ISSN 1682—0525

М А Т Е М А Т И К А Л Ы Қ   Ж У Р Н А Л

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й Ж У Р Н А Л

M A T H E M A T I C A L   J O U R N A L

2008 том 8 № 4 (30)

Издается с 2001 года

Институт математики МО и Н РК
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 8 № 4 (30) 2008

Периодичность — 4 номера в год

Адрес редколлегии и редакции: 050010 г.Алматы ул.Жамбыла, 25, к. 705
Телефон 8-(7272)-91-13-15, journal@math.kz, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 8, № 4 (30), 2008

Математический журнал. *Алматы. 2008. Том 8. № 4 (30) . С. 5 – 9*

УДК 517.925.5:519.216

О ПОСТРОЕНИИ СИЛОВОЙ ФУНКЦИИ ПО ЗАДАННЫМ СВОЙСТВАМ ДВИЖЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Д. Т. Ажымбаев, М. И. Тлеубергенов

Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова
030000 Актобе ул. братьев Жубановых, 263
Институт математики МОН РК
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 marat207@mail.ru

Строится силовая функция по заданным свойствам движения. Предварительно методом квазиобращения строится стохастическое уравнение Ито второго порядка по заданному интегральному многообразию. Далее по стохастическому уравнению Ито строится эквивалентное уравнение лагранжевой структуры и затем, по функции Лагранжа определяется силовая функция.

1. Постановка задачи. По заданному множеству, не зависящему от скоростей,

$$\Lambda(t) : \lambda(x,t) = 0, \qquad \lambda \in R^m,\ x \in R^n,\ \lambda \in C^{22}_{xt}, \tag{1}$$

требуется построить обобщенную силовую функцию $U = U(x, \dot{x}, t)$ так, чтобы заданное множество $\Lambda(t)$ было интегральным многообразием стохастического уравнения лагранжевой структуры:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\nu}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} = \sigma'_{\nu j}(x,\dot{x},t)\dot{\xi}^j, \qquad \left(\nu = \overline{1,n},\ j = \overline{1,r}\right). \tag{2}$$

Ранее в [1] в классе обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривалась задача построения уравнений Лагранжа, Гамильтона и Биркгофа по заданным свойствам движения

$$\Lambda(t) : \lambda(x,\dot{x},t) = 0, \tag{1'}$$

которые зависят как от обобщенных координат x, так и от обобщенных скоростей $\dot{x}$. В [2] рассмотрены задачи построения стохастических уравнений лагранжевой, гамильтоновой и биркгофиановой структуры по заданным свойствам ($1'$).

Keywords: *Inverse problems, stochastic differential equations, integral manyfold*
2000 Mathematics Subject Classification: 34K29, 60H10

Схема решения поставленной задачи заключается в том, что на первом этапе по заданному множеству методом квазиобращения [3] в сочетании с методом Еругина [4] и в силу стохастического дифференцирования сложной функции [5] строится уравнение Ито

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) + \sigma(x, \dot{x}, t)\dot{\xi} \tag{3}$$

так, чтобы множество $\Lambda(t)$ (1) являлось интегральным многообразием построенного уравнения (3).

При этом предполагается, что $n-$ мерная вектор-функция $f(x, \dot{x}, t)$ и $(n \times r)$ – матрица $\sigma(x, \dot{x}, t)$ непрерывны по t и липшицевы по x, $\dot{x}$ в области

$$U_H(\Lambda) = \{z = (x^T, \dot{x}^T)^T : \rho\big(z, \Lambda(t)\big) < H, \, H > 0\},$$

что обеспечивает в области $U_H(\Lambda)$ существование и единственность до стохастической эквивалентности решения $z(t)$ уравнения (3) с начальным условием $z(t_0) = z_0$, являющегося непрерывным с вероятностью 1 строго марковским процессом [5].

Затем, по построенному уравнению Ито строятся эквивалентные ему уравнения лагранжевой структуры.

Далее, в предположении, что обобщенный лагранжиан имеет вид:

$$L = T(x, \dot{x}, t) + U(x, \dot{x}, t), \quad \text{где} \quad T = a_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j, (i, j = \overline{1, n}), \tag{4}$$

искомую силовую функцию определим в виде:

$$U(x, \dot{x}, t) = L(x, \dot{x}, t) - a_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j. \tag{5}$$

2. Построение стохастического уравнения лагранжевой структуры (2) по заданным интегралам движения (1). Предварительно по правилу стохастического дифференцирования Ито составим уравнение возмущенного движения:

$$\ddot{\lambda} = \frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial x}\dot{x} + \left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial t} + \dot{x}^T\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial x}\right)\dot{x} + \frac{\partial\lambda}{\partial x}(f + \sigma\dot{\xi}). \tag{6}$$

Введем произвольные функции Еругина [4]: m-мерную вектор-функцию $A(\lambda, \dot{\lambda}, x, \dot{x}, t)$ и $(m \times r)-$ матрицу $B(\lambda, \dot{\lambda}, x, \dot{x}, t)$ со свойством $A(0, 0, x, \dot{x}, t) \equiv 0$, $B(0, 0, x, \dot{x}, t) \equiv 0$ и такие, что имеет место равенство:

$$\ddot{\lambda} = A(\lambda, \dot{\lambda}, x, \dot{x}, t) + B(\lambda, \dot{\lambda}, x, \dot{x}, t)\dot{\xi}. \tag{7}$$

Отсюда, сравнивая уравнения (6) и (7), приходим к соотношениям

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial x}f = A - \widetilde{A}, \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial x}\sigma = B, \end{cases} \tag{8}$$

где $\widetilde{A} = \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial x}\dot{x} + \left(\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial t} + \dot{x}^T\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial x}\right)\dot{x} + \dfrac{\partial\lambda}{\partial x}f$, из которых методом квазиобращения [3] определим вектор-функцию f и матрицу σ.

Суть метода квазиобращения заключается в следующем утверждении.

Лемма 1[3, с. 12-13]. *Совокупность всех решений линейной системы*

$$Hv = g, \; H = (h_{\mu k}), \; v = (v_k), \; g = (g_\mu),$$

$$\mu = \overline{1,m};\ k = \overline{1,n},\ m \le n,$$

где матрица H имеет ранг равный m, определяется выражением:

$$v = sv^{\tau} + v^{\nu},$$

здесь s – произвольная скалярная величина,

$$v^{\tau} = [HC] = [h_1 \dots h_m c_{m+1} \dots c_{n-1}] = \begin{vmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & \dots & h_{mn} \\ c_{m+1,1} & \dots & c_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

есть векторное произведение векторов $h_\mu = (h_{\mu k})$ и произвольных векторов $c_\rho = (c_{\rho k})$, $\rho = \overline{m+1, n-1}$; e_k — единичные орты пространства R^n, $v^{\tau} = (v_k^{\tau})$, где

$$v_k^{\tau} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ h_{11} & \dots & h_{1k} & \dots & h_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & \dots & h_{mk} & \dots & h_{mn} \\ c_{m+1,1} & \dots & c_{m+1,n} & \dots & c_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,k} & \dots & c_{n-1,n} \end{vmatrix},\ v^{\nu} = H^{+} g,$$

$H^{+} = H^T (HH^T)^{-1}$, H^T *– матрица транспонированная к H.*

В силу леммы 1 из системы (8) следует:

$$\begin{cases} f = \alpha_1 \left[\dfrac{\partial \lambda}{\partial x} C\right] + \left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^{+} (A - \widetilde{A}), \\ \sigma_i = \alpha_{2i} \left[\dfrac{\partial \lambda}{\partial x} C\right] + \left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^{+} B_i, \end{cases} \tag{9}$$

где $\sigma_i = (\sigma_{1i}, \sigma_{2i}, \dots, \sigma_{ni})^T$ – i-ый столбец матрицы $\sigma = (\sigma_{\nu j})$, ($\nu = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,r}$); $B_i = (B_{1i}, B_{2i}, \dots, B_{ri})^T$ – i-ый столбец матрицы $B = (B_{\mu l})$, ($\mu = \overline{1,m}$, $l = \overline{1,r}$).

Тогда, из (9) следует, что множество дифференциальных уравнений Ито второго порядка, обладающее заданным интегральным многообразием (1), имеет вид:

$$\ddot{x} = \alpha_1 \left[\frac{\partial \lambda}{\partial x} C\right] + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^{+} (A - \widetilde{A}) + \left(\alpha_{21} \left[\frac{\partial \lambda}{\partial x} C\right] + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^{+} B_1, \dots, \alpha_{2r} \left[\frac{\partial \lambda}{\partial x} C\right] + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^{+} B_r\right) \dot{\xi}. \tag{3'}$$

Далее, по правилу стохастического дифференцирования Ито раскроем выражение:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\nu}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial x_k} \dot{x}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial \dot{x}_k} \ddot{x}_k + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k} \sigma_{ij} \sigma_{kj}. \tag{10}$$

Следовательно, уравнение (2) с учетом (10) примет следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\nu}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} - \sigma'_{\nu j}(x, \dot{x}, t) \dot{\xi}^j \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial x_k} \dot{x}_k +$$

$$+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial \dot{x}_k}\ddot{x}_k + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k}\sigma_{ij}\sigma_{kj} - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} - \sigma'_{\nu j}(x,\dot{x},t)\dot{\xi}^j. \qquad (11)$$

Или, учитывая (11) и уравнение (3), имеем:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial x_k}\dot{x}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial \dot{x}_k}\ddot{x}_k + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k}\sigma_{ij}\sigma_{kj} - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} - \sigma'_{\nu j}(x,\dot{x},t)\dot{\xi}^j \equiv$$

$$\equiv h_\nu^k\left(\ddot{x}_k - f_k(x,\dot{x},t) + \sigma_{kj}(x,\dot{x},t)\dot{\xi}^j\right). \qquad (12)$$

Из соотношения (12) следуют равенства:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial x_k} = h_\nu^k; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial x_k}\dot{x}_k + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k}\sigma_{ij}\sigma_{kj} - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} = h_\nu^k f_k(x,\dot{x},t);$$

$$\sigma'_{\nu j}(x,\dot{x},t)\dot{\xi}^j = h_\nu^k \sigma_{kj}(x,\dot{x},t). \qquad (13)$$

Тем самым доказана

Теорема 1. *Для построения множества стохастических уравнений лагранжевой структуры (2) по заданному множеству (1) так, чтобы множество (1) было интегральным многообразием построенных уравнений необходимо и достаточно выполнение условий (9),(13).*

Для функции Лагранжа вида (4) и соответственно силовой функции вида (5) условия (13) эквивалентны следующей системе дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{x}_\nu \partial x_k} = h_\nu^k - a_{\nu k}; \quad \frac{\partial U}{\partial x_\nu} = \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{x}_\nu \partial t} + \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{x}_\nu \partial x_k}\dot{x}_k + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 U}{\partial \dot{x}_\nu \partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k}\sigma_{ij}\sigma_{kj} - h_\nu^k f_k(x,\dot{x},t);$$

$$\sigma'_{\nu j}(x,\dot{x},t)\dot{\xi}^j = h_\nu^k \sigma_{kj}(x,\dot{x},t). \qquad (14)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Для построения множества стохастических уравнений лагранжевой структуры (2) по заданному множеству (1) с обобщенным лагранжианом вида (4) так, чтобы множество (1) было интегральным многообразием построенных уравнений необходимо и достаточно, чтобы обобщенная силовая функция $U = U(x,\dot{x},t)$ удовлетворяла условиям (14), а вектор-функция f и матрица σ – условию (9).*

В частности, если предположить, что в представлении обобщенного лагранжиана $L(x,\dot{x},t) = T + U$ обобщенная силовая функция $U = U(x,t)$ не зависит от обобщенных скоростей $\dot{x}$, а $T = T(x,\dot{x},t)$ зависит как от обобщенных скоростей $\dot{x}$, так и обобщенных координат x, то условия (14) примут вид (15):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_\nu \partial x_k} = h_\nu^k - a_{\nu k}; \quad \frac{\partial U}{\partial x_\nu} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_\nu \partial t} + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_\nu \partial x_k}\dot{x}_k + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 T}{\partial \dot{x}_\nu \partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k}\sigma_{ij}\sigma_{kj} - h_\nu^k f_k(x,\dot{x},t);$$

$$\sigma'_{\nu j}(x,\dot{x},t)\dot{\xi}^j = h_\nu^k \sigma_{kj}(x,\dot{x},t). \qquad (15)$$

И, следовательно, справедлива

Теорема 3. *Для построения множества стохастических уравнений лагранжевой структуры (2) по заданному множеству (1) с обобщенным лагранжианом вида $L(x,\dot{x},t) = T(x,\dot{x},t) + U(x,t)$ так, чтобы множество (1) было интегральным многообразием построенных уравнений необходимо и достаточно, чтобы обобщенная силовая функция $U = U(x,t)$ удовлетворяла условиям (15), а вектор-функция f и матрица σ – условию (9).*

Цитированная литература

1. **Туладхар Б.М.** Построение уравнений в форме Лагранжа, Гамильтона и Бирккгофа по заданным свойствам движения. Автореферат канд. дисс. М., УДН им.П. Лумумбы, 1983. 11с.

2. **Тлеубергенов М. И., Ажымбаев Д.Т.** //Известия НАН РК. Серия физ.-мат. 2007. №5. С. 15 – 20.

3. **Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г.** Уравнения программных движений. М., 1986.

4. **Еругин Н.П.** //ПММ. 1952. Т.10, В.16. С. 659 – 670.

5. **Пугачев В.С., Синицын И.Н.** Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М., 1990.

Поступила в редакцию 18.09.2008г.

Математический журнал. *Алматы. 2008. Том 8. № 4 (30) . С. 10 – 19*

УДК 517.518

ОЦЕНКА ПОРЯДКА ПРИБЛИЖЕНИЯ H^{Ω}- класса

Г. Акишев

Карагандинский государственный университет им.Е.А. Букетова
г. Караганда ул. Университетская, 28 akishev@ksu.kz

В статье установлены оценки порядка приближения H^{Ω}- класса тригонометрическими полиномами в пространстве Лоренца с анизотропной нормой.

