования свойств собственных функций оператора L_{DK} в дальнейшем будем предполагать, что область Ω_1 совпадает с прямоугольником $\Omega_1 = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le b\}$.

Теперь изучим полноту собственных функций v_n в области Ω_2. Имеет место

Теорема 6. *Система собственных функций $v_n(x,y)$ оператора L_{DK} принадлежит классу $C^{2+\beta}(\bar{\Omega})$, полна и ортонормирована в $L_2(\Omega_1)$, полна в $L_2(\Omega_2)$, если $2b > 1$, и неполна в $L_2(\Omega)$.*

Доказательство. Сначала докажем гладкость собственных функций v_n в Ω_1. Из-за локальных свойств решений эллиптических уравнений собственные функции $v_n \in C^{2+\beta}(\bar{\Omega}_1 \backslash \{A \cup B\})$.

Поэтому необходимо исследовать их гладкость в окрестности точек $A(0,0)$ и $B(1,0)$. Как и в работе [3] можно показать, что в окрестности точки $A(0,0)$ собственные функции представимы в виде:

$$v_{n_1,n_2}(x,y) = J_{2n_2}\left(\mu_{n_1}^{n_2} \frac{r}{R}\right) \sin 2n_2\phi, \tag{44}$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le r \le R$, $\phi = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}$, а $J_{2n_2}(z)$ — функция Бесселя порядка $2n_2$.

Представление, аналогичное (44), имеет место и в окрестности точки $B(1,0)$.

В прямоугольнике $\Omega_1 = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le b\}$ собственные функции оператора L_{DK} совпадают с собственными функциями задачи Дирихле:

$$L_{KD}\ v_n = -v_{nxx} - v_{nyy} = \lambda_n v_n, \tag{45}$$

$$v_n|_{\partial\Omega_1} = 0. \tag{46}$$

Методом разделения переменных убеждаемся в том, что собственные функции $v_n(x,y)$ представимы в виде:

$$v_{n_1,n_2}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{b}} \sin \pi n_1 x\ \sin \frac{\pi n_2}{b} y\ , \tag{47}$$

а собственные значения λ_n:

$$\lambda_n = \pi^2 \left({n_1}^2 + \frac{{n_2}^2}{b^2}\right)\ . \tag{48}$$

Собственные функции $v_n(x,y)$ оператора L_{DK} в области Ω_2 определяются как решение задачи Коши:

$$L_{DK}\ v_n = v_{nxx} - v_{nyy} = \lambda_n v_n\ , \tag{49}$$

$$v_n|_{y=0} = 0, \quad \nu_n(x) = \left.\frac{\partial v_n}{\partial y}\right|_{y=0+}. \tag{50}$$

Поэтому $v_n(x,y)$ в области Ω_2 представимы в виде (см. [5], [6])

$$v_n = \frac{1}{2} \int\limits_{x-y}^{x+y} J_0(\sqrt{4\lambda_n(x+y-t)(x-y-t)})\nu_n(t)dt\ , \tag{51}$$

где

$$\nu_n(x) = \nu_{n_1,n_2}(x) = \frac{2\pi n_2}{b\sqrt{b}} \sin \pi n_1 x. \tag{52}$$

Ввиду сложности исследования полноты функций $v_n(x,y)$, задаваемых формулой (51), спектральную задачу (49), (50) изучим другим методом.

Вместо задачи Коши (49), (50) рассмотрим смешанную задачу в области $\bar{\Omega}_2 = \{0 \le x \le 1, -d \le y \le 0\}$

$$L_{DK}\ v_n = v_{nxx} - v_{nyy} = \lambda_n v_n\ , \tag{53}$$

$$v_n\Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial v_n}{\partial y}\Big|_{y=0-} = \nu_n(x) = \frac{\partial v_n}{\partial y}\Big|_{y=0+}\ , \tag{54}$$

$$v_n|_{x=0} = v_n|_{x=1} = 0\ \ . \tag{55}$$

Имеет место

Теорема 7. *Собственные функции задачи (53)–(55) $v_n(x,y) \in C^{2+\beta}(\bar{\Omega}_2)$, полны в $L_2(\bar{\Omega}_2)$ тогда и только тогда, когда $\dfrac{b}{d} > 1$.*

Доказательство. Собственные функции задачи (53)–(55) будем искать в виде:

$$v_n(x,y) = \sqrt{2}\sum_{m=1}^{\infty} v_{n,m}(x,y)\sin \pi m x. \tag{56}$$

Поскольку

$$\frac{\partial v_n}{\partial y}\Big|_{y=0-} = \frac{\partial v_n}{\partial y}\Big|_{y=0+}, \quad \frac{2\pi n_2}{b\sqrt{b}}\sin \pi n_1 x = \sqrt{2}\sum_{m=1}^{\infty} v^{(\prime)}_{n,m}(0)\sin \pi m x = \nu_{n_1,n_2}(x), \tag{57}$$

то $m = n_1$.

С учетом этого, подставив правую часть (56) в уравнение (53), относительно неизвестной функции $v_{n_1,n_2}(y)$ получим следующую задачу:

$$-v^{(\prime\prime)}_{n,n_1}(y) = (\lambda_n + \pi^2 {n_1}^2)v_{n,n_1}(y), \quad -v^{(\prime\prime)}_{n,n_1}(y) = \pi^2(2n_1^2 + \frac{{n_2}^2}{b^2})v_{n,n_1}(y), \tag{58}$$

$$v_{n,n_1}(0) = 0, \quad v^{(\prime)}_{n,n_1}(0) = \frac{2\sqrt{2}\pi n_2}{b\sqrt{b}}. \tag{59}$$

Решая задачу (58), (59), получим:

$$v_{n,n_1}(y) = \frac{2\sqrt{2}n_2}{b\sqrt{b}}\frac{\sin \pi\sqrt{2n_1^2 + \frac{n_2^2}{b^2}}\ y}{\sqrt{2n_1^2 + \frac{n_2^2}{b^2}}}. \tag{60}$$

Поэтому собственные функции задачи (53)–(55) задаются формулой

$$v_n(x,y) = \sqrt{2}\ v_{n,n_1}(y)\sin \pi n_1 x = \frac{4n_2}{b\sqrt{b}}\frac{\sin \pi\sqrt{2n_1^2 + \frac{n_2^2}{b^2}}\ y \sin \pi n_1 x}{\sqrt{2n_1^2 + \frac{n_2^2}{b^2}}}. \tag{61}$$

Поскольку $\sqrt{2}\sin \pi n_1 x$ — полная ортонормированная система в $L_2(0,1)$, то для полноты $\{v_n(x,y)\}$ необходимо и достаточно, чтобы система функций $\left\{\sin \pi\sqrt{2n_1^2 + \frac{n_2^2}{b^2}}\ y\right\}$ была полна в $L_2(-d,0)$.

Имеет место

Теорема 8. *Система функций $\left\{\sin \pi\sqrt{2n_1^2 + \dfrac{n_2^2}{b^2}}\ y\right\}$ для произвольного фиксированного n_1 полна в $L_2(-d,0)$ тогда и только тогда, когда $\dfrac{b}{d} > 1$.*

Доказательство. Необходимость. Если $\frac{b}{d} > 1$, то при достаточно больших $\frac{n_2^2}{b^2} >> 2n_1^2$ система

$$\left\{\sin \pi \sqrt{2n_1^2 + \frac{n_2^2}{b^2}}\ y\right\} = \left\{\sin \frac{n_2}{b}\pi \sqrt{1 + \frac{2n_1^2\ b^2}{n_2^2}}\ y\right\}$$

эквивалентна неполной системе функций $\left\{\sin \frac{\pi\ n_2}{b}\ y\right\}$, $y \in (-d, 0)$. Если $\frac{b}{d} = 1$, то существует достаточно большое n_1 такое, что система $\left\{\sin \pi \sqrt{2n_1^2 + \frac{n_2^2}{b^2}}\ y\right\}$ не будет полна в $L_2(-d, 0)$, т.к. в базисе отсутствует достаточно большое количество членов. Поэтому необходимо $\frac{b}{d} > 1$.

Докажем достаточность. Положим $\frac{b}{d} > 1$. Сперва докажем полноту системы функций $\left\{\sin \frac{\pi\ n_2}{b}\ y\right\}$, $n_2 = N+1, \ldots$ Предположим, что $\left\{\sin \frac{\pi\ n_2}{b}\ y\right\}$ неполна в $L_2(-d, 0)$. Тогда существует функция $f(y) \in L_2(-d, 0)$ такая, что

$$\int\limits_{-d}^{0} f(y) \sin \frac{\pi n_2}{b} y dy = 0, \quad n_2 = N+1, \ldots. \tag{62}$$

После замены $y_1 = \frac{y}{b}$ равенство (62) перепишем в виде:

$$\int\limits_{-\frac{d}{b}}^{0} f(by_1) \sin \pi n_2 y_1 dy_1 = 0. \tag{63}$$

Продолжив функцию $f(by_1)$ на $[-1; -d/b]$ нулем из (63) получим:

$$\int\limits_{-1}^{0} \widetilde{f}(y_1) \sin \pi n_2 y_1 dy_1 = 0, \quad n_2 = N+1, N+2, \ldots, \tag{64}$$

где

$$\widetilde{f}(y_1) = \begin{cases} f(by_1), & y_1 \in (-d/b, 0) \\ 0, & y_1 \in (-1, -d/b) \end{cases}. \tag{65}$$

Поскольку система $\sqrt{2}\{\sin \pi\ n_2 y\}$ полна и ортонормирована в $L_2(-1, 0)$, то из (64)–(65) следует, что $\widetilde{f}(y_1) = \sum\limits_{n_2=1}^{N} c_{n_2} \sin \pi n_2 y_1$ и

$$\widetilde{f}(y_1) = \sum_{n_2=1}^{N} c_{n_2} \sin \pi n_2 y_1 \equiv 0, \quad y \in (-1, -d/b). \tag{66}$$

Покажем, что $c_{n_2} = 0$, $n_2 = 1, 2, \ldots, N$. Так как в соотношении (66) $\{\sin \pi n_2 y\}$ — действительные функции, то, не ограничивая общности, можно считать c_{n_2} также действительными. Поэтому вместо тождества (66) рассмотрим следующее эквивалентное тождество:

$$\sum_{n_2=1}^{N} c_{n_2} e^{in_2 y_1} \equiv 0, \quad y_1 \in (-1, -d/b). \tag{67}$$

Имеет место следующая

Лемма 3. *Тождество (67) выполняется только при* $c_{n_2} = 0$, $n_2 = 1, 2, \ldots, N$.

Действительно, при $N = 1$ из (67) имеем $c_1 = 0$. Пусть при $N = m$ наше утверждение верно. Докажем, что оно выполняется также при $N = m+1$. Перепишем тождество (67) в следующем виде:

$$c_1 e^{iy_1} + \sum_{n_2=2}^{m+1} c_{n_2} e^{in_2 y_1} \equiv 0, \quad y_1 \in (-1, -d/b). \tag{68}$$

Поделив это тождество на e^{iy_1} и продифференцировав полученное равенство по y_1, из (68) имеем:

$$i \sum_{n_2=2}^{m+1} c_{n_2}(n_2 - 1) e^{i(n_2-1)y_1} \equiv 0. \tag{69}$$

Отсюда, в силу предположения индукции, имеем

$$c_{n_2}(n_2 - 1) = 0, \quad n_2 = 2, \ldots, m+1, \quad c_{n_2} = 0, \quad n_2 = 2, \ldots, m+1.$$

Из (67) также следует, что $c_{n_1} = 0$. Лемма 3 доказана.

В пространстве $L_2(-b/d, 0)$ полная ортогональная система $\left\{ \sin \dfrac{\pi\ n_2}{b}\ y \right\}$ квадратично близка к $\left\{ \sin \pi \sqrt{2n_1^2 + \dfrac{n_2^2}{b^2}}\ y \right\}$ при любом фиксированном n_1.

Действительно, в силу свойств функций $\{\sin kx\}$ легко проверить, что

$$\sum_{n_2=1}^{\infty} \left\| \sin \frac{\pi\ n_2}{b} y - \sin \pi \sqrt{2n_1^2 + \frac{n_2^2}{b^2}}\ y \right\|^2_{L_2(-b/d,0)} \leq \sum_{n_2=1}^{\infty} C \left| \frac{n_1^2}{n_2^2} b^2 \right| < \infty. \tag{70}$$

Таким образом, согласно [4, стр.381] система функций $\left\{ \sin \pi \sqrt{2n_1^2 + \dfrac{n_2^2}{b^2}}\ y \right\}$ образует базис Рисса в $L_2(-b/d, 0)$.

Применяя аналогичное рассуждение к системе

$$\left\{ \sin \pi \sqrt{2n_1^2 + \frac{n_2^2}{b^2}}\ y \right\}, \ n_2 = 1, 2 \ldots$$

получим, что эта система также полна в $L_2(-d, 0)$ при любом фиксированном n_1. Теорема 8 доказана.

Так как в области $\widetilde{\Omega}_2$ выполняется соотношение $2b > 1$, то собственные функции задачи (53)–(55) полны в $L_2(\Omega_2)$. Собственные функции задачи (53)–(55) в области Ω_2 в силу единственности решения задачи Коши совпадают с решением задачи Коши, определяемым формулой (51) и образуют полную систему в $L_2(\Omega_2)$. Теорема 7 доказана.

Теперь докажем неполноту собственных функций оператора L_{DK} в области Ω. Пусть $f^- \in C_0^\infty(\Omega_2)$, f^- — произвольная функция. Тогда легко проверить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (f^-, v_n^-)_{L_2(\Omega_2)} \right|^2 < \infty. \tag{71}$$

В области Ω_1 функцию f^+ запишем следующим образом:

$$f^+(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} -(f^-, v_n^-)_{L_2(\Omega_2)}\ v_n^+\ , \tag{72}$$

где v_n^+ — полная ортонормированная система собственных функций задачи Дирихле, т.е.

$$-\triangle v_n^+ = \lambda_n v_n^+, \quad v_n^+|_{\sigma\cup AB} = 0\ . \tag{73}$$

Согласно (71) функция $f^+ \in L_2(\Omega_1)$. Определим функцию f следующим образом

$$f = \begin{cases} f^+, & (x,y) \in \Omega_1, \\ f^-, & (x,y) \in \Omega_2. \end{cases} \tag{74}$$

Тогда имеем, что:

$$\begin{gathered}(f, v_n)_0 = (f, v_n^+)_{L_2(\Omega_1)} + (f, v_n^-)_{L_2(\Omega_2)} = (f^+, v_n^+)_{L_2(\Omega_1)} + \\ +(f^-, v_n^-)_{L_2(\Omega_2)} = -(f^-, v_n^-)_{L_2(\Omega_2)} + (f^-, v_n^-)_{L_2(\Omega_2)} = 0\ ,\end{gathered} \tag{75}$$

т.е.

$$(f, v_n)_0 = 0, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{76}$$

Таким образом, нетривиальная функция f ортогональна ко всем элементам системы $\{v_n(x,y)\}$ в $L_2(\Omega)$. Следовательно, система функций $\{v_n(x,y)\}$ не полна в $L_2(\Omega)$.

Теорема 6 полностью доказана.

Цитированная литература

1. **Михлин С. Г.** Курс математической физики. М.: Наука, 1968.
2. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.
3. **Кондратьев В. А.** // Труды ММО. 1967. Т. 16. С. 209 – 292.
4. **Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.** Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М: Наука, 1965.
5. **Бицадзе А. В.** Некоторые классы уравнений в частных производных. М.:Наука, 1981.
6. **Справочник по специальным функциям.** Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. М.: Наука, 1979.
7. **Бицадзе А. В.** Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1959.
8. **Кальменов Т. Ш.** Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Шымкент: Гылым, 1993.
9. **Соболев С. Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
10. **Треногин В. А.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию 29.10.2001г.

Математический журнал. *Алматы. 2001. Том 1. № 2. С. 42 — 51*

УДК 517.948.34

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НАЧАЛЬНЫМИ СКАЧКАМИ ЛЮБОГО ПОРЯДКА

М. К. Дауылбаев

КазНУ им. аль-Фараби
480012, Алматы, Масанчи ул., 39/47

Рассматриваются сингулярно возмущенные нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с начальными условиями на правом конце заданного отрезка. Показано, что решение этой задачи на левом конце отрезка обладает явлениями начальных скачков любого порядка. Доказана теорема существования и единственности асимптотического решения.

Постановка задачи. Рассмотрим на отрезке [0,1] следующее нелинейное интегро- дифференциальное уравнение с малым параметром $\varepsilon > 0$:

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y^{(n)} + A_1(t,y,y',\dots,y^{(l)})y^{(n-1)} + A_2(t,y,y',\dots,y^{(l)})y^{(n-2)}+$$
$$+\dots + A_{n-1-l}(t,y,y',\dots,y^{(l)})y^{(l+1)} + A_{n-l}(t,y,y',\dots,y^{(l)}) = \tag{1}$$
$$= \int\limits_0^1 \Big[H_1(t,x,y,y',\dots,y^{(l)})y^{(l+1)}(x) + \dots + H_{m+1-l}(t,x,y,y',\dots,y^{(l)})y^{(m+1)}(x)\Big]\,dx,$$

с начальными условиями:

$$y(1,\varepsilon) = \alpha_0, \quad y'(1,\varepsilon) = \alpha_1, \ \dots, \ y^{(n-1)}(1,\varepsilon) = \alpha_{n-1}, \tag{2}$$

где $\alpha_i (i = \overline{0, n-1})$ — некоторые известные постоянные, l — заданное целое число, удовлетворяющее неравенствам $0 \le l \le n-3$, а m — произвольное целое число, принимающее значения от $l+1$ до $n-2$, т. е. $m = \overline{l+1, n-2}$.

Пусть выполнены следующие условия:

I. Функции $A_1(t,y,y',\dots,y^{(l)})$, $i = \overline{1, n-l}$ в области $D_1 = \{0 \le t \le 1, \ \left|y^{(i)}\right| < \infty, \ i = \overline{0,l}\}$, а $H_j(t,x,y,y',\dots,y^{(l)})$, $j = \overline{1, m+1-l}$ в области $D_2 = \{0 \le t \le 1, \, 0 \le x \le 1, \, \left|y^{(i)}\right| < \infty, \ i = \overline{0,l}\}$ являются достаточно гладкими и $H_{m+1-l}(t,0,y(0),\dots,y^{(l)}(0)) \ne 0$, $0 \le t \le 1$.

II. Функция $A_1(t,y,y',\dots,y^{(l)})$ в области D_1 удовлетворяет неравенству:

$$A_1(t,y,y',\dots,y^{(l)}) \ge \overline{\gamma} = \text{const} > 0.$$

Keywords: *asymptotic solution, singular perturbation, initial jump*
2000 Mathematics Subject Classification: 34D15

Известно [1, 2], что при условии устойчивости II решение обыкновенного дифференциального уравнения $L_\varepsilon y = 0$ с начальными условиями (2) при $\varepsilon \to 0$ стремится к бесконечности в полуинтервале $0 \le t < 1$, т.е. не имеет конечного предела. В данной работе доказывается, что для решения $y(t,\varepsilon)$ задачи (1), (2) имеет место предельное равенство:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y^{(l)}(t,\varepsilon) = \begin{cases} \overline{y}(t),\ i=\overline{0,m-1}, & 0\le t\le 1,\\ \overline{y}(t),\ i=\overline{m,n-1}, & 0< t\le 1,\end{cases}$$

где $\overline{y}(t)$ не является решением обычного вырожденного уравнения, получаемого из исходного уравнения (1) при $\varepsilon = 0$, а является решением измененного вырожденного уравнения:

$$L_0\overline{y} \equiv \Delta(t) + \int\limits_0^1 \Big[H_1(t,x,\overline{y},\ldots,\overline{y}^{(l)})\overline{y}^{(l+1)}(x) + \cdots + H_{m+1-l}(t,x,\overline{y},\ldots,\overline{y}^{(l)})\overline{y}^{(m+1)}(x)\Big]\,dx \qquad (3)$$

с начальными условиями

$$\overline{y}(1) = \alpha_0, \quad \overline{y}'(1) = \alpha_1,\ \ldots,\ \overline{y}^{(n-2)}(1) = \alpha_{n-2}, \qquad (4)$$

где $\Delta(t)$ — так называемый начальный скачок интегрального члена.

Для построения асимптотики решения задачи (1), (2) предварительно рассматривается вспомогательная задача Коши с начальным скачком m-го порядка в точке $t=0$:

$$y(0,\varepsilon) = c^0(\varepsilon),\ \ldots,\ y^{(m)}(0,\varepsilon) = c^m(\varepsilon), \quad y^{(l)}(0,\varepsilon) = \frac{c^i(\varepsilon)}{\varepsilon^{i-m}},\ i=\overline{m+1,n-1}, \qquad (5)$$

где $c^i(\varepsilon)$ — регулярно зависящие от ε неизвестные постоянные, имеющие следующие асимптотические представления:

$$c^i(\varepsilon) = c_0^i + \varepsilon c_1^i + \ldots,\ \ c_0^i \ne 0,\ \ i = \overline{0,n-1}, \qquad (6)$$

а c_k^i, $k = 0,1,\ldots$ — пока неизвестные коэффициенты разложения (6), подлежащие определению. Коэффициенты c_k^i, $i=\overline{0,n-1}$, $k=\overline{0,i-m-1}$ назовем *сингулярными*, так как именно за счет них начальные условия $y^{(i)}(0,\varepsilon)$, $i=\overline{m+1,n-1}$ становятся бесконечно растущими (сингулярными) при $\varepsilon\to 0$, а остальные c_k^i, $i=\overline{0,n-1}$, $k\ge i-m$ — *регулярными* коэффициентами.

Для вспомогательной задачи (1), (5) вырожденной задачей является измененное вырожденное уравнение (3) с начальными условиями:

$$\overline{y}(0) = c_0^0,\ \ldots,\ \overline{y}^{(m-1)}(0) = c_0^{m-1}, \quad \overline{y}^{(m)}(0) = c_0^m + \Delta_m, \quad \overline{y}^{(i)}(0) = \widetilde{c}_0^i,\ i=\overline{m+1,n-2}, \qquad (7)$$

где $\widetilde{c}_0^i$ — вспомогательные коэффициенты, выражаемые формулой:

$$\widetilde{c}_0^i = c_{i-m}^i - \frac{(-1)^{n-1-i}}{A_1^{n-1-i}(0,c_0^0,\ldots,c_0^l)}\left[c_{i-m}^{n-1} + \int\limits_0^\infty \sum_{j=0}^{n-2-i}\frac{\tau^j}{j!}A_1^j(0,c_0^0,\ldots,c_0^l)\Phi_{i-m}(\tau)d\tau\right], \qquad (8)$$

$i = \overline{m+1,n-2}$, $\Phi_k(\tau)$ — известная функция, а $\Delta(t)$, Δ_m — так называемые начальные скачки интегральных членов и m-ой производной решения соответственно, определяемые из формул начального скачка:

$$\Delta(t) = H_{m+1-l}(t,0,c_0^0,\ldots,c_0^l)\Delta_m, \quad \Delta_m = \frac{(-1)^{n-2-m}}{A_1^{n-1-m}(0,c_0^0,\ldots,c_0^l)}c_0^{n-1}. \qquad (9)$$

III. Пусть вырожденная задача (3), (7) на $0\le t\le 1$ имеет единственное решение $\overline{y}(t)$.

Вспомогательная задача. Асимптотическое решение задачи (1), (5) ищем в виде:

$$y(t,\varepsilon)=y_\varepsilon(t)+\varepsilon^m w_\varepsilon(\tau),\ \ \tau=\frac{t}{\varepsilon}\ , \tag{10}$$

где $y_\varepsilon(t)$ — так называемая регулярная часть и $w_\varepsilon(\tau)$ — погранслойная часть разложения (10), определяемые в виде следующих разложений:

$$y_\varepsilon(t)=y_0(t)+\varepsilon y_1(t)+\dots,\quad w_\varepsilon(\tau)=w_0(\tau)+\varepsilon w_1(\tau)+\dots. \tag{11}$$

Теперь подставляя (10) (с учетом (11)) в (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим последовательность интегро-дифференциальных уравнений для определения $y_k(t)$, $k\geq 0$ и последовательность обыкновенных дифференциальных уравнений для определения $w_k(\tau)$, $k\geq 0$.

Для $y_0(t)$ имеем нелинейное интегро-дифференциальное уравнение:

$$A_1(t,y_0,\dots,y_0^{(l)})y_0^{(n-1)}+\dots+A_{n-1-l}(t,y_0,\dots,y_0^{(l)})y_0^{(l+1)}+A_{n-l}(t,y_0,\dots,y_0^{(l)})=$$

$$=\int\limits_0^1\Big[H_1(t,x,y_0(x),\dots,y_0^{(l)}(x))y_0^{(l+1)}(x)+\dots+H_{m+1-l}(t,x,y_0(x),\dots,y_0^{(l)}(x))y_0^{(m+1)}(x)\Big]dx+$$

$$+\int\limits_0^\infty H_{m+1-l}(t,0,y_0(0),\dots,y_0^{(l)}(0))\overset{(m+1)}{w_0}(s)ds. \tag{12}$$

Коэффициенты $y_k(t)$, $k\geq 1$ определяются из линейного интегро- дифференциального уравнения:

$$A_1(t,y_0,\dots,y_0^{(l)})y_k^{(n-1)}(t)+\dots+A_{n-1-l}(t,y_0,\dots,y_0^{(l)})y_k^{(l+1)}(t)+$$

$$+\sum_{j=0}^{l}\Big[A'_{1y^{(j)}}(t,y_0,\dots,y_0^{(l)})y_0^{(n-1)}(t)+\dots+A'_{n-1-l,y^{(j)}}(t,y_0,\dots,y_0^{(l)})y_0^{(l+1)}(t)+$$

$$+A'_{n-l,y^{(j)}}(t,y_0,\dots,y_0^{(l)})\Big]y_k^{(j)}(t)=\int\limits_0^1\Bigg\{\sum_{j=0}^{l}\Big[H'_{1,y^{(j)}}(t,x,y_0(x),\dots,y_0^{(l)}(x))y_0^{(l+1)}(x)+\dots+$$

$$+H'_{m+1-l,y^{(j)}}(t,x,y_0(x),\dots,y_0^{(l)}(x))y_0^{(m+1)}(x)\Big]y_k^{(j)}(x)+H_1(t,x,y_0(x),\dots,y_0^{(l)}(x))y_k^{(l+1)}(x)+$$

$$+\dots+H_{m+1-l}(t,x,y_0(x),\dots,y_0^{(l)}(x))y_k^{(m+1)}(x)\Bigg\}dx+F_k(t), \tag{13}$$

где $F_k(t)$ — известная функция, зависящая от $y_i(t)$, $i<k$.

Функция $w_0(\tau)$ определяется из однородного обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\overset{(n)}{w}{}_0(\tau)+A_1\left(0,y_0(0),\dots,y_0^{(l)}(0)\right)\overset{(n-1)}{w}{}_0(\tau)=0, \tag{14}$$

а для $w_k(\tau)$, $k=1,2,\dots$ имеем неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\overset{(n)}{w}{}_k(\tau)+A_1\left(0,y_0(0),\dots,y_0^{(l)}(0)\right)\overset{(n-1)}{w}{}_k(\tau)=\Phi_k(\tau), \tag{15}$$

где $\Phi_k(\tau)$ — известная функция, зависящая от $w_i(\tau)$, $i<k$.

Определим теперь начальные условия для коэффициентов $y_k(t)$, $w_k(\tau)$, $k\geq 0$. Подставляя (10) с учетом (11) в начальные условия (5) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим

$$y_0^{(i)}(0)=\begin{cases} c_0^i, & i<m,\\ c_0^i-\overset{(i)}{w}_{i-m}(0), & i=m,\end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
&y_0^{(i)}(0) = c_{i-m}^i - \overset{(i)}{w}_{i-m}(0), \quad i = \overline{m+1, n-1},\\
&\overset{(i)}{w}_0(0) = c_0^i, \qquad\qquad\qquad\quad i = \overline{m+1, n-1},
\end{aligned}
$$

$$
y_k^{(i)}(0) = \begin{cases} c_k^i, & k+i < m, \\ c_k^i - \overset{(i)}{w}_{k+i-m}(0), & k+i \geq m, \end{cases} \quad i = \overline{0, m},
$$

$$
\begin{aligned}
&y_k^{(i)}(0) = c_{k+i-m}^i - \overset{(i)}{w}_{k+i-m}(0) \qquad i = \overline{m+1, n-1},\\
&\overset{(i)}{w}_k(0) = c_k^i, \quad k = \overline{1, n-2-m}, \quad i = \overline{m+1+k, n-1}.
\end{aligned} \tag{16}
$$

Из (16) для коэффициента $w_0(\tau)$ имеем начальные условия:

$$
\overset{(m+1)}{w}_0(0) = c_0^{m+1}, \quad \overset{(m+2)}{w}_0(0) = c_0^{m+2}, \ \ldots, \ \overset{(n-1)}{w}_0(0) = c_0^{n-1}, \tag{17}
$$

но при этом между сингулярными коэффициентами $c_0^{m+1}, \ldots, c_0^{n-2}$, c_0^{n-1} будет зависимость, выражаемая формулой:

$$
c_0^i = \frac{(-1)^{n-1-i} c_0^{n-1}}{A_1^{n-1-i}(0, y_0(0), \ldots, y_0^{(l)}(0))}, \quad i = \overline{m+1, n-2}. \tag{18}
$$

Действительно, интегрируем (14) от 0 до ∞ и потребуем выполнения условий: $\overset{(n-1)}{w}_0(\infty) = \overset{(n-2)}{w}_0(\infty) = 0$. Тогда получаем

$$
\overset{(n-1)}{w}_0(0) + A_1(0, y_0(0), \ldots, y_0^{(l)}(0)) \overset{(n-2)}{w}_0(0) = 0. \tag{19}
$$

Из (19) с учетом (17) имеем формулу (18) для $i = n-2$.

Продолжая этот процесс последовательного понижения порядка уравнения (14), интегрированием сначала от 0 до τ, а затем от 0 до ∞, на $(n-2-m)$-ом шаге, требуя $\overset{(m+1)}{w}_0(\infty) = 0$, имеем $\overset{(m+2)}{w}_0(0) + A_1(0) \overset{(m+1)}{w}_0(0) = 0$. Отсюда, с учетом (17) и предыдущей связи между коэффициентами c_0^{m+2}, c_0^{n-1}, получаемой на $(n-3-m)$-ом шаге, устанавливаем справедливость формулы (18) для $i = m+1$.

Чтобы найти недостающие начальные условия $\overset{(m)}{w}_0(0)$, $\overset{(m-1)}{w}_0(0), \ldots, w_0(0)$, продолжаем процесс последовательного понижения порядка уравнения (14), требуя $\overset{(i)}{w}_0(\infty) = 0$, $i = \overline{0, m}$ и учитывая (17), (18). Имеем:

$$
\overset{(m)}{w}_0(0) = \frac{(-1)^{n-1-m} c_0^{n-1}}{A_1^{n-1-m}(0, y_0(0), \ldots, y_0^{(l)}(0))}, \ \ldots, \ w_0(0) = \frac{(-1)^{n-1} c_0^{n-1}}{A_1^{n-1}(0, y_0(0), \ldots, y_0^{(l)}(0))}. \tag{20}
$$

Итак, объединяя условия (17), (20) и учитывая (18), определим начальные условия для $w_0(\tau)$ следующим образом:

$$
\overset{(i)}{w}_0(0) = \frac{(-1)^{n-1-i} c_0^{n-1}}{A_1^{n-1-i}(0, y_0(0), \ldots, y_0^{(l)}(0))}, \quad i = \overline{0, n-1}. \tag{21}
$$

Аналогично, при выполнении условий

$$
c_k^i = \frac{(-1)^{n-1-i}}{A_1^i(0, y_0(0), \ldots, y_0^{(l)}(0))} \left[c_k^{n-1} + \int_0^\infty \sum_{j=0}^{n-2-i} \frac{\tau^j}{j!} A_1^j(0, y_0(0), \ldots, y_0^{(l)}(0)) \Phi_k(\tau) d\tau \right],
$$

$$
k = \overline{1, n-3-m}, \qquad i = \overline{m+k+1, n-2}, \tag{18_k}
$$

для $w_k(\tau)$, $k \geq 1$ имеем начальные условия:

$$\overset{(i)}{w}_k(0) = \frac{(-1)^{n-1-i}}{A_1^{n-1-i}(0, y_0(0), \ldots, y_0^{(l)}(0))} \left[c_k^{n-1} - y_{k-n+m+1}^{(n-1)}(0) + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty \sum_{j=0}^{n-2-i} \frac{\tau^j}{j!} A_1^j(0, y_0(0), \ldots, y_0^{(l)}(0)) \Phi_k(\tau) d\tau \right], \;\; i = \overline{0, n-1}, \tag{22}$$

где $y_k^{(n-1)}(0) \equiv 0$ при $k < n-1-m$.

Для коэффициентов $w_k(\tau)$, $k \geq 0$ разложения (10), (11), определяемых из задач (14), (21) и (15), (22) при $\tau \geq 0$ и (18), (18_k), справедливы оценки:

$$\left| \overset{(i)}{w}_k(\tau) \right| \leq K \exp(-\gamma \tau), \quad i = \overline{0, n-1}, \tag{23}$$

где $K > 0$ и $\overline{\gamma} > \gamma > 0$ — некоторые постоянные, не зависящие от t, ε.

Для коэффициента $y_0(t)$ из (16) получаем начальные условия:

$$y_0(0) = c_0^0, \;\ldots,\; y_0^{(m-1)}(0) = c_0^{m-1}, \quad y_0^{(m)}(0) = c_0^m + \Delta_m, \quad y_0^{(i)}(0) = \widetilde{c}_0^i, \; i = \overline{m+1, n-2}, \tag{24}$$

где $\widetilde{c}_0^i$ выражается формулой (8), а Δ_m — начальный скачок m-ой компоненты решения, имеющий вид (9).

Коэффициенты $y_k(t)$, $k \geq 1$ с учетом (16) определяются из начальных условий:

$$y_k^{(i)}(0) = \begin{cases} c_k^i, & k+i < m \\ c_k^i - \overset{(i)}{w}_{k+i-m}, & k+i \geq m \end{cases}, \; i = \overline{0, m}, \; y_k^{(i)}(0) = \widetilde{c}_k^i, \; i = \overline{m+1, n-2}, \tag{25}$$

где $\widetilde{c}_k^i$ — вспомогательный коэффициент, введенный с учетом (22) вместо основных коэффициентов c_{k+i-m}^i формулой:

$$\widetilde{c}_k^i = c_{k+i-m}^i - \frac{(-1)^{n-1-i}}{A_1^{n-1-i}(0, c_0^0, \ldots, c_0^l)} \left[c_{k+i-m}^{n-1} - y_{k+i-n+1}^{(n-1)}(0) + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty \sum_{j=0}^{n-2-i} \frac{\tau^j}{j!} A_1^j(0, c_0^0, \ldots, c_0^l) \Phi_{k+i-m}(\tau) d\tau \right], \;\; i = \overline{m+1, n-2}. \tag{26}$$

Итак, уравнения (12), (13) решаем при начальных условиях (24), (25), а уравнения (14), (15) — при начальных условиях (21), (22), соответственно, и, тем самым, нулевые и k-ые ($k \geq 1$) приближения определены полностью.

Сопоставляя вырожденную задачу (12), (24) с учетом (21) и задачу (3), (7), можно получить формулу начального скачка (9).

Уточним условие I о порядке дифференцируемости $A_i(t, y, \ldots, y^{(l)})$, $H_j(t, x, y, \ldots, y^{(l)})$ и обозначим это уточнение опять через I.

I. Пусть $A_i(t, y, \ldots, y^{(l)})$,$i = \overline{1, n-l}$ и $H_j(t, x, y, \ldots, y^{(l)})$, $j = \overline{1, m+1-l}$ имеют непрерывные частные производные по всем аргументам до $(N+n-m)$ - го порядка включительно.

При этом условии образуем частичную сумму разложения (10):

$$\overline{y}_N(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k y_k(t) + \varepsilon^m \sum_{k=0}^{N+n-1-m} \varepsilon^k w_k(\tau). \tag{27}$$

Докажем теперь теорему о существовании, единственности и об оценке остаточного члена асимптотики решения задачи (1), (5). Для этого обозначим

$$y(t,\varepsilon)=\overline{y}_N(t,\varepsilon)+R_N(t,\varepsilon),\quad \tau=t/\varepsilon, \tag{28}$$

где $\overline{y}_N(t,\varepsilon)$ выражается формулой (27).

Подставим (28) в (1), (5) и введем вместо остаточного члена $R_N(t,\varepsilon)$ функцию $P_N(t,\varepsilon)$ по формуле $R_N(t,\varepsilon)=P_N(t,\varepsilon)+h_N(t,\varepsilon)$, где функция $h_N(t,\varepsilon)$ выражается формулой: $h_N(t,\varepsilon)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{t^k}{k!}R_N^{(k)}(0,\varepsilon)$. Обозначая $P_N^{(i)}(t,\varepsilon)=P_i(t,\varepsilon), i=\overline{0,n-1}$, получим для $P_N(t,\varepsilon)$ систему:

$$\begin{cases} \varepsilon P'_{n-1}(t,\varepsilon)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_k(t,\varepsilon)P_k(t,\varepsilon)+\int\limits_0^1\sum\limits_{k=0}^{m+1}b_k(t,x,\varepsilon)P_k(x,\varepsilon)dx+G_\varepsilon(P_0,\ldots,P_{n-1}) \\ P'_i(t,\varepsilon)=P_{i+1}(t,\varepsilon), i=\overline{0,n-2} \end{cases} \tag{29}$$

с начальными условиями

$$P_0(0,\varepsilon)=0,\ \ldots,\ P_{n-1}(0,\varepsilon)=0, \tag{30}$$

где

$$a_k(t,\varepsilon)=\begin{cases} -\sum\limits_{i=1}^{n-1-l}A_{i,y^{(k)}}(t,\overline{y}_N,\ldots,\overline{y}_N^{(l)})\overline{y}_N^{(n-i)}(t,\varepsilon)-A_{n-l,y^{(k)}}(t,\overline{y}_N,\ldots,\overline{y}_N^{(l)}), k=\overline{0,l}, \\ -A_{n-k}(t,\overline{y}_N,\ldots,\overline{y}_N^{(l)}), \qquad k=\overline{l+1,n-1}, \end{cases}$$

$$b_k(t,x,\varepsilon)=\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m+1-l}H_{i,y^{(k)}}(t,x,\overline{y}_N,\ldots,\overline{y}_N^{(l)})\overline{y}_N^{(l+i)}(x,\varepsilon), & k=\overline{0,l}, \\ H_{k-l}(t,x,\overline{y}_N,\ldots,\overline{y}_N^{(l)}), & k=\overline{l+1,m+1}, \end{cases}$$

$$G_\varepsilon(P_0,\ldots,P_{n-1})=-\sum_{k=0}^{n-1}a_k(t,\varepsilon)P_k(t,\varepsilon)-\int\limits_0^1\sum_{k=0}^{m+1}b_k(t,x,\varepsilon)P_k(x,\varepsilon)dx-$$

$$-\sum_{i=1}^{n-1-l}A_i(t,\overline{y}_N+P_0+h_N,\ldots,\overline{y}_N^{(l)}+P_l+h_N^{(l)})(\overline{y}_N^{(n-i)}+P_{n-i}+h_N^{(n-i)})-A_{n-l}(t,\ldots)+$$

$$+\int\limits_0^1\sum_{i=1}^{m+1-l}H_i(t,x,\overline{y}_N+P_0+h_N,\ldots,\overline{y}_N^{(l)}+P_l+h_N^{(l)})(\overline{y}_N^{(l+i)}+P_{l+i}+h_N^{(l+i)})dx-\varepsilon\overline{y}_N^{(n)}(t,\varepsilon).$$

Пусть функции $U_i(t,s,\varepsilon), i=\overline{0,n-1}, 0\le s\le t\le 1$ по t являются решениями линейной системы уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon U'_{n-1}(t,s,\varepsilon)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_k(t,\varepsilon)U_k(t,s,\varepsilon) \\ U'_i(t,s,\varepsilon)=U_{i+1}(t,s,\varepsilon), i=\overline{0,n-2} \end{cases} \tag{31}$$

с начальными условиями

$$U_0(s,s,\varepsilon)=0,\ \ldots,\ U_{n-2}(s,s,\varepsilon)=0,\quad U_{n-1}(s,s,\varepsilon)=1. \tag{32}$$

Заменим теперь задачу (29), (30) с помощью (31), (32) следующей эквивалентной системой интегральных уравнений

$$P(t,\varepsilon)=f(P)+\int\limits_0^1 L(t,x,\varepsilon)P(x,\varepsilon)dx, \tag{33}$$

где $P=(P_0,\ldots,P_{n-1}), f(P)=(f_0(P),\ldots,f_{n-1}(P)), L=(L_{ij}), i,j=\overline{0,n-1}$, а

$$f_i(P_0(t,\varepsilon),\ldots,P_{n-1}(t,\varepsilon))=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t U_i(t,s,\varepsilon)G_\varepsilon(P_0(s,\varepsilon),\ldots,P_{n-1}(s,\varepsilon))ds,$$

$$L_{ij}(t,x,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t U_i(t,s,\varepsilon)b_j(s,x,\varepsilon)ds, j=\overline{0,m+1}, L_{ij}(t,x,\varepsilon)=0, j=\overline{m+2,n-1}.$$

IV. Пусть $L(t,x,\varepsilon)$ при достаточно малых ε не находится на спектре.

Тогда интегральное уравнение (33) имеет единственное решение

$$P(t,\varepsilon)=f(P)+\int\limits_0^1 Q(t,x,\varepsilon)f(P(x,\varepsilon))dx\equiv\Phi(P), \tag{34}$$

где $Q(t,x,\varepsilon)$ — резольвента ядра $L(t,x,\varepsilon)$.

Решая уравнение (34) методом последовательных приближений, можно доказать существование и единственность решения уравнения (34) или, что то же самое, решение задачи (1), (5) и получить для остаточного члена $R_N(t,\varepsilon)$ оценки

$$\left|R_N^{(i)}(t,\varepsilon)\right|\le K\varepsilon^{N+1},\quad i=\overline{0,n-1},\quad 0\le t\le 1, \tag{35}$$

где $N\ge 0$ — любое целое число, $K>0$ — некоторая постоянная, не зависящая от t и ε.

Тем самым, доказана следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия I–IV. Тогда при достаточно малых ε решение $y(t,\varepsilon)$ задачи Коши с начальным скачком (1), (5) на отрезке $[0,1]$ существует, единственно и допускает асимптотическое представление (28), где $\overline{y}_N(t,\varepsilon)$ выражается формулой (27), а для остаточного члена $R_N(t,\varepsilon)$ справедливы оценки (35).*

Основная задача. Решение задачи Коши с начальным скачком (1), (5) обозначим через $y(t,c^0,\ldots,c^{n-2},c^{n-1},\varepsilon)$. Постоянные $c^0,\ldots,c^{n-2},c^{n-1}$ подберем так, чтобы решение $y(t,c^0,\ldots,c^{n-2},c^{n-1},\varepsilon)$ удовлетворяло при $t=1$ условиям (2):

$$y^{(i)}(1,c^0,\ldots,c^{n-2},c^{n-1},\varepsilon)=\alpha_i,\quad i=\overline{0,n-1}. \tag{36}$$

Подставим (10) с учетом (11) в (36). При этом вместо точного решения $y(t,c^0,\ldots,c^{n-2},c^{n-1},\varepsilon)$ подставим его асимптотическое разложение, в котором будем указывать на зависимость y_k не только от t, но и от $c_k^0,\ldots,c_k^{n-2}, c_k^{n-1}$. В силу оценок (23), сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, из (36) имеем следующие системы уравнений:

$$y_0^{(i)}(1,c_0^0,\ldots,c_0^m,\widetilde{c}_0^{m+1},\ldots,\widetilde{c}_0^{n-2},c_0^{n-1})=\alpha_i,\quad i=\overline{0,n-1}, \tag{37}$$

$$y_k^{(i)}(1,c_k^0,\ldots,c_k^m,\widetilde{c}_k^{m+1},\ldots,\widetilde{c}_k^{n-2},c_k^{n-1})=0,\quad k=1,2,\ldots,\quad i=\overline{0,n-1}. \tag{38}$$

Теперь продифференцируем задачу (12), (24) по параметрам $c_0^0,\ldots,c_0^m,\widetilde{c}_0^{m+1},\ldots,\widetilde{c}_0^{n-2},c_0^{n-1}$. Введя обозначение

$$v_k(t)=\begin{cases}\dfrac{\partial y_0(t)}{\partial c_0^k}, & k=\overline{0,m},\ k=n-1,\\[2ex] \dfrac{\partial y_0(t)}{\partial \widetilde{c}_0^k}, & k=\overline{m+1,n-2},\end{cases},$$

для $v_k(t)$ получим следующее линейное интегро-дифференциальное уравнение:

$$v_k^{(n-1)}(t)+\sum_{i=0}^{n-2}\overline{A}_i(t)v_k^{(i)}(t)=\int\limits_0^1\sum_{j=0}^{m+1}\overline{H}_j(t,x)v_k^{(j)}(x)dx+Q_k(t),\;\; k=\overline{0,n-1} \tag{39}$$

с начальными условиями:

$$v_k^{(j)}(0)=\begin{cases}1, & k=j, \quad j=\overline{0,n-2}, \qquad j\neq m, \quad k=\overline{0,l},\\ 0, & k\neq j, \quad j=\overline{0,n-2}, \qquad j\neq m, \quad k=\overline{0,l},\\ \dfrac{(-1)^{n-1-m}c_0^{n-1}(n-1-m)A'_{1y^{(k)}}(0,c_0^0,\ldots,c_0^l)}{A_1^{n-m}(0,c_0^0,\ldots,c_0^l)}, & j=m, \quad k=\overline{0,l},\end{cases}$$

$$v_k^{(j)}(0)=\begin{cases}1, & k=j\\ 0, & k\neq j\end{cases},\; j=\overline{0,n-2}, \quad k=\overline{l+1,n-2}, \tag{40}$$

$$v_{n-1}^{(j)}(0)=\begin{cases}0, & j\neq m\\ \dfrac{(-1)^{n-2-m}}{A_1^{n-1-m}(0,c_0^0,\ldots,c_0^l)}, & j=m\end{cases},\; j=\overline{0,n-2},$$

где $\overline{A}_i(t)$, $\overline{H}_j(t,x)$, $Q_k(t)$ — известные функции, выражаемые через коэффициенты (1).

Решение $v_k(t)$ задачи (39), (40) имеет вид:

$$v_k(t)=\sum_{i=0}^{n-2}v_k^{(i)}(0)u_i(t)+\int\limits_0^t K_{n-2}(t,s)\left[Q_k(s)+\int\limits_0^1 R(s,x)Q_k(x)dx\right]ds, \tag{41}$$

где

$$u_i(t)=K_i(t,0)+\int\limits_0^t K_{n-2}(t,s)\int\limits_0^1\sum_{j=0}^{m+1}K_i^{(j)}(x,0)\left[\overline{H}_j(s,x)+\int\limits_0^1 R(s,p)\overline{H}_j(p,x)dp\right]dxds,$$

а $K_i(t,s)$, $i=\overline{0,n-2}$, $0\le s\le t\le 1$ являются функциями Коши.

Предположим, что выполнено условие

V. Система алгебраических уравнений (37) имеет единственное решение $\overline{c}_0^0,\ldots,\overline{c}_0^m,\overline{\widetilde{c}}_0^{m+1},\ldots,$ $\overline{\widetilde{c}}_0^{n-2}$, $\overline{c}_0^{n-1}$ и справедливо неравенство:

$$\Delta_0\equiv\begin{vmatrix} v_0(1) & v_1(1) & \ldots & v_{n-1}(1)\\ v_0'(1) & v_1'(1) & \ldots & v_{n-1}'(1)\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ v_0^{(n-1)}(1) & v_1^{(n-1)}(1) & \ldots & v_{n-1}^{(n-1)}(1)\end{vmatrix}\neq 0,$$

при $c_0^0=\overline{c}_0^0,\ldots,c_0^m=\overline{c}_0^m$, $\widetilde{c}_0^{m+1}=\overline{\widetilde{c}}_0^{m+1},\ldots,\widetilde{c}_0^{n-2}=\overline{\widetilde{c}}_0^{n-2}$, $c_0^{n-1}=\overline{c}_0^{n-1}$.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1 и условие V. Тогда при достаточно малых ε в некоторой достаточно малой окрестности $\overline{c}_0^0,\ldots,\overline{c}_0^m$, $\overline{\widetilde{c}}_0^{m+1},\ldots,\overline{\widetilde{c}}_0^{n-2}$, $\overline{c}_0^{n-1}$ существуют единственные $c^0=c^0(\varepsilon),\ldots,c^m=c^m(\varepsilon)$, $c^{m+1}=c^{m+1}(\varepsilon),\ldots,c^{n-2}=c^{n-2}(\varepsilon)$, $c^{n-1}=c^{n-1}(\varepsilon)$ такие, что решение $y(t,c^0,\ldots,c^{n-2},c^{n-1},\varepsilon)$ сингулярно возмущенной задачи (1), (5) на отрезке $0\le t\le 1$ является единственным решением $y(t,\varepsilon)$ сингулярно возмущенной задачи (1), (2) и это решение допускает следующее асимптотическое представление:*

$$y(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k y_k(t,\overline{c}_k^0,\ldots,\overline{c}_k^m,\overline{\widetilde{c}}_k^{m+1},\ldots,\overline{\widetilde{c}}_k^{n-2},\overline{c}_k^{n-1})+\varepsilon^m\sum_{k=0}^{N+n-1-m}\varepsilon^k w_k(\tau)+R_N(t,\varepsilon),\;\; \tau=\frac{t}{\varepsilon}, \tag{42}$$

а остаточный член $R_N(t,\varepsilon)$ имеет оценки:

$$\left|R_N^{(i)}(t,\varepsilon)\right| \le K\varepsilon^{N+1}, \quad i=\overline{0,n-1}, \quad 0\le t\le 1, \tag{43}$$

где $K>0$ — некоторая постоянная, не зависящая от t и ε.

Доказательство . Подставляя в (38) решение линейной задачи (13), (25), имеющее представление, аналогичное (41), получим неоднородную систему линейных уравнений относительно $c_k^0,\dots,c_k^m$, $\widetilde{c}_k^{m+1},\dots,\widetilde{c}_k^{n-2}$, c_k^{n-1}, $k\ge 1$ с определителем Δ_0, который в силу V отличен от нуля. Следовательно, система линейных уравнений (38) имеет единственное решение $\overline{c}_k^0,\dots,\overline{c}_k^m$, $\overline{\overline{c}}_k^{m+1},\dots,\overline{\overline{c}}_k^{n-2}$, $\overline{c}_k^{n-1}$, $k\ge 1$. Построим функцию $\overline{y}_N(t,\varepsilon)$, определенную формулой (27) при $c_k^0=\overline{c}_k^0,\dots,c_k^m=\overline{c}_k^m$, $\widetilde{c}_k^{m+1}=\overline{\overline{c}}_k^{m+1},\dots,\widetilde{c}_k^{n-2}=\overline{\overline{c}}_k^{n-2}$,$c_k^{n-1}=\overline{c}_k^{n-1}$.

Докажем существование и единственность решения задачи (1), (2). С этой целью рассмотрим уравнение (1) с начальными условиями:

$$y^{(i)}(0,\overline{c}_0^0,\dots,\overline{c}_0^{n-1},\varepsilon)=\begin{cases}\overline{c}_0^i, & i=\overline{0,m},\\ \dfrac{\overline{c}_0^i}{\varepsilon^{i-m}}, & i=\overline{m+1,n-1},\end{cases} \tag{44}$$

где $\overline{c}_0^i,\overline{c}_0^{n-1},i=\overline{0,m}$ — уже известные коэффициенты, найденные из системы уравнений (37), а $\overline{c}_0^i,i=\overline{m+1,n-2}$ найдем из формулы (18). По теореме 1 для решения $y(t,\overline{c}_0^0,\dots,\overline{c}_0^{n-1},\varepsilon)$ задачи (1), (44) при $t=1$ имеем представление:

$$y^{(i)}(1,\overline{c}_0^0,\dots,\overline{c}_0^{n-1},\varepsilon)=y_0^{(i)}(1,\overline{c}_0^0,\dots,\overline{c}_0^m,\overline{\overline{c}}_0^{m+1},\dots,\overline{\overline{c}}_0^{n-2},\overline{c}_0^{n-1})+O(\varepsilon)=\alpha_i+O(\varepsilon),i=\overline{0,n-1}. \tag{45}$$

Из (45) следует, что решение задачи (1), (44) удовлетворяет системе уравнений (36) с точностью порядка $O(\varepsilon)$. Из (45) и (36) имеем:

$$y^{(i)}(1,c^0,\dots,c^{n-1},\varepsilon)-y^{(i)}(1,\overline{c}_0^0,\dots,\overline{c}_0^{n-1},\varepsilon)=O(\varepsilon),i=\overline{0,n-1}. \tag{46}$$

Из (46) непосредственно следует представление

$$c^i=\overline{c}_0^i+O(\varepsilon),i=\overline{0,n-1}. \tag{47}$$

Таким образом, в некоторой достаточно малой окрестности значений $\overline{c}_0^0,\dots,\overline{c}_0^m$, $\overline{\overline{c}}_0^{m+1},\dots,$ $\overline{\overline{c}}_0^{n-2}$, $\overline{c}_0^{n-1}$ существуют единственные $c^0,\dots,c^{n-2},c^{n-1}$, являющиеся решениями системы уравнений (36) и представимые в виде (47), такие, что решение задачи (1), (5) является единственным решением задачи (1), (2) и это решение имеет представление (42).

Докажем оценки (43). Для этого рассмотрим уравнение (1) с начальными условиями:

$$y^{(i)}(0,\hat{c}^0,\dots,\hat{c}^{n-1},\varepsilon)=\begin{cases}\hat{c}_0^i, & i=\overline{0,m},\\ \dfrac{\hat{c}_0^i}{\varepsilon^{i-m}}, & i=\overline{m+1,n-1},\end{cases} \tag{48}$$

где

$$\hat{c}^i=\overline{c}_0^i+\varepsilon\overline{c}_1^i+\dots+\varepsilon^N\overline{c}_N^i,\ i=\overline{0,n-1}, \tag{49}$$

причем коэффициенты $\overline{c}_k^i,i=\overline{0,m},\overline{c}_k^{n-1}$ при $k=\overline{0,N}$ уже известны, как решения системы (38). Коэффициенты $\overline{c}_0^i,i=\overline{m+1,n-2}$ определяются из формулы (18) через известный $\overline{c}_0^{n-1}$. Коэффициенты $\overline{c}_k^i,i=\overline{m+1,m+k},k\ge 1$ определяются из формул (8), (26) через уже известные вспомогательные коэффициенты $\overline{\overline{c}}_{k+m-i}^i$, а $\overline{c}_k^i,i=\overline{m+k+1,n-2}$ определяются из формул (18_k).

По теореме 1 решение $y(t,\hat{c}^0,\ldots,\hat{c}^{n-1},\varepsilon)$ задачи (1), (48) на отрезке [0,1] существует, единственно и представимо при $t=1$ в виде:

$$y^{(i)}(1,\hat{c}^0,\ldots,\hat{c}^{n-1},\varepsilon)=y_0^{(i)}(1,\overline{c}_0^0,\ldots,\overline{c}_0^m,\overline{\overline{c}}_0^{m+1},\ldots,\overline{\overline{c}}_0^{n-2},\overline{c}_0^{n-1})+\varepsilon y_1^{(i)}(1,\overline{c}_1^0,\ldots,\overline{c}_1^m,\overline{\overline{c}}_1^{m+1},\ldots,$$

$$\overline{\overline{c}}_1^{n-2},\overline{c}_1^{n-1})+\cdots+\varepsilon^N y_N^{(i)}(1,\overline{c}_N^0,\ldots,\overline{c}_N^m,\overline{\overline{c}}_N^{m+1},\ldots,\overline{\overline{c}}_N^{n-2},\overline{c}_N^{n-1})+O(\varepsilon^{N+1}),\ i=\overline{0,n-1}. \tag{50}$$

Из (50) с учетом (37), (38) имеем:

$$y^{(i)}(1,\hat{c}^0,\ldots,\hat{c}^{n-1},\varepsilon)=\alpha_i+O(\varepsilon^{N+1}),\ i=\overline{0,n-1}. \tag{51}$$

Следовательно, решение задачи (1), (48) удовлетворяет системе уравнений (36) с точностью порядка $O(\varepsilon^{N+1})$. Из (36), (51) имеем:

$$y^{(i)}(1,c^0,\ldots,c^{n-1},\varepsilon)-y^{(i)}(1,\hat{c}^0,\ldots,\hat{c}^{n-1},\varepsilon)=O(\varepsilon^{N+1}),\ i=\overline{0,n-1}.$$

Отсюда получаем представление: $c^i=\hat{c}^i+O(\varepsilon^{N+1}),\ i=\overline{0,n-1}$, где $\hat{c}^i$ имеют вид (49). Из теоремы 1 теперь непосредственно следует неравенство (43). Теорема 2 доказана.

Цитированная литература

1. **Иманалиев М. И.** Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем. Фрунзе: Илим, 1972. 356с.

2. **Васильева А. Б., Бутузов В.Ф.** Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272с.

Поступила в редакцию 24.10.2001г.

Математический журнал. *Алматы. 2001. Том 1. № 2. С. 52 — 58*

УДК 517.5

О СТЕПЕНИ ТОЧНОСТИ НА ПОЛИНОМАХ КВАДРАТУР ДЛЯ НЕПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

В. В. Жук

Институт математики МОН РК
480100, Алматы, Пушкина ул., 125, vlad@ru.ru

В данной статье рассматривается проблема оценки наивысшей степени точности на полиномах квадратур для определенного вида неположительных линейных непрерывных функционалов. Получены оценки сверху для порядка точности, найден критерий, когда соответствующая оценка достигается. Приведены примеры, иллюстрирующие результаты, полученные в данной статье.

1. Постановка задачи. Предварительные сведения. Пусть n — фиксированное натуральное число, $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — фиксированные четные положительные целые числа и пусть $L(f)$ — линейный непрерывный функционал, заданный на некотором пространстве X определенных на $[0,1]$ функций, содержащем полиномы. Рассмотрим следующую квадратурную формулу

$$L(f) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{m_k-2} a_{kj} f^{(j)}(x_k) + R(f), \tag{1}$$

где a_{kj} — коэффициенты квадратуры, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — узлы квадратуры, причем

$$0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1. \tag{2}$$

Положим

$$m = \sum_{k=1}^{n} m_k, \tag{3}$$

$$Q(f) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{m_k-2} a_{kj} f^{(j)}(x_k). \tag{4}$$

О п р е д е л е н и е 1. *Квадратура Q называется точной для функционала L на множестве $M \subset X$, если для всех $f \in M$ справедливо равенство $L(f) = Q(f)$.*

Keywords: *quadrature, exactness, (non)positive linear continuous functional*
2000 Mathematics Subject Classification: 65D32

Пусть π_r — множество полиномов, степень которых не превышает r.

Ставится задача определения максимального значения r, для которого найдётся квадратура вида (4), точная для линейного непрерывного функционала L на π_r. Обозначим это значение через $d(L)$.

Введём следующие функции

$$u_{kj}(t) = \frac{(t-x_1)^{m_1}\cdots(t-x_{k-1})^{m_{k-1}}(t-x_k)^j(t-x_{k+1})^{m_{k+1}}\cdots(t-x_n)^{m_n}}{j!(x_k-x_1)^{m_1}\cdots(x_k-x_{k-1})^{m_{k-1}}(x_k-x_{k+1})^{m_{k+1}}\cdots(x_k-x_n)^{m_n}}, \tag{5}$$

$k = 1..n, j = 0..m_k - 1$.

Отметим, что $u_{kj} \in \pi_{m+j-m_k} \subset \pi_{m-1}$, при этом справедливы равенства

$$u_{kj}^{(i)}(x_l) = \delta_{ij}\delta_{kl},\ k,l = 1..n,\ j = 0..m_k-1,\ i = 0..m_l-1. \tag{6}$$

Более того, $\{u_{kj}\}$ является базисом в π_{m-1} и для любого $u \in \pi_{m-1}$ имеет место разложение

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{m_k-1} u^{(j)}(x_k)u_{kj}(t). \tag{7}$$

Теорема 1. *Для того, чтобы квадратура Q вида (4) была точна на π_{m-1}, необходимо и достаточно, чтобы*

$$a_{kj} = L(u_{kj}),\ k = 1..n,\ j = 0..m_k-2, \tag{8}$$

$$L((t-x_1)^{m_1-1}(t-x_2)^{m_2-1}\cdots(t-x_n)^{m_n-1}q(t)) = 0, \quad \forall q \in \pi_{n-1}. \tag{9}$$

Доказательство. Заметим, что из (4), (6) следует

$$Q(u_{kj}) = a_{kj}, \quad Q(u_{k,m_k-1}) = 0, \quad k = 1..n,\ j = 0..m_k-2, \tag{10}$$

$$Q((t-x_1)^{m_1-1}(t-x_2)^{m_2-1}\cdots(t-x_n)^{m_n-1}q(t)) = 0,\ forall q \in \pi_{n-1}. \tag{11}$$

Если квадратура $Q(f)$ точна на π_{m-1}, то

$$L(f) = Q(f) \quad \forall f \in \pi_{m-1}.$$

Откуда с учетом (10), (11) получаем соотношения (8), (9).

Обратно, пусть имеют место равенства (8) и (9).

Положим в равенстве (9)

$$q(t) = \frac{(t-x_1)\cdots(t-x_{k-1})(t-x_{k+1})\cdots(t-x_n)}{j!(x_k-x_1)^{m_1}\cdots(x_k-x_{k-1})^{m_{k-1}}(x_k-x_{k+1})^{m_{k+1}}\cdots(x_k-x_n)^{m_n}},$$

тогда получим

$$L(u_{k,m_k-1}) = 0, \quad k = 1..n. \tag{12}$$

Из (7), (8), (12) в силу линейности функционала L для всех $u \in \pi_{m-1}$ имеем

$$L(u) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{m_k-1} u^{(j)}(x_k)L(u_{kj}) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{m_k-2} a_{kj}u^{(j)}(x_k) = Q(u).$$

Таким образом, из последнего равенства заключаем, что квадратура Q точна на π_{m-1}.

Теорема доказана.

Определение 2. *Функционал L называется положительным на множестве M, если $L(f) > 0$ для всех $f \in M$, у которых*

$$f(t) \geq 0 \quad \forall t \in (0,1)$$

и $\mathrm{meas}\,(t : f(t) = 0) < 1$.

Известно (см. [1]), что если линейный непрерывный функционал L положителен, то $d(L) = m-1$, причем для этого функционала существует единственная квадратура Q, точная на π_{m-1}.

В данной статье затрагивается вопрос о наивысшей степени точности квадратуры вида (4) для линейных непрерывных функционалов вида

$$L_\zeta(f) = L^*((t-\zeta)f), \tag{13}$$

где ζ — фиксированное число из $(0,1)$, L^* — заданный положительный линейный непрерывный функционал.

Функционал, определенный в (13), не является положительным, но обладает тем свойством, что если для функции f справедливо неравенство

$$\operatorname{sign}(t-\zeta)f(t) \geq 0 \quad \forall t \in (0,1) \tag{14}$$

и $\operatorname{meas}(t : f(t) = 0) < 1$, то $L_\zeta(f) > 0$.

2. Оценки наивысшей степени точности для L_ζ. Данный раздел посвящен оценке наивысшей степени точности на полиномах квадратуры (4) для введенного выше функционала L_ζ.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть для функционала L_ζ квадратура Q вида (4) точна на π_r, тогда справедлива оценка*

$$r \leq m,$$

т.е.

$$d(L_\zeta) \leq m.$$

Доказательство. Предположим, что $r > m$. Рассмотрим функцию

$$v(t) = (t-\zeta)(t-x_1)^{m_1}(t-x_2)^{m_2}\cdots(t-x_n)^{m_n}.$$

Поскольку $v(t) \in \pi_r$, то в силу (4) и точности на π_r квадратуры Q, получаем

$$L(v) = Q(v) = 0.$$

Так как $v(t)$ удовлетворяет неравенству (14) и обращается в нуль только в точках $\zeta, x_1, x_2, \ldots, x_n$, то $L(v) > 0$.

Получившееся противоречие доказывает теорему.

В следующей теореме получен критерий, который описывает значения ζ, обеспечивающие достижение верхней оценки в теореме 2.

Теорема 3. *$d(L_\zeta) = m$ в том и только в том случае, когда найдется такое число $k_0 \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, что $\zeta = x^*_{k_0}$ — k_0-й узел точной на π_{m+1} для положительного непрерывного функционала L^* квадратуры*

$$Q^*(f) = \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{m^*_k-2} a^*_{kj} f^{(j)}(x^*_k), \tag{15}$$

где

$$m^*_1 = m_1, \ldots, m^*_{k_0-1} = m_{k_0-1}, m^*_{k_0} = 2, m^*_{k_0+1} = m_{k_0}, \ldots, m^*_{n+1} = m_n.$$

Доказательство . Пусть $d(L_\zeta) = m$. Тогда существует квадратура Q вида (4), точная для L_ζ на π_m. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — узлы этой квадратуры.

Поскольку

$$Q((t-x_1)^{m_1-1}(t-x_2)^{m_2-1}\cdots(t-x_n)^{m_n-1}q(t)) = 0 \quad \forall q \in \pi_n,$$

то в силу точности квадратуры Q на π_m с учетом (13) получаем

$$L^*((t-\zeta)(t-x_1)^{m_1-1}(t-x_2)^{m_2-1}\cdots(t-x_n)^{m_n-1}q(t)) = 0 \quad \forall q \in \pi_n. \tag{16}$$

Заметим, что $\zeta \neq x_k, k = 1, ..., n$. В противном случае, если для некоторого k имеет место равенство $\zeta = x_k, k = 1, ..., n$, то полагая

$$q(t) = (t-x_1)\cdot\ldots\cdot(t-x_{k-1})(t-x_{k+1})\cdot\ldots\cdot(t-x_n),$$

получим

$$L^*((t-\zeta)(t-x_1)^{m_1-1}(t-x_2)^{m_2-1}\cdots(t-x_n)^{m_n-1}q(t)) > 0,$$

что противоречит (16).

Через k_0 обозначим такое число из $\{1, 2, \ldots, n+1\}$, что имеет место неравенство

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k_0-1} < \zeta < x_{k_0} < \ldots < x_n < x_{n+1} = 1.$$

Полагая,

$$x_1^* = x_1, \ldots, x_{k_0-1}^* = x_{k_0-1}, x_{k_0}^* = \zeta, x_{k_0+1}^* = x_{k_0}, \ldots, x_{n+1}^* = x_n,$$

с учетом (16) получим

$$L^*((t-x_1^*)^{m_1^*-1}(t-x_2^*)^{m_2^*-1}\cdots(t-x_{n+1}^*)^{m_{n+1}^*-1}q(t)) = 0, \forall q \in \pi_n. \tag{17}$$

Согласно теореме 1 в силу (17) получаем, что если в качестве узлов квадратуры Q^* взять $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{n+1}^*$, а коэффициенты вычислить по формуле (8), то эта квадратура будет точна для L^* на π_{m^*-1}, где

$$m^* = \sum_{k=1}^{n+1} m_k^* = m + 2.$$

Таким образом получили, что построенная квадратура Q^* точна на π_{m+1}.

Обратно, пусть квадратура Q^* вида (15) точна для L^* на π_{m+1} и пусть $\zeta = x_{k_0}^*$.

Положим

$$v(t) = (t-\zeta)u(t) = (t-x_{k_0}^*)u(t), \tag{18}$$

где $u \in \pi_m$.

Тогда $v \in \pi_{m+1}$ и $v(\zeta) = v(x_{k_0}^*) = 0$. Поэтому в силу точности для L^* на π_{m+1} квадратуры Q^* получим для всех $u \in \pi_m$

$$L_\zeta(u) = L^*((t-\zeta)u) = L^*(v) = \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{j=0}^{m_k^*-2} a_{kj}^* v^{(j)}(x_k^*) =$$

$$= \sum_{k=1}^{k_0-1}\sum_{j=0}^{m_k^*-2} a_{kj}^* v^{(j)}(x_k^*) + a_{k_0,0}^* v(x_{k_0}^*) + \sum_{k=k_0+1}^{n+1}\sum_{j=0}^{m_k^*-2} a_{kj}^* v^{(j)}(x_k^*) =$$

$$= \sum_{k=1}^{k_0-1}\sum_{j=0}^{m_k^*-2} a_{kj}^* v^{(j)}(x_k^*) + \sum_{k=k_0+1}^{n+1}\sum_{j=0}^{m_k^*-2} a_{kj}^* v^{(j)}(x_k^*). \tag{19}$$

Отметим, что

$$(v(t))^{(j)} = (t-\zeta)u^{(j)} + j \cdot u^{(j-1)}, \quad j = 1, 2, \dots \tag{20}$$

Из (18)–(20) получаем

$$L_\zeta(u) = Q(u) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{m_k-2} a_{kj} u^{(j)}(x_k) \quad \forall u \in \pi_m, \tag{21}$$

где

$$x_1 = x_1^*, \dots, x_{k_0-1} = x_{k_0-1}^*, x_{k_0} = x_{k_0+1}^*, \dots, x_n = x_{n+1}^*,$$

$$a_{kj} = (x_k^* - \zeta)a_{kj}^* + (j+1)a_{k,j+1}^*,\ k = 1..k_0-1,\ j = 0..m_k-3,$$

$$a_{k,m_k-2} = (x_k^* - \zeta)a_{k,m_k^*-2}^*,\ k = 1..k_0-1,$$

$$a_{kj} = (x_{k+1}^* - \zeta)a_{k+1,j}^* + (j+1)a_{k+1,j+1}^*,\ k = k_0..n,\ j = 0..m_k-3,$$

$$a_{k,m_k-2} = (x_{k+1}^* - \zeta)a_{k+1,m_{k+1}^*-2}^*,\ k = k_0..n.$$

Таким образом, квадратура Q, построенная в (21), является точной для L_ζ на π_m. Значит, $d(L_\zeta) \geq m$. Однако в силу теоремы 2 $d(L_\zeta) \leq m$, следовательно $d(L_\zeta) = m$.