Пусть $\overline{x} = (x_1, ..., x_m) \in I^m = [0, 2\pi)^m$ и числа $\theta_j, q_j \in [1, +\infty)$, $j = 1, ..., m$. Через $L^*_{\bar{q},\bar{\theta}}(I^m)$ обозначим пространства всех измеримых по Лебегу функций $f(\overline{x})$, имеющих 2π-период по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}} = \left[\int_0^{2\pi} t_m^{\frac{\theta_m}{q_m}-1}\left[\cdots\left[\int_0^{2\pi}\left(f^{*_1,\dots,*_m}(t_1, ..., t_m)\right)^{\theta_1} t_1^{\frac{\theta_1}{q_1}-1} dt_1\right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\cdots\right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} dt_m\right]^{\frac{1}{\theta_m}}$$

конечна, где $f^{*_1,\dots,*_m}(t_1, ..., t_m)$ – невозрастающая перестановка функции $|f(\overline{x})|$ по каждой переменной x_j при фиксированных остальных переменных (сначала по x_1, затем по x_2 и.т.д. см. [1]).

Е.Д. Нурсултановым [2] определено более общее пространство Лоренца, когда перестановки и интегралы берутся в произвольном порядке. Им получены интерполяционные теоремы для этих пространств.

$\overset{\circ}{L}{}^*_{\bar{q},\bar{\theta}}(I^m)$ – множество всех функций $f \in L^*_{\bar{q},\bar{\theta}}(I^m)$ таких, что

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\overline{x})\, dx_j = 0, \quad \forall j = 1, ..., m.$$

$a_{\overline{n}}(f)$ – коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(I^m)$ по кратной тригонометрической системе. Положим

$$\delta_{\overline{s}}(f, \overline{x}) = \sum_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})} a_{\overline{n}}(f)\, e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle},$$

Keywords: *approximation, the space Lorentz*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A10

где $\langle \bar{y}, \bar{x}\rangle = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j x_j$, $\rho(\bar{s}) = \left\{\overline{k} = (k_1, ..., k_m) \in Z^m : \quad 2^{s_j - 1} \leqslant |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, ..., m\right\}$.

Числовая последовательность $\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n} \in Z^m,} \in l_{\overline{p}}$, если

$$\left\|\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in Z^m}\right\|_{l_{\overline{p}}} = \left\{ \sum_{n_m=-\infty}^{\infty} \left[... \left[\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} |a_{\overline{n}}|^{p_1} \right]^{\frac{p_2}{p_1}} ... \right]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}} \right\}^{\frac{1}{p_m}} < +\infty,$$

где $\overline{p} = (p_1, ..., p_m)$, $1 \leqslant p_j < +\infty$, $j = 1, 2, ..., m$.

Функция $\Omega(\overline{t}) = \Omega(t_1, ..., t_m)$ называется функцией типа смешанного модуля непрерывности порядка l, если удовлетворяет следующим условиям:

1)$\Omega(\overline{t}) > 0$, если $t_j > 0, j = 1, ..., m$, и $\quad \Omega(\overline{t}) = 0$, если $t_j \geqslant 0, j = 1, ..., m, \prod_{j=1}^{m} t_j = 0$;

2)$\Omega(\overline{t})$ возрастает по каждой переменной;

3)$\Omega(k_1 t_1, ..., k_m t_m) \leqslant \left(\prod_{j=1}^{m} k_j\right)^l \Omega(t_1, ..., t_m), k_j \in N, j = 1, ..., m$;

4)$\Omega(\overline{t})$ непрерывна при $t_j \geqslant 0, j = 1, ..., m$.

Всюду далее будем предполагать, что Ω удовлетворяет известным условиям Стечкина.

Рассмотрим класс

$$H^{\Omega}_{\overline{p},\overline{\theta}} = \left\{ f \in \overset{\circ}{L}{}^{*}_{\overline{p},\overline{\theta}}(I^m) : \|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{*}_{\overline{p},\overline{\theta}} \leqslant \Omega(2^{-s_1}, ..., 2^{-s_m}), \overline{s} \in Z^m_+ \right\},$$

где $\overline{p} = (p_1, ..., p_m)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)$, $1 \leqslant p_j, \theta_j < +\infty$, $j = 1, ..., m$.

Рассмотрим множества:

$$\Gamma(\Omega, N) = \left\{ \bar{s} = (s_1, ..., s_m) \in Z^m_+ : \Omega(2^{-s_1}, ..., 2^{-s_m}) \geqslant \frac{1}{N} \right\},$$

$$\Gamma^{\perp}(N) = \Gamma^{\perp}(\Omega, N) = Z^m_+ \setminus \Gamma(\Omega, N) \quad \kappa(N) = \Gamma^{\perp}(N) \setminus \Gamma^{\perp}(2^l N)',$$

$$Q_N = \cup_{\langle \bar{s}\in\Gamma(\Omega,N)} \rho(\bar{s}), \quad T(Q_N) = \{t_N(\bar{x}) = \sum_{\bar{k}\in Q_{\Omega,N}} b_{\bar{k}} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x}\rangle}\}.$$

$E_{O(N)}(f)_{\overline{p},\overline{\theta}}$ – наилучшее приближение функции $f \in L^{*}_{\overline{p},\overline{\theta}}(I^m)$ полиномами из множества $T(Q_N)$, $S_{Q(N)}(f, \bar{x}) = \sum_{\bar{k}\in Q_N} a_{\bar{k}}(f) \cdot e^{i\langle \bar{k}, \bar{x}\rangle}$ – частичная сумма ряда Фурье функции f.

Впервые способ приближения функций многих переменных тригонометрическими полиномами с гармониками из гиперболических крестов предложил К.И. Бабенко [3].

Впоследствии приближение различных классов гладких функций этим методом исследовали С.А. Теляковский [4], Б.С. Митягин [5], Я.С. Бугров [6], Н.С. Никольская [7], Э.М. Галеев [8], В.Н. Темляков [9],[10], Динь Зунг [11], Э.С. Белинский [12], Б.С. Кашин, В.Н.Темляков [13], Б. Базарханов [14], А.С. Романюк [15],[16], Н.Н. Пустовойтов [17],[18], А.И. Степанец.

Обзор по этой теме дан В.М. Тихомировым [19] .

Известно, что справедливы включения $L^{*}_{\overline{q},\overline{\theta}} \subset L^{*}_{\overline{p},\overline{\theta}}$ в случае $p_j < q_j, j = 1, ..., m$, и $L^{*}_{\overline{p},\overline{\theta}} \subset L^{*}_{\overline{p},\overline{q}}$, если $\theta_j < q_j, j = 1, ..., m$.

Точные оценки порядка приближения классов Никольского – Бесова в пространствах Лоренца с анизотропной метрикой в случае $p_j < q_j,\ j = 1, ..., m$, установлены в [22]-[24].

В настоящей заметке получена точная оценка порядка величины

$$E_n^{\overline{\gamma}}\left(H^{\Omega}_{\overline{p},\overline{q}}\right)_{\overline{p},\overline{\theta}} = \sup_{f\in H^{\Omega}_{\overline{p},\overline{q}}} E_n^{\overline{\gamma}}(f)_{\overline{p},\overline{\theta}}$$

в случае $m = 2,\ \theta_j < q_j,\ j = 1, 2$.

Отметим, что для классов С.М. Никольского нижняя оценка получена в [22].

Доказаны следующие утверждения .

Теорема 1. *Пусть* $\bar{p} = (p_1, p_2)$, $\bar{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$, $\bar{q} = (q_1, q_2)$, $1 \leqslant p_j < +\infty$, $1 \leqslant \theta_j < q_j < +\infty$, $j = 1, 2$. *Если* $f \in L^*_{\bar{p},\bar{q}}(I^2)$ *и*

$$\sum_{s_2=1}^{\infty} s_2^{1-\frac{\theta_2}{q_2}} \Big[\sum_{s_1=1}^{\infty} s_1^{1-\frac{\theta_1}{q_1}} \left(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{q}} \right)^{\theta_1} \Big]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} < +\infty,$$

то $f \in L^*_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^2)$ *и имеет место неравенство*:

$$\|f\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}} \leqslant C(p,q,\theta) \left\{ \sum_{s_2=1}^{\infty} s_2^{1-\frac{\theta_2}{q_2}} \Big[\sum_{s_1=1}^{\infty} s_1^{1-\frac{\theta_1}{q_1}} \left(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{q}} \right)^{\theta_1} \Big]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}}.$$

Формулировка теоремы 1 приведена в [23], а доказательство подробно изложено автором в [24].

В дальнейшем будем пользоваться обозначением: $\chi_{\varkappa(n)}(\bar{s})$ – характеристическая функция множества $\varkappa(n) = \{\bar{s} = (s_1, ..., s_m) \in \mathbb{Z}^m_+ : \quad \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle = n\}$.

Напомним, что функция $g(t), t \in (0, \infty)$, удовлетворяет (S_l) условию Стечкина, если при некотором $\beta \in (0, l)$ функция $t^{-\beta} g(t)$ почти убывает на $(0, \infty)$;

функция $g(t), t \in (0, \infty)$, удовлетворяет (S) условию Стечкина, если при некотором $\alpha \in (0, 1)$ функция $t^{-\alpha} g(t)$ почти возрастает на $(0, \infty)$;

функция $G(\bar{t}), \bar{t} \in (0, \infty)^m$, удовлетворяет (S_l) (или (S)) условию, если она удовлетворяет этому условию по каждой переменной.

Лемма 1. *Пусть* $1 \leqslant \theta_j < +\infty$, $j = 1, 2$, *и* $\Omega(\bar{t})$ *– смешанный модуль непрерывности порядка* l, *удовлетворяющий* (S)*-условию. Тогда имеет место порядковое равенство*:

$$\left\| \left\{ \Omega(2^{-s_1}, 2^{-s_2}) \prod_{j=1}^{2} s_j^{\beta_j} \right\}_{\bar{s} \in \Gamma^{\perp}(\Omega, N)} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \asymp$$

$$\asymp \left\| \left\{ \Omega(2^{-s_1}, 2^{-s_2}) \prod_{j=1}^{2} s_j^{\beta_j} \right\}_{\bar{s} \in \kappa(N)} \right\|_{l_{\bar{\theta}}}.$$

Доказательство. Пусть

$$s_2^N = \min \left\{ s_1 \in N : \Omega(1, 2^{-s_2}) < \frac{1}{N} \right\}.$$

При каждом фиксированном $s_2 \in N$ положим

$$s_1^0(s_2) = \min \left\{ s_1 \in N : \Omega(2^{-s_1}, 2^{-s_2}) < \frac{1}{N} \right\},$$

$$s_1^{'}(s_2) = \min \left\{ s_1 \in N : \Omega(2^{-s_1}, 2^{-s_2}) \geqslant \frac{1}{2^l N} \right\}.$$

Положим $B_{\bar{s}} = \Omega(2^{-s_1}, 2^{-s_2}) \prod_{j=1}^{2} s_j^{\beta_j}$, если $\bar{s} \in \Gamma^{\perp}(\Omega, N)$ и $B_{\bar{s}} = 0$, если $\bar{s} \notin \Gamma^{\perp}(\Omega, N)$.

Тогда

$$J_N = \left\| \left\{ \Omega(2^{-s_1}, 2^{-s_2}) \prod_{j=1}^{2} s_j^{\beta_j} \right\}_{\bar{s} \in \Gamma^{\perp}(\Omega, N)} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \leqslant$$

$$\leqslant C(\theta) \left\{ [\sum_{s_2=1}^{s_2^N} [\sum_{s_1 : \bar{s} \in \Gamma^{\perp}(\Omega,N)} B_{\bar{s}}^{\theta_1}]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}]^{\frac{1}{\theta_2}} + [\sum_{s_2=1}^{\infty} [\sum_{s_1 : \bar{s} \in \Gamma^{\perp}(\Omega,N)} B_{\bar{s}}^{\theta_1}]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}]^{\frac{1}{\theta_2}} \right\}. \tag{1}$$

Далее, по определению $s_1^{'}(s_2), s_1^0(s_2)$:

$$\sum_{s_1 : \bar{s} \in \Gamma^{\perp}(\Omega,N)} B_{\bar{s}}^{\theta_1} = \sum_{s_1 = s_1^0(s_2)}^{s_1^{'}(s_2)} B_{\bar{s}}^{\theta_1} + \sum_{s_1 = 1 + s_1^{'}(s_2)}^{\infty} B_{\bar{s}}^{\theta_1}. \tag{2}$$

По (S)-свойству функции типа модуля непрерывности:

$$\sum_{s_1 = 1 + s_1^{'}(s_2)}^{\infty} B_{\bar{s}}^{\theta_1} \leqslant C(\theta) \sum_{s_1 = 1 + s_1^{'}(s_2)}^{\infty} 2^{-s_1 \alpha \theta_1} s_1^{\beta_1 \theta_1} \cdot (2^{s_1^{'}(s_2) \alpha} \Omega(2^{-s_1^{'}(s_2)}, 2^{-s_2})^{\theta_1} \cdot s_2^{\beta_2 \theta_1} \leqslant$$

$$\leqslant C(q, \theta) \cdot \Omega(2^{-s_1^{'}(s_2)}, 2^{-s_2}) s_2^{\beta_2 \theta_1} \cdot (s_1^{'}(s_2))^{\beta_1 \theta_1}.$$

Поэтому из (2) получим:

$$\sum_{s_1 : \bar{s} \in \Gamma^{\perp}(\Omega,N)} B_{\bar{s}}^{\theta_1} \leqslant \sum_{s_1 = s_1^0(s_2)}^{s_1^{'}(s_2)} B_{\bar{s}}^{\theta_1} + C(q, \theta) \cdot \Omega^{\theta_1}(2^{-s_1^{'}(s_2)}, 2^{-s_2}) s_2^{\beta_2 \theta_1} \cdot (s_1^{'}(s_2))^{\beta_1 \theta_1} \leqslant$$

$$\leqslant C(q, \theta, \alpha) \sum_{s_1 = s_1^0(s_2)}^{s_1^{'}(s_2)} \Omega(2^{-s_1}, 2^{-s_2})^{\theta_1} \cdot \prod_{j=1}^{2} 2^{s_j \beta_j \theta_1},$$