Теорема доказана.

Отметим, что поскольку L^* — положительный непрерывный линейный функционал, то (см. [1, 2]) для него существует единственная квадратура вида (15), точная на π_{m+1}. Следовательно, существуют такие значения ζ, что $d(L_\zeta) = m$.

Далее рассмотрим квадратуру вида

$$Q(f) = \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k). \tag{22}$$

Эта квадратура получается из квадратуры (4), если положить $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 2$. В этом случае $m = 2n$. Из теоремы 2 следует, что для квадратуры (22) $d(L_\zeta) \leq m = 2n$.

Для квадратуры вида (22) справедлива теорема.

Теорема 4. *Пусть $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ — узлы квадратуры Q^* вида (22), точной для положительного линейного непрерывного функционала L^* на π_{2n-1}. Тогда если $\zeta \in \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$, то имеет место следующая оценка*

$$d(L_\zeta) \leq 2n-2.$$

Доказательство. Предположим обратное, т.е. $d(L_\zeta) \geq 2n-1$. Тогда для функционала L_ζ найдется квадратура Q вида (22), точная на π_{2n-1}. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — узлы этой квадратуры.

В силу теоремы 1 с учетом (13) получаем

$$L^*((t-\zeta)(t-x_1)(t-x_2)\cdots(t-x_n)q(t)) = 0, \forall q \in \pi_{n-1}. \tag{23}$$

Так как квадратура Q^* точна для $L*$ на π_{2n-1}, то имеет место равенство

$$L^*(f) = Q^*(f) = \sum_{k=1}^{n} a_k^* f(x_k^*), \quad \forall f \in \pi_{2n-1}. \tag{24}$$

Введем следующее множество

$$\pi_{2n}^* = \{g \in \pi_{2n} : g(t) = t^{2n} + f(t), f \in \pi_{2n-1}\}.$$

Пусть $g \in \pi_{2n}^*$, тогда $g - t^{2n} \in \pi_{2n-1}$. Поэтому в силу (24) и линейности L получим

$$L^*(g) = L^*(t^{2n} + (g - t^{2n})) = L^*(t^{2n}) + L^*(g - t^{2n}) =$$

$$= L^*(t^{2n}) + Q^*(g - t^{2n}) = (L^*(t^{2n}) - Q^*(t^{2n})) + Q^*(g).$$

Таким образом, из последнего равенства получаем $\forall g \in \pi_{2n}^*$

$$L^*(g) = \lambda_n + \sum_{k=1}^{n} a_k^* g(x_k^*), \tag{25}$$

где

$$\lambda_n = L^*(t^{2n}) - Q^*(t^{2n}). \tag{26}$$

Так как L^* — положительный линейный непрерывный функционал, то $d(L^*) = 2n - 1$. Следовательно, квадратура Q^* не точна на π_{2n}^*, поэтому получаем,что

$$L^*(t^{2n}) \neq Q^*(t^{2n}),$$

откуда имеем

$$\lambda_n \neq 0. \tag{27}$$

Пусть $\zeta = x_i^*$, тогда полагая

$$q(t) = (t - x_1^*) \cdot \ldots \cdot (t - x_{i-1}^*)(t - x_{i+1}^*) \cdot \ldots \cdot (t - x_n^*),$$

из (23) получим

$$L^*(g) = 0, \tag{28}$$

где

$$g(t) = (t - \zeta)(t - x_1)(t - x_2) \cdots (t - x_n)q(t) =$$

$$g(t) = (t - x_i^*)(t - x_1)(t - x_2) \cdots (t - x_n)q(t).$$

Заметим, что $g \in \pi_{2n}^*$ и $g(x_k^*) = 0, k = 1..n$.

Поэтому из (25), (28) получим

$$L(g) = \lambda_n = 0,$$

что противоречит (27) и доказывает теорему.

3. Примеры. Пусть

$$L^*(f) = \int_0^1 f(t)dt,$$

$$L_\zeta(f) = \int_0^1 (t - \zeta)f(t)dt, \quad \zeta \in (0, 1).$$

Рассмотрим квадратуру вида

$$Q(f) = a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2). \tag{29}$$

Квадратура (29) является частным случаем квадратуры (4), когда $n = 2$, $m_1 = m_2 = 2$.

В этом случае по теореме 2 $d(L_\zeta) \leq m = m_1 + m_2 = 4$.

В следующих примерах рассмотрены случаи, когда данная оценка достигается и не достигается.

1) Если $\zeta = \frac{1}{2}$ — узел квадратуры вида (15), точной для L^* на π_5, то согласно теореме 3 $d(L_\zeta) = 4$. При этом, если квадратура Q точна для L_ζ на π_4, то

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{15}}{10}, \ x_2 = \frac{5 + \sqrt{15}}{10},$$

$$a_1 = -\frac{\sqrt{15}}{36},\ a_2 = \frac{\sqrt{15}}{36}.$$

2) Если $\zeta = \frac{1}{4}$, то $d(L_\zeta) = 3$, причем узлы и коэффициенты квадратуры Q, точной для L_ζ на π_3, равны

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{51}}{10},\ x_2 = \frac{1+\sqrt{51}}{10},$$

$$a_1 = \frac{1}{8} - \frac{11\sqrt{51}}{612},\ a_2 = \frac{1}{8} + \frac{11\sqrt{51}}{612}.$$

3) Если $\zeta = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$ — узел квадратуры вида (29), точной на π_3 для L^*, то $d(L_\zeta) = 2$, при этом квадратура вида (29), у которой

$$x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{6},\ a_1 = 0,\ a_2 = -\frac{\sqrt{3}}{6},$$

точна для L_ζ на π_2.

4) Если $\zeta = \frac{7}{10}$, то $d(L_\zeta) = 2$. Положив в (29)

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{3}{10}, a_1 = -\frac{13}{60}, a_2 = -\frac{5}{12},$$

получим квадратуру, точную для L_ζ на π_2.

Цитированная литература

1. **Bojanov B. D., Braesss D., Dyn N.** // Journal of Approximation Theory. 1986. №4. C. 335 – 353.

2. **Shi Y. G.** // Journal of Approximation Theory. 2000. 103. C. 281 – 291.

Поступила в редакцию 12.11.2001г.

Математический журнал. *Алматы. 2001. Том 1. № 2. С. 59 — 65*

УДК 517.984

КЛАСС ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ПОРОЖДАЕМЫХ ЛИНЕЙНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ВЫРАЖЕНИЯМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ КОМПЛЕКСНОГО ПАРАМЕТРА

Б. Е. Кангужин

КазНУ имени аль-Фараби
480012, Алматы, Масанчи ул., 39/47, kairat@kimep.kz

Найдено интегральное представление общего решения однородного линейного обыкновенного дифференциального уравнения произвольного порядка $n \geq 1$, зависящего от комплексного параметра. Приведенные функции являются естественным обобщением экспоненциальных функций при $n = 1$, поэтому могут найти применение в вопросах о разложении произвольных функций в ряды, представляющих обобщения рядов экспонент (Дирихле).

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}_0^\infty$ — последовательность комплексных чисел ($|\lambda_{n+1}| \geq |\lambda_n|$), в которой каждый элемент λ_n считается со своей кратностью m_n, $m_n \in \mathbb{N}$. Свяжем с Λ систему показательных функций

$$e(\Lambda) = \left\{e^{i\lambda_n x}, (ix)e^{i\lambda_n x}, \ldots, (ix)^{m_n-1}e^{i\lambda_n x}\right\}_{n=0}^\infty.$$

Предположим, что система $e(\Lambda)$ минимальна в $L_2(-a,a)$, то есть обладает биортогональной системой

$$\left\{h_{n,0}(x), h_{n,1}(x), \ldots, h_{n,m_n-1}(x)\right\}_{n=0}^\infty \subset L_2(-a,a).$$

Последнее означает, что

$$< h_{n,k}(x), (ix)^l e^{i\lambda_j x} >= \begin{cases} 1, & \text{когда } n = j,\ k = l, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$n, j \in \mathbb{Z}_+$, $k = 0, 1, \ldots, m_n - 1$, $l = 0, 1, \ldots, m_j - 1$.
Здесь пользуемся обозначением

$$< g(x), h(x) >= \int_{-a}^{a} g(x)h(x)dx.$$

Каждой функции $f(x) \in L_2$ отвечает биортогональный ряд по системе $e(\Lambda)$:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^\infty e^{i\lambda_n x} \sum_{k=0}^{m_n-1} c_{nk}(ix)^k, \qquad c_{nk} =< h_{n,k}(x), f(x) > .$$

Keywords: *general solution, linear differential equation, representation, integral function*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B05

Естественно возникают вопросы о сходимости и суммируемости этого ряда в отдельных точках, по норме L_2, о равномерной сходимости (в случае, когда $f(x) \in C[-a,a]$), о поведении коэффициентов c_{nk} и так далее — вопросы, подсказанные теорией тригонометрических рядов Фурье. Впервые такие ряды изучали Р. Пэли и Н. Винер, назвавшие их негармоническими рядами Фурье. Основные моменты по указанной проблематике можно найти в обзоре А. М. Седлецкого [1], в препринтах Н. К. Никольского, Б. С. Павлова, С. В. Хрущева [2], в монографии А. Ф. Леонтьева [3]. Распространение в той или иной степени результатов, полученных для систем экспонент $e(\Lambda)$ на случай, когда вместо $e^{\lambda_k z}$ берутся функции $f(\lambda_k z)$ или $A(z, \lambda_k)$, представляет определенный научный интерес. Особый интерес вызывает случай, когда $A(z,\lambda) \equiv y(z,\lambda)$ есть общее решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения произвольного порядка. Согласно В. А. Ильину систему $\{y(x,\lambda_k),\ \lambda_k \in \Lambda\}$ можно интерпретировать как обобщенную систему корневых функций некоторого дифференциального оператора и биортогональные разложения в ряды по системам функций, аналитически зависящих от параметра, рассматривать в виде задач спектрального анализа корректных сужений неограниченных несамосопряженных операторов. Таким образом, возможен единый подход к решению некоторых задач, связанных с биортогональными разложениями, в основе которых лежит спектральный анализ дифференциальных операторов на отрезке.

На отрезке $[0,b]$ рассматривается линейное обыкновенное дифференциальное уравнение порядка больше двух

$$y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(x) y^{(k)}(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0;b). \tag{1}$$

Будем предполагать, что коэффициентные функции $p_0(x)$, $p_1(x)$, …, $p_{n-2}(x)$ — элементы пространств $C[0,b], C'[0,b], \ldots, C^{n-2}[0,b]$, соответственно, а λ — комплексный параметр.
Произвольное решение $y(x)$ уравнения (1) на самом деле зависит также от параметра λ, то есть $y = y(x,\lambda)$. Основная цель настоящей работы — получить "явную"зависимость решения $y(x,\lambda)$ от параметра λ. Заметим, что на зависимость решения $y(x,\lambda)$ от переменной x существенно влияют переменные коэффициенты $p_0(x)$, $p_1(x)$, …, $p_{n-2}(x)$. В то же время параметр λ входит в уравнение (1) специальным (линейным) образом, поэтому ожидается, что решение $y(x,\lambda)$ также специфично (хотя, быть может, нелинейно) зависит от λ. К примеру, когда

$$p_0(x) \equiv p_1(x) \equiv \ldots \equiv p_{n-2}(x) \equiv 0, \quad 0 \le x \le b,$$

то общее решение уравнения (1) представимо в виде

$$y(x,\lambda) = C_1 \varphi(x,\lambda) + C_2 \int\limits_0^x \varphi(t,\lambda) dt + C_3 \int\limits_0^x \frac{(x-t)}{1!} \varphi(t,\lambda) dt + \cdots + C_n \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} \varphi(t,\lambda)\, dt,$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные комплексные числа, $\varphi(x,\lambda)$ — ненулевое частное решение уравнения (1).

Оказывается, подобная же формула справедлива при произвольных (переменных) коэффициентах $p_0(x)$, $p_1(x)$, …, $p_{n-2}(x)$.

Предложение 1. *Найдется функция $K(x,t,\lambda)$ при $0 \le t \le x \le b$ и произвольном комплексном λ такая, что общее решение уравнения (1) имеет вид*

$$y(x,\lambda) = C_1 K(x,0,\lambda) + C_2 \int\limits_0^x K(x, x-s, \lambda) ds +$$

$$+ C_3 \int\limits_0^x \frac{(x-s)}{1!} K(x,x-s,\lambda) ds + \ldots + C_n \int\limits_0^x \frac{(x-s)^{n-2}}{(n-2)!} K(x,x-s,\lambda) ds,$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные комплексные числа.

Конструктивному построению функции $K(x,t,\lambda)$ и доказательству предложения 1 посвящена настоящая работа. Также удается получить экспоненциальное представление для функции $K(x,t,\lambda)$, которое существенно используется в дальнейшем.

Аналогичное предложение справедливо для общего решения неоднородного линейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$y^{(n)}(x)+\sum_{k=0}^{n-2}p_k(x)y^{(k)}(x)=\lambda y(x)+f(x),\quad x\in(0;b).$$

П р е д л о ж е н и е 2. *Найдется функция $K(x,s,t,\lambda)$ при $0\le t\le s\le x\le b$ и произвольном комплексном λ такая, что общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения имеет вид*

$$y(x,\lambda)=C_1K(x,0,0,\lambda)+C_2\int\limits_0^x K(x,0,x-s,\lambda)ds+C_3\int\limits_0^x\frac{(x-s)}{1!}K(x,0,x-s,\lambda)ds+\ldots+$$

$$+C_n\int\limits_0^x\frac{(x-s)^{n-2}}{(n-2)!}K(x,0,x-s,\lambda)ds+\int\limits_0^x f(r)dr\int\limits_0^{x-r}\frac{(s)^{n-2}}{(n-2)!}K(x,r,s,\lambda)ds.$$

Приведем конструктивный способ построения функции K из предложения 1, которую в дальнейшем называем K-функцией дифференциального выражения (1). Для этого введем последовательность функций по формулам

$$Q(U,\xi)=\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^{k+1}\sum_{j=0}^{k}C_j^k\cdot p_k^{(k-j)}(\xi)\cdot(-1)^j\frac{U^{n-2-j}}{(n-2-j)!},$$

$$M_1(x,\tau_1,\tau_2)=Q(x-\tau_1-\tau_2,\tau_2),$$

$$M_k(x,\tau_1,\ldots,\tau_{k+1})=\int\limits_{\tau_2+\ldots+\tau_{k+1}}^{x-\tau_1}Q(x-\tau_1-s,s)\,M_{k-1}(s,\tau_2,\ldots,\tau_{k+1})ds,k\ge 2.\qquad(2)$$

Отметим, что функции M_k не зависят от параметра λ.

Пусть $\psi(x,\lambda)=\frac{1}{n}\sum\limits_{j=0}^{n-1}\exp\left(\rho\omega_jx\right)$, где $\rho=\sqrt[n]{\lambda}$, $\omega_s=\exp\left(\frac{2\pi}{n}s\right)$. Запишем выражение в круглых скобках

$$\Bigg(\psi(x-s,\lambda)+\int\limits_0^{x-s}\psi(\tau_1,\lambda)d\tau_1\int\limits_0^{x-s-\tau_1}\psi(\tau_2,\lambda)d\tau_2M_1(x,\tau_1,\tau_2+s)+$$

$$+\int\limits_0^{x-s}\psi(\tau_1,\lambda)d\tau_1\int\limits_0^{x-s-\tau_1}\psi(\tau_2,\lambda)d\tau_2\int\limits_0^{x-s-\tau_1-\tau_2}\psi(\tau_3,\lambda)d\tau_3M_2(x,\tau_1,\tau_2,\tau_3+s)+\ldots\Bigg).$$

Функцию, равную сумме ряда в круглых скобках, обозначим через $K(x,s,\lambda)$ и в дальнейшем будем называть K-функцией дифференциального выражения (1). В следующих леммах приведены свойства K-функции.

Л е м м а 1. *Для функции M_k справедливы оценки*

$$\Big|M_k(\xi,\tau_1,\ldots,\tau_{k+1})\Big|\le\Big(\max|\,Q(U,t)\,|\Big)^k\cdot\frac{(\xi-\tau_1-\ldots-\tau_{k+1})^{k-1}}{(k-1)!}$$

при $\tau_1+\ldots+\tau_{k+1}\le\xi,\ \tau_j\ge 0.$

Л е м м а 2. *Ряд, соответствующий K-функции, сходится равномерно и абсолютно на каждом компакте λ-плоскости, причем K-функция оценивается сверху неравенством*

$$\Big|K(x,s,\lambda)\Big| \leq d\,ch(df(x-s)),$$

где $\quad d = \max\limits_{0\leq t\leq b} |\psi(t,\lambda)|, \quad f = \max\limits_{(U,t)} |Q(U,t)|.$

Л е м м а 3. $K(x,s,\lambda)$ *представляет собой целую функцию от* λ.

Л е м м а 4. $K(x,x,\lambda) = 1$.

Отметим, что указанные три леммы непосредственно следуют из соответствующих реккурентных формул.

З а м е ч а н и е 1. *Таким образом, нам удалось записать общее решение однородного уравнения (1) через одну функцию $K(x,s,\lambda)$. Можно доказать дифференциальные свойства по x и s K-функции. Однако такие свойства нами не используются.*

З а м е ч а н и е 2. *Точно также можно через K-функцию (вернее ее модификацию) записать общее решение неоднородного уравнения.*

Заметим, что произведение $\psi(\tau_1,\lambda)\cdot\psi(\tau_2,\lambda)\ldots\psi(\tau_k,\lambda)$ согласно формуле $\psi(x,\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n}\exp(\rho\,\omega_j x)$ может быть преобразовано к виду

$$\frac{1}{n^k}\sum\nolimits^{s}\sum\nolimits^{J} \exp(\rho(\omega_0\tau_{J1} + \omega_1\tau_{J2} + \ldots + \omega_{n-1}\tau_{Jn})),$$

где суммирование в $\sum^s$ производится в соответствии с пределами

$$s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0, \ldots,\ s_n \geq 0, \quad s_1 + s_2 + \ldots + s_n = k,$$

суммирование в $\sum^J$ производится по всевозможным перестановкам

$$J_1: \ i_1 < i_2 < \ldots < i_{s1};$$

$$J_2: \ i_{s1+1} < i_{s1+2} < \ldots < i_{s1+s2};$$

$$\ldots$$

$$J_n: \ i_{s1+\cdots+s(n-1)} < \ldots < i_k.$$

Через τ_{J1} обозначена сумма

$$\tau_{i1} + \tau_{i2} + \ldots + \tau_{is1},$$

аналогичный смысл имеют другие $\tau_{J2}, \ldots, \tau_{Jn}$.

При $s_1 = 0$ перестановка J_1 — пустая и соответствующая сумма τ_{J1} считается нулем. Точно такой же смысл допускается при $s_2 = 0, s_3 = 0, \ldots, s_n = 0$. Поэтому в K-функции кратности интегралов, зависящих от ρ, не превосходят порядка n дифференциального уравнения (1). Более подробный анализ показателей экспонент, зависящих от параметра $\rho = \sqrt[n]{\lambda}$, приводит к теореме

Т е о р е м а 1. *K-функция дифференциального уравнения (1) имеет экспоненциальное представление при $n = 2l + 1$*

$$K(x, x-s, \lambda) = \psi(x-s, \lambda) + \int\limits_0^{x-s} F_1(x, s, \tau_1)\psi(\tau_1, \lambda)d\tau_1 +$$

$$+ \int\limits_0^{x-s} d\tau_1 \int\limits_0^{x-s-\tau_1} d\tau_2 \,\{\, F_2(x, s, \tau_1, \tau_2)\psi(\tau_1 + \omega_1\tau_2, \lambda) +$$

$$+ F_3(x, s, \tau_1, \tau_2)\psi(\tau_1 + \omega_2\tau_2, \lambda) + \dots + F_{l+1}(x, s, \tau_1, \tau_2)\psi(\tau_1 + \omega_l\tau_2, \lambda) \,\}\,.$$

При $n = 2l$ верно следующее экспоненциальное представление K-функции

$$K(x, x-s, \lambda) = \psi(x-s, \lambda) + \int\limits_0^{x-s} F_1(x, s, \tau_1)\psi(\tau_1, \lambda)d\tau_1 +$$

$$+ \int\limits_0^{x-s} d\tau_1 \int\limits_0^{x-s-\tau_1} d\tau_2 \,\{\, F_2(x, s, \tau_1, \tau_2)\psi(\tau_1 + \omega_1\tau_2, \lambda) +$$

$$+ F_3(x, s, \tau_1, \tau_2)\psi(\tau_1 + \omega_2\tau_2, \lambda) + \dots + F_l(x, s, \tau_1, \tau_2)\psi(\tau_1 + \omega_{l-1}\tau_2, \lambda) +$$

$$+ F_{l+1}(x, s, \tau_1, \tau_2) \sum_{j=0}^{l-1} \exp\left(\rho(\omega_j\tau_1 + \omega_{l+j}\tau_2)\right) \,\}\,.$$

Здесь функции F с индексами не зависят от λ. Из предложения 1 и теоремы 1 вытекает

Т е о р е м а 2. *Общее решение однородного уравнения (1) при произвольном комплексном λ имеет вид при $n = 2l + 1$*

$$y(x, \lambda) = C_1\psi(x, \lambda) + \sum_{j=2}^{n} C_j \left\{ \int\limits_0^{x} \psi(\tau_1, \lambda)d\tau_1 \cdot \int\limits_0^{x-\tau_1} \frac{(x-s)^{j-2}}{(j-2)!} F_1(x, s, \tau_1)ds + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^{x} \frac{(x-s)^{j-2}}{(j-2)!}\psi(x-s, \lambda)ds + \sum_{k=1}^{l} \int\limits_0^{x} d\tau_1 \int\limits_0^{x-\tau_1} d\tau_2\, U_k(\tau_1, \tau_2, \lambda) \int\limits_0^{x-\tau_1-\tau_2} \frac{(x-s)^{j-2}}{(j-2)!} F_k(x, s, \tau_1, \tau_2)ds \right\} +$$

$$+ C_1 \left\{ \int\limits_0^{x} \psi(\tau_1, \lambda)F_1(x, 0, \tau_1)d\tau_1 + \sum_{k=1}^{l} \int\limits_0^{x} d\tau_1 \int\limits_0^{x-\tau_1} d\tau_2\, U_k(\tau_1, \tau_2, \lambda) \cdot F_k(x, 0, \tau_1, \tau_2) \right\},$$

где $\quad U_k(\tau_1, \tau_2, \lambda) = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} e^{\rho(\omega_{j-1}\tau_1 + \omega_{j+k-1}\tau_2)}$.

З а м е ч а н и е 3. *Важным достоинством теоремы 2 является то, что одни и те же функции F с индексами, независящими от параметра λ, пригодны для произвольных решений $y(x, \lambda)$ однородного уравнения (1). Величины $C_1, \dots, C_n$ не зависят от x, а в остальном — произвольные. Зависимость общего решения $y(x, \lambda)$ от параметра λ определяется зависимостью от λ функций $\psi(t, \lambda)$ и $U_k(\tau_1, \tau_2, \lambda)$.*

Фундаментальная система решений определяется из теоремы 2, если числа $C_1, C_2, \ldots, C_n$ выбирать n различными способами. К примеру, в качестве матрицы

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{11} & \ldots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \ldots & C_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{n1} & C_{n2} & \ldots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

можно взять единичную матрицу. Тогда получается максимальная линейно независимая система решений.

Замечание 4. *Из теоремы 2 видно, что произвольное решение однородного уравнения (1) при постоянных $C_1, \ldots, C_n$ является целой функцией от λ экспоненциального типа. Также отметим, что функции F_k, участвующие в теореме 2, по крайней мере непрерывны по совокупности своих аргументов.*

Замечание 5. *Интегралы вида*

$$\int\limits_0^x d\tau_1 \int\limits_0^{x-\tau_1} d\tau_2\, U_k(\tau_1, \tau_2, \lambda) F_k(x, 0, \tau_1, \tau_2)$$

при $k > 1$ можно выразить через интеграл

$$\int\limits_0^x d\tau_1 \int\limits_0^{x-\tau_1} d\tau_2\, U_1(\tau_1, \tau_2, \lambda) \tilde{F}_k(x, \tau_1, \tau_2),$$

где $\tilde{F}_k$ конструктивно строится через F_k.

В результате последнего замечания получаем теорему.

Теорема 3. *Общее решение однородного уравнения (1) при произвольном комплексном λ имеет вид при $n = 2l + 1$*

$$y(x,\lambda) = C_1 \Big\{ \psi(x,\lambda) + \int\limits_0^x F_1(x,0,\tau_1)\psi(\tau_1,\lambda)d\tau_1 + \int\limits_0^x d\tau_1 \int\limits_0^{x-\tau_1} d\tau_2 F_2(x,0,\tau_1,\tau_2)\psi(\tau_1+\omega_1\tau_2,\lambda) \Big\} +$$

$$+ \sum_{j=2}^n C_j \int\limits_0^x \frac{(x-s)^{j-2}}{(j-2)!} \Big\{ \psi(x-s,\lambda) + \int\limits_0^{x-s} F_1(x,s,\tau_1)\psi(\tau_1,\lambda)d\tau_1 +$$

$$+ \int\limits_0^{x-s} d\tau_1 \int\limits_0^{x-s-\tau_1} d\tau_2 F_2(x,s,\tau_1,\tau_2)\psi(\tau_1+\omega_1\tau_2,\lambda) \Big\} ds.$$

Аналогичный факт верен при $n = 2l$. Заметим, что от λ могут зависеть величины $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

В заключение отметим, что для ядер $F_1(x,s,\tau_1)$ и $F_2(x,s,\tau_1,\tau_2)$ могут быть получены интегральные уравнения и затем доказана теорема существования и единственности решения полученных интегральных уравнений. При $n = 4$ вывод указанных интегральных уравнений приведен в работе [4].

Цитированная литература

1. **Седлецкий А. М.** // УМН. 1982. Т. 37, вып.5(227). С. 51 – 95.

2. **Никольский Н. К., Павлов Б. С., Хрущев С. В.** Безусловные базисы из экспонент и воспроизводящих ядер. I. Препринт ЛОМИ Р–8–80. Ленинград, 1980.

3. **Леонтьев А. Ф.** Обобщения рядов экспонент. М.: Наука, 1981. 320 с.

4. **Кангужин Б. Е., Искакова У. А.** // Известия НАН РК, сер. физ.-матем. 1998, №3(202). С. 25 – 31.

Поступила в редакцию 15.11.2001г.

УДК 517.938

СООТНОШЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ВЕКТОРНОГО РАССЛОЕНИЯ И УСЛОВИЯ РАВНОМЕРНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ РАЗДЕЛЕННОСТИ СЕМЕЙСТВА ЕГО АВТОМОРФИЗМОВ

М. И. Рахимбердиев

Институт математики МОН РК
480100, Алматы, Пушкина ул., 125, marat@math.kz

Доказывается, что векторное расслоение, на котором задано семейство автоморфизмов с условием равномерной экспоненциальной разделенности, тривиально.

Как и в статье [1] , рассматриваем векторное расслоение $\xi = (E, p, B)$ со слоем $\mathbf{R}^n$ (E — пространство расслоения, p — проекция, B — база, полное метрическое пространство) и автоморфизм $(X, \chi) : \xi \to \xi$. На расслоении фиксируем некоторую риманову метрику (см. [2]). Пусть выполняются требования, наложенные на автоморфизм (X, χ) в статье [3]. А именно, X — гомеоморфизм E на E, χ — гомеоморфизм B, сужение $X[b]$ на слой $p^{-1}(b)$ отображения X при всяком $b \in B$ есть невырожденное линейное отображение слоя $p^{-1}(b)$ на слой $p^{-1}(\chi b)$ и, кроме того, пусть выполняется следующее условие:

$$\sup_{b\in B} \max(\|X[b]\|, \|(X[b])^{-1}\|) < +\infty.$$

Равенством $\Xi\, t = (X^t, \chi^t)$, $t \in \mathbf{G}$ определяется гомоморфизм Ξ группы $\mathbf{G}$ в группу автоморфизмов векторного расслоения ξ, которая обозначается через $\mathrm{Aut}\,(E, p, B)$, т.е. $\Xi \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}\,(E, p, B)$. Здесь $\mathbf{G}$ — группа $\mathbf{R}$ или группа $\mathbf{Z}$. Следующее определение является модификацией определения, данного в [3].

Определение. *Гомоморфизм* $\Xi \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}\,(E, p, B)$, *порождаемый семейством* (X^t, χ^t), $t \in \mathbf{G}$, *удовлетворяет условию равномерной экспоненциальной разделённости с индексом* $k \in \{1, \ldots, n\}$ ($n > 1$), *если существуют такие вещественных числа* $\alpha > 0, \beta > 0$, *что для всякого* $b \in B$ *пространство* $p^{-1}(b)$ *можно так разложить в прямую сумму подпространств* $\mathbf{R}^{n-k}$ *и* $\mathbf{R}^k_0(b)$, *что для любых* $\xi \in \mathbf{R}^{n-k}$, $\eta \in \mathbf{R}^k_0(b)$, $\xi \neq 0, \eta \neq 0$, $t, s \in \mathbf{G}$, $t \geq s$ *имеет место неравенство*

$$|X^t\xi||X^s\xi|^{-1} \geq \alpha|X^t\eta||X^s\eta|^{-1}\exp(\beta(t-s)).$$

Keywords: *dynamical system, morphism of vector bundle, exponential separation*
2000 Mathematics Subject Classification: 34D08

Отличие этого определения от предложенного в [4] состоит в требовании равномерности условий по b, то есть независимости α, β от точки b. Это требование вносит некоторые ограничения на выбор подпространства $\mathbf{R}^{n-k}$. А именно, при отсутствии равномерности по b подпространство $\mathbf{R}^{n-k}$ выбирается как любое алгебраическое дополнение к $\mathbf{R}_0^k(b)$. При этом α зависит от выбора этого подпространства.В равномерном случае достаточно предполагать существование некоторого алгебраического дополнения к $\mathbf{R}_0^k(b)$. Подпространство $\mathbf{R}_0^k(b)$ определяется однозначно и при этом, если экспоненциальная разделенность имеет место для любого индекса $k \in \{1, \ldots, n\}$, то $\mathbf{R_0^1}(b) \ \subset \cdots \subset \mathbf{R_0^{n-1}}(b)$.

Приведем некоторые сведения, связанные с операцией сопряжения на векторных расслоениях. Пусть дан некоторый автоморфизм (X, χ) векторного расслоения ξ. Сопряженный ему автоморфизм $(X^*, \chi^*) : \xi \longrightarrow \xi$ зададим следующим образом. Фиксируем $b \in B$. Пусть $x \in p^{-1}(b)$, $y \in p^{-1}(\chi b)$. Обозначим через $(\cdot,\cdot)_1, (\cdot,\cdot)_2$ скалярные произведения, соответственно, в $p^{-1}(b)$, $p^{-1}(\chi b)$. При фиксированном y выражение $(X[b]x, y)_2$ есть линейный функционал в $p^{-1}(b)$, поэтому, используя представление линейного функционала в евклидовом пространстве, мы можем также записать его в виде $(X[b]x, y)_2 = (x, h)_1$, где h — фиксированный вектор в $p^{-1}(b)$. Это равенство определяет линейный оператор $Y : p^{-1}(\chi b) \longrightarrow p^{-1}(b)$ такой, что $Yy = h$. Этот оператор называется сопряженным к $X[b]$ и обозначается как $(X[b])^*$ или как $X^*[\chi b]$ и удовлетворяет равенству $(X[b])x, y)_2 = (x, X^*[\chi b]y)_1$ для любых $x \in p^{-1}(b)$, $y \in p^{-1}(\chi b)$. Таким образом, мы имеем заданное для любого $b \in B$ отображение $X^*[\chi b]$. Следовательно, определено и отображение $X^* : E \longrightarrow E$. Для того, чтобы определить операцию сопряжения к отображению χ, следует учесть тот факт, что слой над точкой b переводится линейным отображением $X^*[b]$ в слой над точкой $\chi^{-1}(b)$, поэтому естественно положить $\chi^* = \chi^{-1}$. Итак, автоморфизм (X^*, χ^*) задан. Определим теперь B — автоморфизмы расслоения ξ (см.[2, с. 42]) X^*X, XX^*, полагая $(XX^*)[b] = X[\chi^{-1}b]X^*[b]$, $(X^*X)[b] = X^*[\chi b]X[b]$ для любого $b \in B$.

По определению векторного расслоения у каждой точки $b_0 \in B$ существует окрестность U и такой изоморфизм $h : U \times \mathbf{R^n} \longrightarrow p^{-1}(U)$, что для любой точки $b \in U$ его ограничение $h[b] : b \times \mathbf{R}^n \longrightarrow p^{-1}(b)$ является изоморфизмом векторных пространств. Так как отображение $X^*X : E \longrightarrow E$ является B-автоморфизмом, то и отображение $h^{-1}X^*Xh : U \times \mathbf{R}^n \longrightarrow U \times \mathbf{R}^n$ является B-автоморфизмом, поэтому в силу п. 2.3 на стр. 42 из [2] оно имеет вид $h^{-1}X^*Xh(b, x) = (b, S(b), x)$. Из этого равенства следует, что $S(b) = h^{-1}[b]X^*[\chi b]X[b]h[b]$. Поэтому оператор $S(b)$ непрерывно зависит от параметра b и действует в пространстве $\mathbf{R^n}$. Если оператор $X^*[\chi b]X[b]$ имеет собственные значения $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$, то и оператор $S(b)$ имеет те же собственные значения. Так как все собственные значения этого оператора различны, то его собственные векторы непрерывно зависят от b. Это вытекает из утверждения на с. 142 из [5]. Отметим, что из равномерной непрерывности оператора $S(b)$ в произвольном замкнутом шаре следует, что утверждение из [5], которое доказано для скалярного параметра, справедливо и для любого параметра. Из непрерывности отображения h следует, что собственные векторы оператора $X^*[\chi b]X[b]$ также непрерывно зависят от b.

Теорема. *Если гомоморфизм* $\Xi \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}\,(E, p, B)$, *порождаемый семейством* (X^t, χ^t), $t \in \mathbf{G}$, *равномерно экспоненциально разделён для всех индексов* $k \in \{1, \ldots, n\}$, *то расслоение* (E, p, B) *тривиально.*

Доказательство. Пусть гомоморфизм $\Xi \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}\,(E, p, B)$ удовлетворяет условию равномерной экспоненциальной разделенности с индексами $1, \ldots, n-1$.