при каждом фиксированном $s_2 = 1, ..., s_2^N$. Следовательно,

$$[\sum_{s_2=1}^{s_2^N} [\sum_{s_1 : \bar{s} \in \Gamma^{\perp}(\Omega,N)} B_{\bar{s}}^{\theta_1}]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}]^{\frac{1}{\theta_2}} \leqslant C(q, \theta, \alpha) \left\| \left\{ \Omega(2^{-s_1}, 2^{-s_2}) \prod_{j=1}^{2} s_j^{\beta_j} \right\}_{\bar{s} \in \kappa(N)} \right\|_{l_{\bar{\theta}}}. \tag{3}$$

Дважды применяя (S)-условие, имеем:

$$\sum_{s_2=1}^{\infty} [\sum_{s_1 : \bar{s} \in \Gamma^{\perp}(\Omega,N)} B_{\bar{s}}^{\theta_1}]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \leqslant C(\theta) \sum_{s_2=1}^{\infty} \Omega(1, 2^{-s_2})^{\theta_2} \cdot s_2^{\beta_2 \theta_2}$$

$$[\sum_{s_1 : \bar{s} \in \Gamma^{\perp}(\Omega,N)} 2^{-s_1 \theta_1 \alpha} \cdot s_1^{\beta_1 \theta_1}]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \leqslant C(\theta, \alpha) \sum_{s_2=1}^{\infty} \Omega(1, 2^{-s_2})^{\theta_2} \cdot s_2^{\beta_2 \theta_2} \leqslant$$

$$\leqslant C(\theta, \alpha) (2^{s_2^N \alpha} \Omega(1, 2^{-s_2}))^{\theta_2} \sum_{s_2=1}^{\infty} 2^{-s_2 \theta_2 \alpha} \cdot s_2^{\beta_2 \theta_2} \leqslant$$

$$\leqslant C(q, \theta, \alpha) (\Omega(1, 2^{-s_2}))^{\theta_2} \cdot (s_2^N)^{\beta_2 \theta_2}.$$

Таким образом,

$$[\sum_{s_2=1}^{\infty}[\sum_{s_1:\bar{s}\in\Gamma^{\perp}(\Omega,N)} B_{\bar{s}}^{\theta_1}]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}]^{\frac{1}{\theta_2}} \leqslant C(q,\theta,\alpha)\Omega(1,2^{-s_2})\cdot(s_2^N)^{\beta_2}\leqslant$$

$$\leqslant C(q,\theta,\alpha)\left\|\left\{\Omega(2^{-s_1},2^{-s_2})\prod_{j=1}^{2}s_j^{\beta_j}\right\}_{\bar{s}\in\kappa(N)}\right\|_{l_{\bar{\theta}}}. \tag{4}$$

В силу неравенств (3) и (4) из (1) получим:

$$J_N\leqslant C(q,\theta,\alpha)\left\|\left\{\Omega(2^{-s_1},2^{-s_2})\prod_{j=1}^{2}s_j^{\beta_j}\right\}_{\bar{s}\in\kappa(N)}\right\|_{l_{\bar{\theta}}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\Omega(\bar{t})$ смешанный модуль непрерывности порядка l, удовлетворяющий (S)-условию при $\bar{\alpha}=(\alpha_1,...,\alpha_m)$, $\alpha_j>\beta_j>0$, $j=1,...,m$. Тогда при $1<\theta_j<+\infty$, $j=1,...,m$, имеет место неравенство*:

$$\left\|\left\{\Omega(2^{-s_1},...,2^{-s_m})\prod_{j=1}^{m}2^{s_j\beta_j}\right\}_{\bar{s}\in\Gamma^{\perp}(\Omega,N)}\right\|_{l_{\bar{\theta}}}\asymp$$

$$\asymp\left\|\left\{\Omega(2^{-s_1},...,2^{-s_m})\prod_{j=1}^{m}2^{s_j\beta_j}\right\}_{\bar{s}\in\kappa(N)}\right\|_{l_{\bar{\theta}}}.$$

Доказательство. Пусть $m=2$. Положим

$$s_2^N=\min\left\{s_1\in N:\Omega(1,2^{-s_2})<\frac{1}{N}\right\}.$$

При каждом фиксированном $s_2\in N$ положим

$$s_1^0(s_2)=\min\left\{s_1\in N:\Omega(2^{-s_1},2^{-s_2})<\frac{1}{N}\right\},$$

$$s_1^{'}(s_2)=\min\left\{s_1\in N:\Omega(2^{-s_1},2^{-s_2})\geqslant\frac{1}{2^lN}\right\}.$$

Положим $B_{\bar{s}}=\Omega(2^{-s_1},2^{-s_2})\prod_{j=1}^{2}s_j^{\beta_j}$, если $\bar{s}\in\Gamma^{\perp}(\Omega,N)$ и $B_{\bar{s}}=0$ если $\bar{s}\notin\Gamma^{\perp}(\Omega,N)$.

Введем обозначение $B_{\bar{s}}=\Omega(2^{-s_1},2^{-s_2})\prod_{j=1}^{2}2^{s_j\beta_j}$, если $\bar{s}\in\Gamma^{\perp}(\Omega,N)$ и $B_{\bar{s}}=0$, если $\bar{s}\notin\Gamma^{\perp}(\Omega,N)$.

Тогда

$$J_N=\left\|\left\{\Omega(2^{-s_1},2^{-s_2})\prod_{j=1}^{2}2^{s_j\beta_j}\right\}_{\bar{s}\in\Gamma^{\perp}(\Omega,N)}\right\|_{l_{\bar{\theta}}}\leqslant$$

$$\leqslant C(\theta)\left\{[\sum_{s_2=1}^{s_2^N}[\sum_{s_1:\bar{s}\in\Gamma^{\perp}(\Omega,N)}B_{\bar{s}}^{\theta_1}]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}]^{\frac{1}{\theta_2}}+[\sum_{s_2=1}^{\infty}[\sum_{s_1:\bar{s}\in\Gamma^{\perp}(\Omega,N)}B_{\bar{s}}^{\theta_1}]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}]^{\frac{1}{\theta_2}}\right\}. \tag{5}$$

Далее, по определению $s_1^{'}(s_2), s_1^0(s_2)$:

$$\sum_{s_1:\bar{s}\in\Gamma^{\perp}(\Omega,N)}B_{\bar{s}}^{\theta_1}=\sum_{s_1=s_1^0(s_2)}^{s_1^{'}(s_2)}B_{\bar{s}}^{\theta_1}+\sum_{s_1=1+s_1^{'}(s_2)}^{\infty}B_{\bar{s}}^{\theta_1}. \tag{6}$$

В силу (S)-свойства функции типа модуля непрерывности:

$$\sum_{s_1=1+s_1^{'}(s_2)}^{\infty}B_{\bar{s}}^{\theta_1}\leqslant C(\theta)\sum_{s_1=1+s_1^{'}(s_2)}^{\infty}2^{s_1(\beta_1-\alpha_1)\theta_1}\cdot(2^{s_1^{'}(s_2)\alpha_1}\Omega(2^{-s_1^{'}(s_2)},2^{-s_2}))^{\theta_1}\cdot 2^{s_2\beta_2\theta_1}\leqslant$$

$$\leqslant C(q,\theta)\cdot\Omega^{\theta_1}(2^{-s_1^{'}(s_2)},2^{-s_2})2^{s_2\beta_2\theta_1}\cdot 2^{s_1^{'}(s_2)\beta_1\theta_1}.$$

Поэтому из (6) получим:

$$\sum_{s_1:\bar{s}\in\Gamma^{\perp}(\Omega,N)}B_{\bar{s}}^{\theta_1}\leqslant C(q,\theta,\alpha)\sum_{s_1=s_1^0(s_2)}^{s_1^{'}(s_2)}\Omega(2^{-s_1},2^{-s_2})^{\theta_1}\cdot\prod_{j=1}^{2}2^{s_j\beta_j\theta_1}$$

при каждом фиксированном $s_2=1,...,s_2^N$. Следовательно,

$$[\sum_{s_2=1}^{s_2^N}[\sum_{s_1:\bar{s}\in\Gamma^{\perp}(\Omega,N)}B_{\bar{s}}^{\theta_1}]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}]^{\frac{1}{\theta_2}}\leqslant C(q,\theta,\alpha)\left\|\left\{\Omega(2^{-s_1},2^{-s_2})\prod_{j=1}^{2}2^{s_j\beta_j}\right\}_{\bar{s}\in\kappa(N)}\right\|_{l_{\bar{\theta}}}. \tag{7}$$

Далее, дважды применяя (S)-условие и учитывая, что $\alpha_j>\beta_j,\ j=1,2$, имеем:

$$\sum_{s_2=1}^{\infty}[\sum_{s_1:\bar{s}\in\Gamma^{\perp}(\Omega,N)}B_{\bar{s}}^{\theta_1}]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\leqslant C(\theta)\sum_{s_2=1}^{\infty}\Omega(1,2^{-s_2})^{\theta_2}\cdot 2^{s_2\beta_2\theta_2}$$

$$[\sum_{s_1:\bar{s}\in\Gamma^{\perp}(\Omega,N)}2^{-s_1\theta_1(\alpha_1-\beta_1)}.]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\leqslant C(\theta,\alpha)\sum_{s_2=1}^{\infty}\Omega(1,2^{-s_2})^{\theta_2}\cdot 2^{s_2\beta_2\theta_2}\leqslant$$

$$\leqslant C(\theta,\alpha)(2^{s_2^N\alpha}\Omega(1,2^{-s_2}))^{\theta_2}\sum_{s_2=1}^{\infty}2^{-s_2\theta_2(\alpha_2-\beta_2)}\leqslant$$

$$\leqslant C(q,\theta,\alpha)(\Omega(1,2^{-s_2}))^{\theta_2}\cdot 2^{s_2^N\beta_2\theta_2}.$$

Таким образом,

$$[\sum_{s_2=1}^{\infty}[\sum_{s_1:\bar{s}\in\Gamma^{\perp}(\Omega,N)}B_{\bar{s}}^{\theta_1}]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}]^{\frac{1}{\theta_2}}\leqslant C(q,\theta,\alpha)\Omega(1,2^{-s_2})\cdot(s_2^N)^{\beta_2}\leqslant$$

$$\leqslant C(q,\theta,\alpha)\left\|\left\{\Omega(2^{-s_1},2^{-s_2})\prod_{j=1}^{2}s_j^{\beta_j}\right\}_{\bar{s}\in\kappa(N)}\right\|_{l_{\bar{\theta}}}. \tag{8}$$

В силу неравенств (7) и (8) из (6) получим:

$$J_N \leqslant C(q,\theta,\alpha)\left\|\left\{\Omega(2^{-s_1},2^{-s_2})\prod_{j=1}^{2}s_j^{\beta_j}\right\}_{\overline{s}\in\kappa(N)}\right\|_{l_{\overline{\theta}}}.$$

Этим лемма доказана для $m=2$.

Теперь докажем для $m>2$. Для этого предположим, что утверждение леммы 2 верно для $m-1$, т.е.

$$\left\|\left\{\Omega(2^{-s_1},...,2^{-s_m})\prod_{j=1}^{m-1}2^{s_j\beta_j}\right\}_{\overline{s}^m\in\Gamma_m^{\perp}(\Omega,N)}\right\|_{l_{\overline{\theta}}^m}\leqslant$$

$$\leqslant C(\theta,\alpha)\left\|\left\{\Omega(2^{-s_1},...,2^{-s_m})\prod_{j=1}^{m-1}2^{s_j\beta_j}\right\}_{\overline{s}^m\in\kappa_m(N)}\right\|_{l_{\overline{\theta}}^m}, \tag{9}$$

где $\overline{s}^m=(s_1,...,s_{m-1}), \bar{\theta}^m=(\theta_1,...\theta_{m-1})$, $\Gamma_m^{\perp}(\Omega,N)=\overline{s}^m:\overline{s}\in\Gamma_m^{\perp}(\Omega,N)$, $\kappa_m(N)=\overline{s}^m:\overline{s}\in\kappa(N)$. Тогда в силу (S)-условия и (9) имеем:

$$\left\|\left\{\Omega(2^{-s_1},...,2^{-s_m})\prod_{j=1}^{m}2^{s_j\beta_j}\right\}_{\overline{s}\in\Gamma^{\perp}(\Omega,N)}\right\|_{l_{\overline{\theta}}}\leqslant$$

$$\leqslant C(\theta,\alpha)[\sum_{s_m=1}^{s_m^N}2^{s_m\beta_m\theta_m}\left\|\left\{\Omega(2^{-s_1},...,2^{-s_m})\prod_{j=1}^{m-1}2^{s_j\beta_j}\right\}_{\overline{s}^m\in\Gamma_m^{\perp}(\Omega,N)}\right\|_{l_{\overline{\theta}}^m}^{\theta_m}]^{\frac{1}{\theta_m}}+$$

$$+[\sum_{s_2=1}^{\infty}\left\|\left\{\Omega(2^{-s_1},...,2^{-s_m})\prod_{j=1}^{m-1}2^{s_j\beta_j}\right\}_{\overline{s}^m\in\Gamma_m^{\perp}(\Omega,N)}\right\|_{l_{\overline{\theta}}^m}^{\theta_m}]^{\frac{1}{\theta_m}}\leqslant$$

$$\leqslant C(\theta,\alpha)\left\{\Big[\sum_{s_m=1}^{s_m^N}2^{s_m\beta_m\theta_m}\left\|\left\{\Omega(2^{-s_1},...,2^{-s_m})\prod_{j=1}^{m-1}2^{s_j\beta_j}\right\}_{\overline{s}^m\in\kappa_m(N)}\right\|_{l_{\overline{\theta}}^m}^{\theta_m}\Big]^{\frac{1}{\theta_m}}+\right.$$

$$\left.+\Big[\sum_{s_2=1}^{\infty}\Omega^{\theta_m}(1,...,1,2^{-s_m})2^{s_m\beta_m\theta_m}\Big]^{\frac{1}{\theta_m}}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant C(\theta,\alpha)\left\|\left\{\Omega(2^{-s_1},...,2^{-s_m})\prod_{j=1}^{m}2^{s_j\beta_j}\right\}_{\overline{s}\in\kappa(N)}\right\|_{l_{\overline{\theta}}}.$$

Лемма 2 доказана.

Отметим, что лемма 2 в случае $\theta_1=...=\theta_m$ доказана в [18].

Теорема 2. *Пусть* $\bar{p} = (p_1, p_2), \bar{\theta} = (\theta_1, \theta_2), 1 \leqslant p_j < +\infty, 1 \leqslant \tau_j < \theta_j < +\infty,\ j = 1, 2,$ *и* $f_0 \in L^*_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^2)$,

$$f_0(\bar{x}) \sim \sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^2_+} a_{\bar{s}}(f_0) \sum_{\bar{k}\in\rho(\bar{s})} \prod_{j=1}^{2} \left(n_j - 2^{s_j-1} + 1\right)^{\frac{1}{p_j}-1} e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle}.$$

Тогда

$$\|f_0\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}} \geqslant C(q,\theta,\tau) \left\{ \sum_{s_2=1}^{\infty} s_2^{1-\frac{\theta_2}{\tau_2}} \left[\sum_{s_1=1}^{\infty} s_1^{1-\frac{\theta_1}{\tau_1}} \left(\|\delta_{\bar{s}}(f_0)\|^*_{\bar{p},\bar{\tau}}\right)^{\theta_1} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}}.$$

Эта теорема доказывается с использованием теоремы 1. Ее подробное доказательство изложено в [25] (также см. [24]).

Теорема 3. *Пусть* $\bar{p} = (p_1, p_2), \bar{\theta} = (\theta_1, \theta_2), \bar{q} = (q_1, q_2), 1 \leqslant p_j < +\infty, 1 \leqslant \theta_j < q_j < +\infty, j = 1, 2$. *Тогда имеет место соотношение*:

$$E_{Q(N)}\left(H^{\Omega}_{\bar{p},\bar{q}}\right)_{\bar{p},\bar{\theta}} \asymp \left\| \left\{ \Omega(2^{-s_1}, 2^{-s_2}) \prod_{j=1}^{2} s_j^{\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{q_j}} \right\}_{\bar{s}\in\kappa(N)} \right\|_{l_{\bar{\theta}}}.$$

Доказательство. Пусть $f \in H^{\Omega}_{\bar{p},\bar{q}}$. Применяя теорему 1 и лемму 1, получим:

$$E_{Q(N)}(f)_{\bar{p},\bar{\theta}} \leqslant C(\theta,q) \left\| \left\{ \|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{q}} \prod_{j=1}^{2} s_j^{\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{q_j}} \right\}_{\bar{s}\in\Gamma^{\perp}(\Omega,N)} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \leqslant C(\theta,q)$$

$$\leqslant C(\theta,q) \left\| \left\{ \Omega(2^{-s_1}, 2^{-s_2}) \prod_{j=1}^{2} s_j^{\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{q_j}} \right\}_{\bar{s}\in\Gamma^{\perp}(\Omega,N)} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \leqslant$$

$$\leqslant C(\theta,q) \left\| \left\{ \Omega(2^{-s_1}, 2^{-s_2}) \prod_{j=1}^{2} s_j^{\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{q_j}} \right\}_{\bar{s}\in\kappa(N)} \right\|_{l_{\bar{\theta}}}.$$

Этим оценка сверху доказана.

Теперь докажем оценку снизу. Рассмотрим функцию

$$f_0(\bar{x}) \sim \sum_{\bar{s}\in Z^2_+} \Omega(2^{-s_1}, 2^{-s_2}) \prod_{j=1}^{2} s_j^{-\frac{1}{q_j}} \sum_{\bar{k}\in\rho(\bar{s})} \prod_{j=1}^{2} \left(k_j - 2^{s_j-1} + 1\right)^{\frac{1}{p_j}-1} e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle}.$$

Тогда в силу соотношения

$$\left\| \sum_{\bar{k}\in\rho(\bar{s})} \prod_{j=1}^{2} \left(n_j - 2^{s_j-1} + 1\right)^{\frac{1}{p_j}-1} e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle} \right\|^*_{\bar{p},\bar{\tau}} \asymp \prod_{j=1}^{2} s_j^{\frac{1}{\tau_j}} \tag{10}$$

получим $f_0 \in L^*_{\bar{p},\bar{q}}(I^2)$ и

$$\|\delta_{\bar{s}}(f_0)\|^*_{\bar{p},\bar{q}} \leqslant C_1\Omega(2^{-s_1}, 2^{-s_2}).$$

Следовательно, функция $F_0 = C_1^{-1} f_0 \in H^{\Omega}_{\bar{p},\bar{q}}$.

Выберем числа $\lambda_j \in [1, \theta_j), j = 1, 2$. Теперь пользуясь теоремой 2 и соотношением (10), будем иметь:

$$E_{Q(N)}\left(F_0\right)_{\bar{p},\bar{\theta}} \geqslant C \cdot \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{2} s_j^{\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{\lambda_j}} \|\delta_{\bar{s}}(f_0)\|^{*}_{\bar{p},\bar{\lambda}} \right\}_{\bar{s}\in\Gamma^{\perp}(\Omega,N)} \right\|_{l_{\bar{\theta}'}} \geqslant$$

$$\geqslant C \cdot \left\| \left\{ \Omega(2^{-s_1}, 2^{-s_2}) \prod_{j=1}^{2} s_j^{\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{q_j}} \right\}_{\bar{s}\in\Gamma^{\perp}(\Omega,N)} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \geqslant$$

$$\geqslant C(q,\theta) \left\| \left\{ \Omega(2^{-s_1}, 2^{-s_2}) \prod_{j=1}^{2} s_j^{\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{q_j}} \right\}_{\bar{s}\in\varkappa(N)} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} .$$

Этим теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть* $\Omega(t_1, t_2) = t_1^{r_1} t_2^{r_2}, r_j > 0, 1 \leqslant p_j < +\infty, 1 \leqslant \theta_j < q_j, j = 1, 2$. *Тогда*

$$E_{Q(N)}\left(H^{\Omega}_{\bar{p},\bar{q}}\right)_{\bar{p},\bar{\theta}} \asymp 2^{-N\cdot r_1}$$

Теорема 5. *Пусть* $\Omega(t_1, t_2) = \prod_{j=1}^{2} \frac{t_j^{r_j}}{(\log\frac{1}{t_j})^{\beta_j}} 0 < t_j < 1, \ r_j > 0, \quad \Omega(0,0) = \Omega(t_1, 0) = \Omega(0, t_2) = 0, 1 \leqslant p_j < +\infty, \ 1 \leqslant \theta_j < q_j, \ j = 1, 2.$ *Тогда*

$$E_{Q(N)}\left(H^{\Omega}_{\bar{p},\bar{q}}\right)_{\bar{p},\bar{\theta}} \leqslant C(r, q, \theta, \beta) \cdot M^{-r} \cdot (\log M)^{r-\beta_1-\beta_2+\sum\limits_{j=1}^{2}(\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{q_j})+\sum\limits_{j=1}^{2}\frac{1}{\theta_j}}$$

в случае $0 < \beta_1 < r, 0 < \beta_2 < r$, *где* $M = |Q(N)|$ – *количество элементов множества* $Q(N)$.

Доказательство. Известно, что если $\bar{s} \in \kappa(N)$, то (см. [18], с. 134)

$$\frac{1}{l} \cdot \log(C_4 \cdot N) < s_1 + s_2 < \frac{2}{r} \cdot \log(C_2 \cdot 2^l \cdot N).$$

Учитывая эти неравенства, можно убедиться в справедливости неравенства

$$\left\| \left\{ \prod_{j=1}^{2} s_j^{\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{q_j}} \right\}_{\bar{s}\in\kappa(N)} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \leqslant \left(\frac{2}{r} \cdot \log(C_2 \cdot 2^l \cdot N)\right)^{\sum\limits_{j=1}^{2}(\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{q_j})+\sum\limits_{j=1}^{2}\frac{1}{\theta_j}}.$$

Следовательно, по теореме 3 имеем:

$$E_{Q(N)}\left(H^{\Omega}_{\bar{p},\bar{q}}\right)_{\bar{p},\bar{\theta}} \leqslant C(q, r, \beta, \theta) \cdot N^{-1} \cdot \left(\log N\right)^{\sum\limits_{j=1}^{2}(\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{q_j})+\sum\limits_{j=1}^{2}\frac{1}{\theta_j}}.$$

Известны следующие соотношения (см. [18], с. 128):

$$M = |Q(N)| \asymp |\Gamma(N)| \asymp N^{\frac{1}{r}} \left(\log N\right)^{-\frac{\beta_1}{r}-\frac{\beta_2}{r}+1},$$

$$N \asymp M^r \left(\log N\right)^{\beta_1+\beta_2-r}, \quad \log N \asymp \log M.$$

Поэтому

$$E_{Q(N)}\left(H^{\Omega}_{\bar{p},\bar{q}}\right)_{\bar{p},\bar{\theta}} \leqslant C(q,r,\beta,\theta)\cdot M^{-r}\cdot(\log M)^{r-\beta_1-\beta_2+\sum\limits_{j=1}^{2}(\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{q_j})+\sum\limits_{j=1}^{2}\frac{1}{\theta_j}}.$$

Этим следствие 2 доказано.

В заключение отметим,что аналог теоремы 4 для классов О.В. Бесова установлен в [25].

Цитированная литература

1. **Blozinski A.P.** //Trans. Amer. Math. Soc.. 1981. V.263. P. 146 – 167.
2. **Нурсултанов Е.Д.** // Докл. РАН. 2004. Т.394, №1. С. 22 – 25.
3. **Бабенко К.И.** // ДАН СССР. 1960. Т.132. С. 982 – 985.
4. **Теляковский С.А.** //Матем. сборник. 1964. Т.63. С. 426 – 444.
5. **Митягин Б.С.** // Матем. сборник. 1962. Т.58. С. 397 – 414 .
6. **Бугров Я.С.** // Матем. сборник. 1964. Т.64. С. 410 – 418.
7. **Никольская Н.С.** // Сиб. Матем. журнал. 1974. Т.63. С. 395 – 412.
8. **Галеев Э.М.** // Успехи матем. наук. 1977. Т.32. С. 251 – 252.
9. **Темляков В.Н.** // Матем. сборник. 1980. Т.113, №1. С. 65 – 80.
10. **Темляков В.Н.** //Труды МИАН СССР. 1986. Т.178. С. 3 – 112.
11. **Динь Зунг** // Матем. сборник. 1986. Т.131. С. 251 – 271.
12. **Белинский Э.С.** // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. Ярославль. 1984. С. 10 – 24.
13. **Кашин Б.С., Темляков В.Н.** // Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа. М., 1999. С. 69 – 99.
14. **Базарханов Б.** // Современные проблемы теории функции. Материалы Всесоюзной школы по теории функции. Баку, 1977. С. 70 – 75.
15. **Романюк А.С.** // Укр. Матем. журнал. 1991. Т.43. С. 1398 – 1408.
16. **Романюк А.С.** // Укр. Матем. журнал. 1997. Т.49. С. 1250 – 1268.
17. **Пустовойтов Н.Н.** // Analysis Mathem.. 1994. V.20, P. 35 – 48.
18. **Пустовойтов Н.Н.** // Изв. РАН, серия матем.. 2000. Т.64, №1. С. 124 – 144.
19. **Тихомиров В.М.** // Современные проблемы математики. М., 1987. С. 103 – 270.
20. **Акишев Г.** // Междунар. конф. "Теория функций, функц. анализ и их приложения", посвящ. 80-летию член.-корр. АН КазССР. Т.И. Аманова. Семипалатинск, 2003. С. 21 – 24.
21. **Акишев Г.** // Вестник Карагандинского Университета. Серия Математика. 2004. №3. С. 9 – 16.
22. **Акишев Г.** // Матем. сборник. 2006. Т.197. С. 17 – 40.
23. **Акишев Г.** // Материалы восьмой междун. Казанской летней научной школы – конфер. "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы", Казань, 2007. С. 15 – 16.
24. **Акишев Г.** // Сиб. электронные матем. известия. 2008. Т.5. С. 51 – 67.
25. **Акишев Г.** //Евразийский Матем. журнал. 2007. №3. С. 25 – 33.

Поступила в редакцию 20.09.2008г.

Математический журнал. *Алматы. 2008. Том 8. № 4 (30) . С. 20 – 26*

УДК 517.956.6

СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ИЗ ДВУХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ НАРУШЕНИИ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

К. С. Алыбаев, М. Р. Нарбаев

Жалалабатский государственный университет
Ошский технологический университет
Кыргызская Республика г.Ош
narbaevmirsadyk@rambler.ru

Проведен структурный анализ решения для линейных сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости с использованием свойств сопряженно-гармонических функций.

Первые работы, посвященные линейным сингулярно возмущенным уравнениям появились в начале XX века. Начиная с 50-х годов началось систематическое исследование таких систем. Исследованием занимались А.Н. Тихонов, Л.С. Понтрягин, Е.Ф. Мищенко, М.И. Иманалиев, П.С. Панков, А.Б. Васильева и др.

Одним из основных результатов в теории сингулярно возмущенных уравнений является теорема Тихонова А.Н. о предельном переходе [1]. В названной теореме одним из основных условий является условие устойчивости.

Первой работой, когда нарушается условие устойчивости на некотором отрезке, но выполняется предельный переход, является [2]. В ней рассматривается модельное уравнение

$$\varepsilon\dot{x}(t,\varepsilon) = \Lambda(t)x(t,\varepsilon) + \gamma\cdot z\cdot x(t,\varepsilon) + \varepsilon\cdot a, \qquad (1)$$

где $\Lambda(t) = diag[(t+i),(t-i)]; \gamma - const; x = colon(x_1,x_2); z = x_1\cdot x_2; a = colon(-1,-1)$. Для (1) ставится задача

$$\|x(-1,\varepsilon)\| = O(\varepsilon) \qquad (2)$$

и для решения поставленной задачи получена оценка на промежутке [-1,1].

Систематическое исследование аналогичных задач проведено в [3] и получены достаточно полные результаты.

В [4] рассматривается случай, когда матрица $A(t)$ при линейных неизвестных вектор-функциях имеет собственные значения $\lambda_{1,2}(t) = (t\pm i)^n,\ n\in N$.

В работе [5] разработан метод линий уровня исследования таких задач с привлечением топологических подходов для большей общности результатов.

Keywords: *conjugation-harmonic functions, condition of stability*
2000 Mathematics Subject Classification: 35L20

В [6] доказано (применением метода линий уровня), что предельный переход выполняется на некотором бесконечном промежутке $[t_0, +\infty)$ в случае, когда матрица $A(t)$ имеет собственные значения $\lambda_{1,2}(t) = (t \pm i)^{-n},\ n \in N$.