Рассмотрим сначала случай $\mathbf{G} = \mathbf{Z}$. В силу условий, наложенных на автоморфизм (X, χ), существует такое число $a > 0$, что для любого $b \in B$ имеет место неравенство

$$\max \|X[b]\|, \|(X[b])^{-1}\| < a.$$

Отсюда следует, что для любых $b \in B$, $m \in \mathbf{Z}$ выполняется неравенство $\|X^m[b]\| \leq a^m$. Фиксируем точку b. Выберем такое $s \in \mathbf{Z}$, что

$$\alpha \exp(\beta s) > 1. \tag{1}$$

Обозначим $Y = (X^s)^*[\chi^{-s}b]X^s[b]$. Самосопряженный оператор S, отображающий пространство $p^{-1}(b)$ в себя, имеет ортонормированный базис из собственных векторов $e_1, \ldots, e_n$. Пусть они упорядочены по невозрастанию соответствующих их собственных значений $d_1, \ldots, d_n$. Ясно, что они положительны. Покажем, что из условия равномерной экспоненциальной разделенности вытекает также, что они все различны. Действительно, в силу минимаксных свойств собственных значений самосопряженного оператора собственные значения оператора Y удовлетворяют следующим соотношениям:

$$d_k = \min_{\mathbf{R^{n-k+1}} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \max_{x \in \mathbf{R},^{\mathbf{n-k+1}} (x,x)=1} (Sx, x),$$

$$d_k = \max_{\mathbf{R^k} \in G_k(p^{-1}(b))} \min_{x \in \mathbf{R},^{\mathbf{k}} (x,x)=1} (Sx, x), k = 1, \ldots, n,$$

где $G_i(p^{-1}(b))$ — грассманово многообразие i- мерных векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$). Поэтому для каждого индекса $i = 1, \ldots, n-1$ из условия экспоненциальной разделенности и неравенства (1) вытекает справедливость неравенств

$$d_i \geq \min_{x \in \mathbf{R^i}, (x,x)=1} (Yx, x) = \min_{\xi \in \mathbf{R^i}} (X^s\xi, X^s\xi) > \max_{\eta \in \mathbf{R_0^{n-i}}(b)} (X^s\eta, X^s\eta) \geq d_{i+1}, \tag{2}$$

где $\mathbf{R^i}$, $\mathbf{R^{n-i}}(b)$ — соответствующие этому индексу взаимно дополнительные пространства в $p^{-1}(b))$, $i = 1, \ldots, n-1$. Отсюда следует, что все собственные значения оператора Y различны, так что векторы $e_1, \ldots, e_n$ определяются единственным образом. Теперь в силу приведенных выше рассуждений приходим к заключению, что эти векторы являются непрерывными функциями от b. Это означает, что векторное расслоение обладает такими сечениями $e_1 = e_1(b), \ldots, e_n = e_n(b)$, что в каждой точке b векторы $e_1(b), \ldots, e_n(b)$ линейно независимы. Отсюда следует, что расслоение тривиально (см. [2], с. 60).

Пусть теперь гомоморфизм $\Xi \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}\,(E, p, B)$, порождаемый семейством (X^t, χ^t), $t \in \mathbf{G}$, удовлетворяет условию равномерной экспоненциальной разделённости с индексами $k \in \{1, \ldots, n\}$, где группа $\mathbf{G}$ есть группа $\mathbf{R}$. Для всякого $\tau \in \mathbf{R}$ определим гомеоморфизмы $Y : E \longrightarrow E, \phi : B \longrightarrow B$, полагая $Y = X^\tau, \phi = \chi^\tau$. Тогда гомоморфизм $\Theta \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z}, \mathrm{Aut}\,(E, p, B))$, задаваемый семейством $(Y^m, \phi^m), m \in \mathbf{Z}$, также будет удовлетворять условию равномерной экспоненциальной разделенности с любым индексом. Тогда, если выбрать τ таким, чтобы выполнялось неравенство (1), то для отображения Y будет выполняться неравенство (2) и к нему применимы все предыдущие рассуждения. Теорема доказана.

Цитированная литература

1. **Рахимбердиев М. И.** // Математический журнал. Алматы. 2001. Т. 1, №1. С. 72 – 76.
2. **Хьюзмоллер Д.** Расслоенные пространства. М.: Мир, 1970.
3. **Миллионщиков В. М.** // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, №3. С. 431 – 468.
4. **Миллионщиков В. М.** // Мат. сб. 1984. Т. 124 (166). С. 451 – 485.
5. **Като Т.** Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.

Поступила в редакцию 31.10.2001г.

Математический журнал. *Алматы. 2001. Том 1. № 2. С. 76 — 84*

УДК 517.926

ЯВЛЕНИЕ БУФЕРНОСТИ В РАСПРЕДЕЛЕННОМ ГЕНЕРАТОРЕ ВАН ДЕР ПОЛЯ

Н. Х. Розов

Московский государственный университет
Россия, 119899, Москва, МГУ, мехмат, rozov@rozov.mccme.ru

*Посвящается светлой памяти
замечательного человека и ученого
Орымбека Ахметбековича Жаутыкова*

Исследуется математическая модель распределенной автоколебательной системы, представляющей собой аналог классического генератора Ван дер Поля (распределенный генератор Ван дер Поля). Модель описывается линейной системой телеграфных уравнений с нелинейностью в одном из граничных условий; входящие в модель параметры отражают физические характеристики генератора. В изучаемой модели выявляется феномен буферности, т.е. устанавливается одновременное существование у рассматриваемой краевой задачи произвольного конечного наперед заданного количества устойчивых периодических по времени решений при надлежащем выборе значений параметров.

0. Известно значение понятия устойчивого предельного цикла системы обыкновенных дифференциальных уравнений при исследовании математических моделей колебательных систем с сосредоточенными параметрами, которые встречаются в механике, физике, технике, химии, биологии, экономике и т.д. При этом иногда принципиально важно наличие лишь единственного такого цикла, в других же ситуациях, наоборот, желательно, чтобы их было несколько — все зависит от характера изучаемой прикладной проблемы. Кроме того, система дифференциальных уравнений содержит некоторое число параметров (отражающих реальные характеристики исследуемого объекта), и при различных значениях этих параметров, вообще говоря, существует разное количество устойчивых предельных циклов. В частности, возможна и ситуация, когда выбором значений параметров можно гарантировать существование любого конечного наперед заданного количества устойчивых предельных циклов. В разнообразных областях науки, новой техники и современных технологий сегодня широко распространены и колебательные системы с распределенными параметрами или, короче, распределенные колебательные системы. К ним относятся объекты, состояние которых зависит от времени и пространственных переменных, причем состояние в каждой точке пространства может периодически меняться во времени. Такие объекты генерируют периодические автоколебания, или автоволновые процессы (термин

Keywords: *bufferness phenomenon, distributed van der Pol generator, telegraph equation, boundary value problem, stable time-periodic solution*
2000 Mathematics Subject Classification: 35L50

Р. В. Хохлова). Изучение распределенных автогенераторов актуально в связи с интенсивным развитием микроэлектроники и появившейся возможностью их реализации.

Динамика этих объектов моделируется, как правило, системами дифференциальных уравнений с частными производными, включающими различные параметры, а каждый индивидуальный процесс — решением, выделяемым установленными краевыми условиями и задаваемыми начальными данными. Существенно, что реальному автоколебательному режиму отвечает периодическое по времени решение (устойчивый цикл) системы уравнений с частными производными, удовлетворяющее определенным краевым условиям. Естественно, что в общем случае уравнение может иметь один или несколько устойчивых циклов, и их количество различно при разных значениях параметров.

В качестве типичного примера распределенной колебательной системы назовем автогенератор с длинной линией. Задачу о теоретическом исследовании его периодических по времени режимов, по-видимому, первым поставил А. А. Витт [1, 2]. Его имя и работы, к сожалению, мало известны. Александр Адольфович Витт — один из ярких представителей авторитетной советской школы теории колебаний (Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси, А. А. Андронов, В. В. Мигулин и др.), выполнивший ряд оригинальных, интересных и перспективных исследований. Он являлся и одним из соавторов классической книги "Теория колебаний"[3]. Однако поскольку А. А. Витт был репрессирован (и погиб в 1937 г.), его фамилия на книге [3] не значилась и была восстановлена лишь через много лет [4, 5].

1. Принято говорить, что в распределенной колебательной системе наблюдается *феномен буферности*, если она обладает следующим свойством: ее математическая модель — краевая задача для системы дифференциальных уравнений с частными производными — допускает при соответствующих значениях входящих параметров произвольное a priori заданное конечное число различных устойчивых циклов. Другими словами, имеется теоретическая возможность для любого натурального N так подобрать физические характеристики системы, чтобы в ней реализовывалось N разных автоколебательных режимов.

В работе [2] А. А. Витт высказал гипотезу о том, что в автогенераторе с длинной линией могут существовать сразу нескольких устойчивых циклов. Сам факт увеличения числа автоколебательных режимов при изменении значений параметра для реального распределенного колебательного объекта впервые зафиксирован экспериментально в ходе работы, выполненной под руководством В. В. Мигулина (см. [6]). А математическое исследование феномена буферности началось по инициативе Ю. С. Колесова, численными методами изучавшего это явление в параболических системах типа реакция-диффузия [7], а затем и теоретически — в гиперболических уравнениях [8].

Подробное изложение математической теории явления буферности содержится в монографиях [9, 10], а также, например, в статьях [11 – 14], где приведены и результаты радиотехнического эксперимента, свидетельствующего о физической реализуемости данного феномена.

В настоящей работе проводится теоретическое обоснование наличия явления буферности в математической модели одного $LCRG-$ автогенератора с длинной линией и туннельным диодом, который будем называть распределенным генератором Ван дер Поля, поскольку он — естественный аналог классического однолампового генератора Ван дер Поля с колебательным контуром в цепи анода [3].

2. Рассмотрим радиотехнический объект, принципиальная схема которого представлена на рис. 1.

Он содержит две длинные LCR — линии, емкости C_j, индуктивности L_j и активные сопротивления R_j, $j = 1, 2$ которых равномерно распределены на длинных отрезках проводников одной и той же длины l (распределенными проводимостями $G_j, j = 1, 2$ пренебрегаем); между линиями существует взаимоиндукция с коэффициентами $M_j, j = 1, 2$. Предполагаем, что рис. 2 представляет зависимость тока I в нелинейном элементе (туннельном диоде) от приложенного к нему напряжения u.

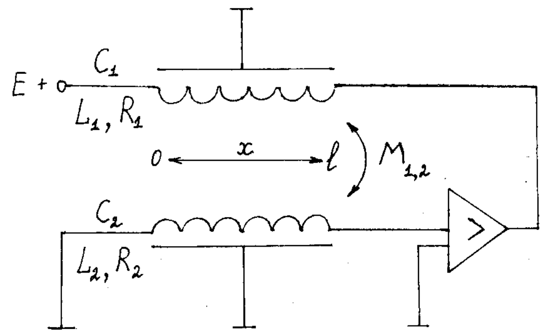

Рис. 1.

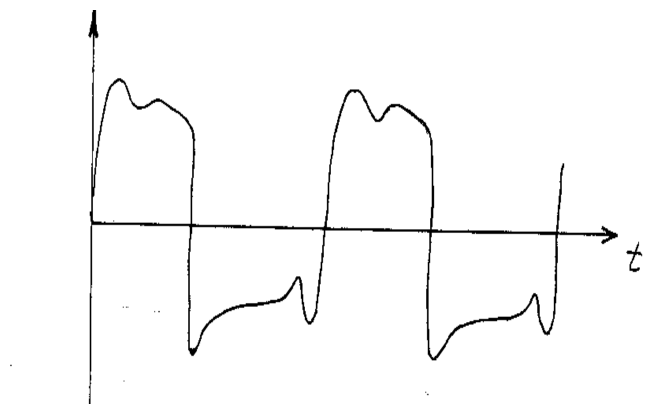

Рис. 2.

Пусть $u_j, i_j, j = 1, 2,$ — переменные составляющие напряжения и силы тока в каждой из длинных линий. Опуская описание некоторых физических деталей и вывод (достаточно стандартный; см., например, [15]) необходимых соотношений, сразу запишем систему телеграфных уравнений, связывающую напряжения и силы токов:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_1}{\partial x} = -R_1 i_1 - L_1 \frac{\partial i_1}{\partial t} + M_1 \frac{\partial i_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial i_1}{\partial x} = -C_1 \frac{\partial u_1}{\partial t}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} = -R_2 i_2 - L_2 \frac{\partial i_2}{\partial t} + M_2 \frac{\partial i_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial i_2}{\partial x} = -C_2 \frac{\partial u_2}{\partial t}.\end{gathered} \tag{1}$$

Ее следует рассматривать на отрезке $0 \leq x \leq l$, дополнив краевыми условиями, получающимися при типичных физических предположениях (идеальность усилителя и др.) и при общепринятом допущении о кубической аппроксимации характеристики диода в окрестности рабочей точки A :

$$\begin{gathered} u_1\big|_{x=0} = 0, \ u_2\big|_{x=0} = 0, \\ i_1\big|_{x=l} = (s_0 u_2 + s_1 u_2^2 - s_2 u_2^3)\big|_{x=l}, \ i_2\big|_{x=l} = 0; \end{gathered} \tag{2}$$

здесь $s_0 > 0, s_2 > 0$, а знак s_1 произволен.

Краевую задачу (1), (2) будем изучать лишь в случае $C_2 = 0$. Именно его и можно рассматривать как математическую модель распределенного генератора Ван дер Поля — аналога классического генератора Ван дер Поля с колебательным контуром в цепи анода. В этом случае первая основная длинная линия играет роль "колебательного контура в цепи анода", а вторая является вспомогательной, ибо при $C_2 = 0$ автоматически имеем $i_2(t) \equiv 0$, обеспечивая (через взаимоиндукцию) обратную связь между основной линией и усилителем. Поэтому в задаче (1),

(2) положим $i_2 = 0$, а затем исключим переменную

$$u_2 = -\frac{M_2}{L_1}u_1 - \frac{M_2 R_1}{L_1}\int\limits_0^x i_1(t,s)ds$$

и выполним замены

$$x/l \to x,\ t/(l\sqrt{L_1 C_1}) \to t,\ u_1 = u,\ i_1 = v\sqrt{C_1/L_1}.$$

В итоге интересующая нас математическая модель принимает вид

$$\begin{gathered} u_t = -v_x,\ v_t = -u_x - \varepsilon v, \\ u\big|_{x=0} = 0,\ v\big|_{x=1} + \beta_0\sigma + \beta_1\sigma^2 - \beta_2\sigma^3 = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

где

$$\sigma(t) = u\big|_{x=1} + \varepsilon\int\limits_0^1 v(t,x)dx,$$

а входящие в задачу параметры выражаются через физические характеристики генератора:

$$\varepsilon = lR_1\sqrt{C_1/L_1},\ \beta_0 = s_0\alpha\sqrt{L_1/C_1},$$

$$\beta_1 = -s_1\alpha^2\sqrt{L_1/C_1},\ \beta_2 = s_2\alpha^3\sqrt{L_1/C_1},\ \alpha = M_2/L_1.$$

3. В качестве фазового пространства (пространства начальных условий $(u(x), v(x))$) краевой задачи (3) возьмем нелинейное многообразие Σ в гильбертовом пространстве $W_2^1([0,1]; R^2)$, состоящее из вектор-функций, компоненты которых удовлетворяют краевым условиям из (3). Понятие фазового пространства позволяет обычным образом определять основные понятия математической теории колебаний.

Отметим, что однозначная разрешимость отвечающей (3) смешанной задачи с начальными условиями из Σ устанавливается стандартно: достаточно линейную систему уравнений из (3) проинтегрировать по характеристикам, а затем результат подставить в указанные там же краевые условия.

4. Периодическими по t решениями краевой задачи (3) будем интересоваться при дополнительных предположениях

$$\beta_0 = \varepsilon/2 + \gamma\varepsilon^2,\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 1, \tag{4}$$

где ϵ — малый параметр: $0 \le \epsilon \ll 1$, а параметр $\gamma > 0$ — величина порядка единицы. Первое из условий (4) диктуется чисто математическими соображениями, поясняемыми ниже; второе, означающее симметричность характеристики диода, сделано лишь для простоты и не имеет принципиального значения (все результаты сохраняются и при $\beta \ne 0$); третье легко обеспечивается за счет подходящей нормировки переменных u, v.

Подставляя в соотношения (3) равенства (4) и сохраняя во втором краевом условии из (3) только существенные для дальнейшего слагаемые, приходим к краевой задаче

$$\begin{gathered} u_t = -v_x,\ v_t = -u_x - \varepsilon v,\ u\big|_{x=0} = 0, \\ v\big|_{x=1} + \left(\frac{\varepsilon}{2} + \gamma\varepsilon^2\right)u\big|_{x=1} + \frac{\varepsilon^2}{2}\int\limits_0^1 v dx - u^3\big|_{x=1} = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Для построения ее периодических по t решений воспользуемся методом бесконечномерной нормализации, представляющим собой специальный вариант асимптотического метода Крылова

— Боголюбова — Митропольского (см., например, [16]) и смыкающимся в алгоритмическом плане с методом квазинормальных форм Ю. С. Колесова (см., например, [17, 18]).

5. С этой целью подставим в краевую задачу (5) ряды

$$u=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k+1}u_k(t,\tau,x),\ \ v=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k+1}v_k(t,\tau,x). \tag{6}$$

Здесь $\tau=\epsilon^2 t$; все коэффициенты являются 4-периодическими по t;

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{n=1}^{\infty}[z_n(\tau)\exp(i\omega_n t)+\bar z_n(\tau)\exp(-i\omega_n t)]\times(-1)^{n-1}\sin(\omega_n x),\\ v_0 &= i\sum_{n=1}^{\infty}[z_n(\tau)\exp(i\omega_n t)-\bar z_n(\tau)\exp(-i\omega_n t)]\times(-1)^{n-1}\cos(\omega_n x); \end{aligned} \tag{7}$$

$\omega_n=\pi(2n-1)/2, n=1,2,\ldots$; комплексные "амплитуды"z_n таковы, что сходится ряд с общим членом $\omega_n^2|z_n|^2$ (тогда $u_0,v_0\in W_2^1$ по переменной x). Приравнивая далее коэффициенты при одинаковых степенях ϵ, последовательно определяем $u_j,v_j,j=1,2$ и неизвестные амплитуды $z_n,n=1,2,\ldots$

Специально подчеркнем: отыскание периодических решений краевой задачи (5) в виде (6) вполне естественно, так как формулы (7) (при фиксированном τ) задают произвольное периодическое решение линейной краевой задачи, получающейся, если в краевой задаче (5) положить $\epsilon=0$ и отбросить нелинейности.

На первом шаге описанного алгоритма приходим к краевой задаче

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=-\frac{\partial v_1}{\partial x},\ \frac{\partial v_1}{\partial t}=-\frac{\partial u_1}{\partial x}-v_0,$$

$$u_1\Big|_{x=0}=0,\ v_1\Big|_{x=1}+\tfrac{1}{2}u_0\Big|_{x=1}=0,$$

решение которой будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{n=1}^{\infty}[z_nA_n(x)\exp(i\omega_n t)+\bar z_n\bar A_n(x)\exp(-i\omega_n t)],\\ v_1 &= \sum_{n=1}^{\infty}[z_nB_n(x)\exp(i\omega_n t)+\bar z_n\bar B_n(x)\exp(-i\omega_n t)]. \end{aligned}$$

Непосредственно убеждаемся, что для определения функций $A_n,B_n,n=1,2,\ldots$ получаются линейные неоднородные краевые задачи, разрешимость которых обеспечивает слагаемое $(\epsilon/2)u|_{x=1}$ во втором краевом условии из (5). Таким образом, становятся прозрачны мотивы специально сделанного в (4) предположения относительно коэффициента β_0. Несложный анализ упомянутых краевых задач приводит к равенствам

$$\begin{aligned} A_n &= -\frac{i}{2}(-1)^{n-1}x\cos\omega_n x,\\ B_n &= \frac{i}{\omega_n}[A_n'(x)+i(-1)^{n-1}\cos\omega_n x],\ n=1,2,\ldots. \end{aligned} \tag{8}$$

На втором шаге описанного алгоритма после исключения v_2 приходим к краевой задаче

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big)u_2=-2\frac{\partial^2 u_0}{\partial t\partial\tau}-\frac{\partial u_1}{\partial t},$$

$$u_2\Big|_{x=0}=0,\ \frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=1}=\frac{d}{dt}\big(\gamma u_0\big|_{x=1}-u_0^3\big|_{x=1}\big),$$

решение которой будем искать в виде

$$u_2 = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n(x)\exp(i\omega_n t) + \bar{C}_n(x)\exp(-i\omega_n t)].$$

Непосредственно убеждаемся, что с учетом равенств (8) для определения функций $C_n, n = 1, 2, \ldots$ получаются линейные неоднородные краевые задачи

$$C_n'' + \omega_n^2 C_n = (-1)^{n-1}\Big(2i\omega_n \frac{dz_n}{d\tau}\sin\omega_n x + \frac{\omega_n}{2} z_n x\cos\omega_n x\Big), \qquad C_n(0) = 0,\ C_n'(0) = i\omega_n f_n; \tag{9}$$

здесь f_n — коэффициент при гармонике $\exp(i\omega_n y)$ ряда Фурье функции $\gamma w(\tau, y) - w^3(\tau, y)$, где

$$w(\tau, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [z_n(\tau)\exp(i\omega_n y) + \bar{z}_n(\tau)\exp(-i\omega_n y)]. \tag{10}$$

Обеспечение условий разрешимости краевых задач (9) приводит, в свою очередь, к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$i\omega_n \dot{z}_n = -\frac{1}{8} z_n + i\omega_n f_n,\ n = 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

для отыскания неизвестных амплитуд $z_n, n = 1, 2, \ldots$ Наконец, привлекая функцию (10), без особого труда убеждаемся, что счетная система уравнений (11) "сворачивается" в специфическую краевую задачу

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\tau\partial y} = -\frac{1}{8} w + (\gamma - 3w^2)\frac{\partial w}{\partial y}, \quad w(\tau, y + 2) \equiv -w(\tau, y). \tag{12}$$

6. Строгий смысл изложенным формальным построениям придается по той же схеме, что и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [16]). Именно, с помощью построенных отрезков рядов (6) конструируется замена переменных, приводящая исходную краевую задачу (5) с точностью до слагаемых порядка ϵ к виду (11). Таким образом, система (11), а значит, и краевая задача (12) представляют собой "укороченную" нормальную форму задачи (5). Поэтому справедливо следующее стандартное утверждение о соответствии между их периодическими решениями.

Теорема 1. *Пусть краевая задача (12) имеет периодическое решение $w = w_0(\xi), \xi = \kappa\tau + y$, экспоненциально орбитально устойчивое или дихотомичное (в метрике W_2^1). Тогда найдется такое $\epsilon > 0$, что при всех $0 < \epsilon \le \epsilon_0$ в исходной краевой задаче (5) ему отвечает цикл (периодическое по t решение) той же устойчивости с асимптотикой (6). При этом в формулах (7) следует положить $z_n(\tau) = w_n^0 \exp(i\omega_n\kappa_0\tau$, где $w_n^0, \overline{w}_n^0, n = 1, 2, \ldots,$ — коэффициенты Фурье функции $w_0(\xi)$ по системе* $\exp(\pm i\omega_n\xi), n = 1, 2, \ldots$

Следует подчеркнуть, что примененный метод представляет собой бесконечномерный аналог широко используемого в теории колебаний метода медленно меняющихся амплитуд (см., например, [19]). Специфика этого метода в рассматриваемом случае состоит также и в том, что он применяется к краевой задаче (5), нелинейность в которой не является малой.

7. Выполняя в краевой задаче (12) подходящие нормировки переменных w, τ, y и заменяя τ на t, а y на x, приведем ее к более удобному для анализа виду

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x} = w + \lambda(1 - w^2)\frac{\partial w}{\partial x}, \quad w(t, x + 1) = -w(t, x), \tag{13}$$

где $\lambda = 4\gamma > 0$. Из теоремы **??** следует, что особый интерес представляют ее периодические решения типа бегущих волн:

$$w = \theta(y),\ y = \sigma t - x,\ \sigma > 0. \tag{14}$$

Их динамика по λ подробно изучена в работе [20]. Поэтому приведем здесь лишь краткий обзор результатов.

Подставляя представление (14) в краевую задачу (13), для нахождения функции $\theta(y)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение, которое после замены $y/\sqrt{\sigma} \to y$ принимает вид

$$\theta'' + r(\theta^2 - 1)\theta' + \theta = 0, \tag{15}$$

где $r = \lambda/\sqrt{\sigma}$. Заметим, что (15) — это классическое уравнение Ван дер Поля, имеющее при всех $r > 0$ единственное периодическое решение $\theta = H(y, r), H9y, 0) = 2\cos y$ периода $T = T(r), T(0) = 2\pi$, удовлетворяющее также равенству $H(y + T/2, r) \equiv -H(y, r)$. Однако в силу того, что фигурирующая в (14) функция $\theta(y)$ 2-периодична, нас интересует решение уравнения (15) периода $2/\sqrt{\sigma}$. Поэтому для определения неизвестного параметра r получаем уравнение

$$\lambda T(r) - 2r = 0. \tag{16}$$

При $\lambda \ll 1$, применяя к уравнению (16) в точке $\lambda = 0, r = 0$ теорему о неявной функции, однозначно определяем его решение $r = r_0(\lambda), r_0(0) = 0$. Вспоминая далее о связи уравнения (15) с исходной задачей (13), заключаем, что последняя имеет периодическое решение

$$w = \theta_0(y, \lambda),\ y = \sigma_0(\lambda)t - x, \tag{17}$$

где

$$\sigma_0(\lambda) = (\lambda/r_0(\lambda))^2,\ \theta_0(y, \lambda) = H(y/\sqrt{\sigma_0(\lambda)}, r_0(\lambda)).$$

Отметим также, что, наряду с решением (17), у краевой задачи (13) при $\lambda \ll 1$ существуют и другие периодические решения, получающиеся из построенного с помощью принципа подобия:

$$w = \theta_n(y, \lambda),\ y = \sigma_n(\lambda)t - x,\ n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{18}$$

где

$$\theta_n = \theta_0((2n+1)y, (2n+1)\lambda),\ \sigma_n(\lambda) = \sigma_0((2n+1)\lambda)/(2n+1)^2.$$

Теорема 2. *Для любого натурального N можно указать такое достаточно малое $\lambda_N > 0$, что при всех $0 < \lambda \le \lambda_N$ краевая задача (13) имеет экспоненциально орбитально устойчивые периодические решения (18) с номерами $n = 0, 1, 2, \ldots, N$.*

8. Обратим внимание, что найденные решения краевой задачи (13) в форме волн стационарного профиля, описываемых уравнением Ван дер Поля, с физической точки зрения близки к автосолитонам, наблюдаемым, например, в кольцевом лазере в случае самосинхронизации мод (см. [19]). При такой интерпретации уравнение (16) представляет собой аналог нелинейного дисперсионного соотношения. Отметим также, что в нашем случае "основной" период колебаний, т.е. период функции $\theta_0(y, \lambda)$ равен 2, а все функции $\theta_n(y, \lambda), n \ge 1$ в силу принципа подобия имеют периоды $2/(2n+1)$. Отсюда и из теоремы **??** заключаем, что отвечающие решениям (18) периодические по t решения $(u_n(t, x, \epsilon), v_n(t, x, \epsilon), n = 0, 1, \ldots$ исходной краевой задачи (5) имеют периоды $T_n(\epsilon) = 4/(2n+1) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$.

В дополнение к теореме **??** заметим: каждое периодическое решение (18) непрерывно продолжается по параметру λ на интервал

$$0 < \lambda\lambda_n,\ \lambda_n = \lambda_0/(2n+1),\ \lambda_0 = 2/(3 - 2\ln 2),$$

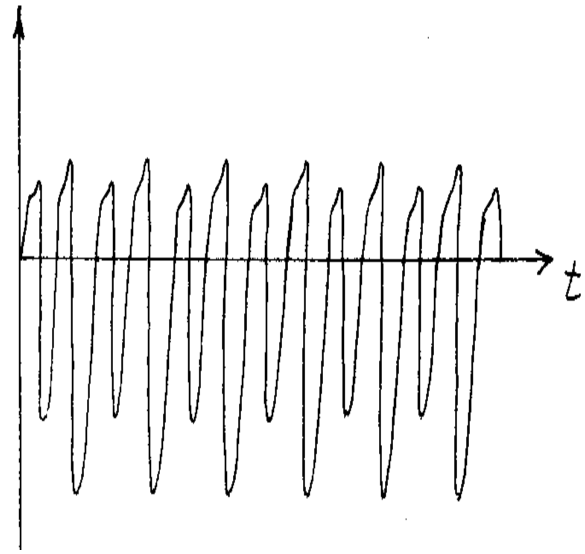

Рис. 3.

а при $\lambda \geq \lambda_n$ становится разрывным. С физической точки зрения это означает, что увеличение энергетического параметра λ в совокупности с эффектом самосинхронизации мод приводит сначала к усложнению формы каждого цикла (18), а затем — к полному его разрушению.

Из теорем **??** и **??** следует, что исходная краевая задача (5) при подходящем уменьшении параметров ϵ, γ может иметь любое фиксированное число устойчивых циклов, т.е. буферность представляет собой характерную особенность динамики распределенного автогенератора Ван дер Поля.

В качестве итога сформулируем на физическом языке специфические особенности феномена буферности. В распределенной колебательной системе, обладающей феноменом буферности, имеется набор устойчивых периодических режимов, причем, подбирая параметры системы должным образом, можно добиться, чтобы этот набор содержал сколь угодно большое конечное число таких режимов. При уже фиксированных значениях параметров реализация какого-либо одного из потенциально возможных автоколебательных режимов происходит в зависимости от сложившихся начальных условий или под влиянием внешних факторов и самопроизвольный переход системы на другой периодический режим невозможен.

9. Для экспериментальной иллюстрации полученных теоретических результатов был собран автогенератор с распределенными параметрами, соответствующий изображенной на рис. 1 принципиальной схеме и по своим характеристикам близкий к идеальному. Автоколебания, реализующиеся в этом распределенном генераторе Ван дер Поля, снимались с выхода усилителя и наблюдались на экране осциллографа.

При определенном значении коэффициента усиления был зафиксирован периодический режим, изображенный на рис. 3, а при достижении этим коэффициентом некоторого другого значения наблюдались уже два сосуществующих периодических режима (изображенных на рис. 3 и 4), реализация каждого из которых зависела только от попадания на соответствующие начальные условия для тока и напряжения. Отношение их периодов равнялось 1:3, что позволяло их отождествлять с циклами краевой задачи (5), отвечающими бегущим волнам (18) с номерами $n = 0$ и $n = 1$.

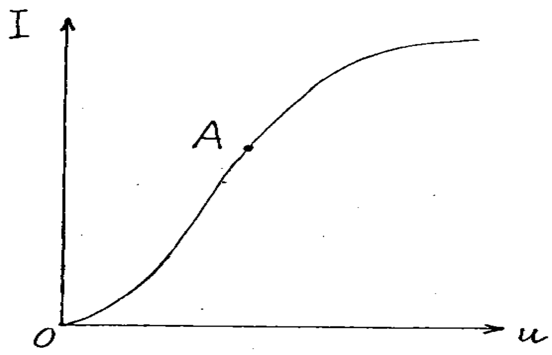

Рис. 4.

Цитированная литература

1. **Витт А. А.** // Журн. технич. физики. 1934. Т. 4, №1. С. 144 – 157.

2. **Витт А. А.** // Журн. технич. физики. 1936. Т. 6, №9. С. 1459 – 1479.

3. **Андронов А. А., Хайкин С. Э.** Теория колебаний. М.: ОНТИ, 1937. 519 с.

4. **Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.** Теория колебаний.Переработка и дополнения Н.А.Железцова. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.

5. **Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.** Теория колебаний. М.: Физматлит, 1981. 568 с.

6. **Азьян Ю. М., Мигулин В. В.** // Радиотехника и электроника. 1956. Т. 1, №4. С. 418 – 427.

7. **Захаров А. А., Колесов Ю. С.** // Сб.: Нелинейные колебания и экология. Ярославль. 1984. С. 3 – 15.

8. **Колесов А. Ю., Колесов Ю. С.** // ДАН СССР. 1990. Т. 315, №12. С. 281 – 283.

9. **Мищенко Е. Ф., Колесов Ю. С., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.** Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.: Физматлит, 1995. 328 с.

10. **Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.** Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравненимй. М.: Наука, 1998. (Тр. МИАН. Т.222.) 191 с.

11. **Камбулов В. Ф., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.** // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, №5. С. 638 – 645.

12. **Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.** // Укр. матем. журн. 1998. Т. 50, №1. С. 22 – 35.

13. **Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.** // Успехи матем. наук. 2000. Т. 55, №2. С. 95 – 120.

14. **Колесов А. Ю., Розов Н. Х.** // Прикл. матем. и мех. 2001. Т. 65, №2. С. 183 – 198.

15. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 1977. 736 с.

16. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматлит, 1974. 504 с.

17. **Колесов Ю. С.** // Мат. сборник. 1993. Т. 184, №3. С. 121 – 136.

18. **Колесов Ю. С.** // Мат. сборник. 1995. Т. 186, №10. С. 57 – 72.

19. **Ланда П. С.** Нелинейные колебания и волны. М.: Физматлит, 1997. 496 с.

20. **Камбулов В. Ф., Колесов А. Ю.** // Мат. моделирование. 1996. Т. 8, №1. С. 93 – 102.

Поступила в редакцию 15.10.2001г.

Математический журнал. *Алматы. 2001. Том 1. № 2. С. 85 — 92*

УДК 517.95

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ ГИББСА-ТОМСОНА В ГЕЛЬДЕРОВСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. С. Сарсекеева

АГУ им. Абая
480012, Алматы, Толе би ул., 86

Доказана однозначная разрешимость линеаризованной задачи со свободной границей Гиббса-Томсона для параболического уравнения второго порядка в весовом пространстве Гельдера, установлены коэрцитивные оценки решения.

1. Постановка задачи. Пусть Ω — ограниченная область в R^n, $n \geqslant 2$, с границей S. Пусть замкнутая поверхность $\gamma \in \Omega$ делит область Ω на две подобласти Ω_1 и Ω_2 таким образом, что $\partial\Omega_1 = S \bigcup \gamma$, $\partial\Omega_2 = \gamma$.

Введем обозначения $\Omega_T = \Omega \times (0,T), \Omega_T^{(m)} = \Omega_m \times (0,T), \gamma_T = \gamma \times (0,T), S_T = S \times (0,T)$.