Суть этого метода заключается в следующем. Более общая задача (1) – (2) рассматривается в некоторой симметричной области H плоскости комплексного переменного t. Область H содержит отрезок $[t_0, T]$ действительной оси, причем в части $[t_0, T_0)$ этого отрезка выполняется условие устойчивости, а в другой не выполняется.

В [5] сформулированы условия, обеспечивающие покрытие области H простыми кривыми. Эти кривые состоят из двух групп. В каждой группе кривые взаимно не пересекаются, но если рассматривать две группы вместе, то они взаимно пересекаются и область покрывается решетками кривых. Это покрытие является достаточным условием устойчивости решения поставленной задачи в области H.

Во всех работах поставленная задача исследуется в некоторой области комплексной плоскости.

Постановка задачи. Для упрощения дальнейших изложений рассмотрим систему линейных уравнений второго порядка

$$\varepsilon \dot{x}(t,\varepsilon) = A(t)x(t,\varepsilon) + f(t), \tag{3}$$

с начальным условием

$$x(t_0, \varepsilon) = x^0, \tag{4}$$

где $0 < \varepsilon$ – малый параметр; $x^0 - const;\ x^0 = colon(x_1^0, x_2^0);\ t \in H = \{(t_1; t_2) : t_0 \le t_1 \le T, -D \le t_2 \le D\}$, $t_0, T, D \in R$ и $D > 0$;

$$A(t) = \{a_{kj}(t), k, j = 1, 2\};$$

$$f(t) = colon(f_1(t), f_2(t));$$

$$x(t,\varepsilon) = colon(x_1(t,\varepsilon), x_2(t,\varepsilon)).$$

Пусть выполнены условия:

U_1. $f_j(t) \in Q(H), a_{kj}(t) \in Q(H), (k, j = 1, 2)$, где $Q(H)$ – пространство аналитических функций в H.

U_2. 1) $\forall t \in H : detA(t) \ne 0, a_{21}(t) \ne 0$; 2) Матрица $A(t)$ имеет собственные значения $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ и $\lambda_j(t) \in Q(H), \lambda_1(t) = \overline{\lambda_2(\bar{t})}$, где черта означает сопряженность.

U_3. 1) $\forall t \in H : \lambda_1(t) \ne 0$; 2) $Re\lambda_1(t_1) < 0$ при $t_0 \le t_1 < T_0$, $Re\lambda_1(T_0) = 0$, $Re\lambda_1(t_1) > 0$ при $T_0 < t_1 \le T, t_2 = 0$.

Пусть

$$A_{11}(t_1, t_2) = Re \int\limits_{t_0}^{t} \lambda_1(s)ds$$

и $\{(t_1; t_2) : A_{11}(t_1, t_2) = C - const\}$ – множество, которое означает линии уровня функции $A_{11}(t_1, t_2)$.

U_4. Существует линия уровня $\{C_0^0\}$ функции $A_{11}(t_1, t_2)$, соединяющая точки $(t_0^0; 0), (T_0^0; 0)$, причем $\{C_0^0\}$ – гладкая линия Жордана $(t_0^0 < T_0 < T_0^0 < T)$.

Поставим задачу исследования решения задачи (3) – (4) при $\varepsilon \to 0$ на отрезке $[t_0, T]$.

В дальнейшем запись вида $[t_0, T]$ означает отрезок действительной оси; запись "отрезок" $[(t_1^*; t_2^*), (t_1; t_2)](\{C\}(t_1^*; t_2^*), (t_1; t_2))$ означает отрезок (часть линии уровня $\{C\}$), соединяющий точки $(t_1^*; t_2^*), (t_1, t_2)$; симметрия понимается относительно действительной оси.

Как показывают исследования, проведенные в работах [2, 3, 4, 5, 6], решение задачи (3) – (4) ведет себя по разному в различных частях рассматриваемой области в комплексной плоскости.

Для решения ставится условие $\|x^0\| = O(\varepsilon)$. Возникают вопросы: Почему решение ведет себя так? Если взять $x^0 - const$, то как это повлияет на асимптотическое поведение решения?

В работах [2, 3, 4, 5, 6], решение рассматривается как единая функция при достаточно малых начальных условий, т.е. $x^0 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Такое изучение функций не может ответить на поставленные вопросы, а выбор x^0 достаточно малым сужает класс рассматриваемых задач.

Основной целью настоящей работы является снятие некоторых условий и ограничений, сформулированных в [5]. Для решения поставленной задачи нами использованы функции

$$A_{1j}(t_1, t_2) = Re\int\limits_{t_0}^{t} \lambda_j(s)ds, A_{2j}(t_1, t_2) = Im\int\limits_{t_0}^{t} \lambda_j(s)ds\ (j = 1, 2),$$

$A_{1j}(t_1, t_2)$ и $A_{2j}(t_1, t_2)$ – сопряженно-гармонические функции и их линии уровня ортогональны и полностью покрывают рассматриваемую область.

Совместное использование линий уровня функций $A_{1j}(t_1, t_2)$ и $A_{2j}(t_1, t_2)$ существенно упростило исследование поставленной задачи и дало возможность провести структурный анализ решения и на этой основе дать ответы на поставленные и другие вопросы.

Решение задачи. В силу условий U_1 и U_2 задача (3) – (4) сводится к задаче

$$\varepsilon\dot{y}(t, \varepsilon) = \Lambda(t)y(t, \varepsilon) + \varepsilon B(t)y(t, \varepsilon) + \varepsilon g(t), \tag{5}$$

$$y(t_0, \varepsilon) = y^0, \tag{6}$$

где $y(t, \varepsilon)$ – новая неизвестная вектор-функция, $y(t, \varepsilon) = colon(y_1(t, \varepsilon), y_2(t, \varepsilon))$;

$$\Lambda(t) = diag[\lambda_1(t), \lambda_2(t)]; B(t) = \{b_{kj}(t), k, j = 1, 2\}, b_{kj}(t) \in Q(H);$$

$$g(t) = colon(g_1(t), g_2(t)), g(t) \in Q(H); y^0 - const, y^0 = colon(y_1^0, y_2^0).$$

Решение задачи (5) – (6) будем искать в виде:

$$y(t, \varepsilon) = z(t, \varepsilon) + \Pi(t, \varepsilon), \tag{7}$$

где $z(t, \varepsilon), \Pi(t, \varepsilon)$ – неизвестные вектор-функции. После подстановки (7) в (5) – (6) для $z(t, \varepsilon)$, $\Pi(t, \varepsilon)$ получим следующие уравнения:

$$\varepsilon\dot{\Pi}(t, \varepsilon) = \Lambda(t)\Pi(t, \varepsilon), \tag{8}$$

$$\varepsilon\dot{z}(t, \varepsilon) = \Lambda(t)z(t, \varepsilon) + \varepsilon B(t)[z(t, \varepsilon) + \Pi(t, \varepsilon)] + \varepsilon g(t), \tag{9}$$

с начальными условиями

$$\Pi(t_0, \varepsilon) = y^0, \tag{10}$$

$$z(t_0, \varepsilon) = 0. \tag{11}$$

Решения задач (8) – (10), (9) – (11) представим в виде:

$$\Pi(t, \varepsilon) = V(t, t_0, \varepsilon)y^0, \tag{12}$$

$$z(t, \varepsilon) = \int\limits_{p(t_0, t)} V(t, \tau, \varepsilon)[B(\tau)(z(\tau, \varepsilon) + \Pi(\tau, \varepsilon)) + g(\tau)]d\tau, \tag{13}$$

где $V(t, \tau, \varepsilon) = diag[exp\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{t} \lambda_1(s)ds, exp\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{t} \lambda_2(s)ds]$; $p(t_0, t)$ – произвольный путь интегрирования соединяющая точки t_0 и $t \in H$.

Таким образом, поставленную задачу привели к исследованию функции $\Pi(t,\varepsilon)$ и решению уравнения для $z(t,\varepsilon)$.

Справедливы следующие леммы:

Лемма 1. *Пусть $F(t)$ непрерывна, а $G'(t) \neq 0$ и непрерывна при $\alpha \leq t \leq \beta$. Тогда*

$$\left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} F(t)\sin\frac{G(t)}{\varepsilon}dt\right| < \varepsilon, \left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} F(t)cos\frac{G(t)}{\varepsilon}dt\right| < \varepsilon.$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия $U_1 - U_4$. Тогда*

1. Существует область $\Omega \subset H$;

2. Область Ω полностью покрывается линиями уровня функций

$$A_{11}(t_1,t_2) = Re\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_1(s)ds, A_{21}(t_1,t_2) = Im\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_1(s)ds, \ (j=1,2);$$

3. Существуют линии уровня $A_{11}(t_1,t_2) = const$, соединяющие точки интервалов (t_0^0, T_0), (T_0, T_0^0).

Доказательство леммы 1 проводится, как и в [7].

Доказательство леммы 2 проведено в [8].

Область, ограниченную линиями уровня $\{C_0^0\}$ и $\{\overline{C_0^0}\}$, обозначим Ω, $\{\overline{C_0^0}\}$ – линия уровня симметричная к $\{C_0^0\}$.

Функцию (12) и уравнение (13) будем рассматривать в Ω.

Для t_0 возможны случаи: $t_0 < t_0^0,\ t_0 = t_0^0,\ t_0 > t_0^0$.

1. Пусть $t_0 < t_0^0$.

Сначала исследование проведем для функции (12) в Ω. Определим линии уровня $A_{11}(t_1,t_2)$ $= C_0$ и $A_{12}(t_1,t_2) = C_0$, проходящие через точку $(t_0;0)$. Также существуют линии уровня $A_{11}(t_1,t_2) = C_{1\varepsilon}$ и $A_{12}(t_1,t_2) = C_{1\varepsilon}$, проходящие через точку $(t_0+\varepsilon^{\gamma};0)$ $(0<\gamma<1)$. Области, ограниченные этими линиями уровня, обозначим Ω_{11}, Ω_{12} и $\overline{\Omega_{12}}$, которые определяются в следующем порядке: Ω_{11} содержит точку $(t_0;0)$ и ограничена линиями уровня $\{C_0\}$ и $\{C_{1\varepsilon}\}$ функций $A_{11}(t_1,t_2)$ и $A_{12}(t_1,t_2)$; Ω_{12} ограничена линиями уровня $\{C_0\}$ и $\{C_{1\varepsilon}\}$ функции $A_{11}(t_1,t_2)$ и линией уровня $A_{12}(t_1,t_2) = C_{1\varepsilon}$; $\overline{\Omega_{12}}$ – симметрична к Ω_{12}.

Примечание 1. Для доказательства нижеприводимых теорем достаточно определить пути интегрирования. Общая схема доказательства приведена в [5].

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть выполнены условия $U_1 - U_4$ и $t_0 < t_0^0$. Тогда для $\Pi(t,\varepsilon)$ справедлива оценка*

$$\|\Pi(t,\varepsilon)\| = C\omega_1(t,\varepsilon), \tag{14}$$

где

$$\omega_1(t,\varepsilon) = \begin{cases} 1, t \in \Omega_{11}\cup\Omega_{12}\cup\overline{\Omega_{12}}; \\ \varepsilon^n, t \in \Omega. \end{cases}$$

Доказательство. Проведя непосредственную оценку для $\Pi(t,\varepsilon)$, получим оценку (14).

Теперь рассмотрим уравнение (13) в $\Omega_0 = [t_0, t_0^0] \cup \Omega$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия $U_1 - U_4$ и $t_0 < t_0^0$. Тогда*

1. Решение $z(t,\varepsilon)$ задачи (9) – (11) существует в $Q(\Omega_0)$ и единственно;

2. Для $z(t,\varepsilon)$ справедлива оценка

$$\|z(t,\varepsilon)\| \leq 2C\varepsilon, t \in \Omega_0.$$

Доказательство. Определим пути интегрирования $\{p_1(t_0,t)\}$ для $z_1(t,\varepsilon)$, для $z_2(t,\varepsilon)$ определяются симметрично к $\{p_1(t_0,t)\}$.

а) $t\in[t_0,t_0^0]$. Тогда $\{p_1(t_0,t)\}$ состоит из отрезка $[(t_0;0),(t_1;0)]$.

б) Если $t\in\Omega$, то $\{p_1(t_0,t)\}$ состоит из: отрезка $[(t_0;0),(t_0^0;0)]$; части $\{C_0^0\}[(t_0^0;0),(t_1^*;t_2^*)]$; части $\{C_*\}[(t_1^*;t_2^*),(t_1;t_2)]$, где $\{C_*\}$ – линия уровня функции $A_{21}(t_1,t_2)$, проходящая через точки $(t_1^*;t_2^*),(t_1;t_2)$.

Примечание 2. В общем случае может и не существовать линия уровня $\{C_*\}$, соединяющая точки $(t_1^*;t_2^*)$ и $(t_1;t_2)$. В этом случае часть $\{p_1(t_0,t)\}$, выходящая из точки $(t_1^*;t_2^*)$, состоит из: части $\{C_*\}[(t_1^*;t_2^*),(t_1^{**};t_2^{**})]$; части $\{C\}[(t_1^{**};t_2^{**}),(t_1;t_2),]$, где $\{C\}$ – линия уровня функции $A_{11}(t_1,t_2)$, проходящая через точку $(t_1;t_2)$ (согласно лемме 2 такая линия уровня существует). Линии уровня $\{C\}$ и $\{C_*\}$ ортогональны и пересекаются в точке $(t_1^{**};t_2^{**})$. Отсюда следует, что, как бы не выбирали точку $(t_1;t_2)$, путь $\{p_1(t_0,t)\}$ полностью определяется применением линий уровня функций $A_{11}(t_1,t_2)$ и $A_{21}(t_1,t_2)$. Поэтому, не нарушая общности, предположим выполнение случая б).

2. Пусть $t_0=t_0^0$.

Рассмотрим функцию (12) в Ω. Существуют линии уровня функции $A_{11}(t_1,t_2)$, которые соединяют точки интервалов (t_0^0,T_0) и (T_0,T_0^0) (лемма 2). Пусть $A_{11}(t_1,t_2)=C_{2\varepsilon}$ линия уровня, соединяющая точки $(t_0+\varepsilon^{\gamma_1};0)$ и $(T_0^0-\varepsilon^{\gamma_2};0)(0<\gamma_1<1,0<\gamma_2<1)$. Рассматривая функцию $A_{12}(t_1,t_2)$, определим линию уровня $\{\overline{C_{2\varepsilon}}\}$ симметрично к $\{C_{2\varepsilon}\}$. Эти линии уровня область Ω делят на пять частей. Эти части обозначим: Ω_{21} ограничена линиями уровня $\{C_{2\varepsilon}\}$ и $\{\overline{C_{2\varepsilon}}\}$; Ω_{22} ограничена линиями уровня $\{C_0^0\},\{\overline{C_0^0}\},\{C_{2\varepsilon}\},\{\overline{C_{2\varepsilon}}\}$ и содержит точку $(t_0;0)$; Ω_{23} ограничена линиями уровня $\{C_0^0\},\{\overline{C_{2\varepsilon}}\}$ и $\{C_{2\varepsilon}\}$; Ω_{24} ограничена линиями уровня $\{C_0^0\},\{\overline{C_0^0}\},\{C_{2\varepsilon}\},\{\overline{C_{2\varepsilon}}\}$ и содержит точку $(T_0^0;0)$; $\overline{\Omega_{23}}$ симметрична к Ω_{23}.

Справедлива теорема.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия U_1-U_4 и $t_0=t_0^0$. Тогда для $\Pi(t,\varepsilon)$ справедлива оценка*

$$\|\Pi(t,\varepsilon)\|=C\omega_2(t,\varepsilon),$$

где

$$\omega_2(t,\varepsilon)=\begin{cases}1,t\in\Omega_{22}\cup\Omega_{23}\cup\Omega_{24}\cup\overline{\Omega_{23}};\\ \varepsilon^n,t\in\Omega_{21}.\end{cases}$$

Эта теорема доказывается непосредственной оценкой функции $\Pi(t,\varepsilon)$.

Теперь в Ω рассмотрим (13). Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия U_1-U_4 и $t_0=t_0^0$. Тогда*

1. Решение $z(t,\varepsilon)$ существует и единственно в $Q(\Omega)$;

2. Для $z(t,\varepsilon)$ справедлива оценка

$$\|z(t,\varepsilon)\|\le 2C\varepsilon,t\in\Omega.$$

Доказательство. Пути определим покомпонентно. Достаточно определить для $z_1(t,\varepsilon)$, для $z_2(t,\varepsilon)$ путь выбирается симметрично пути $z_1(t,\varepsilon)$.

Пусть $t\in\Omega$. Тогда $\{p_1(t_0,t)\}$ состоит из части $\{C_0^0\}[(t_0^0;0),(t_1^*;t_2^*)]$ и части $\{C_*\}[(t_1^*;t_2^*),(t_1;t_2)]$.

3. $t_0>t_0^0$.

Рассмотрим линии уровня $A_{11}(t_1,t_2)=C_0$ и $A_{11}(t_1,t_2)=C_{3\varepsilon}$, которые соответственно проходят через точки $(t_0;0)$ и $(t_0+\varepsilon^{\gamma};0)(0<\gamma<1)$. Согласно принципу симметрии рассматривая функцию $A_{12}(t_1,t_2)$, определим линии уровня $\{\overline{C_0}\}$ и $\{\overline{C_{3\varepsilon}}\}$ соответственно симметрично к линиям уровня $\{C_0\}$ и $\{C_{3\varepsilon}\}$. Область, ограниченную $\{C_0\}$ и $\{\overline{C_0}\}$, обозначим Ω_{30}, а $\{C_{3\varepsilon}\}$ и $\{\overline{C_{3\varepsilon}}\}$ обозначим Ω_{31}. Линиями уровня $\{C_0\},\{C_{3\varepsilon}\},\{\overline{C_0}\},\{\overline{C_{3\varepsilon}}\}$ ограничены две области. Один из них содержит точку $(t_0; 0)$ и эту область обозначим Ω_{32}, а вторую обозначим Ω_{34}. Через Ω_{33} обозначим область, ограниченную линиями уровня $\{C_0\}, \{C_{3\varepsilon}\}$ и $\{\overline{C_{3\varepsilon}}\}$. $\overline{\Omega_{33}}$ – область симметричная к Ω_{33}.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.1. *Пусть выполняются условия* $U_1 - U_4$ *и* $t_0 > t_0^0$. *Тогда для* $\Pi(t,\varepsilon)$ *справедлива оценка*

$$\|\Pi(t,\varepsilon)\| = C\omega_3(t,\varepsilon),$$

где

$$\omega_3(t,\varepsilon) = \begin{cases} 1, t \in \Omega_{32} \cup \Omega_{33} \cup \Omega_{34} \cup \overline{\Omega_{33}}; \\ \varepsilon^n, t \in \Omega_{31}. \end{cases}$$

Теорема 3.2. *Пусть выполняются условия* $U_1 - U_4$ *и* $t_0 > t_0^0$. *Тогда*

1. Решение (13) существует и единственно в $Q(\Omega_{30})$;

2. Для (13) справедлива оценка

$$\|z(t,\varepsilon)\| \le 2C\varepsilon, \ t \in \Omega_{30}.$$

Доказательство теоремы 3.1 проводится непосредственно, а для доказательства теоремы 3.2 определим пути интегрирования следующим образом: для $t \in \Omega_{30}$, $\{p_1(t_0,t)\}$ состоит из части $\{C_0\}[(t_0;0),(t_1^*;t_2^*)]$ и части $\{C_*\}[(t_1^*;t_2^*),(t_1;t_2)]$. Путь $\{p_2(t_0,t)\}$ выбирается симметрично.

Таким образом, как показывают проведенные исследования, функция $\Pi(t,\varepsilon)$ существенна только в достаточно малой окрестности линий уровня, проходящих через точку $(t_0;0)$, а в остальных частях рассматриваемых областей определяющей является функция $z(t,\varepsilon)$. Точнее, функция $\Pi(t,\varepsilon)$ является пограничной функцией в комплексной плоскости, а $z(t,\varepsilon)$ регулярная часть решения поставленной задачи.

Примечание 3. Все полученные результаты справедливы для уравнений вида:

$$\varepsilon\dot{x}(t,\varepsilon) = A(t)x(t,\varepsilon) + f(t,x) + \varepsilon g(t,x),$$

где $A(t)$ имеет комплексно-сопряженные собственные значения $\lambda_1(1), \lambda_2(t)$, которые удовлетворяют условиям U_2, U_3 и

$$\|f(t,x)\| = o\|x\|.$$

Цитированная литература

1. **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.** Асимптотические разложениярешений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1968.

2. **Шишкова М.А.** // Докл.АН СССР. 1973. Т.209, №3. С. 576 – 579.

3. **Каримов С.К.** Асимптотика решений некоторых дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости точки покоя в плоскости "быстрых движений". Дисс.доктора физ.мат.наук. Ош, 1983.

4. **Анарбаева Г.М.** Асимптотическое поведение решений системы дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости положения равновесия. Дисс.канд.физ.мат.наук. Бишкек, 1993.

5. **Алыбаев К.С.** // Вестник КГНУ. Серия 3. 2001. Выпуск 6. С. 190 – 200.

6. **Турсунов Д.А.** // "Актуальные проблемы дфферен. урав. и мат. физики". Алма-Ата, 2005. С. 200.

7. **Фихтенгольц Г.М.** Основы математического анализа. Т.2. М., 1968.

8. **Алыбаев К.С., Нарбаев М.Р.** // Исслед. по интегро-дифферен. уравнениям. Выпуск 35. Бишкек. 2006. С. 105 – 109.

Поступила в редакцию 18.09.2008г.

Математический журнал. *Алматы. 2008. Том 8. № 4 (30) . С. 27 – 33*

УДК 517.958

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ МОМЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА ВО ВТОРОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Д. Аужани, А. Сакабеков

Казахстанско–Британский Технический Университет
050010 Алматы ул.Толе би, 59

В работе доказано существование глобального по времени решения задачи Коши для одномерной нелинейной системы моментных уравнений Больцмана во втором приближении в пространстве функций, непрерывных по времени и суммируемых по пространственным переменным.

Из газовой динамики известно, что в большинстве встречающихся задач нет необходимости использовать детальное микроскопическое описание газа с помощью функции распределения. Поэтому естественно поискать менее детальное описание, используя макроскопические гидродинамические переменные (плотность, гидродинамическую скорость, температуру и т.д.). Поскольку эти переменные определяются через моменты функции распределения, мы сталкиваемся с проблемой анализа различных моментов уравнения Больцмана. Заметим, что моментные уравнения Больцмана являются промежуточными между Больцмановским (кинетическая теория) и гидродинамическими уравнениями описания состояния разреженного газа и образует ранее неизученный класс нелинейных уравнении в частных производных. Изучение различных задач для системы моментных уравнений Больцмана представляет важную и актуальную задачу газовой динамики. Рассмотрим одномерную нелинейную систему моментных уравнений Больцмана во втором приближении [1]:

$$\frac{\partial \varphi_{01}}{\partial t} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\varphi_{00} - \sqrt{\frac{2}{3}}\,\varphi_{10} + \frac{2}{\sqrt{3}}\,\varphi_{02}\Big) = 0\,,$$

$$\frac{\partial \varphi_{00}}{\partial t} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \varphi_{01}}{\partial x} = 0\,,$$

$$\frac{\partial \varphi_{02}}{\partial t} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\,\varphi_{01}\Big) = I_{02}\,,$$

$$\frac{\partial \varphi_{10}}{\partial t} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\,\varphi_{01}\right) = 0\,, \quad t > 0\,, \quad x \in R\,, \tag{1}$$

Keywords: *Boltzmann's moment system equation*
2000 Mathematics Subject Classification: 35F30

где $I_{02} = \dfrac{\sigma_2 - \sigma_0}{2}\,(\varphi_{00}\varphi_{02} - \varphi_{01}^2/\sqrt{3})$ – квадратичная форма, φ_{00}, φ_{01}, φ_{02}, φ_{10} – моменты функции распределения частиц, σ_0, σ_2 – const.

Систему уравнений (1) приведем к каноническому виду. Для этого будем находить собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/\sqrt{3} & -\sqrt{2/3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2/3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где A – матрица, составленная из коэффициентов при производных по x, $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{3}$ – собственные значения матрицы A. Соответствующие ортонормированные собственные векторы имеют вид:

$$(0,\ \sqrt{2/5},\ 0,\ \sqrt{3/5}),\quad (0,\ -\sqrt{2/15},\ \sqrt{5}/3,\ (2/3)\sqrt{2/5}),$$
$$(-1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{6},\ -\sqrt{2}/3,\ 1/3),\quad (1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{6},\ -\sqrt{2}/3,\ 1/3).$$

С помощью ортогонального преобразования систему уравнений (1) приведем к виду:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3}\,\psi_3 \\ -\sqrt{3}\,\psi_4 \end{pmatrix} = \frac{\sigma_2 - \sigma_0}{6\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{10}\,(D\theta\psi\,,\,\theta\psi) \\ -2\,(D\theta\psi\,,\,\theta\psi) \\ -2\,(D\theta\psi\,,\,\theta\psi) \end{pmatrix},\quad t > 0,\quad x \in R, \tag{2}$$

где $\psi = (\psi_1,\, \psi_2,\, \psi_3,\, \psi_4)$,

$$(D\theta\psi\,,\,\theta\psi) = \Big[\sqrt{\frac{2}{5}}\,\psi_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}\Big(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\,\psi_2 + \psi_3 + \psi_4\Big)\Big]\Big[\frac{\sqrt{5}}{3}\,\psi_2 - \frac{\sqrt{2}}{3}\,(\psi_3 + \psi_4)\Big] - \frac{(\psi_4 - \psi_3)^2}{2\sqrt{3}},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\qquad \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2/5} & -2/\sqrt{15} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -\sqrt{2}/3 & -\sqrt{2}/3 \\ \sqrt{3/5} & (2/3)\sqrt{2/5} & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

θ – матрица, составленная из собственных векторов матрицы A.

Для системы уравнений (2) зададим начальные условия:

$$\psi_i(0,x) = \psi_i^0(x)\,,\quad x \in R\,,\ \ i = \overline{1,4}. \tag{3}$$

Нетрудно доказать, что если $\psi_i^0(x) \geqslant 0$, $x \in R$, $i = \overline{1,4}$, то решение задачи (2) – (3) также является неотрицательным.

Для задачи (2) – (3) справедлива теорема.

Теорема 1. *Пусть начальные функции удовлетворяют условиям:*

$$\psi_i^0 \in L^1(R)\,,\quad \psi_i \geqslant 0\ \ \forall x \in R\,,\quad \int\limits_R \psi_i^0(|x|^2 + |\ln\psi_i^0|)\,dx < \infty\,,\ \ i = \overline{1,4}. \tag{4}$$

Тогда задача (2) – (3) имеет неотрицательное решение, принадлежащее пространству $C([0,T];\ \ L^1(R))$, *более точно* $C([0,T]; L^1\ln L^1)$, *причем*

$$\sup_{t\in[0,T]}\int\limits_R \left(\sum_{i=1}^{4}\psi_i(|x|^2 + |\ln\psi_i|)\right) dx < \infty\,,\quad 0 < T < \infty\,. \tag{5}$$

Доказательство. Доказательство проведем по методике работ [2–4]. Для системы уравнений (2) выполняется закон сохранения массы, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi_1+4\psi_2+\sqrt{10}\psi_3+\sqrt{10}\psi_4)+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{30}(\psi_3-\psi_4)=0,$$

откуда

$$\int\limits_R(\psi_1+4\psi_2+\sqrt{10}\psi_3+\sqrt{10}\psi_4)\,dx=\int\limits_R(\psi_1^0+4\psi_2^0+\sqrt{10}\psi_3^0+\sqrt{10}\psi_4^0)\,dx\quad\forall t\,, \tag{6}$$

так как $\psi_i(t,x)\to 0$ при $x\to\pm\infty$.