Требуется найти функции $u_1(x,t), x \in \Omega_1, u_2(x,t), x \in \Omega_2$, и $\rho(x,t), x \in \gamma$, по условиям

$$L_m\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)u_m - \lambda_m(x,t)L_m\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)\rho^* = f_m(x,t) \quad \text{в} \quad \Omega_T^{(m)},\ m=1,2,$$

$$u_m|_{t=0} = 0, \quad m=1,2, \quad \rho|_{t=0}=0, \quad u_1|_{S_T} = p(x,t), \quad u_1 - u_2|_{\gamma_T} = 0, \tag{1}$$

$$\varkappa\frac{\partial\rho}{\partial t} + b^{(1)}(x,t)\nabla u_1 - b^{(2)}(x,t)\nabla u_2 + c(x,t)\nabla\rho + b_0^{(1)}(x,t)u_1 + b_0^{(2)}(x,t)u_2 + c_0(x,t)\rho|_{\gamma_T} = \varphi_1(x,t),$$

$$\beta\frac{\partial\rho}{\partial t} - \alpha\sum_{i,j=1}^n d_{ij}(x,t)\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_{i=1}^n d_i(x,t)\frac{\partial\rho}{\partial x_i} + d_0(x,t)\rho + h(x,t)u_1|_{\gamma_T} = \varphi_2(x,t),$$

где $L_m\big(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\big) = \frac{\partial}{\partial t} - \sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}^{(m)}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^n a_i^{(m)}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i} - a^{(m)}(x,t)$ — параболический оператор второго порядка:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(m)}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \mu_0\xi^2 \quad \forall (x,t) \in \bar\Omega_T^{(m)}, \qquad a_{ij}^{(m)} = a_{ji}^{(m)} \quad \text{в} \quad \bar\Omega_T^{(m)}, \quad m=1,2,$$

$$\sum_{i,j=1}^n d_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \mu_0\xi^2 \quad \forall (x,t) \in \gamma_T, \quad \xi \in R^n, \quad \mu_0 = const > 0, \qquad d_{ij} = d_{ji} \quad \text{на} \quad \gamma_T,$$

Keywords: *second order parabolic equation,weighted Holder space, existence, uniqueness of the solutions, coercive estimate.*
2000 Mathematics Subject Classification: 35R35

$\alpha, \beta, \varkappa$ — положительные постоянные, ρ^* — продолжение функции ρ в область Ω [1] такое, что

$$\rho^*|_\gamma = \rho, \quad \rho^*|_S = 0, \quad \left.\frac{\partial \rho^*}{\partial \nu}\right|_\gamma = 0, \quad |\rho^*|^{(4+l)}_{s+2,\Omega_T} \leq C_1 |\rho|^{(4+l)}_{s+2,\gamma_T}, \tag{2}$$

ν — нормаль к поверхности γ, направленная в Ω_2.

Задача (1) возникает при линеаризации задачи Стефана с условием Гиббса-Томсона на свободной границе. Условия на γ_T в задаче (1) получены из закона Гиббса-Томсона: $u_1 = u_2 = \alpha k - \beta V_\nu$ и условия Стефана: $-\varkappa V_\nu = \lambda_1(x,t)\nabla u_1 - \lambda_2(x,t)\nabla u_2$, где k – средняя кривизна свободной границы, а V_ν – скорость перемещения свободной границы вдоль нормали ν.

Основная цель работы — установить точную гладкость неизвестных функций и исследовать задачу в весовых пространствах Гельдера $C^l_s(Q_T)$, $s \leq l$, введенных В. С. Белоносовым [2], которые расширяют класс классических решений и позволяют понизить порядок согласования начальных и краевых данных.

Определим пространство $C^l_s(Q_T)$. Пусть l – нецелое положительное число, $s \leq l$. $C^l_s(Q_T)$ – пространство функций $u(x,t)$, имеющих норму

$$|u|^{(l)}_{s,Q_T} = \sup_{t \leq T} t^{\frac{l-s}{2}} [u]^{(l)}_{Q'_t} + \sum_{s < 2j_0 + |j| < l} \sup_{t \leq T} t^{\frac{2j_0+|j|-s}{2}} |D^{j_0}_t D^j_x u|_\Omega + \left\{ \begin{array}{ll} |u|^{(s)}_{Q_T}, & s \geq 0 \\ 0, & s < 0 \end{array} \right. , \tag{3}$$

где $Q'_t = \Omega \times \left(\dfrac{t}{2}, t\right)$,

$$\begin{aligned} [u]^{(l)}_{Q'_t} &= \sum_{2j_0+|j|=[l]} [D^{j_0}_t D^j_x u]^{(l-[l])}_{x,Q'_t} + \sum_{0<l-2j_0-|j|<2} [D^{j_0}_t D^j_x u]^{\left(\frac{l-2j_0-|j|}{2}\right)}_{t,Q'_t}, \\ [v]^{(\alpha)}_{x,Q_T} &= \sup_{(x,t),(z,t) \in \bar{Q}_T} |v(x,t) - v(z,t)||x-z|^{-\alpha}, \\ [v]^{(\alpha)}_{t,Q_T} &= \sup_{(x,t),(x,\tau) \in \bar{Q}_T} |v(x,t) - v(x,\tau)||t-\tau|^{-\alpha}, \ \alpha \in (0,1). \end{aligned}$$

$|u|^{(s)}_{Q_T}$—норма пространства Гельдера $C^{s,\frac{s}{2}}_{x\,t}(\bar{Q}_T)$.

При $s = l$ пространство $C^l_s(Q_T)$ является пространством Гельдера $C^{l,l/2}_{x\ \ t}(\bar{Q}_T)$.

Пространство $\overset{\circ}{C}{}^l_s(Q_T)$ при $s \geqslant 0$ есть подпространство пространства функций из $C^l_s(Q_T)$, удовлетворяющих условиям $D^k_t u|_{t=0} = 0$, $2k \leqslant s$; при $s < 0$ положим $\overset{\circ}{C}{}^l_s(Q_T) = C^l_s(Q_T)$.

В пространстве $\overset{\circ}{C}{}^l_s(Q_T)$ норма (3) эквивалентна норме [3]

$$||u||^{(l)}_{s,Q_T} = \sup_{t \leq T} t^{\frac{l-s}{2}} [u]^{(l)}_{Q'_t} + \sup_{t \leq T} t^{-\frac{s}{2}} |u|_\Omega. \tag{4}$$

2. Основной результат.

Т е о р е м а . *Пусть l — нецелое положительное число, $1 < s \leq 2 + l$. Пусть $\gamma \in C^{4+l}$, $S \in C^{2+l}$ и коэффициенты дифференциальных операторов в задаче (1) удовлетворяют условиям: $a^{(m)}_{ij}(x,t)$, $a^{(m)}_i(x,t)$, $a^{(m)}(x,t)$, $\lambda_m(x,t) \in C^l_{s-2}(\Omega^{(m)}_T)$; $b^{(m)}_j(x,t)$, $c_j(x,t)$, $b^{(m)}_0(x,t)$, $c_0(x,t) \in C^{1+l}_{s-1}(\gamma_T)$, $j = 1,\ldots,n$, $m = 1,2$; $d_{ij}(x,t)$, $d_i(x,t)$, $d_0(x,t)$, $h(x,t) \in C^{2+l}_s(\gamma_T)$.*

Тогда для любых функций $f_m \in \overset{\circ}{C}{}^l_{s-2}(\Omega^{(m)}_T)$, $m = 1,2$, $\varphi_1 \in \overset{\circ}{C}{}^{1+l}_{s-1}(\gamma_T)$, $\varphi_2 \in \overset{\circ}{C}{}^{2+l}_s(\gamma_T)$, $p(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}^{2+l}_s(S_T)$ задача (1) имеет единственное решение $u_m \in \overset{\circ}{C}{}^{2+l}_s(\Omega^{(m)}_T)$, $m = 1,2$, $\rho \in \overset{\circ}{C}{}^{4+l}_{s+2}(\gamma_T)$, подчиняющееся неравенству

$$\sum_{m=1}^2 |u_m|^{(2+l)}_{s,\Omega^{(m)}_T} + |\rho|^{(4+l)}_{s+2,\gamma_T} \leq C_2 \left(\sum_{m=1}^2 |f_m|^{(l)}_{s-2,\Omega^{(m)}_T} + |\varphi_1|^{(1+l)}_{s-1,\gamma_T} + |\varphi_2|^{(2+l)}_{s,\gamma_T} + |p|^{(2+l)}_{s,S_T} \right). \tag{5}$$

Доказательство. Пусть

$$\overset{\circ}{\mathcal{B}}(\Omega_T) = \overset{\circ}{C}{}_s^{2+l}(\Omega_T^{(1)}) \times \overset{\circ}{C}{}_s^{2+l}(\Omega_T^{(2)}) \times \overset{\circ}{C}{}_{s+2}^{4+l}(\gamma_T)$$

— банахово пространство функций $w = \{u_1, u_2, \rho\}$, а

$$\overset{\circ}{\mathcal{H}}(\Omega_T) = \overset{\circ}{C}{}_{s-2}^{l}(\Omega_T^{(1)}) \times \overset{\circ}{C}{}_{s-2}^{l}(\Omega_T^{(2)}) \times \overset{\circ}{C}{}_{s-1}^{1+l}(\gamma_T) \times \overset{\circ}{C}{}_s^{2+l}(\gamma_T) \times \overset{\circ}{C}{}_s^{2+l}(S_T)$$

— пространство функций $h = \{f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2, p\}$ с нормами

$$|w|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(\Omega_T)} = \sum_{m=1}^{2} |u_m|_{s,\Omega_T^{(m)}}^{(2+l)} + |\rho|_{s+2,\gamma_T}^{(4+l)}, \tag{6}$$

$$|h|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(\Omega_T)} = \sum_{m=1}^{2} |f_m|_{s-2,\Omega_T^{(m)}}^{(l)} + |\varphi_1|_{s-1,\gamma_T}^{(1+l)} + |\varphi_2|_{s,\gamma_T}^{(2+l)} + |p|_{s,S_T}^{(2+l)}. \tag{7}$$

Будем доказывать теорему методом Шаудера и построения регуляризатора ([4], [5]).

Зафиксируем малое число $\lambda > 0$ и покроем области Ω_1 и Ω_2 шарами радиусов $\lambda/2$ и λ— $B_{k,\lambda}$ и $B_{k,2\lambda}$, имеющими общие центры ξ_k.

Пусть функции $\zeta_k(x)$ и $\eta_k(x)$, подчиненные покрытию областей шарами, такие, что $\zeta_k(x) = 1$ при $|x - \xi_k| \le \lambda/2$ и $\zeta_k(x) = 0$ при $|x - \xi_k| \ge \lambda,$ $\operatorname{supp}\, \eta_k(x) = B_{k,2\lambda},$ $\sum\limits_k \eta_k \zeta_k = 1,$

$$|D^\alpha \zeta_k|, |D^\alpha \eta_k| \le c_{k,\alpha} \lambda^{-|\alpha|}. \tag{8}$$

Пусть $k \in \mathcal{M}$, если шары $B_{k,2\lambda}$ целиком расположены в области Ω_1 или Ω_2; $k \in \mathcal{L}$, если шары $B_{k,\lambda}$ примыкают к границе S; $k \in \mathcal{N}$, если шары $B_{k,\lambda}$ примыкают к границе γ.

Пусть $k \in \mathcal{L} \bigcup \mathcal{N},$ $\xi_k' \in B_{k,\lambda}$ — точка, лежащая на S или γ и ближайшая к ξ_k. Перейдем к местной системе координат $\{y\}$ с центром в точке ξ_k', направив ось y_n по нормали $\bar{\nu}$ в точке ξ_k' к поверхности S внутрь Ω_1 при $k \in \mathcal{L}$ и к поверхности γ внутрь Ω_2 при $k \in \mathcal{N}$.

Произведем замену переменных

$$z' = y', \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad z_n = y_n - F_k(y'),$$

где $y_n = F_k(y')$ — уравнение поверхностей S и γ в местной системе координат, причем $F_k(0) = 0$, $\nabla F_k(0) = 0$.

При этом при $k \in \mathcal{L}$ область $y_n > F_k(y')$ перейдет в область $D^{(2)} = \{z: \; z' \in R^{n-1},\; z_n > 0\}$, а при $k \in \mathcal{N}$ области $y_n < F_k(y')$ и $y_n > F_k(y')$ перейдут в области $D^{(1)} = \{z: \; z' \in R^{n-1}$, $z_n < 0\}$ и $D^{(2)}$, соответственно.

Обозначим $D_T^{(m)} = D^{(m)} \times (0,T),$ $m = 1, 2,$ R — гиперплоскость $z_n = 0$, $R_T = R \times (0,T)$.

Пусть Z_k – преобразование координат $\{z\}$ в исходные координаты $\{x\}$,

$$L_{m,k}^{(0)}\left(\xi_k\ , 0\ , \frac{\partial}{\partial y}\ , \frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij,k}^{(m)} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\ .$$

Определим регуляризатор $\Re$ формулой

$$\Re h = \left\{ \Re_1 h, \Re_2 h, \Re_3 h \right\} = \left\{ \sum_k \eta_k u_{1,k}, \sum_k \eta_k u_{2,k}, \sum_k \eta_k \rho_k \right\}, \tag{9}$$

где функции $u_{m,k}, m = 1, 2,$ ρ_k удовлетворяют нулевым начальным данным и определены следующим образом.

Обозначим

$$u'_{m,k}(z,t) = u_{m,k}(x,t)|_{x=Z_k(z)}\ , \quad \rho'_k(z',t) = \rho_k(x,t)|_{x=Z_k(z)}\ ,$$

$$f'_{m,k}(z,t) = \zeta_k(x) f_m(x,t)|_{x=Z_k(z)}\ , \quad p'_k(z',t) = \zeta_k(x) p(x,t)|_{x=Z_k(z)}\ ,$$

$$\varphi'_{m,k}(z',t) = \zeta_k(x)\varphi_m(x,t)|_{x=Z_k(z)}, \quad m=1,2.$$

При $k \in \mathcal{M}$ функция $u_{m,k}$ является решением задачи Коши

$$L_m^{(0)}\left(\xi_k, 0, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u_{m,k} = f_{m,k}(x,t) \quad \text{в} \quad R_T^n = R^n \times (0,T), m=1,2; \tag{10}$$

при $k \in \mathcal{L}$ функция $u_{1,k}$ является решением первой начально-краевой задачи

$$\begin{gathered} L_{m,k}^{(0)}\left(\xi_k, 0, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u'_{1,k} = f'_{1,k}(z,t) \quad \text{в} \quad D_T^{(2)}, \\ u'_{1,k}|_{R_T} = p'_k(z',t); \end{gathered} \tag{11}$$

при $k \in \mathcal{N}$ функции $u_{m,k}, \rho_k$ являются решением задачи сопряжения

$$L_{m,k}^{(0)}\left(\xi_k, 0, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u'_{m,k} = f'_{m,k}(z,t) \text{ в } D_T^{(m)},\ m=1,2, \tag{12}$$

$$u'_{1,k} - u'_{2,k}|_{R_T} = 0\ , \tag{13}$$

$$b_k^{(1)}(\xi_k,0)\nabla u'_{1,k} - b_k^{(2)}(\xi_k,0)\nabla u'_{2,k}\big|_{R_T} = \varphi'_{1,k}(z',t)\ , \tag{14}$$

$$\beta\frac{\partial \rho'_k}{\partial t} - \alpha\sum_{i,j=1}^{n-1} d_{ij,k}(\xi_k,0)\frac{\partial \rho'_k}{\partial z_i \partial z_j} + h_k(\xi_k,0)u'_{1,k}\Big|_{R_T} = \varphi'_{2,k}(z',t)\ . \tag{15}$$

Задачи (10), (11) однозначно разрешимы в $\overset{\circ}{C}{}_s^{2+l}$ [3] и их решения подчиняются оценкам

$$|u_{m,k}|_{s,D_t}^{(2+l)} \le C_3 |f_{m,k}|_{s-2,D_t}^{(l)}, \quad k \in \mathcal{M},\ m=1,2\ , \tag{16}$$

$$|u'_{1,k}|_{s,D_t^{(2)}}^{(2+l)} \le C_4(|f'_{1,k}|_{s-2,D_t^{(2)}}^{(l)} + |p'_k|_{s,R_t}^{(2+l)}), \quad k \in \mathcal{L}\ . \tag{17}$$

Изучим задачу (12)–(15), которая устанавливает гладкость решения задачи (1).

Согласно работе [6], задача (12)–(14) однозначно разрешима и ее решение подчиняется оценке

$$\sum_{m=1}^{2} |u'_{m,k}|_{s,D_t^{(m)}}^{(2+l)} \le C_5\left(\sum_{m=1}^{2} |f'_{m,k}|_{s-2,D_t^{(m)}}^{(l)} + |\varphi'_{1,k}|_{s-1,R_t}^{(1+l)}\right)\ . \tag{18}$$

Функцию ρ'_k найдем из условия (15). Подставляя найденное $u'_{1,k}$ в условие (15), получим задачу Коши

$$\beta\frac{\partial \rho'_k}{\partial t} - \alpha\sum_{i,j=1}^{n-1} d_{ij,k}(\xi_k,0)\frac{\partial \rho'_k}{\partial z_i \partial z_j} = \Phi_2(z',t) \quad \text{в} \quad R_T, \tag{19}$$

где

$$\Phi_2 = \varphi'_{2,k}(z',t) - h_k(\xi_k,0)u'_{1,k}\big|_{R_T},$$

$$|\Phi_2|_{s,R_t}^{(2+l)} \le C_6\left(|\varphi'_{2,k}|_{s,R_t}^{(2+l)} + |u'_{1,k}|_{s,D_t^{(1)}}^{(2+l)}\right). \tag{20}$$

Решение задачи (19) запишем в виде потенциала

$$\rho_k'(x,t)=\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R^{n-1}} \Phi_2(y',t)G(x'-y',t-\tau)dy',$$

где

$$G(x',t)=\frac{1}{\beta(2\sqrt{\pi t})^{n-1}\sqrt{|D|}}\ e^{-\frac{\beta\sum\limits_{i,j=1}^{n-1}d^{ij}x_ix_j}{4\alpha t}},$$

$D=\left\{\dfrac{\alpha}{\beta}d_{ij}\right\}_{i,j=1}^{n}$, d^{ij} — элементы обратной матрицы D^{-1}.

Как показано в [3], функция $\rho_k'\in C^{4+l}_{s+2}(R_t)$ и на основании неравенства (20) удовлетворяет оценке

$$|\rho_k'|^{(4+l)}_{s+2,R_t}\le C_7|\Phi_2|^{(2+l)}_{s,R_t}\le C_8\left(|\varphi_{2,k}'|^{(2+l)}_{s,R_t}+|u_{1,k}'|^{(2+l)}_{s,D_t^{(1)}}\right)\le$$

$$\le C_9\left(|\varphi_{2,k}'|^{(2+l)}_{s,R_t}+|\varphi_{1,k}'|^{(1+l)}_{s-1,R_t}+|f_{1,k}'|^{(l)}_{s-2,D_t^{(1)}}\right). \qquad (21)$$

Учитывая неравенства (18), (21), получим оценку

$$\sum_{m=1}^{2}|u_{m,k}'|^{(2+l)}_{s,D_t^{(m)}}+|\rho_k'|^{(4+l)}_{s+2,R_t}\le C_{10}\left(\sum_{m=1}^{2}|f_{m,k}'|^{(l)}_{s-2,D_t^{(m)}}+|\varphi_{1,k}'|^{(1+l)}_{s-1,R_t}+|\varphi_{2,k}'|^{(2+l)}_{s,R_t}\right),k\in\mathcal{N}. \quad (22)$$

Из однозначной разрешимости задач (12)–(14) и (19) следует однозначная разрешимость задачи (12)–(15) в $\overset{\circ}{\mathcal{B}}(D_t)$, решение которой подчиняется оценке (22).

В пространстве $\overset{\circ}{\mathcal{B}}(\Omega_t)$ введем норму [4]

$$\{w\}_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(\Omega_t)}=\sup_k\left\{\sum_{m=1}^{2}|u_m|^{(2+l)}_{s,d_{k,t}}+|\rho|^{(4+l)}_{2+s,\gamma_{k,t}}\right\}, \qquad (23)$$

а в пространстве $\overset{\circ}{\mathcal{H}}(\Omega_t)$ норму

$$\{h\}_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(\Omega_t)}=\sup_k|h|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(d_{k,t})}, \qquad (24)$$

эквивалентные нормам $|w|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(\Omega_t)}$, $|h|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(\Omega_t)}$, где $d_{k,t}=B_{k,2\lambda}\times(0,t)$, $\gamma_{k,t}=\{B_{k,2\lambda}\bigcap R\}\times(0,t)$.

Установим априорную оценку решения [4]. В силу оценок (16), (17), (22) получаем

$$|u_{m,k}|^{(2+l)}_{s,d_{k,t}}\le C_{11}|\zeta_kf_m|^{(l)}_{s-2,d_{k,t}},\quad \text{при}\quad k\in\mathcal{M},\ m=1,2,$$

$$|u_{1,k}|^{(2+l)}_{s,d_{k,t}}\le C_{12}(|\zeta_kf_1|^{(l)}_{s-2,d_{k,t}}+|Z_k^{-1}\zeta_kp|^{(2+l)}_{s,\gamma_{k,t}}),\quad \text{при}\quad k\in\mathcal{L}, \qquad (25)$$

$$|u_{1,k}|^{(2+l)}_{s,d_{k,t}}+|u_{2,k}|^{(2+l)}_{s,d_{k,t}}+|\rho_k|^{(4+l)}_{s+2,\gamma_{k,t}}\le$$

$$\le C_{13}\big(|\zeta_kf_1|^{(l)}_{s-2,d_{k,t}}+|\zeta_kf_2|^{(l)}_{s-2,d_{k,t}}+|Z_k^{-1}\zeta_k\varphi_1|^{(1+l)}_{s-1,\gamma_{k,t}}+|Z_k^{-1}\zeta_k\varphi_2|^{(2+l)}_{s,\gamma_{k,t}}\big),\quad \text{при}\quad k\in\mathcal{N}.$$

В [4] доказано, что $\{w\}^{(2+l)}_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(\Omega_t)}\le C_{14}\sup\limits_k|w|^{(2+l)}_{d_{k,t}}$. Используя (25), получим неравенство

$$\{w\}_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}(\Omega_t)}\le C_{15}\{h\}_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(\Omega_t)}, \qquad (26)$$

на основании которого следует оценка решения (2) и единственность решения задачи (1).

Неравенство (26) означает, что регуляризатор $\Re$ — ограниченный оператор, действующий из $\overset{\circ}{\mathcal{H}}(\Omega_t)$ в $\overset{\circ}{\mathcal{B}}(\Omega_t)$.

Запишем задачу (1) в операторном виде

$$Aw = h. \tag{27}$$

Докажем ([4], [5]), что при любом $h \in \overset{\circ}{\mathcal{H}}(\Omega_t)$ справедливо равенство

$$A\Re h = h + Th, \tag{28}$$

где $Th = \{T_1h, T_2h, 0, 0, T_3h, T_4h\}$ — ограниченный оператор в пространстве $\overset{\circ}{\mathcal{H}}(\Omega_t)$, удовлетворяющий оценке

$$\{Th\}_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(\Omega_t)} \le \varepsilon \{h\}_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(\Omega_t)}, \quad \forall\, t \le T_1 < T, \tag{29}$$

и ε — малое положительное число.

Подставив $\Re h$: $\Re_m h = \sum\limits_k \eta_k u_{m,k}, m = 1,2$, $\Re_3 h = \sum\limits_k \eta_k \rho_k$ в условия задачи (1), или (27), получим представление (28), где

$$T_1h = -\sum_k \sum_{i=1}^n a_i^{(1)}(x,t)\frac{\partial \eta_k}{\partial x_i}u_{1,k} - \sum_k \sum_{i=1}^n \eta_k a_i^{(1)}(x,t)\frac{\partial u_{1,k}}{\partial x_i} - a^{(1)}(x,t)\sum_k \eta_k u_{1,k} -$$

$$-2\sum_k \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(1)}(x,t)\frac{\partial \eta_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_{1,k}}{\partial x_j} - \sum_k \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(1)}(x,t)\frac{\partial^2 \eta_k}{\partial x_i \partial x_j}u_{1,k} - \sum_k \sum_{i,j=1}^n \eta_k [a_{ij}^{(1)}(x,t) -$$

$$-a_{ij}^{(1)}(\xi_k,0)]\frac{\partial^2 u_{1,k}}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_k \eta_k \lambda_1(x,t)\left(\frac{\partial \rho_k^*}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(1)}(x,t)\frac{\partial^2 \rho_k^*}{\partial x_i \partial x_j}\right) +$$

$$+2\lambda_1(x,t)\sum_k \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(1)}(x,t)\frac{\partial \eta_k}{\partial x_j}\frac{\partial \rho_k^*}{\partial x_j} + \lambda_1(x,t)\sum_k \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(1)}(x,t)\frac{\partial^2 \eta_k}{\partial x_i \partial x_j}\rho_k^* +$$

$$+\lambda_1(x,t)\sum_k \sum_{i=1}^n a_i^{(1)}(x,t)\frac{\partial \eta_k}{\partial x_i}\rho_k^* + \lambda_1(x,t)\sum_k \sum_{i=1}^n \eta_k a_i^{(1)}(x,t)\frac{\partial \rho_k^*}{\partial x_i} +$$

$$+\lambda_1(x,t)a^{(1)}(x,t)\sum_k \eta_k \rho_k^* + \sum_{k \in \mathcal{L}\bigcup \mathcal{N}} \eta_k Z_k^{-1}(x)\left(\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij,k}^{(1)'}(\xi_k,0)\left[2\frac{\partial F_k}{\partial z_i}\frac{\partial^2 u'_{1,k}}{\partial z_n \partial z_j} +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial^2 F_k}{\partial z_i \partial z_j}\frac{\partial u'_{1,k}}{\partial z_n} - \frac{\partial F_k}{\partial z_i}\frac{\partial F_k}{\partial z_j}\frac{\partial^2 u'_{1,k}}{\partial z_n^2}\right] + \sum_{j=1}^{n-1} 2a_{nj,k}^{(1)'}(\xi_k,0)\frac{\partial F_k}{\partial z_j}\frac{\partial^2 u'_{1,k}}{\partial z_n^2}\right);$$

$$T_2h = -\sum_k \sum_{i=1}^n a_i^{(2)}(x,t)\frac{\partial \eta_k}{\partial x_i}u_{2,k} - \sum_k \sum_{i=1}^n \eta_k a_i^{(2)}(x,t)\frac{\partial u_{2,k}}{\partial x_i} - a^{(2)}(x,t)\sum_k \eta_k u_{2,k} -$$

$$-2\sum_k \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(2)}(x,t)\frac{\partial \eta_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_{2,k}}{\partial x_j} - \sum_k \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(2)}(x,t)\frac{\partial^2 \eta_k}{\partial x_i \partial x_j}u_{2,k} - \sum_k \sum_{i,j=1}^n \eta_k \big[a_{ij}^{(2)}(x,t) -$$

$$-a_{ij}^{(2)}(\xi_k,0)\big]\frac{\partial^2 u_{2,k}}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_k \eta_k \lambda_2(x,t)\left(\frac{\partial \rho_k^*}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(2)}(x,t)\frac{\partial^2 \rho_k^*}{\partial x_i \partial x_j}\right) +$$

$$+2\lambda_2(x,t)\sum_k \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(2)}(x,t)\frac{\partial \eta_k}{\partial x_j}\frac{\partial \rho_k^*}{\partial x_j} + \lambda_2(x,t)\sum_k \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(2)}(x,t)\frac{\partial^2 \eta_k}{\partial x_i \partial x_j}\rho_k^* +$$

$$+\lambda_2(x,t)\sum_k\sum_{i=1}^n a_i^{(2)}(x,t)\frac{\partial\eta_k}{\partial x_i}\rho_k^* + \lambda_2(x,t)\sum_k\sum_{i=1}^n \eta_k a_i^{(2)}(x,t)\frac{\partial\rho_k^*}{\partial x_i}+$$

$$+\lambda_2(x,t)a^{(2)}(x,t)\sum_k\eta_k\rho_k^* + \sum_{k\in\mathcal{N}}\eta_k Z_k^{-1}(x)\biggl(\sum_{i,j=1}^{n-1}a_{ij,k}^{(2)\prime}(\xi_k,0)\biggl[2\frac{\partial F_k}{\partial z_i}\frac{\partial^2 u_{2,k}'}{\partial z_n\partial z_j}+$$

$$+\frac{\partial^2 F_k}{\partial z_i\partial z_j}\frac{\partial u_{2,k}'}{\partial z_n} - \frac{\partial F_k}{\partial z_i}\frac{\partial F_k}{\partial z_j}\frac{\partial^2 u_{2,k}'}{\partial z_n^2}\biggr] + \sum_{j=1}^{n-1}2a_{nj,k}^{(2)\prime}(\xi_k,0)\frac{\partial F_k}{\partial z_j}\frac{\partial^2 u_{2,k}'}{\partial z_n^2}\biggr);$$

$$T_3h = \sum_k\sum_{i=1}^n\eta_k\biggl(\bigl[b_i^{(1)}(x,t)-b_i^{(1)}(\xi_k,0)\bigr]\frac{\partial u_{1,k}}{\partial x_i} - \bigl[b_i^{(2)}(x,t)-b_i^{(2)}(\xi_k,0)\bigr]\frac{\partial u_{2,k}}{\partial x_i}\biggr)+$$

$$+\sum_k\sum_{i=1}^n b_i^{(1)}(x,t)\frac{\partial\eta_k}{\partial x_i}u_{1,k} - \sum_k\sum_{i=1}^n b_i^{(2)}(x,t)\frac{\partial\eta_k}{\partial x_i}u_{2,k}+$$

$$+\sum_{k\in\mathcal{N}}\eta_k Z_k^{-1}(x)\sum_{i=1}^{n-1}\biggl(b_{i,k}^{(1)}(\xi_k,0)\frac{\partial F_k}{\partial z_i}\frac{\partial u_{1,k}'}{\partial z_n} - b_{i,k}^{(2)}(\xi_k,0)\frac{\partial F_k}{\partial z_i}\frac{\partial u_{2,k}'}{\partial z_n}\biggr)+$$

$$+\varkappa\sum_k\eta_k\frac{\partial\rho_k}{\partial t} + \sum_k\sum_{i=1}^{n-1}\eta_k c_i(x,t)\frac{\partial\rho_k}{\partial x_i} + \sum_k\sum_{i=1}^{n-1}c_i(x,t)\frac{\partial\eta_k}{\partial x_i}\rho_k+$$

$$+b_0^{(1)}(x,t)\sum\eta_k u_{1,k} + b_0^{(2)}(x,t)\sum_k\eta_k u_{2,k} + c_0(x,t)\sum_k\eta_k\rho_k;$$

$$T_4h = -2\alpha\sum_k\sum_{i,j=1}^{n-1}d_{ij}(x,t)\frac{\partial\eta_k}{\partial x_i}\frac{\partial\rho_k}{\partial x_j} - \alpha\sum_k\sum_{i,j=1}^{n-1}d_{ij}(x,t)\frac{\partial^2\eta_k}{\partial x_i\partial x_j}\rho_k - \alpha\sum_k\sum_{i,j=1}^{n-1}\eta_k\bigl[c_{ij}(x,t)-$$

$$-c_{ij}(\xi_k,0)\bigr]\frac{\partial^2\rho_k}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_k\eta_k\bigl[h(x,t)-h(\xi_k,0)\bigr]u_{1,k} + \sum_k\sum_{i=1}^{n-1}\eta_k d_i(x,t)\frac{\partial\rho_k}{\partial x_i}+$$

$$+\sum_k\sum_{i=1}^{n-1}d_i(x,t)\frac{\partial\eta_k}{\partial x_i}\rho_k + d_0(x,t)\sum_k\eta_k\rho_k.$$

Учитывая (24), получим

$$\{Th\}_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(\Omega_t)} = \sup_k\biggl(\sum_{m=1}^2|T_mh|_{s-2,d_{k,t}}^{(l)} + |T_3h|_{s-1,\gamma_{k,t}}^{(1+l)} + |T_4h|_{s,\gamma_{k,t}}^{(2+l)}\biggr).$$

Используя оценки произведения функций из пространства $C_s^l(\Omega_T)$, доказанные в [7], интерполяционные неравенства

$$|D_t^kD_x^mu|_\Omega \le \varepsilon^{l-2k-|m|}[u]_{Q_t'}^{(l)} + c\varepsilon^{-2k-|m|}|u|_{Q_t'}\ ,\qquad [u]_{Q_t'}^{(q)} \le \varepsilon^{l-q}[u]_{Q_t'}^{(l)} + c\varepsilon^{-q}|u|_{Q_t'}\ ,$$

где $2k+|m|\le[l],\ q<l,\ \varepsilon$ — малое положительное число, и оценки

$$|a_{ij}^{(m)}(x,t)-a_{ij}^{(m)}(\xi_k,0)| \le c_{16}\begin{cases}\lambda^l+t^{\frac{l}{2}}, & 0<l<1\\ \lambda+t^{\frac{l}{2}}, & 1<l<2\\ \lambda+t, & l>2\end{cases} \le C_{17}\bigl(\lambda^{l-[l]}+t^{\frac{l-[l]}{2}}\bigr)\ ,$$

$$|b_i^{(m)}(x,t)-b_i^{(m)}(\xi_k,0)| \le C_{18}\begin{cases}\lambda+t^{\frac{1+l}{2}}, & 0<l<1\\ \lambda+t, & l>1\end{cases} \le C_{19}\bigl(\lambda+t^{\frac{1+l-[l]}{2}}\bigr)\ ,\ m=1,2,$$

$$|c_{ij}(x,t)-c_{ij}(\xi_k,0)|\le C_{20}(\lambda+t)\ ,\quad |h(x,t)-h(\xi_k,0)|\le C_{21}(\lambda+t)\ ,$$

получим

$$|T_m h|^{(l)}_{s-2,d_{k,t}}\le C_{22}\left(\frac{\varepsilon_1}{\lambda^{3+[l]}}+\lambda^{l-[l]}+t^{\frac{l-[l]}{2}}+\lambda\right)||u_{m,k}||^{(2+l)}_{s,d_{k,t}}+C_{23}(\varepsilon_1,\lambda)t^{\frac12}\sup_{\tau\le t}\tau^{-\frac{s}{2}}|u_{m,k}|_{B_{k,2\lambda}}+$$

$$+C_{24}\frac{\varepsilon_2}{\lambda^{3+[l]}}||\rho_k||^{(4+l)}_{s+2,\gamma_{k,t}}+C_{25}(\varepsilon_2,\lambda)t\sup_{\tau\le t}\tau^{-\frac{s+2}{2}}|\rho_k|_{B_{k,2\lambda}\bigcap R}\ . \tag{30}$$

$$|T_3 h|^{(1+l)}_{s-1,\gamma_{k,t}}\le C_{26}\left(\frac{\varepsilon_3}{\lambda^{3+[l]}}+\lambda+t^{\frac{1+l-[l]}{2}}\right)\left(||u_{1,k}||^{(2+l)}_{s,d_{k,t}}+||u_{2,k}||^{(2+l)}_{s,d_{k,t}}\right)+C_{27}(\varepsilon_3,\lambda)t^{\frac12}\sup_{\tau\le t}\tau^{-\frac{s}{2}}\left(|u_{1,k}|_{B_{k,2\lambda}}+\right.$$

$$\left.+|u_{2,k}|_{B_{k,2\lambda}}\right)+C_{28}\frac{\varepsilon_4}{\lambda^{3+[l]}}||\rho_k||^{(4+l)}_{s+2,\gamma_{k,t}}+C_{29}(\varepsilon_4,\lambda)t^{\frac12}\sup_{\tau\le t}\tau^{-\frac{s+2}{2}}|\rho_k|_{B_{k,2\lambda}\bigcap R}\ . \tag{31}$$

$$|T_4 h|^{(2+l)}_{s,\gamma_{k,t}}\le C_{30}(\lambda+t)||u_{1,k}||^{(2+l)}_{s,d_{k,t}}+C_{31}\left(\frac{\varepsilon_5}{\lambda^{5+[l]}}+\lambda+t\right)||\rho_k||^{(4+l)}_{s+2,\gamma_{k,t}}+$$

$$+C_{32}(\varepsilon_5,\lambda)t^{\frac12}\sup_{\tau\le t}\tau^{-\frac{s+2}{2}}|\rho_k|_{B_{k,2\lambda}\bigcap R}\ . \tag{32}$$

Зафиксировав число λ, а затем $\varepsilon_1 - \varepsilon_5$ и t, и объединяя полученные оценки (30)–(32), будем иметь

$$\{Th\}_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}(\Omega_t)}\le\varepsilon_6\sup_k\left(\sum_{m=1}^{2}|u_{m,k}|^{(2+l)}_{s,d_{k,t}}+|\rho_k|^{(4+l)}_{s+2,\gamma_{k,t}}\right),\ t\le T_1.$$

Применим неравенство (26), в результате получим оценку (29).

Таким образом, из оценки (29) следует существование ограниченного обратного оператора $(I+T)^{-1}\quad \forall t\le T_1$, где I — единичный оператор. Тогда оператор A имеет правый обратный оператор $A_r^{-1}=\Re(I+T)^{-1}$ при $t\le T_1$ и задача (27) или (1) разрешима в пространстве $\overset{\circ}{\mathcal{B}}(\Omega_t),\ t\le T_1$.

Продолжив решение на весь интервал $(0,T)$, например, способами, изложенными в [1], [5], получим теорему для $t\le T$.

Цитированная литература

1. **Бижанова Г. И., Солонников В. А.** // Алгебра и анализ. 2000. Т 12. Вып. 6. С. 98 – 140.

2. **Белоносов В. С., Зеленяк Т. И.** Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений. Новосибирск, 1975. 155 с.

3. **Солонников В. А.** Об оценке максимумов модулей производных решения однородной параболической начально-краевой задачи. Л., 1977. 20 с. (Препринт АН СССР. Ленингр. отд-ние Матем. ин-т им. В.А.Стеклова; Р–2–77).

4. **Ладыженская О. А. Солонников В. А. Уральцева Н. Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

5. **Бижанова Г. И.** // Алгебра и анализ. 1994. Т. 6. Вып. 1. С. 64 – 94.

6. **Бижанова Г. И.** // Известия АН РК, серия физ.-мат. 1992. №5. С. 7 – 13.

7. **Бижанова Г. И.** // Записки научн. семин. ПОМИ. 1994. Т. 213. С. 14 – 47.

Поступила в редакцию 31.10.2001г.

Математический журнал. *Алматы. 2001. Том 1. № 2. С. 93 — 97*

УДК 517.946

СОБСТВЕННЫЕ ПОЛИНОМЫ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Ж. Н. Тасмамбетов

Актюбинский государственный университет им. К.Жубанова
463000, Актобе, Алии Молдагуловой пр., 34, tasmam@rambler.ru

Для одной специальной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с полиномиальными коэффициентами рассматриваются возможности определения собственных полиномов в виде многочленов двух переменных с неопределенными коэффициентами.

Постановка задачи. Рассматриваются возможности определения собственных полиномов системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка вида:

$$\begin{aligned} &p_0(x)Z_{xx} + p_1(x)g_3(y)Z_{xy} + p_2(x)Z_x + g_4(y)Z_y + p(x,y)Z = 0, \\ &g_0(y)Z_{yy} + g_1(y)p_3(x)Z_{xy} + p_4(x)Z_x + g_2(y)Z_y + g(x,y)Z = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где коэффициенты $p_j = p_j(x)$, $g_j = g_j(y)$ $(j = \overline{0,4})$ — заданные многочлены одной переменной, а $p(x,y)$, $g(x,y)$ — многочлены двух переменных с неопределенными коэффициентами; $Z = Z(x,y)$ — общая неизвестная функция. Будем считать, что для системы выполняются все четыре условия совместности [1].

Особые кривые системы могут быть регулярными и иррегулярными. Исследование ведется с помощью размаха коэффициентов, опираясь на метод К. Я. Латышевой [2], [3].

Определение собственных полиномов

$$\begin{aligned} p(x,y) &= a_{0,0} + a_{1,0}\cdot x + a_{0,1}\cdot y + a_{1,1}\cdot xy + \ldots + a_{n,0}\cdot x^n + a_{0,n}\cdot y^n, \\ g(x,y) &= b_{0,0} + b_{1,0}\cdot x + b_{0,1}\cdot y + b_{1,1}\cdot xy + \ldots + b_{m,0}\cdot x^m + b_{0,m}\cdot y^m, \end{aligned} \tag{2}$$

состоит из двух частей.

1. Сначала требуется определить $p(x,y)$ и $g(x,y)$ таким образом, чтобы система (1) имела конечное решение в виде полиномов двух переменных вида

$$Z = x^{\alpha}\cdot y^{\beta}\cdot [A_{0,0} + A_{1,0}\cdot x + A_{0,1}\cdot y + \ldots + A_{q,g}\cdot x^q\cdot y^g] \tag{3}$$

или

Keywords: *System partial differential equations of the second order, polynomial coefficient, polynomial solution*
2000 Mathematics Subject Classification: 35A20, 35A25, 35C05

$$Z = x^{\alpha+q} \cdot y^{\beta+g} \cdot \left[A_{q,g} + \frac{A_{q-1,g}}{y} + \ldots + \frac{A_{0,0}}{x^q \cdot y^g}\right] =$$

$$= x^{\gamma} \cdot y^{\delta} \cdot \left[B_{0,0} + \frac{B_{0,1}}{y} + \frac{B_{1,0}}{x} + \ldots + \frac{B_{q,g}}{x^q \cdot y^g}\right], \tag{4}$$

где в (4) введены обозначения $\gamma = \alpha + q$, $\delta = \beta + g$, $A_{q,g} = B_{0,0}$, $A_{q-1,g} = B_{0,1}, \ldots, A_{0,0} = B_{q,g}$.

2. Вторым шагом следует определить количество собственных полиномов и соответствующие им решения вида (3).

Уточнение понятия размаха коэффициентов. В работах [4], [5] аналогичная задача была поставлена для системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с регулярной особенностью в $(0,0)$ вида:

$$\begin{aligned} &x^2 p_0 \cdot Z_{xx} + xy \cdot p_1 \cdot g_3 \cdot Z_{xy} + x \cdot p_2 \cdot Z_x + y g_4 \cdot Z_y + p \cdot Z = 0, \\ &y^2 g_0 \cdot Z_{yy} + xy \cdot p_3 \cdot g_1 \cdot Z_{xy} + x \cdot p_4 \cdot Z_x + y g_2 \cdot Z_y + g \cdot Z = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

с коэффициентами

$$p_i(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k^{(i)} \cdot x^k, \;\; g_i(y) = \sum_{j=0}^{n} b_j^{(i)} \cdot y^j \;\; (i = \overline{0,4}). \tag{6}$$

Размахом коэффициентов системы (5) называется число членов $\nu + 1$ в правой части систем характеристических функций

$$L_j\left[x^{\rho} \cdot y^{\sigma}\right] \equiv x^{\rho} \cdot y^{\sigma} \cdot \left\{f_{0,0}^{(j)}(\rho,\sigma) + f_{1,0}^{(j)}(\rho,\sigma) \cdot x + \ldots + f_{m,n}^{(j)}(\rho,\sigma) \cdot x^m \cdot y^n\right\} \tag{7}$$

или

$$L_j\left[x^{\rho} \cdot y^{\sigma}\right] \equiv x^{\rho} \cdot y^{\sigma} \cdot \left\{\varphi_{0,0}^{(j)}(\rho,\sigma) + \frac{\varphi_{1,0}^{(j)}(\rho,\sigma)}{y} + \frac{\varphi_{0,1}^{(j)}(\rho,\sigma)}{x} + \ldots + \frac{\varphi_{m,n}^{(j)}(\rho,\sigma)}{x^m \cdot y^n}\right\} \tag{8}$$

$(j = 1, 2)$ относительно особенностей $(0,0)$ и (∞, ∞) соответственно; ν — целое неотрицательное число.

Введенное таким образом понятие размаха коэффициентов нуждается в уточнении. Действительно, при $p_3 = p_4 = g_3 = g_4 = 0$ получается рассмотренный в [3] частный случай, где каждое из полученных уравнений системы обращается в обыкновенное дифференциальное уравнение относительно переменных x и y. С целью уточнения понятия размаха рассмотрим конкретный пример.

Пример 1. Пусть требуется определить размах коэффициентов системы

$$\begin{aligned} &(x^4 + 1) \cdot Z_{xx} + x^3 \cdot Z_x + (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \cdot Z = 0, \\ &(2 + y^2) \cdot Z_{yy} + y \cdot Z_y + (b_0 + b_1 y) \cdot Z = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

где $a_j, j = 0, 1, 2; b_k, k = 0, 1$ — неизвестные постоянные.

Составляем систему характеристических функций

$$\begin{aligned} &L_1\left[x^{\rho} \cdot y^{\sigma}\right] \equiv x^{\rho-2} \cdot y^{\sigma} \cdot \left\{\rho(\rho-1) + a_0 x^2 + a_1 x^3 + \left[\rho(\rho-1) + \rho + a_2\right] \cdot x^4\right\}, \\ &L_2\left[x^{\rho} \cdot y^{\sigma}\right] \equiv x^{\rho} \cdot y^{\sigma-2} \cdot \left\{2\sigma(\sigma-1) + (\sigma^2 + 1) y^2 + y^3\right\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Согласно определению, размах коэффициентов первого уравнения равен $\nu_1+1=5\,(\nu_1=4)$, а второго уравнения — $\nu_2+1=4\,(\nu_2=3)$. В качестве ν выбираем наибольшее из ν_1 и ν_2, то есть в данном случае $\nu=\nu_1=4$. Действительно, систему (9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}&x^2\cdot\left(1\cdot x^4+0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+1\right)\cdot Z_{xx}+x\cdot\left(0+0\cdot x+0\cdot x^2+0\cdot x^3+1\cdot x^4\right)\cdot Z_x+\\&+\left(0+0\cdot x+a_0\cdot x^2+a_1\cdot x^3+a_2\cdot x^4\right)\cdot Z=0,\\&y^2\cdot\left(2+0\cdot x+x^2+0\cdot x^3\right)\cdot Z_{yy}+x\cdot\left(0+0\cdot x+1\cdot x^2+0\cdot x^3\right)\cdot Z_y+\\&+\left(0+0\cdot x+x^2+x^3\right)\cdot Z=0,\end{aligned}\tag{11}$$

причем в обоих случаях (9) и (11) система характеристических функций запишется в виде (10). Однако, из представления (11) можно заметить, что в первом уравнении количество членов в коэффициентах равно пяти, а во втором уравнении — четырем. Это позволило сделать нам заключение, что размах коэффициентов первого уравнения $\nu_1+1=5$, а второго уравнения $\nu_2+1=4$. Значит, при определении размаха коэффициентов системы следует также учитывать коэффициенты, которые обращаются в нуль.

Отсюда заметим, что название размах коэффициентов оправдывается тем, что систему (5) при $p_3=p_4=g_3=g_4=0$ после умножения первого уравнения на x^{τ_1}, а второго на y^{τ_2} можно представить в виде

$$\begin{aligned}&x^{\tau_1}\cdot L_1\,[Z]\equiv\sum_{i=0}^{2}x^{2-i}\cdot\left(a_0^{(i)}+a_1^{(i)}x+\ldots+a_{\nu_1}^{(i)}x^{\nu_1}\right)\cdot\tfrac{\partial^{2-i}Z}{\partial x^{2-i}}=0,\\&y^{\tau_2}\cdot L_2\,[Z]\equiv\sum_{i=0}^{2}y^{2-i}\cdot\left(b_0^{(i)}+b_1^{(i)}y+\ldots+b_{\nu_2}^{(i)}y^{\nu_2}\right)\cdot\tfrac{\partial^{2-i}Z}{\partial y^{2-i}}=0,\end{aligned}\tag{12}$$

где не все $a_0^{(i)},b_0^{(i)}$ и не все $a_{\nu_1}^{(i)},b_{\nu_2}^{(i)}(i=\overline{0,5})$ равны нулю, и где число слагаемых в каждом из коэффициентов системы (12) не превосходит $\nu+1$, являющегося наибольшим из ν_1+1 и ν_2+1; τ_1 и τ_2 — целые числа, включая нуль.

Поскольку каждое из уравнений (12) является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка, то опираясь на исследования К. Я. Латышевой [2], [3] получим следующие утверждения.

1^0. Для системы с полиномиальными коэффициентами (12) системы определяющих уравнений в особенностях $(x=0,y=0)$ и $(x=\infty,y=\infty)$ получаются приравниванием к нулю соответственно коэффициентов при наинизших и наивысших степенях независимых переменных x и y.

2^0. Если $a_0^{(0)}=a_0^{(1)}=\ldots=a_0^{(k)}=0$, где $k\le 2$, то особая точка $x=0$ иррегулярна; при $b_0^{(0)}=b_0^{(1)}=\ldots=b_0^{(l)}=0$ $(l\le 2)$ особая точка $y=0$ — иррегулярна. Особенность $(0,0)$ будет иррегулярной только тогда, когда вышеприведенные условия выполняются одновременно.

Аналогично, особенность (∞,∞) будет иррегулярной, если одновременно выполняются условия: $a_{\nu_1}^{(0)}=a_{\nu_1}^{(1)}=\ldots=a_{\nu_1}^{(k)}=0$ и $b_{\nu_2}^{(0)}=\ldots=b_{\nu_2}^{(l)}=0$ $(k\le 2,l\le 2)$.

3^0. Размах коэффициентов каждого из уравнений системы (12) можно найти отдельно и наибольшее из них выбирается в качестве размаха коэффициентов системы.

4^0. Неизвестные коэффициенты $C_{\mu,\nu}^{(j)}$ $(\mu,\nu=0,1,2,\ldots;j=1,2,3,4)$ решения системы (12) определяются с помощью рекуррентных систем относительно особенностей $(0,0)$ и (∞,∞). В силу конечности размаха коэффициентов системы с полиномиальными коэффициентами, число слагаемых в каждой рекуррентной зависимости не превосходит $\nu+1$.

Существование конечного решения. Обобщая результаты, приведенные в работе [4], необходимые и достаточные условия существования конечного решения вида (3) можно сформулировать в виде следующей общей теоремы, охватывающей случай любого ранга.

Т е о р е м а 1. *Для того, чтобы система (5) с полиномиальными коэффициентами имела решения в конечном виде, необходимо и достаточно,чтобы $q = \gamma - \alpha$ и $g = \delta - \beta$ были равны неотрицательным числам и чтобы матрица с $(q+1)\cdot(g+1)$ столбцами и $(q+1)\cdot(g+1)$ строками*

$$\left\| \begin{array}{cccccc} 0 & \dots & 0 & \dots & f^{(j)}_{0,0}(\alpha+1,\beta) & f^{(j)}_{1,0}(\alpha,\beta) \\ 0 & \dots & 0 & \dots & f^{(j)}_{0,0}(\alpha,\beta+1) & f^{(j)}_{0,1}(\alpha,\beta) \\ 0 & \dots & f^{(j)}_{0,0}(\alpha+1,\beta+1) & f^{(j)}_{1,0}(\alpha,\beta+1) & f^{(j)}_{0,1}(\alpha+1,\beta) & f^{(j)}_{1,1}(\alpha,\beta) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f^{(j)}_{0,0}(\alpha+q,\beta+g) & f^{(j)}_{1,0}(\alpha+q-1,\beta+g) & \dots & 0 & & \\ f^{(j)}_{0,0}(\alpha+q,\beta+g) & f^{(j)}_{1,0}(\alpha+q,\beta+g-1) & \dots & 0 & & \end{array} \right\|$$

имела ранг $(q+1)\cdot g$ или $(g+1)\cdot q$.

Наиболее простой, часто встречающийся случай, когда размах коэффициентов равен двум. В этом случае приведенная теорема упрощается [5].

Определение собственных полиномов. Для определения неизвестных коэффициентов (2) $a_{0,0}$, $b_{0,0}$ и a_{ν_1,ν_2}, b_{ν_1,ν_2} используются определяющие системы относительно особенностей $(0,0)$ и (∞,∞) , представленные в виде:

$$\left.\begin{array}{l} f^{(1)}_{0,0}(\rho,\sigma) = \Phi^{(1)}_{0,0}(\rho,\sigma) + a^{(4)}_{0,0} = 0 \\ f^{(2)}_{0,0}(\rho,\sigma) = \Phi^{(2)}_{0,0}(\rho,\sigma) + b^{(4)}_{0,0} = 0 \end{array}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{array}{l} f^{(1)}_{\nu_1,\nu_2}(\rho,\sigma) = \Phi^{(1)}_{\nu_1,\nu_2}(\rho,\sigma) + a^{(4)}_{\nu_1,\nu_2} = 0 \\ f^{(2)}_{\nu_1,\nu_2}(\rho,\sigma) = \Phi^{(2)}_{\nu_1,\nu_2}(\rho,\sigma) + b^{(4)}_{\nu_1,\nu_2} = 0 \end{array}\right\},$$

соответственно.

Если известны значения ρ и σ, то также известны значения функций $\Phi^{(j)}_{0,0}(\rho,\sigma)$ и $\Phi^{(j)}_{\nu_1,\nu_2}(\rho,\sigma)$. Когда мы определяем степени многочленов (3) и (4): α, β, $\alpha+q$, $\beta+g$, то из систем уравнений

$$\left.\begin{array}{l} \Phi^{(1)}_{0,0}(\alpha,\beta) + a_{0,0} = 0 \\ \Phi^{(2)}_{0,0}(\alpha,\beta) + b_{0,0} = 0 \end{array}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{array}{l} \Phi^{(1)}_{\nu_1,\nu_2}(\alpha+q,\beta+g) + a_{\nu_1,\nu_2} = 0 \\ \Phi^{(2)}_{\nu_1,\nu_2}(\alpha+q,\beta+g) + b_{\nu_1,\nu_2} = 0 \end{array}\right\}$$

можем определить и неизвестные коэффициенты $a_{0,0}, b_{0,0}$ и $a_{\nu_1,\nu_2}, b_{\nu_1,\nu_2}$. Аналогично определяются оставшиеся неизвестные коэффициенты многочленов $p(x,y)$ и $g(x,y)$. Отметим, что при этом используется необходимое и достаточное условие существования конечного решения и, по сравнению с обыкновенным случаем, задача немного усложняется. Особая трудность состоит в определении количества собственных полиномов и соответствующих им собственных решений, поскольку теория таких систем недостаточно развита и не всегда удается найти совокупность всех фундаментальных решений. В рассмотренном выше примере 1 первое уравнение системы (9) имеет только одно собственное решение $Z = x$ и один соответствующий многочлен $p(x,y) = -x^2$.

Действительно, введя в (10) обозначения:

$$\Phi^{(1)}_{0,0}(\rho,\sigma) = \rho\cdot(\rho-1) = 0 \quad \text{и} \quad \Phi^{(1)}_{4,0}(\rho,\sigma) = \rho\cdot(\rho-1) + \rho + a_2 = 0,$$

и $\Phi^{(1)}_{0,0}(\rho,\sigma) = 0$ определяем два значения $\rho : \rho_1 = 0$ и $\rho_2 = 1$.

Если в определяющем уравнении $\Phi^{(1)}_{4,0}(\rho,\sigma) = 0$ для нахождения ρ подберем $a_2 = -1$, то это определяющее уравнение также имеет два корня $\rho_{3,4} = \pm 1$.

Согласно теории К. Я. Латышевой условие $\rho_4 - \rho_1 = 1 - 0 = 1$ определяет степень искомого собственного многочлена: $Z = \alpha\cdot x + \beta$.

Коэффициенты a_0 и a_1 подберем равными нулю: $a_0 = 0$ и $a_1 = 0$. Тогда первое уравнение системы (9) примет вид:

$$\left(x^4 + 1\right) \cdot Z_{xx} + x^3 \cdot Z_x - x^2 \cdot Z = 0.$$

Подставляя конечное решение $Z = \alpha \cdot x + \beta$ в уравнение, определяем неизвестные коэффициенты α и β: $\beta = 0, \alpha = 1$.

Аналогично можно найти собственные полиномы и второго уравнения системы (9), имеющего размах коэффициентов, равный $\nu_2 + 1 = 4$ ($\nu_2 = 3$).

Полученные результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть задана система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с полиномиальными коэффициентами (1), где* $p_i = p_i(x), g_i = g_i(y)(i = \overline{0,4})$ *— известные полиномы одной переменной, а* $p(x, y), g(x, y)$ *— неизвестные полиномы двух независимых переменных* x *и* y*;* $Z = Z(x, y)$ *— общая неизвестная. Тогда неизвестные параметры собственных полиномов* $p(x, y)$ *и* $g(x, y)$ *при неизвестной функции двух переменных* $Z(x, y)$ *можно определить таким образом, чтобы система (1) имела конечное решение вида*

$$Z = x^{\rho} \cdot y^{\sigma} \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} A_{\mu,\nu} \cdot x^{\mu} \cdot y^{\nu} (A_{0,0} \neq 0),$$

соответствующее собственному решению.

Число собственных многочленов и собственных решений определяются с помощью наибольших значений размаха коэффициентов 1-го и 2-го уравнений системы (1).

Цитированная литература

1. **Wilczynski E. J.** //Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces. Leipzig: Feubner, 1906. 120 p.

2. **Латышева К. Я.** // КДУ. Математичний збiрник. 1954, №5. С. 87 – 105.

3. **Латышева К. Я., Терещенко Н. И.** // Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений и их приложения. (Метод Фробениуса- Латышевой). Изд. Ин-та матем.: Киев, 1970. 393 с.

4. **Тасмамбетов Ж. Н.** // Материалы науч. конф. "Качественная теория дифференциальных уравнений и их приложения". Актобе, 1998. С. 105 – 111.

5. **Тасмамбетов Ж. Н.** // Материалы науч. конф. "Качественная теория дифференциальных уравнений и их приложения". Актобе, 1998. С. 112 – 116.

Поступила в редакцию 31.10.2001г.

Математический журнал. *Алматы. 2001. Том 1. № 2. С. 98 — 106*

УДК 517.925.5:519.216

МЕТОД ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОГРАММНОГО ДВИЖЕНИЯ

М. И. Тлеубергенов

Институт математики МОН РК
480100, Алматы, Пушкина ул., 125, marat207@math.kz

Получены достаточные условия разрешимости задачи устойчивости по первому приближению при постоянно действующих возмущениях и оптимальной стабилизации по вероятности аналитически заданного интегрального многообразия в классе стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка.

1. Введение. Постановка задачи. Основные теоремы метода функций Ляпунова и их различные модификации об устойчивости невозмущенного движения обобщены в [1–3] и др. на случай стохастических дифференциальных уравнений. В работах [3–7] и др. исследуются различные аспекты стохастической устойчивости по первому приближению при постоянно действующих возмущениях (п.д.в.) и оптимальной стабилизации невозмущенного движения. Так, в работе Хасьминского [3, с.322–325] приводятся теоремы о стохастической устойчивости инвариантного множества с помощью функции Ляпунова вида $V(\rho, t)$, где $\rho = \rho(x, \Lambda)$ — расстояние от точки x до множества Λ. Но, с одной стороны, применение общих теорем об устойчивости множества [3] в решении задачи устойчивости программного движения вызывает трудности, связанные с построением функции Ляпунова вида $V(\rho, t)$. А, с другой, в теории построения систем программного движения ([8, 9 и др.]) свойства программного движения задаются аналитически как множество, образованное пересечением гиперповерхностей, что позволило, в частности, в работах автора [10–12] ввести понятие устойчивости инвариантного множества (заданных свойств движения) по первому приближению при постоянно действующих возмущениях, а также исследовать задачу оптимальной стабилизации заданных свойств движения в классе обыкновенных дифференциальных уравнений, которые распространяют на случай инвариантных множеств известную теорему Малкина об устойчивости по первому приближению и теорему Красовского об оптимальной стабилизации невозмущенного движения [13].

В настоящей работе понятия устойчивости по первому приближению при постоянно действующих возмущениях и оптимальной стабилизации аналитически заданного инвариантного множества рассматриваются в классе стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Пусть задано стохастическое дифференциальное уравнение Ито

$$dx = X(x,t)dt + \sigma(x,t)d\xi, \quad x \in R^n, \ \xi \in R^m. \tag{1}$$

Keywords: *stability by probability after the first approach, under constantly acting disturbances, optimal stabilization, an integral manifold, stochastic differential Ito equation*
2000 Mathematics Subject Classification: 37H10, 60H10

Предположим, что
1) уравнение (1) допускает программное движение [8] (инвариантное множество [3]) в виде совокупности частных интегралов $\Lambda(t)$ в фазовом пространстве $x \in R^n$

$$\Lambda(t) : \lambda(x,t) = 0, \tag{2}$$

где $\lambda = \lambda(x,t) \in C^{21}_{xt}$ — r-мерная вектор-функция, $r \leq n$;
2) вектор-функция $X(x,t)$ и матрица $\sigma(x,t)$ непрерывны по t и липшицевы по x в области

$$\Lambda_h(t) : \rho\big(x, \Lambda(t)\big) < h, \ t \geq t_0, \tag{3}$$

что обеспечивает существование и единственность до стохастической эквивалентности решения уравнения (1) $x^{x_0,t_0}(t)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$, являющегося непрерывным с вероятностью 1 строго марковским процессом [3].

Будем рассматривать непрерывные функции $V(\lambda; x, t) \in C^{221}_{\lambda xt} : R^r \times R^n \times R^+ \to R^+$ такие, что $V(0; x, t) = 0$.

С процессом $x^{x_0,t_0}(t)$ связан дифференциальный оператор

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} X_i(x,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} a_{ij}; \ [a_{ij}] = \sigma\sigma^T, \ \sigma^T \text{— матрица, транспонированная к } \sigma.$$

При исследовании стохастической устойчивости $\Lambda(t)$ будем использовать функцию Ляпунова вида $V(\lambda; x, t)$ с производящим дифференциальным оператором

$$LV = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i + \frac{\partial V}{\partial \lambda_j} A_j + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda_\mu \partial \lambda_\nu}\gamma_{\mu\nu}; \ [\gamma_{\mu\nu}] = B \cdot B^T.$$

Определение 1. [3]. *Непустое множество $\Lambda \in U$ ($U -\ \sigma$ — алгебра измеримых множеств в R^n) называется инвариантным для процесса x, если $P(x, t, \Lambda) = 1$ для $x \in \Lambda, \ t \geq 0$.*

Определение 2. [3]. *Программное многообразие $\Lambda(t)$ (2) уравнения (1) называется ρ-устойчивым по вероятности, если*

$$\lim_{\rho(x_0, \Lambda(t_0)) \to 0} P_{x_0}\left\{\sup_{t>0} \rho(x^{x_0,t_0}(t), \Lambda(t)) > \varepsilon\right\} = 0.$$

Определение 3. [3]. *Программное многообразие $\Lambda(t)$ (2) уравнения (1) называется асимптотически ρ-устойчивым по вероятности, если оно ρ-устойчиво по вероятности и, кроме того,*

$$\lim_{\rho(x_0, \Lambda(t_0)) \to 0} P_{x_0}\left\{\lim_{t\to\infty}\sup_{t>0} \rho(x^{x_0,t_0}(t), \Lambda(t)) = 0\right\} = 0.$$

В работе автора [14] доказаны следующие утверждения:

Теорема А. *Если для процесса $x(t)$, описываемого уравнением (1), существует функция Ляпунова $V(\lambda; x, t) \in C^{221}_{\lambda xt}$, $V(0; x, t) \equiv 0$ со свойствами*

$$V(\lambda; x, t) \geq a(||\lambda||), \ a \in K; \tag{4}$$

$$LV \leq 0 \tag{5}$$

и, кроме того, вектор-функция $\lambda = \lambda(x,t)$ удовлетворяет условию

$$||\lambda(x,t)|| \geq \alpha(\rho), \quad \alpha \in K, \tag{6}$$

то программное многообразие $\Lambda(t)$ (2) уравнения (1) ρ-устойчиво по вероятности.

Т е о р е м а В. *Если для процесса $x(t)$, описываемого уравнением (1), существует функция Ляпунова $V(\lambda;x,t)\in C^{221}_{\lambda xt}$, $V(0;x,t)\equiv 0$ со свойствами*

$$V(\lambda;x,t)\le b(||\lambda||),\ b\in K; \tag{7}$$

$$LV\le -c(||\lambda||),\ c\in K; \tag{8}$$

и, кроме того, вектор-функция $\lambda=\lambda(x,t)$ удовлетворяет условию (6), то программное многообразие $\Lambda(t)$ (2) уравнения (1) асимптотически ρ-устойчиво по вероятности.

Методом функций Ляпунова требуется получить достаточные условия стохастической устойчивости аналитически заданного интегрального многообразия(2) уравнения (1) по первому приближению при постоянно действующих малых в среднем случайных возмущениях и постоянно действующих случайных затухающих возмущениях, а также установить достаточные условия разрешимости задачи об оптимальной стабилизации заданных свойств движения.

2. Устойчивость программного движения по первому приближению. Пусть задано уравнение (1) и программное многообразие (2) уравнения (1). Уравнение возмущенного движения относительно Λ с учетом формулы стохастического дифференцирования Ито [15] в случае, когда $\{\xi_1(t,\omega),\dots,\xi_m(t,\omega)\}$ — система винеровских процессов с единичной матрицей локальных дисперсий, имеет вид

$$d\lambda=A(x,t)dt+B(x,t)d\xi, \tag{9}$$

где

$$A(x,t)=\{\lambda_t(x,t)+\lambda_x(x,t)^TX+\tfrac{1}{2}\lambda_{xx}(x,t):\xi\xi^T\};$$
$$B(x,t)=\lambda_x(x,t)^T\xi(x,t).$$

Здесь, следуя [15],

$$\lambda_x(x,t)=\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^T,$$

$$\lambda_{xx}(x,t):D=[tr(\lambda_{1xx}D),\dots,tr(\lambda_{rxx}D)]^T.$$

Предположим далее, что вектор-функции $X(x,t)$, $\lambda(x,t)$ и матрица $\sigma(x,t)$ такие, что уравнение возмущенного движения (9) относительно $\Lambda(t)$ (2) представляется в виде

$$d\lambda_i=[A^{(1)}_{i\nu}(x,t)\lambda_\nu+A^{(2)}_i(\lambda,x,t)]dt+[B^{(1)}_{ij\mu}(x,t)\lambda_\mu+B^{(2)}_{ij}(\lambda,x,t)]d\xi^j, \tag{10}$$

где $A_1=(A^{(1)}_{i\nu}),\ A_2=(A^{(2)}_i),\ B_{1j}=(b^{(1)}_{ij\mu}),\ B_2=(b^{(2)}_{ij})$;
причем $\sup\{||A_2||,\ ||B_2||\}=o(||\lambda||)$, т.е. при $||\lambda||\to 0,\ t\ge 0,\ x\in\Lambda_h\setminus\Lambda$

$$\frac{\sup\{||A_2||,\ ||B_2||\}}{||\lambda||}\rightrightarrows 0, \tag{11}$$

здесь по повторяющимся индексам предполагается суммирование ($i,\nu,\mu=\overline{1,r};\ j=\overline{1,m}$). Так что уравнение линейного приближения относительно вектор-функции $\lambda(x,t)$ примет вид

$$d\lambda_i=A^{(1)}_{i\nu}(x,t)\lambda_\nu dt+B^{(1)}_{ij\mu}(x,t)\lambda_\mu d\xi^j, \tag{12}$$

или в векторно-матричном обозначении имеем

$$d\lambda=A_1(x,t)\lambda dt+B_{1j}(x,t)\lambda d\xi^j. \tag{12$'$}$$

Справедливо следующее обобщение на стохастический случай теоремы из [10] об устойчивости по первому приближению программного движения в классе обыкновеннынных дифференциальных уравнений ($\sigma(x,t)\equiv 0$).

Т е о р е м а 1. *Пусть заданные вектор-функция $X(x,t)$, матрица-функция $\sigma(x,t)$ исходного уравнения (1) и вектор-функция $\lambda(x,t)$ такие, что выполняются условия:*
1) уравнение возмущенного движения (9) относительно программного многообразия $\Lambda(t)$ допускает представление (10);
2) существует непрерывно дифференцируемая функция Ляпунова $V(\lambda;x,t)$, удовлетворяющая условиям (4), (7), (8);
3) $a(r)\to\infty$ при $t\to\infty$;
4) вектор-функция $\lambda(x,t)$ удовлетворяет неравенству (6).

Тогда программное движение $\Lambda(t)$ (2) уравнения (1) асимптотически ρ-устойчиво по вероятности при любых $A_2(\lambda;x,t)$, $B_2(\lambda;x,t)$, удовлетворяющих условию (11).

Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы И.Г. Малкина [13, с.375] с учетом условий 1) – 3) и специфики стохастического дифференцирования LV. Здесь малость по условию (11) $A_2(\lambda;x,t)$ и $B_2(\lambda;x,t)$ обеспечивают определенную отрицательность LV и вдоль исходной системы (1), что из условия 4) по теореме B влечет асимптотическую ρ-устойчивость по вероятности программного движения $\Lambda(t)$ (2) уравнения (1).

3. Устойчивость программного движения при постоянно действующих случайных возмущениях. Доказываются некоторые теоремы об устойчивости аналитически заданных свойств движения при постоянно действующих малых в среднем случайных возмущениях (теорема 2 и 2′) и при постоянно действующих случайных затухающих возмущениях (теорема 3).

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}=X(x,t),\quad x\in R^n, \tag{13}$$

которое обладает программным многообразием (2).

Наряду с уравнением (13) рассматривается уравнение

$$\dot{x}=X(x,t)+R(x,t,\omega), \tag{14}$$

где вектор-функция $R=R(x,t,\omega)$ в (14) характеризует постоянно действующие случайные возмущения.

Предполагается, что величина $\vartheta(t,\omega)=\sup\limits_{\{x:\rho(x,\Lambda)\le\varepsilon\}}||R(x,t,\omega)||$ имеет конечное математическое ожидание.