Из равенства (6) следует, что если $\psi_i^0\in L^1(R)$, то $\psi_i(t,x)\in L^1(R)$ $\forall t$, $i=\overline{1,4}$.
Кроме того, для системы уравнений (2) выполняется аналог H-теоремы Больцмана, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi_1\ln\psi_1+4\psi_2\ln\psi_2+\sqrt{10}\psi_3\ln\psi_3+\sqrt{10}\psi_4\ln\psi_4)+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{30}(\psi_3\ln\psi_3-\psi_4\ln\psi_4)\leqslant 0. \tag{7}$$

Из неравенства (7) получим оценку:

$$\int\limits_R(\psi_1\ln\psi_1+4\psi_2\ln\psi_2+\sqrt{10}\psi_3\ln\psi_3+\sqrt{10}\psi_4\ln\psi_4)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_R(\psi_1^0\ln\psi_1^0+4\psi_2^0\ln\psi_2^0+\sqrt{10}\psi_3^0\ln\psi_3^0+\sqrt{10}\psi_4^0\ln\psi_4^0)\,dx\quad\forall t. \tag{8}$$

Умножим первое уравнение системы (2) на x^2, второе – на $4x^2$, третье – на $\sqrt{10}\,(x-\sqrt{3}\,t/\alpha)^2$, четвертое – на $\sqrt{10}\,(x+\sqrt{3}\,t/\alpha)^2$, сложим и проинтегрируем по $R\times(0,t)$:

$$\int\limits_R\int\limits_0^t\Big[\frac{\partial}{\partial\tau}(x^2\psi_1+4x^2\psi_2)+\Big(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\sqrt{3}}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\Big)\sqrt{10}\Big(x-\frac{\sqrt{3}}{\alpha}\tau\Big)^2\psi_3+$$

$$+\Big(\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{\sqrt{3}}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\Big)\sqrt{10}\Big(x+\frac{\sqrt{3}}{\alpha}\tau\Big)^2\psi_4\Big]\,dx\,d\tau=$$

$$=\frac{\sigma_2-\sigma_0}{6\sqrt{2}}\int\limits_R\int\limits_0^t\Big[4\sqrt{10}x^2-2\sqrt{10}\Big(x-\frac{\sqrt{3}}{\alpha}\tau\Big)^2-2\sqrt{10}\Big(x+\frac{\sqrt{3}}{\alpha}\tau\Big)^2\Big](D\theta\,\psi,\,\theta\psi)\,dx\,d\tau.$$

Пусть $(x-\sqrt{3}t/\alpha)^2\psi_3\to 0$, $(x+\sqrt{3}t/\alpha)^2\psi_4\to 0$ при $x\to\infty$. Тогда $\int\limits_0^t\frac{\sqrt{30}}{\alpha}[(x-\sqrt{3}\tau/\alpha)^2\psi_3-(x+\sqrt{3}\tau/\alpha)^2\psi_4]\big|_{-\infty}^{\infty}d\tau=0$. При этом

$$\int\limits_R\Big[x^2\psi_1+4x^2\psi_2+\sqrt{10}\Big(x-\frac{\sqrt{3}}{\alpha}\,t\Big)^2\psi_3+\sqrt{10}\Big(x+\frac{\sqrt{3}}{\alpha}\,t\Big)^2\psi_4\Big]\,dx=$$

$$=\int\limits_R x^2(\psi_1^0+4\psi_2^0+\sqrt{10}\psi_3^0+\sqrt{10}\psi_4^0)\,dx-\frac{\sigma_2-\sigma_0}{6\sqrt{2}}\frac{12\sqrt{10}}{\alpha^2}\int\limits_R\int\limits_0^t\tau^2(D\theta\psi,\,\theta\psi)\,dx\,d\tau\,. \tag{9}$$

Учитывая второе уравнение системы (2) равенство (9) перепишем в виде:

$$\int\limits_R \Big[x^2\psi_1 + 4x^2\psi_2 + \sqrt{10}\Big(x - \frac{\sqrt{3}}{\alpha}\,t\Big)^2\psi_3 + \sqrt{10}\Big(x + \frac{\sqrt{3}}{\alpha}\,t\Big)^2\psi_4\Big]\,dx =$$

$$= \int\limits_R x^2(\psi_1^0 + 4\psi_2^0 + \sqrt{10}\psi_3^0 + \sqrt{10}\psi_4^0)\,dx - \frac{\sqrt{2}(\sigma_2 - \sigma_0)}{\alpha^2}\int\limits_R\int\limits_0^t \tau^2\frac{\partial\psi_2}{\partial\tau}\,dx\,d\tau\,. \tag{10}$$

К последнему интегралу в правой части (10) применяем формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_R\int\limits_0^t \tau^2\frac{\partial\psi_2}{\partial\tau}\,dx\,d\tau = t^2\int\limits_R \psi_2 dx - 2\int\limits_R\int\limits_0^t \tau\psi_2 dx\,d\tau\,. \tag{11}$$

Учитывая (11) равенство (10) перепишем в виде:

$$\int\limits_R \Big[x^2\psi_1 + 4x^2\psi_2 + \sqrt{10}\Big(x - \frac{\sqrt{3}}{\alpha}\,t\Big)^2\psi_3 + \sqrt{10}\Big(x + \frac{\sqrt{3}}{\alpha}\,t\Big)^2\psi_4\Big]\,dx + \frac{\sqrt{2}(\sigma_2 - \sigma_0)}{\alpha^2}\int\limits_R t^2\psi_2 dx =$$

$$= \int\limits_R x^2(\psi_1^0 + 4\psi_2^0 + \sqrt{10}\psi_3^0 + \sqrt{10}\psi_4^0)\,dx + \frac{2\sqrt{2}(\sigma_2 - \sigma_0)}{\alpha^2}\int\limits_R\int\limits_0^t \tau\psi_2 dx\,d\tau\,. \tag{12}$$

Отсюда получим следующую оценку:

$$\int\limits_R \Big[x^2\psi_1 + 4x^2\psi_2 + \sqrt{10}\Big(x - \frac{\sqrt{3}}{\alpha}\,t\Big)^2\psi_3 + \sqrt{10}\Big(x + \frac{\sqrt{3}}{\alpha}\,t\Big)^2\psi_4\Big]\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_R x^2(\psi_1^0 + 4\psi_2^0 + \sqrt{10}\psi_3^0 + \sqrt{10}\psi_4^0)\,dx + \frac{2\sqrt{2}(\sigma_2 - \sigma_0)}{\alpha^2}\,T\int\limits_R (\psi_1^0 + 4\psi_2^0 + \sqrt{10}\psi_3^0 + \sqrt{10}\psi_4^0)\,dx. \tag{13}$$

Заметим, что для любой неотрицательной функции F имеет место равенство [1, 2]:

$$\int\limits_R F|\ln F|\,dx = \int\limits_R F\ln F\,dx - 2\int F\ln F\big|_{F\leqslant 1}\,dx \tag{14}$$

и

$$-2\int F\ln F\big|_{F\leqslant 1}\,dx \leqslant 2\int\limits_R x^2F\,dx + C\,, \tag{15}$$

где C – положительная постоянная, не зависящая от F. Применяя неравенство (15) к функциям $F = \psi_1(t,\,x)$, $F = \psi_2(t,\,x)$, $F = \psi_3(t,\,x - \sqrt{3}t/\alpha)$, $F = \psi_4(t,\,x + \sqrt{3}t/\alpha)$ получим:

$$-2\int \psi_1\ln\psi_1\big|_{\psi_1\leqslant 1}\,dx \leqslant 2\int\limits_R x^2\psi_1\,dx + C_1\,,$$

$$-2\int \psi_2\ln\psi_2\big|_{\psi_2\leqslant 1}\,dx \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_R 4x^2\psi_2\,dx + C_2\,,$$

$$-2\int \psi_3\ln\psi_3\big|_{\psi_3\leqslant 1}\,dx \leqslant \frac{2}{\sqrt{10}}\int\limits_R \sqrt{10}\Big(x - \frac{\sqrt{3}}{\alpha}\,t\Big)^2\psi_3\,dx + C_3\,,$$

$$-2\int \psi_4 \ln \psi_4\big|_{\psi_4\leqslant 1}\,dx \leqslant \frac{2}{\sqrt{10}}\int\limits_R \sqrt{10}\Big(x+\frac{\sqrt{3}}{\alpha}\,t\Big)^2\psi_4\,dx + C_4\,. \tag{16}$$

Используя (14) получим следующее равенство:

$$\int\limits_R (\psi_1|\ln\psi_1| + 4\psi_2|\ln\psi_2| + \sqrt{10}\psi_3|\ln\psi_3| + \sqrt{10}\psi_4|\ln\psi_4|)\,dx =$$

$$= \int\limits_R (\psi_1\ln\psi_1 + 4\psi_2\ln\psi_2 + \sqrt{10}\psi_3\ln\psi_3 + \sqrt{10}\psi_4\ln\psi_4)\,dx -$$

$$-2\left(\int \psi_1\ln\psi_1\Big|_{\psi_1\leqslant 1}dx + \int \psi_2\ln\psi_2\Big|_{\psi_2\leqslant 1}dx + \int \psi_3\ln\psi_3\Big|_{\psi_3\leqslant 1}dx + \int \psi_4\ln\psi_4\Big|_{\psi_4\leqslant 1}dx\right).$$

Отсюда на основании системы неравенств (16) получим:

$$\int\limits_R (\psi_1|\ln\psi_1| + 4\psi_2|\ln\psi_2| + \sqrt{10}\psi_3|\ln\psi_3| + \sqrt{10}\psi_4|\ln\psi_4|)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_R (\psi_1\ln\psi_1 + 4\psi_2\ln\psi_2 + \sqrt{10}\psi_3\ln\psi_3 + \sqrt{10}\psi_4\ln\psi_4)\,dx +$$

$$+2\int\limits_R \Big[x^2\psi_1 + 4x^2\psi_2 + \sqrt{10}\Big(x-\frac{\sqrt{3}}{\alpha}\,t\Big)^2\psi_3 + \sqrt{10}\Big(x+\frac{\sqrt{3}}{\alpha}\,t\Big)^2\psi_4\Big]\,dx. \tag{17}$$

Тогда из (8), (13), (17) имеем оценку:

$$\int\limits_R (\psi_1|\ln\psi_1| + 4\psi_2|\ln\psi_2| + \sqrt{10}\psi_3|\ln\psi_3| + \sqrt{10}\psi_4|\ln\psi_4|)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_R (\psi_1^0\ln\psi_1^0 + 4\psi_2^0\ln\psi_2^0 + \sqrt{10}\psi_3^0\ln\psi_3^0 + \sqrt{10}\psi_4^0\ln\psi_4^0)\,dx +$$

$$+\int\limits_R x^2(\psi_1^0 + 4\psi_2^0 + \sqrt{10}\psi_3^0 + \sqrt{10}\psi_4^0)\,dx +$$

$$+\frac{2\sqrt{2}(\sigma_2-\sigma_0)}{\alpha^2}\,T\int\limits_R (\psi_1^0 + 4\psi_2^0 + \sqrt{10}\psi_3^0 + \sqrt{10}\psi_4^0)\,dx. \tag{18}$$

В правой части (18) переходим к абсолютной величине логарифмов:

$$\int\limits_R (\psi_1|\ln\psi_1| + 4\psi_2|\ln\psi_2| + \sqrt{10}\psi_3|\ln\psi_3| + \sqrt{10}\psi_4|\ln\psi_4|)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_R (\psi_1^0|\ln\psi_1^0| + 4\psi_2^0|\ln\psi_2^0| + \sqrt{10}\psi_3^0|\ln\psi_3^0| + \sqrt{10}\psi_4^0|\ln\psi_4^0|)\,dx +$$

$$+2\int \left(\psi_1^0\ln\psi_1^0\Big|_{\psi_1^0\leqslant 1} + \psi_2^0\ln\psi_2^0\Big|_{\psi_2^0\leqslant 1} + \psi_3^0\ln\psi_3^0\Big|_{\psi_3^0\leqslant 1} + \psi_4^0\ln\psi_4^0\Big|_{\psi_4^0\leqslant 1}\right)dx +$$

$$+\int\limits_R x^2(\psi_1^0+4\psi_2^0+\sqrt{10}\psi_3^0+\sqrt{10}\psi_4^0)\,dx+$$

$$+\frac{2\sqrt{2}(\sigma_2-\sigma_0)}{\alpha^2}\,T\int\limits_R(\psi_1^0+4\psi_2^0+\sqrt{10}\psi_3^0+\sqrt{10}\psi_4^0)\,dx. \tag{19}$$

Отбросив 2-е отрицательное слагаемое в правой части последнего соотношения усилим неравенство (19):

$$\int\limits_R(\psi_1|\ln\psi_1|+4\psi_2|\ln\psi_2|+\sqrt{10}\psi_3|\ln\psi_3|+\sqrt{10}\psi_4|\ln\psi_4|)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_R(\psi_1^0|\ln\psi_1^0|+4\psi_2^0|\ln\psi_2^0|+\sqrt{10}\psi_3^0|\ln\psi_3^0|+\sqrt{10}\psi_4^0|\ln\psi_4^0|\,)\,dx+$$

$$+\int\limits_R x^2(\psi_1^0+4\psi_2^0+\sqrt{10}\psi_3^0+\sqrt{10}\psi_4^0)\,dx+$$

$$+\frac{2\sqrt{2}(\sigma_2-\sigma_0)}{\alpha^2}\,T\int\limits_R(\psi_1^0+4\psi_2^0+\sqrt{10}\psi_3^0+\sqrt{10}\psi_4^0)\,dx. \tag{20}$$

Итак, если начальные функции ψ_i^0 удовлетворяют ограничениям (4), то в силу (6) и (20) решение задачи (2)–(3) принадлежит пространству $C([0,T];L^1(R))$, более точно $\psi\in C([0,T];L^1\ln L^1)$.