О п р е д е л е н и е 4. *Программное многообразие $\Lambda(t)$ (2) уравнения (13) стохастически ρ-устойчиво при постоянно действующих случайных возмущениях, если для любых $\varepsilon>0$ и $\Delta>0$ найдется $\gamma>0$, что из*

$$\rho(x_0,\Lambda(t_0))+\sup_{t\ge t_0}M\vartheta(t,\omega)<\gamma$$

следует при $t\ge t_0$ неравенство

$$P\{\rho(x(t,\omega),\Lambda(t))>\Delta\}<\varepsilon,$$

где $\rho(x,\Lambda)$ — расстояние от точки $x\in R^n$ до множества Λ

$$\rho(x,\Lambda)=\inf_{z\in\Lambda}||x-z||,$$

а выражение $M\vartheta(t,\omega)$ — математическое ожидание случайной величины $\vartheta(t,\omega)$.

Составим уравнение возмущенного движения относительно множества $\Lambda(t)$ (2) уравнения (13)

$$\dot{\lambda} = F(\lambda, x, t), \ F(0, x, t) \equiv 0, \tag{15}$$

где F — функция Н.П.Еругина [8], имеющая вид

$$F = \frac{\partial \lambda}{\partial x} X + \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \tag{16}$$

а вдоль системы (14) $\dot{\lambda}$ представляется в виде

$$\dot{\lambda} = F(\lambda, x, t) + F_1(\lambda, x, t), \quad F(0, x, t) \equiv F_1(0, x, t) \equiv 0, \tag{17}$$

где $F_1 = \dfrac{\partial \lambda}{\partial x} R(x, t, \omega)$.

Отметим, что в отличие от детерминированного случая [11] свойства, требуемые от функции Ляпунова, должны быть выполнены не в малой окрестности $\rho(x, \Lambda) < \varepsilon$, а во всем рассматриваемом пространстве R^n.

Теорема 2. *Пусть в R^n существует функция $V(\lambda; x, t) \in C^{211}_{\lambda x t}$ со свойствами:*
1) $V(\lambda; x, t) \geq a(||\lambda||), \quad a \in K$;
2) для каждого $\delta > 0$ существует $c_\delta > 0$ такое, что в области $\{||\lambda|| > \delta\} \times \{t > t_0\}$ выполнено неравенство $\dot{V}_{(13)} < -c_\delta V$;
3) $a(r) \to \infty$ при $t \to \infty$;
4) вектор-функция $\lambda(x, t)$ удовлетворяет неравенству (6). Тогда программное движение $\Lambda(t)$: $\lambda(x, t) = 0$ уравнения (13) ρ-устойчиво по вероятности при постоянно действующих случайных возмущениях (в смысле определения 4) при $t \geq t_0$.

Доказательство. Условия 1, 2 и 3 теоремы влекут λ-устойчивость по вероятности $\Lambda(t)$ при постоянно действующих случайных возмущениях. Действительно, из соотношения

$$\dot{V}_{(14)} \leq -c_\delta V + c\vartheta(t, \omega) + c_\delta V^{(\delta)},$$

где $V^{(\delta)} = \sup\limits_{\{t > t_0, ||\lambda(x,t)|| < \delta\}} V(\lambda; x, t)$, по лемме [3, с. 23] следует оценка

$$V(\lambda(x(t, \omega), t); x(t, \omega), t) \leq V(\lambda(x_0, t_0); x_0, t_0) e^{-c_\delta (t - t_0)} + \frac{c}{c_\delta} \sup_{t > t_0} \vartheta(t, \omega) + V^{(\delta)},$$

или, применяя операцию математического ожидания, имеем

$$MV \leq V(\lambda(x_0, t_0); x_0, t_0) e^{-c_\delta (t - t_0)} + \frac{c}{c_\delta} M\vartheta(t, \omega) + V^{(\delta)}.$$

Выберем δ, $||\lambda(x_0, t_0)||$ и $M\vartheta(t, \omega)$ достаточно малыми так, что

$$MV \leq \varepsilon \inf_{\{t > t_0, ||\lambda(x,t)|| > \delta\}} V(\lambda(x, t); x, t). \tag{18}$$

Далее по лемме [3, с.32] (вариант неравенства Чебышева)

$$P\{|\vartheta(t, \omega)| > R\} \leq \frac{MV(\vartheta(t, \omega), x, t)}{\inf\limits_{\overline{U}_R \times \{s > t_0\}} V(\lambda(x, s); x, s)},$$

где $\overline{U}_R = \{x : ||\lambda(x, t)|| \leq R\}$; из малости в среднем MV и на основе (18) имеем малость величины $P\{||\lambda(x(t; t_0, x_0)|| > \delta\}$, а из условия 3 следует малость величины

$$P\{\rho(x(t, \omega), \Lambda(t)) > \Delta\}.$$

Что и требовалось доказать.

Условия теоремы 2 можно ослабить, если рассматривать более узкий класс постоянно действующих случайных возмущений.

Пусть постоянно действующие возмущения можно представить в виде

$$R(x,t,\omega) = \sigma(x,t)\cdot\xi(t,\omega). \tag{19}$$

Определение 5. *Программное многообразие $\Lambda(t)$ (2) уравнения (13) ρ-устойчиво при постоянно действующих случайных возмущениях вида (19), если для любых $\varepsilon > 0$ и $\Delta > 0$ найдется $\varkappa > 0$ такое, что из неравенства*

$$\rho(x_0, \Lambda(t_0)) + \sup_{x,t} ||\sigma(x,t)|| < \varkappa$$

следует при $t \geq t_0$ неравенство

$$P\{\rho(x(t,\omega), \Lambda(t)) > \Delta\} < \varepsilon,$$

где $\sigma(x,t)$ — интенсивность случайных возмущений в точке (x,t).

Теорема 2$'$. *Пусть выполнены условия теоремы 2 с заменой условия $\dot V_{(13)} < -c_\delta V$ на (более слабое) условие $\dot V_{(13)} < -c_\delta$. Кроме того, пусть $\xi(t,\omega)$ удовлетворяет следующему условию: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\gamma > 0$ такое, что при $t_0 \leq s \leq t$*

$$M\exp\left\{\gamma\int\limits_s^t |\xi(u,\omega)|du\right\} \leq e^{\varepsilon(t-s)}.$$

Тогда программное движение $\Lambda(t)$ уравнения (13) ρ-устойчиво по вероятности для $t \geq t_0$ при постоянно действующих случайных возмущениях вида (19).

Доказательство аналогично теореме 2 и, следуя Р. З. Хасьминскому [3, с.52], проводится с помощью вспомогательной функции

$$W(\lambda; x,t) = \exp\{V(\lambda;x,t)\} - 1.$$

Рассмотрим теперь устойчивость $\Lambda(t)$ при постоянно действующих затухающих возмущениях.

Теорема 3. *Пусть для уравнения*

$$\frac{dx}{dt} = G(x,t), \tag{20}$$

обладающего интегральным многообразием $\Lambda(t)$ (2), в области $\{(t \gg 0)\times R^n\}$ существует функция Ляпунова $V(\lambda;x,t) \in C^{221}_{\lambda xt}$, $V(0;x,t)\equiv 0$,

$$a(||\lambda||) \leq V(\lambda;x,t) \leq b(||\lambda||), \quad a,b\in K,$$

удовлетворяющая условиям:

1) $\sup\limits_{||\lambda||>\varepsilon} \dot V_{(20)} = -\chi_\varepsilon(t) < 0$, причем при всех $\varepsilon > 0$

$$\int\limits_0^\infty \chi_\varepsilon(t)dt = \infty;$$

2) $a(r)\to\infty$ при $t\to\infty$.

Далее, пусть коэффициенты $\sigma_\nu(x,t)$ стохастического уравнения

$$dX(t) = G(X(t),t)dt + \sum_{\nu=1}^{m} \sigma_\nu(X(t),t)d\xi_\nu(t) \tag{21}$$

удовлетворяют для некоторой постоянной k_1 и некоторой положительной интегрируемой на $[0,\infty)$ функции $g(t)$ условию
3)

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{\mu,\nu=1}^{r} b_{\mu\nu}\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda_\mu \partial \lambda_\nu}\right) \le (V(\lambda;x,t)+k_1)g(t), \tag{22}$$

где $[a_{ij}] = \sigma\sigma^T$, $[b_{\mu\nu}] = BB^T$, $B = \dfrac{\partial\lambda}{\partial x}\sigma$;
4) вектор-функция $\lambda(x,t) \in C^{21}_{\lambda t}$ и удовлетворяет неравенству (6).
Тогда при любых $\{x_0,t_0\} \notin \Lambda(t_0)$ $\quad \rho(X^{x_0,t_0)}(t),\Lambda(t)) \to 0$ при $t\to\infty$ почти наверное.

Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы Р. З. Хасьминского [3, с.308–309] и проводится с помощью вспомогательной функции

$$W(\lambda;x,t) = V\exp\{\int\limits_t^\infty g(s)ds\} + k_1\int\limits_t^\infty g(s)ds.$$

При этом условие затухания постоянно действующих случайных возмущений (22) обеспечивает с учетом условия 1) сохранение отрицательного знака и у производящего оператора LW, что влечет с вероятностью 1 λ-устойчивость множества $\Lambda(t)$. А из оценки (6) условия 4) и условия 2) с вероятностью 1 следует ρ-устойчивость в целом программного движения $\Lambda(t)$.

Полученные утверждения, с одной стороны, являются распространением соответствующих теорем Р. З. Хасьминского [3, 5] и М. Б. Невельсона, Р. З. Хасьминского [7] о стохастической устойчивости невозмущенного движения при тех или иных постоянно действующих возмущениях и, с другой стороны, обобщают на стохастический случай утверждение, доказанное автором в классе ОДУ [12].

4. Оптимальная по вероятности стабилизация программного движения. Говоря о стохастической постановке, отметим, что обобщение теоремы Красовского [13] об оптимальной стабилизации невозмущенного движения в классе ОДУ на класс уравнений диффузионного типа (т.е. при случайных возмущениях типа "белого шума") проведено в работе [6].

Рассмотрим постановку задачи оптимальной стабилизации программного движения управляемой стохастической системы.

Пусть задано:
1) управляемая система стохастических дифференциальных уравнений вида

$$dx = X(x,u,t)dt + \sigma(x,u,t)d\xi, \quad x\in R^n;\ \xi\in R^m,\ u\in R^k; \tag{23}$$

2) программное движение со свойствами в виде интегрального многообразия (2) уравнения (23);
3) некоторый функционал

$$J^{s,x_0}(u) = \int\limits_s^\infty MW(\lambda(x^{s,x_0}(t),t);x^{s,x_0}(t),u(x^{s,x_0}(t),t)dt, \tag{24}$$

как мера отклонения движения точки $x(t)\in\Lambda_h(t)$

$$\Lambda_h(t) : ||\lambda(x,t)|| < h,\ t\ge t_0 \tag{25}$$

от многообразия $\Lambda(t)$ (2).

Требуется найти управляющее воздействие $u^0(x,t)$, которое обеспечивает асимптотическую ρ-устойчивость по вероятности программного движения (2). При этом каковы бы ни были другие управляющие воздействия $u^*(x,t)$, также обеспечивающие асимптотическую по вероятности ρ-устойчивость $\Lambda(t)$ (2), должно выполняться неравенство $J(u^0) \le J(u^*)$, т.е.

$$\int\limits_s^\infty MW(\lambda(x^0[t],t),u^0[t],x^0[t],t)dt \le \int\limits_s^\infty MW(\lambda(x^*[t],t),u^*[t],x^*[t],t)dt$$

для всех начальных условий $\{s,x_0\}$ из области $\Lambda_h(t)$ (25).

Поставленная задача об оптимальной стабилизации программного движения стохастических систем, с одной стороны, обобщает постановку задачи [6] об оптимальной стабилизации невозмущенного движения стохастического уравнения Ито, а, с другой стороны, распространяет на стохастический случай достаточные условия оптимальной стабилизации программного движения $\Lambda(t)$ в классе ОДУ [9, 11].

Составим уравнение "возмущенного"движения относительно программного движения $\Lambda(t)$ (2), исходя из заданного уравнения (23)

$$d\lambda = A(\lambda;x,u,t)dt + B(\lambda;x,u,t)d\xi, \tag{26}$$

где $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu,\ldots,\lambda_r)^T,\ A = (A_1,A_2,\ldots,A_r)^T,$

$$A_\mu = \frac{\partial\lambda_\mu}{\partial t} + \frac{\partial\lambda_\mu}{\partial x_i}X_i + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda_\mu}{\partial x_i\partial x_k}\sigma_{ij}\sigma_{kj};$$

$B = (b_{\mu j})\ \ (\mu=\overline{1,r},\ j=\overline{1,m})$— матрицы $(r\times m)$, $b_{\mu j} = \dfrac{\partial\lambda_\mu}{\partial x_i}\sigma_{ij}$.

Разрешимость поставленной задачи об оптимальной стабилизации программного движения дает следующая теорема.

Теорема 4. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения (26) существует функция Ляпунова $V_0(\lambda;x,t)\in C^{221}_{\lambda xt}$ и вектор-функция $u=u^0(x,t)$, удовлетворяющие в области $\Lambda_h(t)$ (25) условиям:*
1) $a(||\lambda||)\le V_0(\lambda;x,t)\le b(||\lambda||),\quad a,b\in K$;
2) $W(\lambda,x,u^0(x,t),t)\ge c(||\lambda||),\quad c\in K$;
3) вектор-функция $\lambda(x,t)\in C^{21}_{xt}$ удовлетворяет неравенству (6).
Кроме того, выполняются условия
4) $L_{u^0}V_0(\lambda(x,t);x,t)+W(\lambda(x,t),x,u^0(x,t),t)\equiv 0$;
5) $L_uV_0(\lambda(x,t);x,t)+W(\lambda(x,t),x,u(x,t),t)\ge 0$.

Тогда управляющая вектор-функция $u^0(x,t)$ разрешает задачу об оптимальной стабилизации, причем $J(u^0)\le J(u)$.

Доказательство. Покажем вначале, что управление $u=u^0$ из условия теоремы обеспечивает асимптотическую по вероятности ρ-устойчивость $\Lambda(t)$ (2) системы (23).

Действительно, из условия 1) теоремы следует, что $V_0(\lambda;x,t)$ является определенно положительной функцией и допускает бесконечно малый высший предел по λ. А из условий 2) и 4) следует, что $L_{u^0}V_0\le -c(||\lambda||)$, т.е. стохастическая производная от V_0 вдоль решений при $u=u_0$ является определенно отрицательной по λ функцией. И т.к. по условию 3) теоремы 2 $||\lambda(x,t)||\ge\alpha(\rho)$, то отсюда следует, что заданные u^0 и V_0 обеспечивают асимптотическую ρ-устойчивость по вероятности программного движения $\Lambda(t)$.

Покажем теперь, что определенное условиями теоремы 4 управление $u^0(x,t)$, в отличие от других $u(x,t)$, также обеспечивающих асимптотическую ρ-устойчивость по вероятности программного движения $\Lambda(t)$, минимизирует заданный функционал $J(u)$ (24).

По формуле стохастического дифференцирования Ито и основной формуле стохастического дифференцирования и интегрирования (формуле Дынкина) [3, с.332] имеем

$$MV_0(\lambda(x_u^{s,x_0}(t),t);x_u^{s,x_0}(t),t)-V_0(\lambda(x_0,s),x_0,s)=M\int\limits_s^t L_uV_0(\lambda(x_u^{s,x_0}(v),v);x_u^{s,x_0}(v),v)dv.$$

Положим $u=u^0(x,t)$. Т.к. $L_{u^0}V_0+W\equiv 0$, то

$$M\int\limits_s^t W(\lambda(x_{u^0}^{s,x_0}(t),t);x_{u^0}^{s,x_0}(t),u^0(x_{u^0}^{s,x_0}(t),t),t)dt=V_0(\lambda(x_0,s),x_0,s)-MV_0.$$

Отсюда при $t\to\infty \quad J^{s,x_0}(u^0)=V_0(\lambda(x_0,s),x_0,s)$.

Пусть $u=u(x,t)$ — допустимое управление, тогда из $\lim\limits_{t\to\infty}MV_0=0$ и неравенства $L_uV_0+W\geq 0$ следует, что

$$\begin{gathered}MV_0(\lambda(x_u^{s,x_0}(t),t);x_u^{s,x_0}(t),t\geq V_0(\lambda(x_0,s),x_0,s)-\\-M\int\limits_s^t W(\lambda(x_u^{s,x_0}(v),v);x_u^{s,x_0}(v),u(x_u^{s,x_0}(v),v),v)dv.\end{gathered}$$

или

$$M\int\limits_s^t W(\lambda(x_u^{s,x_0}(v),v);x_u^{s,x_0}(v),u(x_u^{s,x_0}(v),v),v)dv\geq V_0(\lambda(x_0,s),x_0,s).$$

Следовательно, $J(u)\geq J(u^0)$. Теорема доказана.

Цитированная литература

1. **Bertram J. E., Sarachik P. E.** // Proc. of the Intern. on Circuit and Inform. Theory. Los-Angelos. Calif. IRE transactions. CT-6. 1959. P. 260 – 270.
2. **Кац И. Я., Красовский Н. Н.** // ПММ, 1960. Т. 27. В. 5. С. 809 – 823.
3. **Хасьминский Р. З.** Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М. 1969. 368 с.
4. **Хасьминский Р. З.** // ПММ, 1967. Т. 31. В. 6. С. 1021 – 1027.
5. **Хасьминский Р. З.** // Теория передачи информации. Опознание образов. М., 1965. С. 74 – 87.
6. **Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З.** // Летняя школа по теории вероятностей и мат. статистике, Киев. 1969. С. 68—121.
7. **Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З.** // Проблемы передачи информации, 1966. Т. 2. № 3. С. 76 – 91.
8. **Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г., Фурасов В. Д.** Построение систем программного движения. М., 1971, 352 с.
9. **Мухарлямов Р. Г.** // Дифференц. уравн., 1971. Т. 7. № 10. С.688—699.
10. **Тлеубергенов М. И.** // Изв. АН КазССР, сер. физ.-мат., 1984. № 5. С. 58 – 61.
11. **Тлеубергенов М. И.** // Материалы V конференции молодых ученых Университета дружбы народов. М. 1982. Ч. 1. С. 9 – 13. Деп. ВИНИТИ 15.07.1982. №3814–82.
12. **Тлеубергенов М. И.** // Материалы VI конференции молодых ученых Университета дружбы народов. М. 1983. Ч. 1. С. 159—167. Деп. ВИНИТИ 5.03.1984. №1316–84.
13. **Малкин И. Г.** Теория устойчивости движения. М., 1966. 530 с.
14. **Тлеубергенов М. И.** // Изв. МОН РК, НАН РК, сер. физ.-мат., 2001. № 3. С. 55 – 61.
15. **Пугачев В. С., Синицын И. Н.** Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М., 1990. 632 с.

Поступила в редакцию 19.11.2001г.

Математический журнал. *Алматы. 2001. Том 1. № 2. С. 107 — 110*

УДК 517.51

ОБ ОДНОМ НЕПРЕРЫВНОМ МЕТОДЕ СУММИРОВАНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

Л. П. Фалалеев

Институт математики МОН РК
480100, Алматы, Пушкина ул., 125

Установлены оценки порядков убывания коэффициентов Фурье по тригонометрической системе функции $f(x) \in L_p$, $p > 1$ при непрерывном методе суммирования.

Пусть $f(x) \in L_p[0, 2\pi]$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, a_n, b_n — коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по тригонометрической системе. Исследованиям поведения коэффициентов Фурье по различным ортогональным системам посвящено большое количество работ. О порядке убывания коэффициентов можно судить по классическим результатам Парсеваля, Бесселя, Юнга, Харди, Литтлвуда. Всевозможные трансформации коэффициентов Фурье рассматривали Г. Харди, М. Идзуми, С. Идзуми, Б. Голубов и др. Д.Е. Меньшову удалось заменить в некоторых классических теоремах теории функций действительного переменного обычную сходимость на сходимость чезаровских средних отрицательного порядка. В [1] продолжена идея получения информации о поведении коэффициентов Фурье, исходя из понятия сходимости последовательности в смысле Чезаро (C, α), $\alpha > 0$. В [2], [3] сформулированы и доказаны окончательные результаты о порядке убывания коэффициентов Фурье по тригонометрической системе в случае, когда сходимость понимается в смысле (C, α), $\alpha > 0$ для функций $f(x) \in L_p[0, 2\pi]$, $p > 1$ и $f(x) \in C_{2\pi}$. Позднее автором (см. [4]–[6]) установлены аналогичные утверждения для сходимости в смысле Рисса и Зигмунда на классах W^r и им тригонометрически сопряженным. Порядки убывания модулей коэффициентов Фурье по тригонометрической системе и системам типа систем Хаара получены в [8]. Непрерывные методы суммирования коэффициентов Фурье введены автором в [7]. В данной заметке использован метод суммирования коэффициентов Фурье, принадлежащий T.Anghelutza [9], [10]. Ранее этот метод использовался в теории аппроксимации функций. Ядро оператора Anghelutza не имеет столь компактной записи как ядро Абеля-Пуассона, но связано с ним различными соотношениями ([10]). Кроме того, известно, что

$$A_r(f, x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left\{ 1 + ln\frac{1}{r} \right\} \cos kx \geq 0,\ r \to 1-0,\ x \in [-\pi, \pi]. \tag{1}$$

Для метода (1) справедлива

Теорема. *Последовательность* $\{n^{\beta} a_n\}$, *где* a_n — *коэффициенты Фурье функции* $f(x) \in L_p[0, 2\pi]$ $(p > 1)$, $\beta \in (0, \frac{1}{q})$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$, *при* $r \to 1-0$ *суммируется со скоростью*

$$\triangle(r) = \bar{\bar{o}}\left((1-r)^{\frac{1}{q}-\beta}\right).$$

Keywords: *norm of the operators, matrix, Fourier series, Cesaro means, rate of approximation, estimate*
2000 Mathematics Subject Classification: 35Q60

Д о к а з а т е л ь с т в о . Используя интегральное представление коэффициентов a_n, введем линейный функционал

$$A_r(f)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\triangle\lambda_\nu(r)\nu^\beta a_\nu=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(t)\sum_{\nu=0}^{\infty}\triangle\lambda_\nu(r)\nu^\beta\cos\nu tdt,$$

где

$$\lambda_\nu(r)=r^\nu+\nu ln\frac{1}{r}r^\nu,\ \nu=0,1,\dots,\ 0<r<1,$$

$$\triangle\lambda_\nu(r)=\lambda_\nu(r)-\lambda_{\nu+1}(r).$$

В силу теоремы Банаха-Штейнгауза о слабой сходимости линейных функционалов достаточно показать ограниченность $|A_r(f)|$, а так как

$$|A_r(f)|\le C\|f\|_p\left\|\sum_{\nu=0}^{\infty}\triangle\lambda_\nu(r)\nu^\beta\cos\nu t\right\|_q, \tag{2}$$

($C>0$ — произвольная постоянная), то из $f\in L_p[0,2\pi]$ следует, что достаточно оценить $\|\cdot\|_q$ в неравенстве (2).

Используя преобразование Абеля и предельный переход при $r\to 1-0$, получим

$$B(t)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\triangle\lambda_\nu(r)\nu^\beta\cos\nu t=\sum_{\nu=0}^{\infty}\triangle^2\lambda_\nu(r)\sum_{k=0}^{\nu}k^\beta\cos kt=$$

$$=C\sum_{\nu=0}^{\infty}\triangle^2\lambda_\nu(r)\Bigg[\sum_{k=0}^{\nu-1}A_k^{\beta-1}D_k(t)+A_\nu^\beta D_\nu(t)\Bigg]. \tag{3}$$

В равенстве (3)

$$\triangle^2\lambda_\nu(r)=\triangle(\triangle\lambda_\nu(r)),\ \nu=0,1,\dots$$

$$A_n^\beta=\frac{(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n)}{n!}=\frac{n^\beta}{\Gamma(\beta+1)}+O(n^{\beta-1}),\ n\to\infty,\ \beta>-1. \tag{4}$$

$$A_n^\beta-A_{n+1}^\beta=-A_{n+1}^{\beta-1},$$

$$D_k(t)=\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\dots+\cos kt=\frac{\sin(k+\frac{1}{2}t)}{2\sin\frac{t}{2}}$$

— ядро Дирихле.

В дальнейшем используются очевидное равенство

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\triangle^2\lambda_\nu(r)=\triangle\lambda_0(r)=1-r$$

и оценка

$$\nu^\beta\|D_\nu(t)\|_q=C\nu^\beta\Bigg\{\Bigg(\int\limits_0^{\frac{1}{\nu+1}}|D_\nu(t)|^qdt\Bigg)^{\frac{1}{q}}+\Bigg(\int\limits_{\frac{1}{\nu+1}}^{\pi}|D_\nu(t)|^qdt\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}\le$$

$$\le C\nu^\beta\{\nu^{q-1}\}\frac{1}{q}+C\nu^\beta\Bigg\{\int\limits_{\frac{1}{\nu+1}}^{\pi}\frac{dt}{t^q}\Bigg\}^{\frac{1}{q}}=C\nu^{\beta+1-\frac{1}{q}}. \tag{5}$$

Из (2), (3), (5) следует, что достаточно оценить $\|B(t)\|_q$:

$$\|B(t)\|_q \le C\Big|\sum_{\nu=0}^{\infty}\triangle^2\lambda_\nu(r)\Big|\Big\|\sum_{k=0}^{\nu}A_k^{\beta-1}D_k(t)\Big\|_q \le C\sum_{\nu=0}^{\infty}\big|\triangle^2\lambda_\nu(r)\big|\Big\|\sum_{k=0}^{\nu}A_k^{\beta-1}D_k(t)\Big\|_q. \tag{6}$$

Оценим суммы в неравенстве (6). Из (4) следует, что для $0<\beta<1$ числа Чезаро $A_k^{\beta-1}\ge 0$ и $A_k^{\beta-1}\downarrow$, $k\to\infty$, поэтому применяя метод Когбетлянца, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}A_k^{\beta-1}\frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{Jm}{2\sin\frac{t}{2}}\bigg\{\bigg[\sum_{k=\nu}^{\infty}A_k^{\beta-1}e^{ikt} - \sum_{k=\nu+1}^{\infty}A_k^{\beta-1}e^{ikt}\bigg]\bigg\} =$$

$$= \frac{\sin[(1-\beta)\frac{t}{2}+\frac{\beta\pi}{2}]}{(2\sin\frac{t}{2})^{\beta+1}} + R(t,\nu,\beta), \tag{7}$$

где

$$\frac{C}{t^2} < |R(t,\nu,\beta)| < \frac{C\nu^{\beta-1}}{t^2}.$$

Из (7) следует, что для $t\in(0,\pi)$

$$\Big|\sum_{k=0}^{\nu}A_k^{\beta-1}D_k(t)\Big| \le C\Big(\frac{1}{t^{\beta+1}}+\frac{\nu^{\beta-1}}{t^2}\Big). \tag{8}$$

Для $\beta\in(0,\frac{1}{q})$ из (8) при $t\in[0,\frac{1}{\nu+1}]$ получим

$$\Big\|\sum_{k=0}^{\nu}A_k^{\beta-1}\frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\Big\|_q \le C\sum_{k=0}^{\nu}A_k^{\beta-1}\Big\|\frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\Big\|_q \le$$

$$\le C\sum_{k=0}^{\nu}A_k^{\beta-1}\bigg\{\int\limits_0^{\frac{1}{\nu+1}}\Big|\frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\Big|^q dt\bigg\}^{\frac{1}{q}} \le C\sum_{k=0}^{\nu}A_k^{\beta-1}\nu^{1-\frac{1}{q}} = C\nu^{\beta+1-\frac{1}{q}}.$$

Для $t\in[\frac{1}{\nu+1},\pi]$ из (8) вытекает оценка

$$\Big\|\sum_{k=0}^{\nu}A_k^{\beta-1}D_k(t)\Big\|_q \le C\bigg\{\bigg(\int\limits_{\frac{1}{\nu+1}}^{\pi}\frac{dt}{t^{(\beta+1)q}}\bigg)^{\frac{1}{q}} + \nu^{\beta-1}\bigg(\int\limits_{\frac{1}{\nu+1}}^{\pi}\frac{dt}{t^{2q}}\bigg)^{\frac{1}{q}}\bigg\} \le C\nu^{\beta+1-\frac{1}{q}}.$$

Таким образом, неравенство (6) упрощается

$$\|B(t)\|_q \le C\sum_{k=0}^{\infty}|\triangle^2\lambda_\nu(r)|\nu^{\beta+1-\frac{1}{q}}. \tag{9}$$

Из

$$ln\frac{1}{r} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-r)^k}{k},\ r\to 1-0$$

несложно проверить, что

$$\triangle^2\lambda_\nu(r) \le C(1-r)^3\nu r^\nu + C(1-r)^3 r^\nu. \tag{10}$$

Учитывая главный член асимптотики в (10), из (9) получим

$$\|B(t)\|_q \le C(1-r)^3\sum_{\nu=0}^{\infty}r^\nu\nu^{\beta+2-\frac{1}{q}}.$$

Справедливость теоремы вытекает из

$$\frac{1}{(1-r)^{1+\alpha}}=\sum_{\nu=0}^{\infty}A_{\nu}^{\alpha}x^{\nu},\ \alpha\neq-1,-2,\ldots.$$

Аналогичная оценка справедлива для коэффициентов b_n.

Утверждение теоремы полезно сопоставить с аналогичными оценками, приведенными для обобщенного метода суммирования Абеля-Пуассона (A,l) в [7].

Цитированная литература

1. **Ready J.** // SIAM J. Math. Anal. 1986. T. 17. P. 469 – 476.
2. **Куприков Ю. Е.** // Матем. заметки. 1990. Т. 48. С. 154 – 155.
3. **Kuprikov Yu. E.** // Analysis Math. 1993. T. 19. P. 113 – 134.
4. **Фалалеев Л. П.** // Теория прибл. и гармонический анализ. Тез. докл. 1998. Тула. С. 267.
5. **Фалалеев Л. П.** // Междунар. конф. AMADE. Тез. докл. Минск. 1999. С. 226.
6. **Фалалеев Л. П.** // Известия МОН РК, НАН РК. Сер. физ.-мат. 2000. №5. С. 53 – 57.
7. **Фалалеев Л. П.** // Вестник МН и ВО НАН РК. 1999. №1. С. 64 – 70.
8. **Фалалеев Л. П.** // Матем. журнал. Алматы. 2001. Т. 1, №1. С. 100 – 103.
9. **Anghelutza T.** // Une remarque sur l'iutegrale de Poisson. Bull. Sci. Math. Bibliotheque Ecole Hautes Etudes=Darboux Bull. 1924. T.48. S.138 – 140.
10. **Stark E.** // Linear operators and approximation. Reprint from ISNM. 1972. Vol. 20. P. 349 – 363.

Поступила в редакцию 15.10.2001г.

ХРОНИКА

Международная конференция "ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ" (Алматы, 26–28 сентября, 2001)

В г.Алматы с 26 по 28 сентября 2001г. проходила международная научная конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения", посвященная актуальным проблемам современной теории дифференциальных уравнений, их применению к изучению прикладных задач механики, математической физики, управления, техники и т.д. Она была приурочена к 90-летию со дня рождения известных казахстанских математиков — академика АН РК Жаутыкова Орымбека Ахметбековича и члена-корреспондента АН РК Кима Енгвана Инсуговича, которые стояли у истоков развития в Казахстане исследований по дифференциальным уравнениям. Они сыграли важную роль в становлении и формировании казахстанской школы по этому направлению математических исследований, а также приложили немало сил и энергии успешному применению теории к изучению и решению практических задач. Многие годы они были авторитетными научными сотрудниками Института математики МОН РК и глубокоуважаемыми аксакалами.

Конференция была организована Институтом математики МОН РК при активном содействии механико-математического факультета КазНУ им.аль-Фараби.

Доклад о жизнедеятельности академика АН РК О. А. Жаутыкова был сделан Д. С. Джумабаевым, члена-корреспондента АН РК Е. И. Кима — Г. И. Бижановой.

Работа конференции проходила в двух секциях: "Дифференциальные уравнения" и "Математическая физика". На первой секции (3 заседания) были сделаны 47, и на второй (2 заседания) — 23 доклада. Кроме того, на двух пленарных заседаниях были заслушаны 6 докладов (У. М. Султангазин, Н. Х. Розов, М. И. Рахимбердиев, М. О. Отелбаев и Ш. С. Смагулов, Н. К. Блиев, Л. А. Алексеева).

В работе конференции приняли участие более 80 человек, в том числе, из Оулу (Финляндия) — 1, Москвы — 1, Новосибирска —1, Красноярска — 1, Актобе — 10, Астаны — 4, Жезказгана — 2, Караганды — 1, Кокшетау — 1, Талдыкоргана — 1, Тараза — 4, Шымкента — 5, Алматы — более 50. Значительное число докладов было представлено аспирантами и молодыми исследователями ВУЗов и научно-исследовательских учреждений НАН РК.

К началу конференции были опубликованы программа ее работы и сборник представленных участниками тезисов докладов.

Принято решение об издании материалов избранных научных докладов участников конференции.

Профессор М. Т. Дженалиев

ХРОНИКА

ОРЫМБЕК АХМЕТБЕКОВИЧ ЖАУТЫКОВ

Орымбек Ахметбекович Жаутыков родился в 1911 г. в Актогайском районе Карагандинской области. С 1920 по 1930 гг. учился сначала в аульной, затем в школах I и II ступеней города Каркаралинска. В 1934 г. окончил физико-математический факультет КазПИ им. Абая и как отличник учебы был оставлен при институте. Научную деятельность О. А. Жаутыков начал в 1939 г. в Ленинграде. Его научные интересы формировались под влиянием таких известных ученых-математиков, как И. П. Натансон, В. И. Смирнов, Л. В. Канторович, Н. П. Еругин, Н. А. Артемьев и др. В 1944 г. он защищает кандидатскую диссертацию. Научные исследования О. А. Жаутыкова в основном связаны с теорией бесконечных систем дифференциальных уравнений. В его работах доказано существование периодических решений бесконечных систем дифференциальных уравнений и обобщена классическая теорема Пуанкаре об аналитичности решения по параметру. Развивая классические идеи Пуассона и Гамильтона-Якоби на счетные канонические системы, О. А. Жаутыков доказал справедливость принципа наименьшего действия для систем с бесконечным числом степеней свободы. Докторскую диссертацию О. А. Жаутыков защитил в 1961 г.

В 1974 г. О. А. Жаутыков совместно с К. Г. Валеевым опубликовали монографию "Бесконечные системы дифференциальных уравнений", в которой были собраны последние достижения теории, многие из которых принадлежали авторам. Книга получила широкое признание не только в СССР, но и за рубежом. За эту работу в 1976 г. О. А. Жаутыков удостоен звания лауреата Государственной премии Казахской ССР в области науки и техники. За фундаментальные исследования в области теории дифференциальных уравнений и за значительный вклад в развитие математической науки он в 1962 г. избран действительным членом Академии наук Казахской ССР. Академик О. А. Жаутыков был участником многих конгрессов, съездов, конференций, симпозиумов, проходивших в Советском Союзе и за рубежом. В 1974 г. О. А. Жаутыкову присваивается звание Заслуженного деятеля науки Казахской ССР. Более полувека он непрерывно вел педагогическую работу. Написал первый учебник по математическому анализу на казахском языке (1958 г.), который стал важным событием в жизни высшей школы Казахстана.

Усилия Орымбека Ахметбековича Жаутыкова по развитию математической науки в республике, его неустанная забота о молодых высококвалифицированных кадрах и его высокий авторитет среди ученых-математиков позволил в 1965 г. на базе Сектора математики и механики открыть Институт математики и механики Академии наук Казахской ССР. С 1969 по 1985 гг. О. А. Жаутыков стоял во главе Отделения физико-математических наук, занимая должность академика-секретаря и являясь членом Президиума АН КазССР. Многие годы он возглавлял специализированный совет по защите кандидатских диссертаций. По его инициативе и при активном участии в Алматы была организована республиканская специализированная физико- математическая школа-интернат, которая в данное время носит его имя.

Выдающийся ученый, замечательный педагог Орымбек Ахметбекович Жаутыков 16 мая 1989 г. ушел из жизни.

Профессор Д. С. Джумабаев

Математический журнал. *Алматы. 2001. Том 1. № 2. С. 113 — 113*

ХРОНИКА

ЕНГВАН ИНСУГОВИЧ КИМ

Енгван Инсугович Ким родился 12 ноября 1911 года в селе Усть-Сидими Хасанского района Приморского края в семье рабочего-железнодорожника. Закончив семилетнюю школу и Никольско-Уссурийский педагогический техникум, он поступает в Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова на механико-математический факультет. После окончания МГУ с отличием с 1937 по 1953 гг. он работает в Кзыл-Ординском désинституте, Казахском государственном университете, в Педагогическом институте в Ростове-на-Дону, занимая различные преподавательские и административные должности. В 1942 г. защищает кандидатскую диссертацию по теме, предложенной ему С. Л. Соболевым, в 1943 г. получает ученое звание доцента. С 1953 по 1956 гг. Е. И. Ким проходит докторантуру Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР в Москве. В этот период им разрабатывается теория сингулярных интегральных уравнений Вольтерра-Фредгольма, которая впоследствии находит большое применение при решении начально-краевых задач для параболических уравнений. После окончания докторантуры с 1956 по 1964 гг. он работает в г. Харькове заведующим кафедрой высшей математики политехнического института. В 1959 г. Е. И. Ким защищает докторскую диссертацию, в 1960 г. получает ученое звание профессора. В 1962 г. он избирается членом-корреспондентом АН КазССР и в 1964 г. переезжает в г. Алма-Ату, где в полной мере проявляется и реализовывается его замечательный талант. Е. И. Ким основывает и возглавляет лабораторию уравнений математической физики в Институте математики и механики АН КазССР и кафедру уравнений математической физики в Казахском государственном университете. Одновременно он организовывает Общегородской научный семинар по уравнениям математической физики.

Профессор Е. И. Ким положил начало развитию в Казахстане теории уравнений с частными производными. Разработанная Е. И. Кимом теория сингулярных интегральных уравнений Вольтерра-Фредгольма получила дальнейшее развитие и применение при решении начально-краевых задач для параболических уравнений в его исследованиях с учениками. Под его руководством защищено 36 кандидатских диссертаций, 6 его учеников защитили докторские диссертации.

Е. И. Ким вел большую общественную работу. Он являлся членом Проблемного совета АН КазССР по физико-математическим наукам, Специализированного совета по защите докторских и кандидатских диссертаций, редакционного совета всесоюзного "Инженерно-физического журнала", редколлегии журнала "Известия АН КазССР. Серия физико-математическая".

За большие заслуги в развитии математики в Казахстане, за плодотворную общественно-педагогическую деятельность Е. И. Ким был удостоен почетного звания "Заслуженный деятель науки КазССР", награжден Почетной грамотой Президиума Верховного Совета КазССР, занесен в Золотую книгу почета Казахской ССР.

Е. И. Ким скончался 14 декабря 1994 г. после тяжелой болезни. Дело, которому он служил всю свою жизнь, живет и продолжает развиваться его учениками и последователями.

Профессор Г. И. Бижанова

ХРОНИКА

СЕМИНАР ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ МОН РК

Ниже публикуются аннотации докладов, заслушанных на семинаре в ноябре-декабре 2001г.

Ж. Н. Калиев (Алматы) "Решение задачи Орра-Зоммерфельда методом нахождения предельных собственных значений"(1 ноября 2001 г.).

Вопрос о неустойчивости свободных ламинарных течений как, например, течения в струях, слоях смешения и следах, предлагается рассматривать одновременно в двух постановках: в полной, т.е. в рамках уравнения Орра-Зоммерфельда (вязкая неустойчивость) [1]:

$$(D^2-\alpha^2)^2\varphi(y)=\iota\alpha R[(U-c)(D^2-\alpha^2)-D^2U]\varphi(y) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &D\varphi(0)=0, \quad [D^3+\alpha D^2-\beta^2(D+\alpha)]\varphi(a)=0, \\ &D^3\varphi(0)=0, \quad [D^3+\beta D^2-\alpha^2(D+\beta)]\varphi(a)=0, \end{aligned} \tag{2}$$

и в усеченной, т.е. в рамках уравнения Релея (невязкая неустойчивость) [2]:

$$[(U-c)(D^2-\alpha^2)-D^2U]\varphi(y)=0 \tag{3}$$

$$D\varphi(0)=0, \quad (D+\alpha)\varphi(a)=0, \tag{4}$$

где

$$\beta^2=\alpha^2+\iota\alpha R[U(a)-c].$$

Здесь $U=U(y)$ — заданная действительная функция (стационарное решение уравнений Навье-Стокса, задающее профиль скорости основного течения, неустойчивость которого исследуется), $\varphi(y)=\varphi_r+\iota\varphi_i$ — собственная функция, $c=c_r+\iota c_i$ — собственное значение ($c_i>0$), $\alpha>0$ — волновое число, $R>0$ — число Рейнольдса, $D\equiv d/dy, y\in[0,a](a>0)$. Значение "$a$"выбирается из условия: $U(y)\to const$ при $y\geq a$.

Согласно теореме Вазова-Линя [3, 4], если при $\varepsilon\to 0\,(\,\varepsilon=R^{-1}, R\to\infty)$ собственное значение с Im(c) уравнения (1) стремится к некоторому предельному значению $\widetilde{c}$ вдоль линии Стокса ($U-c\neq 0$), то $\widetilde{c}$ есть собственное значение уравнения (3) вдоль этой линии. Обратно, если $\widetilde{c}$ есть собственное значение уравнения (3) вдоль линии Стокса, то $\widetilde{c}$ есть предел собственных значений уравнения (1) при $\varepsilon\to 0$. На основе этой теоремы для решения задачи (1)–(2) предварительно решается задача (3)–(4) модифицированным методом Релея [5]. В результате из следующего уравнения:

$$2\alpha^2c^2+\alpha(1-2\alpha-e^{-2\alpha})c+\alpha(1+e^{-2\alpha})-1+e^{-2\alpha}=0$$

находится формула распределения предельных собственных значений, используемая при численном решении задачи (1)–(2) для определения выбора начального приближения собственного значения полной задачи. В качестве примера реализации предлагаемого метода рассмотрена невязкая и вязкая неустойчивость плоской спутной струи [6, 7].

Литература. 1. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Н-ск, 1977. 2. Шкадов В. Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости. М., 1973. 3. Wazow W. // Ann. Math. 1953. Vol.58, № 2. P. 222 – 252. 4. Lin C. C. // Quart. Appl. Math., 1945–1946. Vol.3, № 2–4. 5. Drazin P. G., Howard L. N. // Advances in Applied

Mechanics. 1966. Vol.9. P. 1 – 89. 6. Калиев Ж. Н. // Вестник АН Каз.ССР. 1991. № 9. С. 65–67. 7. Джаугаштин К. Е., Калиев Ж. Н. // Изв. РАН, сер. МЖГ. 1992. № 2. С. 69–75.

А. А. Калыбай (Алматы) "О сократимости параметров системы пространственно однородных уравнений Больцмана с сохранением топологической транзитивности"(1 ноября 2001г.).

Рассматривается система

$$\dot{n}_i = \sum_{j,k,l=1}^{N} \sigma_{kl}^{ij}(n_k n_l - n_i n_j),\ i = 1, \dots, N, \tag{1}$$

где $n_1(t), \dots, n_N(t)$ — плотности частиц в момент времени t, обладающие скоростями, соответственно, $v_1, \dots, v_N$. Для краткости будем обозначать данную систему $\dot{n} = f(n)$. Предполагается, что частицы со скоростями v_k, v_l, сталкиваясь по закону абсолютно упругого взаимодействия, вызывают появление частиц со скоростями v_i, v_j в количестве, пропорциональном величине $n_k n_l$ с коэффициентом пропорциональности σ_{kl}^{ij}, которые являются постоянными величинами, удовлетворяющими следующим условиям:

$$\sigma_{kl}^{ij} \geq 0,\ \sigma_{kl}^{ij} = \sigma_{ij}^{kl},\ \sigma_{kl}^{ij} = \sigma_{kl}^{ji},\ \sigma_{kl}^{ii} = 0.$$

Система (1) является пространственно однородной дискретной моделью уравнения Больцмана, предложенной С. К. Годуновым и У. М. Султангазиным в работе [1].

Системе (1) сопоставим вспомогательную систему линейных однородных уравнений

$$x_i + x_j - x_k - x_l = 0, \tag{2}$$

где индексы i, j, k, l принимают все значения, для которых $\sigma_{kl}^{ij} > 0$. Пусть A — матрица этой системы, r — ее ранг. Система (2) имеет очевидное ненулевое решение с равными между собой компонентами. Следовательно, если число уравнений системы (2) больше N, то все миноры N–го порядка равны нулю и, если число уравнений совпадает с N, то определитель матрицы A равен нулю. Поэтому $r < N$. Далее, при $r = N - 1$ пространство решений системы (2) одномерно. Значит, никаких нетривиальных решений системы, кроме как решений с равными координатами, не существует. Но тогда, с учетом абсолютно упругого взаимодействия частиц компоненты их скоростей должны удовлетворять системе (2), все скорости равны, что приводит к вырожденному случаю, то есть отсутствию столкновений. Значит, $r < N - 1$.

Выделим в системе (2) r линейно независимых строк и отбросим все другие. Получим систему уравнений с некоторой матрицей A_1, равносильную исходной. Рассмотрим систему, которая получается из (1) отбрасыванием слагаемых с коэффициентами $\sigma_{kl}^{ij} > 0$, индексы которых определяют уравнения $x_k + x_l - x_j - x_i = 0$ системы (2), не входящие в уравнение $A_1 x = 0$. Обозначим полученную таким образом систему через $\dot{n} = f_1(n)$ и будем ее называть приведенной системой. Ясно, что она будет содержать столько коэффициентов, сколько уравнений в системе (2), то есть r.

Теорема. *Система (1) и соответствующая ей приведенная асимптотически и топологически эквивалентны на множестве* $\operatorname{int} K$*, где* $K = \{n | n = (n_1, \dots, n_N), n_i \geq 0, i = 1, \dots, N\}$.

Литература. 1. Годунов С. К., Султангазин У. М. // Успехи матем.наук. 1971. Т 36, № 3 (159). С. 1 – 51.

И. Н Панкратова (Алматы) "О свойствах периодических решений двумерного аналога нелинейного логистического разностного уравнения в однопараметрическом случае"(1 ноября 2001 г.).

Рассматривается динамическая система $\{f^m, K, Z^+\}$, заданная с помощью отображения $f : R^n \to R^n$, $f(x) = (1 - \sum\limits_1^n x_i)Ax$. Здесь A — неотрицательная матрица параметров, т.е. $a_{ij} \geq 0\ \forall i, j = \overline{1,n}$ и $\|A\| = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^n a_{ij} \leq 4$, $K = \{x \in R^n | x \geq 0,\ \sum\limits_1^n x_i \leq 1\}$, $Z^+ = N \bigcup \{0\}$ [1].

При $n = 1$ отображение f переходит в унимодальное отображение $\psi : R \to R$, $\psi x = a(1-x)x$, где $x \in I = [0, 1]$, $a \in (0, 4]$, динамика которого в зависимости от a достаточно хорошо и полно изучена к настоящему времени [2–4].

Пусть $n = 2$ и для отображения f матрица A имеет следующую структуру $A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $r > \lambda > 0$. Как следует из [1], в этом случае максимально инвариантными подмножествами системы f^m являются отрезки координатных лучей, совпадающих с собственными направлениями матрицы A, отвечающими собственным значениям r и λ. Отображение f на данных инвариантных множествах $E_r = \mathrm{con}\ e_r \bigcap K$ и $E_\lambda = \mathrm{con}\ e_\lambda \bigcap K$ (e_r и e_λ — собственные векторы матрицы A) топологически сопряжено одномерному отображению ψ, динамика которого на E_r и E_λ определяется параметрами r и λ, соответственно, где $\mathrm{con}\ M \overset{\mathrm{def}}{=} \{c \cdot x / x \in M, c \geq 0\}$ $\forall M \subset R^2$.

Отметим, что при изменении параметра a в интервале $(0, 4]$ в системе ψ^m появляются циклы всех периодов $k \in N$. Обозначим через $\mu(\mathcal{B}_k)$ мультипликатор цикла $\mathcal{B}_k$ периода k отображения ψ, $k \in N$ [4, с.25] и пусть B_{rk}, $\mathrm{B}_{\lambda k}$ — гомеоморфные циклу $\mathcal{B}_k$ циклы отображения f, расположенные на E_r и E_λ.

Теорема. *Для любого $k \in N$ мультипликаторами циклов B_{rk}, $\mathrm{B}_{\lambda k}$ являются числа $\mu_{r1} = \mu(\mathcal{B}_k)$, $\mu_{r2} = (\lambda r^{-1})^k < 1$ и $\mu_{\lambda 1} = \mu(\mathcal{B}_k)$, $\mu_{\lambda 2} = (r\lambda^{-1})^k > 1$, соответственно.*

Данная теорема уточняет характер приближения траекторий отображения f к циклическим предельным множествам, существование которых установлено в [1].

Литература. 1. Панкратова И. Н. // Дифф. уравн. 1996. Т.32, № 7. С. 995 – 997. 2. Фейгенбаум М. // Успехи физ. наук. 1983. Т.141, № 2. С. 343 – 374. 3. Шарковский А. Н., Коляда С. Ф., Сивак А. Г., Федоренко В. В. Динамика одномерных отображений. Киев, 1989. 4. Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю. Разностные уравнения и их приложения. Киев, 1986.

М. И. Рахимбердиев (Алматы) "О геометрии векторного расслоения при условии существования равномерной экспоненциальной разделенности семейства его автоморфизмов"(1 ноября 2001г.).

Рассматривается векторное расслоение $\xi = (E, p, B)$ со слоем $\mathbf{R}^n$ (E — пространство расслоения, p — проекция, B — база, полное метрическое пространство) и автоморфизм $(X, \chi) : \xi \to \xi$. На расслоении фиксируем некоторую риманову метрику (см. [1]) и считаем, что выполняются требования, наложенные на автоморфизм (X, χ) в статье [2], то есть X — гомеоморфизм E на E, χ — гомеоморфизм B на B, сужение $X[b]$ на слой $p^{-1}(b)$ отображения X при всяком $b \in B$ есть невырожденное линейное отображение слоя $p^{-1}(b)$ на слой $p^{-1}(\chi b)$ и, кроме того, пусть выполняется следующее условие:

$$\sup_{b \in B} \max(\|X[b]\|, \|(X[b])^{-1}\|) < +\infty.$$

Равенством $\Xi\, t = (X^t, \chi^t)$, $t \in \mathbf{G}$, определяется гомоморфизм Ξ группы $\mathbf{G}$ в группу автоморфизмов векторного расслоения ξ, которая обозначается через $\mathrm{Aut}\,(E, p, B)$, т.е. $\Xi \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}\,(E, p, B)$. Здесь $\mathbf{G}$ — группа $\mathbf{R}$ или группа $\mathbf{Z}$. Следующее определение является модификацией определения, данного в [3].

Определение. *Гомоморфизм* $\Xi \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}\,(E,p,B)$, *порождаемый семейством* (X^t, χ^t), $t \in \mathbf{G}$, *удовлетворяет условию равномерной экспоненциальной разделённости с индексом* $k \in \{1, \ldots, n\}$ $(n > 1)$, *если существуют такие вещественные числа* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, *что для всякого* $b \in B$ *пространство* $p^{-1}(b)$ *можно так разложить в прямую сумму подпространств* $\mathbf{R}^{n-k}$ *и* $\mathbf{R}_0^k(b)$, *что для любых* $\xi \in \mathbf{R}^{n-k}$, $\eta \in \mathbf{R}_0^k(b)$, $\xi \neq 0, \eta \neq 0$, $t, s \in \mathbf{G}$, $t \geq s$, *имеет место неравенство*

$$|X^t\xi||X^s\xi|^{-1} \ \geq \alpha|X^t\eta||X^s\eta|^{-1}\exp(\beta(t-s)).$$

Теорема. *Если гомоморфизм* $\Xi \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}\,(E,p,B)$, *порождаемый семейством* (X^t, χ^t), $t \in \mathbf{G}$, *равномерно экспоненциально разделён для всех индексов* $k \in \{1, \ldots, n\}$, *то расслоение тривиально.*

Литература. 1. Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства. М., Мир. 1970. 2. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1981. Т.17, № 3. С.431 — 468. 3. Миллионщиков В. М. // Мат. сборник. 1984. Т.124(166). С.451 — 485.

А. Т. Асанова (Алматы) "Метод параметризации решения краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений"(27 декабря 2001 г.).

Рассматривается следующая краевая задача для интегро-дифференциальной системы

$$\frac{\partial v}{\partial y} = A(x,y)v + C(x,y)\int\limits_0^x v(\xi,y)d\xi + f(x,y), \qquad x \in [0,\omega_1], \quad y \in (0,\omega_2), \tag{1}$$

$$P_1(x)v(x,0) + P_0(x)\int\limits_0^x v(\xi,0)d\xi + S_1(x)v(x,\omega_2) + S_0(x)\int\limits_0^x v(\xi,\omega_2)d\xi = \varphi(x), \quad x \in [0,\omega_1], \tag{2}$$

где $(n \times n)$ – матрицы $A(x,y)$, $C(x,y)$, n – вектор-функция $f(x,y)$ непрерывны и ограничены на $[0,\omega_1] \times [0,\omega_2]$, $(n \times n)$ – матрицы $P_1(x)$, $P_0(x)$, $S_1(x)$, $S_0(x)$, n– вектор-функция $\varphi(x)$ непрерывны и ограничены на $[0,\omega_1]$. Здесь x играет роль интегрального параметра.

Пусть $\widetilde{C}(J, R^n)$ — множество непрерывных и ограниченных на J $(J \subset R^1$ или $J \subset R^2)$ функций $v : J \to R^n$. Функция $v(x,y) \in \widetilde{C}([0,\omega_1] \times [0,\omega_2], R^n)$, имеющая частную производную $\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y} \in \widetilde{C}([0,\omega_1] \times (0,\omega_2), R^n)$ называется решением задачи (1)–(2), если она удовлетворяет системе интегро-дифференциальных уравнений (1) при всех $(x,y) \in [0,\omega_1] \times (0,\omega_2)$ и выполнено граничное условие (2).

Система (1) возникла при исследовании нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными и заслуживает специального рассмотрения. Ставится задача: найти коэффициентные условия существования единственного решения системы (1), удовлетворяющего условию (2), и построить алгоритм его нахождения. В этих целях применяется метод параметризации [1]. С помощью метода параметризации в [1] получены коэффициентные необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости линейной регулярной двухточечной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. Суть метода параметризации применительно к системе интегро-дифференциальных уравнений заключается в сведении исходной задачи к задаче с функциональными параметрами. При этом алгоритм нахождения решения задачи состоит из двух этапов: 1) нахождение введенных функциональных параметров из интегральных уравнений Вольтерра; 2) нахождение решений задач Коши на малых интервалах при фиксированных параметрах.

Возьмем шаг $h > 0 : Nh = \omega_2$ и с помощью матриц граничных условий $P_1(x)$, $S_1(x)$ и матрицы $A(x,y)$ задачи (1), (2) составим $(nN \times nN)$ — матрицу $Q(h,x)$ специальной структуры

$$Q(h,x) = \begin{vmatrix} P_1(x)h & 0 & 0 & \dots & 0 & S_1(x)[I + D_N(h,x)]h \\ I + D_1(h,x) & -I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I + D_2(h,x) & -I & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I + D_{N-1}(h,x) & -I \end{vmatrix},$$

где $D_r(h,x) = \int\limits_{(r-1)h}^{rh} A(x,\eta)d\eta, \ \ r = 1, 2, \dots, N.$

Теорема. *Пусть при некотором $h > 0 : Nh = \omega_2$, $(nN \times nN)$ – матрица $Q(h,x)$ обратима при всех $x \in [0, \omega_1]$ и выполняются неравенства*

a) $\quad ||[Q(h,x)]^{-1}|| \le \gamma(h),$

b) $\quad \lambda(h,x) = \gamma(h) \cdot \max(1, h||S(x)||)\left[e^{\alpha(x)h} - 1 - \alpha(x)h\right] \le \beta < 1,$

где $\alpha(x) = \max\limits_{y \in [0,\omega_2]} ||A(x,y)||, \quad \beta = \mathrm{const}.$

Тогда существует единственное решение задачи (1)—(2).

Литература. 1. Джумабаев Д. С. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т.29. № 1. С. 50 — 66.

Д. С. Джумабаев (Алматы) "Поведение решений систем интегро-дифференциальных уравнений"(27 декабря 2001 г.).

Рассматриваются ограниченные на $\overline{\Omega}_T = [0, \omega_1] \times [T, \infty)$, $T \ge 0$ решения систем интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial y} = A(x,y)v + C(x,y)\int\limits_0^x v(\xi, y)d\xi + f(x,y), \qquad v \in R^n, \tag{1}$$

где матрицы $A(x,y)$, $C(x,y)$ и функция $f(x,y)$ непрерывны и ограничены на $\overline{\Omega}_T$, $||v|| = \max\limits_i |v_i|$. Определяются граничные условия корректно разрешимой сингулярной краевой задачи на $\overline{\Omega}_T$, позволяющие выделить все ограниченные решения системы (1), и исследуется их поведение при $y \to \infty$. Предполагается, что выполнены следующие условия:

I. $\lim\limits_{y \to \infty} \max\limits_{x \in [0,\omega_1]} ||A(x,y) - A_+(x)|| = 0,$

II. Для предельной матрицы $A_+(x)$ существует неособая непрерывная матрица $S_+(x)$, обладающая следующими свойствами:

a) $||S_+(x)|| \le c_1, \qquad ||[S_+(x)]^{-1}|| \le c_2, \quad c_j = \mathrm{const}, \quad j = 1, 2.$

b) $\tilde{A}_+(x) = S_+(x) \cdot A_+(x) \cdot S_+^{-1}(x) = \begin{pmatrix} A_{11}^+(x) & 0 \\ 0 & A_{22}^+(x) \end{pmatrix}$, где матрицы $A_{11}^+(x)$ и $A_{22}^+(x)$ состоят из обобщенно-жордановых клеток, соответствующих собственным значениям матрицы $A_+(x)$ с отрицательными и положительными действительными частями.

c) $|\mathrm{Re}\,\lambda_j(A_+(x))| \ge \delta > 0$, для всех $x \in [0, \omega_1]$, $j = \overline{1, n}$.

Через $\tilde{P}_1 = (I_{n_1}, 0)$ обозначим $(n_1 \times n)$ — матрицу, где I_{n_1} — единичная матрица размерности n_1, а n_1 — размерность $A_{11}^+(x)$, $\widetilde{C}(\overline{\Omega}_T, R^n)$ — пространство непрерывных и ограниченных на $\overline{\Omega}_T$ функций $v : \Omega_T \to R^n$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия I, II. Тогда найдется число $T \ge 0$ такое, что любое ограниченное на $\overline{\Omega}_T$ решение системы (1) является решением корректно разрешимой сингулярной краевой задачи для системы (1) с граничным условием*

$$\tilde{P}_1 S_+(x) v(x,T) = d_1(x), \qquad v(x,y) \in \widetilde{C}(\overline{\Omega}_T, R^n), \tag{2}$$

при некоторой непрерывной на $[0,\omega_1]$ вектор-функции $d_1(x)$ размерности n_1.

Определение. *Непрерывная на $\overline{\Omega}_0$ функция $v_0(x,y)$, имеющая непрерывную производную по y, называется "предельным при $y\to\infty$" решением системы (1), если*

$$\lim_{y\to\infty}\max_{x\in[0,\omega_1]}||v'_{0y}(x,y)-A(x,y)v_0(x,y)-C(x,y)\int\limits_0^x v_0(\xi,y)d\xi-f(x,y)||=0.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия I, II и система (1) имеет "предельное при $y\to\infty$" решение $v_0(x,y)$. Тогда для любого $v(x,y)$ - ограниченного на $\overline{\Omega}_T$ решения системы (1) имеют место предельные соотношения:*

$$\lim_{y\to\infty}\max_{x\in[0,\omega_1]}||v(x,y)-v_0(x,y)||=0,\qquad \lim_{y\to\infty}\max_{x\in[0,\omega_1]}||v'_y(x,y)-v'_{0y}(x,y)||=0.$$

Следствие. Пусть выполнены условия I, II и $\lim\limits_{y\to\infty}\max\limits_{x\in[0,\omega_1]}||f(x,y)||=0$. Тогда для любого $v(x,y)$ — ограниченного на $\overline{\Omega}_T$ решения системы (1) имеют место предельные соотношения

$$\lim_{y\to\infty}\max_{x\in[0,\omega_1]}||v(x,y)||=0,\qquad \lim_{y\to\infty}\max_{x\in[0,\omega_1]}||v'_y(x,y)||=0.$$

Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений аналогичные вопросы рассмотрены в [1].

Литература. 1. Джумабаев Д. С. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т.30. № 11. С. 1646 — 1660.

РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 621.391 2000 MSC: 90B15

Aidarkhanov M.B., Ashigaliev D.U. **Mathematical parameters estimation method of quality of data transfer network service**// Mathematical journal. 2001. Vol. 1. No. 2. P.3–9.

In this paper the analytical approach to calculate the basic characteristics of quality of data transfer network service with using the concept of virtual connections for the care of multichannel calls on roundabout directions is proposed. A number of assumptions which allow to approach the model under consideration to the really functioning networks of transfer data with a rather high accuracy is done. Some analytical representations of current values by parameters of quality by network service are obtained.

References — 5.

УДК: 517.938 2000 MSC: 34D08

Aldibekov T.M. **On estimate of the solution's growth of a differential equations' system**// Mathematical journal. 2001. Vol. 1. No. 2. P.10–14.

Analog of Liapunov's theorem on stability by the first approximation for unlimited differential equations is obtained.

References — 6.

УДК: 538.3+538.56 2000 MSC: 35Q60

Alexeeva L.A. **Modified Maxwell equations and their generalized solutions**// Mathematical journal. 2001. Vol. 1. No. 2. P.15–24.

A new form of Maxwell equations as one equation for 3-dimensional complex A-vector has been constructed. The real and imaginary parts of this vector are described by means of electric (E) and magnetic (H) tensions accordingly. With using a theory of generalized functions for the new equations, the strong shock electro-magnetic waves with the gap of tensions on fronts are considered. The conditions on wave fronts have been received. It's shown that gap of the tensions is tangent to the front of a wave, i.e. shock electromagnetic waves are transverse and charges on the front of wave are absent. Generalized laws of conservation of energy and charges have been received. The generalized solutions of Caushy problem for this equation have been constructed and the theorems of their uniqueness have been proved including the shock waves.

References — 3.

УДК: 681.5 2000 MSC: 65G40

Baikenova Zh.A., Ivlev R.S. **Investigation of absolute stability of nonlinear difference inclusions**// Mathematical journal. 2001. Vol. 1. No. 2. P.25–31.

In this paper the class of nonlinear difference interval inclusions given in the state space with the nonlinearity of the sector type is considered. For this class the sufficient conditions of the absolute stability on the base of methods of interval analysis and direct method of Liapunov are obtained. Algorithm for investigating the property of absolute stability of this class of systems is shown.

References — 11.

УДК: 517.9 2000 MSC: 35M10, 35P05

Bimenov M.A., Jamankaraeva M.A., Kalmenov T.Sh. **The spectrum questions of quaziregular Dirichlet problem and it's adjoint problem for the Lavrentjev-Bitsadze equation**// Mathematical journal. 2001. Vol. 1. No. 2. P.32–41.

In this work it's proved that the adjoint problem to the quaziregular Dirichlet problem for the Lavrentjev-Bitsadze equation is a problem of finding the solution of the equation with boundary and inside conditions.

The completeness and ortonormalness of root functions of this problems in elliptical part, the completeness of root functions of adjoint problem and uncompleteness of root functions in common have been proved.

References — 10.

УДК: 517.948.34 2000 MSC: 34D15

Dauylbaev M.K. **Asymptotic solution of singular perturbed nonlinear integral differential equations with initial jump of any order**// Mathematical journal. 2001. Vol. 1. No. 2. P.42–51.

We consider the singular perturbed nonlinear integral differential equations with initial condition on the right end of the given segment when integral members change qualitatively the asymptotic behaviors of the solution of the corresponding differential equations. It's shown that the solution of this problem in the left end of the given segment has the initial jump of any order. The theorem of existence and uniqueness has been proved. The asymptotic expansion of the solution of this problem has been constructed.

References — 2.

УДК: 517.5 2000 MSC: 65D32

Zhuk V.V. **On exactness's degree on polynomials of quadratures for nonpositive linear continuous functionals**// Mathematical journal. 2001. Vol. 1. No. 2. P.52–58.

In this paper the problem of the estimation of the highest exactness's degree on polynomials of quadrature for some nonpositive linear continuous functionals are considered. The upper estimations of the exactness's degree and the criterion of estimation reach have been found. Examples illustrating this results are given.

References — 2.

УДК: 517.984 2000 MSC: 34B05

Kanguzhin B.E. **The class of integral (all-zero) functions with integral representations generated by the linear differential equations with complex parameter**// Mathematical journal. 2001. Vol. 1. No. 2. P.59–65.

The integral representations of general solutions of homogeneous linear differential equations of any order $n \geq 1$, depending on complex parameter are found. This functions are the natural extensions of exponents when $n = 1$, so they can be used in the problems of series expansion of functions.

References — 4.

УДК: 681.5 2000 MSC: 65G40

P a s h e n k o G . N . , A y a g a n o v E . T . **On asymptotical stability of the interval-given object with delay**// Mathematical journal. 2001. Vol. 1. No. 2. P.66–72.

The procedure of analysis of asymptotic stability properties of interval-given objects with delay on the basis of the direct Liapunov's method analogue, interval scalar-optimized function, Razumikhin's approach, Bass' ratio analogue and $QR-$ algorithm is proposed.
References — 17.

УДК: 517.938 2000 MSC: 34D08

R a k h i m b e r d i e v M . I . **A Correlation of structure vector bundle with the condition of uniform exponential separation of families of its automorphisms**// Mathematical journal. 2001. Vol. 1. No. 2. P.73–75.

It is proved that the vector bundle on which the given family of automorphisms with the condition of uniform exponential separation is trivial.
References — 5.

УДК: 517.926 2000 MSC: 35L50

R o z o v N . K h . **Bufferness phenomenon in the distributed van der Pol generator**// Mathematical journal. 2001. Vol. 1. No. 2. P.76–84.

Mathematical model of the distributed auto-oscillation system representing the analog of the classical van der Pol generator (distributed van der Pol generator) is under consideration. The model is described by the linear system of telegraph equations with nonlinearity in one of the boundary conditions; the parameters of the model represent physical properties of the generator. The bufferness phenomenon appears in the model under consideration. It means that simultanious existence of any a priori defined finite number of stable time-periodic solutions of the considered boundary value problem under the appropriate choice of parameter values is discovered.
References — 20.

УДК: 517.95 2000 MSC: 35R35

S a r s e k e e v a A . S . **The investigation of the solvability of the Gibbs-Tomson linearized problem in the Hölder spaces**// Mathematical journal. 2001. Vol. 1. No. 2. P.85–92.

The unique solvability of the linearized free boundary Gibbs–Thomson problem for the second order parabolic equations in weighted Holder spaces is proved, the coercive estimates of the solutions are obtained.
References — 7.

УДК: 517.946 2000 MSC: 35A20, 35A25, 35C05

T a s m a m b e t o v Z h . N . **The own polynomials of one special system of differential equations in partial derivatives**// Mathematical journal. 2001. Vol. 1. No. 2. P.93–97.

The possibilities of finding the own polynomials for one special system of partial differential equations of the second order with polynomial coefficients in the form of polynomials of two variables with indefinite coefficients are under considerations.
References — 5.

УДК: 517.925.5:519.216 2000 MSC: 37H10, 60H10

T l e u b e r g e n o v M . I . **The method of Liapunov's functions into stochastic stability's problem of programme movement** // Mathematical journal. 2001. Vol. 1. No. 2. P.98–106.

The sufficient conditions of solvability of stability's problem after the first approach, under constantly acting disturbances and optimal stabilization by a probability of analytically given integral manifold into the class of stochastic differential Ito's equation of first order are obtained.

References — 15.

УДК: 517.51 2000 MSC: 35Q60

F a l a l e e v L . P . **On a continuous methods of Fourier coefficients summation**// Mathematical journal. 2001. Vol. 1. No. 2. P.107–110.

Estimates of orders of a decrease of the Fourier coefficients by trigonometric system of the functions $f(x) \in L_p$, $p > 1$ with continuous method of summation are established.

References — 10.

Математический журнал

Главный редактор
А.А. Женсыкбаев

Заместители гл. редактора:
М.Т. Дженалиев, М.И. Рахимбердиев

Технический редактор
И.Н. Панкратова

Адрес редколлегии и редакции:
480100, г. Алматы, ул. Пушкина, 125, к.205
Телефон: 8 (3272) 91-19-04, journal@math.kz, http://www.math.kz

Сдано в набор 18.01.2002 г.
Подписано в печать 22.01.2002 г.
Тираж 300 экз. Объем 124 стр.
Формат 62x94/16см.
Бумага офсетная № 1.
Усл. печ. лист.7,75. Уч.-изд. л.5,17

Дизайн обложки и печать
Типография "ЭВЕРО"
Адрес: г.Алматы, ул.Байтурсынова, 22, оф.9.
Тел. 8 (3272) 39-32-69, факс: 32-38-43.
E-mail: evero@nursat.kz

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в **"Математический журнал"**, должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.

2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс УДК, далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту.

3. К статье прилагаются в двух экземплярах на русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification.**

4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в LATEX tex-файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail:**journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в **http://www.math.kz/** в разделе **"Математический журнал"**).

5. Объем статей (стандартный формат в LATEX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных страниц через 2 интервала), краткие сообщения – 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).

6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.

7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

Цитированная литература

(a) **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)
(b) **Мельников А.В.//** Успехи матем. наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61– 69.
(c) **Kato J.//** Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57– 61.

8. Статья должна быть подписана всеми авторами. В конце статьи необходимо указать организацию, от которой направлена статья и e-mail (при наличии).

9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О. (полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечает требованиям журнала.