Каждое уравнение системы (2) интегрируем по характеристическому направлению

$$\psi_1(t,x)=\psi_1^0(x)\,,$$

$$\psi_2(t,x)=\psi_2^0(x)+\frac{\sigma_2-\sigma_0}{6\sqrt{2}}\int\limits_0^t\sqrt{10}\,(D\theta\psi,\,\theta\psi)(\tau,\,x)\,d\tau\,,$$

$$\psi_3(t,x)=\beta(t_0-t)\psi_3^0\Big(x-\frac{\sqrt{3}}{\alpha}\,t\Big)-\frac{\sigma_2-\sigma_0}{6\sqrt{2}}\int\limits_0^t 2(D\theta\psi,\,\theta\psi)\Big(\tau,\,x-\frac{\sqrt{3}}{\alpha}\,(t-\tau)\Big)\,d\tau\,,$$

$$\psi_4(t,x)=\beta(t_0-t)\psi_4^0\Big(x+\frac{\sqrt{3}}{\alpha}\,t\Big)-\frac{\sigma_2-\sigma_0}{6\sqrt{2}}\int\limits_0^t 2(D\theta\psi,\,\theta\psi)\Big(\tau,\,x+\frac{\sqrt{3}}{\alpha}\,(t-\tau)\Big)\,d\tau\,, \tag{21}$$

где $\beta(t)$ – характеристическая функция области $(0,\,+\infty)$, $t_0=t_0(x)=\sup\{t>0,\ x\pm\sqrt{3}\,s/\alpha\in R,\ \ 0<s<t\}$. Введем обозначения:

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}_i(t,x)&=\psi_i(t,x)-\psi_i^0(x)\,,\quad i=1,\,2\,,\\ \widetilde{\psi}_3(t,x)&=\psi_3(t,x)-\beta(t_0-t)\psi_3^0(x-\sqrt{3}\,t/\alpha)\,,\\ \widetilde{\psi}_4(t,x)&=\psi_4(t,x)-\beta(t_0-t)\psi_4^0(x+\sqrt{3}\,t/\alpha)\,.\end{aligned} \tag{22}$$

Тогда систему уравнений (21) можно записать в виде:

$$\widetilde{\psi}_i(t,x)=Q_i^{-1}(\widetilde{\psi}+\psi^0\,,\,\widetilde{\psi}+\psi^0)\,,\quad i=1,\,2,\,3,\,4,$$

или в векторной форме

$$\widetilde{\psi}(t,x)=Q^{-1}(\widetilde{\psi}+\psi^0\,,\,\widetilde{\psi}+\psi^0)\,, \tag{23}$$

где $\widetilde{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)'$, $Q^{-1} = (Q_1^{-1}, Q_2^{-1}, Q_3^{-1}, Q_4^{-1})'$, $Q_1^{-1} = 0$, $Q_i^{-1}(\widetilde{\psi} + \psi^0, \widetilde{\psi} + \psi^0)$ – интегральный оператор, стоящий в правой части системы (21), причем вместо $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ поставлены их значения из (22).

Вместо уравнения (23) рассмотрим следующее интегральное уравнение

$$\psi_\varepsilon = \frac{Q^{-1}(\psi_\varepsilon + \psi^0,\, \psi_\varepsilon + \psi^0)}{1 + \varepsilon \| Q^{-1}(\psi_\varepsilon + \psi^0,\, \psi_\varepsilon + \psi^0)\|_{C([0,T];\, L^1(R))}}\,, \tag{24}$$

где $0 < \varepsilon < 1$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Интегральное уравнение (24) имеет в шаре* $\overline{S}(0, N) = \{\psi_\varepsilon \in C([0,T];\, L^1(R)) : \|\psi_\varepsilon\|_{C([0,T];\, L^1(R))} \leqslant N = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\}$ *хотя бы одно решение.*

Лемма доказывается по методике, приведенной в [1], [3], [4].

Уравнение (24) эквивалентно задаче:

$$\frac{\partial \psi_{1\varepsilon}}{\partial t} = 0\,,$$

$$\frac{\partial \psi_{2\varepsilon}}{\partial t} = \frac{\dfrac{\sigma_2 - \sigma_0}{6\sqrt{2}}\sqrt{10}(D\theta\psi_\varepsilon,\, \theta\psi_\varepsilon)}{1 + \varepsilon \| Q^{-1}(\psi_\varepsilon + \psi^0,\, \psi_\varepsilon + \psi^0)\|_{C([0,T];\, L^1(R))}}\,,$$

$$\frac{\partial \psi_{3\varepsilon}}{\partial t} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{3}\,\psi_3 = \frac{\dfrac{\sigma_2 - \sigma_0}{6\sqrt{2}}(-2)(D\theta\psi_\varepsilon,\, \theta\psi_\varepsilon)}{1 + \varepsilon \| Q^{-1}(\psi_\varepsilon + \psi^0,\, \psi_\varepsilon + \psi^0)\|_{C([0,T];\, L^1(R))}}\,,$$

$$\frac{\partial \psi_{4\varepsilon}}{\partial t} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{3}\,\psi_4 = \frac{\dfrac{\sigma_2 - \sigma_0}{6\sqrt{2}}(-2)(D\theta\psi_\varepsilon,\, \theta\psi_\varepsilon)}{1 + \varepsilon \| Q^{-1}(\psi_\varepsilon + \psi^0,\, \psi_\varepsilon + \psi^0)\|_{C([0,T];\, L^1(R))}}\,,$$

$$(t,\, x) \in (0,\, T] \times R\,, \tag{25}$$

$$\psi_{i\varepsilon}(0,\, x) = \psi_i^0(x)\,,\ \ x \in R\,,\ \ i = \overline{1,\, 4}\,. \tag{26}$$

В системе (25) – (26) переходим к пределу при $\varepsilon \to 0$. Тогда и получим утверждение теоремы. Теорема доказана.

Цитированная литература

1. **Сакабеков А.** Начально-краевые задачи для системы моментных уравнении Больцмана. Алматы, 276 с.

2. **Diperna R.J., Lions P.L.** //C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 1988. V.306, P. 343 – 346.

3. **Сакабеков А.** //ДАН СССР. 1991. Т.321, № 1. С. 75 – 78 (Сибир. Матем. Журнал. 1993. Т. 34, №1. С. 145 – 156)

4. **Султангазин У.М., Сакабеков А.** //Доклады НАН РК. 2000. № 3. С. 9 – 16.

Поступила в редакцию 26.09.2007г.

Математический журнал. *Алматы. 2008. Том 8. № 4 (30) . С. 34 – 43*

УДК 517.956, 517.968.2

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНО-НАГРУЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПРИБЛИЖЕНИЕМ ЛИНИИ НАГРУЗКИ К ВРЕМЕННОЙ ОСИ В НУЛЕ ИЛИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ. II

А. Д. Ахманова, М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов

КарГУ им.Е.А.Букетова МОН РК
100028 Караганды ул.Университетская, 28
Институт математики МОН РК
050010 Алматы ул.Пушкина, 125 dzhenali@math.kz
КарГУ им.Е.А.Букетова МОН РК
100028 Караганды ул.Университетская, 28 ramamur@mail.ru

В данной работе представлены результаты дальнейших исследований граничных задач для спектрально-нагруженных параболических уравнений в неограниченных областях, когда порядок производной в нагруженном слагаемом совпадает с порядком дифференциальной части уравнения и точка нагрузки по пространственной переменной ($\overline{x}(t) = t^{\omega}$, $-\infty < \omega < 1/2$) движется с переменной скоростью. Во второй части, используя ранее полученные результаты по исследованию характеристических интегральных уравнений [27, 28], дается решение исходных граничных задач для спектрально-нагруженного уравнения теплопроводности методом регуляризации Карлемана-Векуа для особых интегральных уравнений.

Нумерация формул, лемм, теорем и замечаний является продолжением таковых из первой части [28].

4. Решение характеристических интегральных уравнений. Как было отмечено ранее, если в характеристических интегральных уравнениях (24) и (25) произвести следующие замены независимых переменных ($\alpha = 1 - 2\omega > 0$):

$$t = [\alpha t_1]^{1/\alpha}, \quad \tau = [\alpha \tau_1]^{1/\alpha},$$

и ввести обозначения

$$\widetilde{\varphi}(t_1) = t_1^{\frac{1}{\alpha}-1} \cdot \mu([\alpha t_1]^{1/\alpha}), \quad \widetilde{f}_2(t_1) = t_1^{\frac{1}{\alpha}-1} \cdot f_1([\alpha t_1]^{1/\alpha}),$$

Keywords: *Loaded heat equation, eigenvalue problem, boundary value problem*
2000 Mathematics Subject Classification: 35K05, 47A52, 65L15, 65N25

$$\widetilde{\psi}(t_1) = \nu([\alpha t_1]^{1/\alpha}), \quad \widetilde{g}_2(t_1) = g_1([\alpha t_1]^{1/\alpha}),$$
$$k(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4t}\right),$$

то получим следующие эталонные интегральные уравнения :

$$\mathbf{k}_\lambda\widetilde{\varphi} \equiv (I-\lambda\mathbf{k})\widetilde{\varphi} \equiv \widetilde{\varphi}(t_1) - \lambda\int\limits_0^{t_1}\left(\frac{\tau_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{2}} \cdot k(t_1-\tau_1)\widetilde{\varphi}(\tau_1)d\tau_1 = \widetilde{f}_2(t_1), \quad t_1>0,$$

$$\mathbf{k}^*_\lambda\widetilde{\psi} \equiv (I-\overline{\lambda}\mathbf{k}^*)\widetilde{\psi} \equiv \widetilde{\psi}(t_1) - \overline{\lambda}\int\limits_{t_1}^{\infty}\left(\frac{t_1}{\tau_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{2}} \cdot k(\tau_1-t_1)\widetilde{\psi}(\tau_1)d\tau_1 = \widetilde{g}_2(t_1), \quad t_1>0.$$

Эталонные уравнения нами уже исследованы. Таким образом, из ранее полученных результатов и замечания 1 следует, что решения сопряженнных характеристических интегральных уравнений (24) и (25) определяются согласно формул (24) и (15) из [27] следующим образом ($\alpha>0$):

$$\mu(t) \equiv t^{1-\alpha}\widetilde{\varphi}([\alpha^{-1}t^\alpha]) = f_1(t) + \lambda\int\limits_0^t\left(\frac{\tau}{t}\right)^{1+\frac{\alpha}{2}} \cdot t^{\alpha-1}\cdot \mathbf{r}_{\lambda+}([\alpha^{-1}t^\alpha]-$$
$$-[\alpha^{-1}\tau^\alpha])f_1(\tau)d\tau, \ \ t\in\mathbb{R}_+, \tag{$\star\star$}$$
$$\nu(t) \equiv \widetilde{\psi}([\alpha^{-1}t^\alpha]) = g_1(t) + \overline{\lambda}\int\limits_t^\infty\left(\frac{t}{\tau}\right)^{1+\frac{\alpha}{2}} \cdot \tau^{\alpha-1}\cdot \mathbf{r}_{\lambda-}([\alpha^{-1}\tau^\alpha]-$$
$$-[\alpha^{-1}t^\alpha])g_1(\tau)d\tau + \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k t^{1+\alpha/2}\cdot\exp\left(-\frac{iz_k}{\alpha}\cdot t^\alpha\right), \ \ t\in\mathbb{R}_+. \tag{$\star\star\star$}$$

5.Решение исходных интегральных уравнений методом регуляризации Карлемана-Векуа. Вначале исследуем интегральное уравнение (20), соответствующее сопряженной граничной задаче (2).

Введем обозначение

$$\widetilde{\mathscr{K}}(\tau,t) = \mathscr{K}_2(\tau,t) - \mathscr{K}(\tau,t) \tag{40}$$

и запишем исходное интегральное уравнение (20) в виде:

$$\mathbf{K}^*_\lambda\nu \equiv \nu(t) - \overline{\lambda}\int\limits_t^\infty \mathscr{K}(\tau,t)\nu(\tau)d\tau = \overline{\lambda}\int\limits_t^\infty\widetilde{\mathscr{K}}(\tau,t)\nu(\tau)d\tau + g_1(t). \tag{41}$$

Рассматривая уравнение (41) как характеристическое, то есть считая правую часть этого уравнения временно известной, запишем его решение согласно формуле ($\star\star\star$):

$$\nu(t) = g_1(t) + \overline{\lambda}\int\limits_t^\infty\widetilde{\mathscr{K}}(t,\tau)\nu(\tau)d\tau + \overline{\lambda}\int\limits_t^\infty\left(\frac{t}{\tau}\right)^{1+\frac{\alpha}{2}}\tau^{\alpha-1}\cdot r_{\lambda-}\left(\alpha^{-1}\cdot\tau^\alpha - \alpha^{-1}\cdot t^\alpha\right)\cdot$$
$$\cdot\left[g_1(\tau)d\tau + \overline{\lambda}\int\limits_\tau^\infty\widetilde{\mathscr{K}}(\zeta,\tau)\nu(\zeta)d\zeta\right]d\tau + \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k\cdot t^{1+\frac{\alpha}{2}}\cdot\exp\left(-\frac{iz_k}{\alpha}\cdot t^\alpha\right).$$

Преобразуем правую часть последнего равенства:

$$\nu(t)=g_1(t)+\overline{\lambda}\int\limits_t^{\infty}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{1+\frac{\alpha}{2}}\tau^{\alpha-1}\cdot r_{\lambda-}\left(\alpha^{-1}\cdot\tau^{\alpha}-\alpha^{-1}\cdot t^{\alpha}\right)\cdot g_1(\tau)d\tau+$$

$$+\sum_{k=-N_1}^{N_2}c_k\cdot t^{1+\frac{\alpha}{2}}\cdot\exp\left(-\frac{iz_k}{\alpha}\cdot t^{\alpha}\right)+\overline{\lambda}\int\limits_t^{\infty}\widetilde{\mathscr{K}}(\tau,t)\nu(\tau)d\tau+$$

$$+\overline{\lambda}^2\int\limits_t^{\infty}\nu(\zeta)d\zeta\int\limits_t^{\infty}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{1+\frac{\alpha}{2}}\tau^{\alpha-1}\cdot r_{\lambda-}\left(\alpha^{-1}\cdot\tau^{\alpha}-\alpha^{-1}\cdot t^{\alpha}\right)\cdot\widetilde{\mathscr{K}}(\zeta,\tau)d\tau. \tag{42}$$

Поменяв ролями переменные интегрирования ζ и τ в повторном интеграле последнего уравнения, получим новое регуляризованное уравнение относительно искомой функции $\nu(t)$:

$$\widehat{\mathbf{K}}_{\lambda}^{*}\nu\equiv(I-\overline{\lambda}\widehat{\mathbf{K}}^{*})\nu\equiv\nu(t)-\overline{\lambda}\int\limits_t^{\infty}\widehat{\mathscr{K}}(\tau,t)\nu(\tau)d\tau=$$

$$=\widehat{g}(t)+\sum_{k=-N_1}^{N_2}c_k\cdot t^{1+\frac{\alpha}{2}}\cdot\exp\left(-\frac{iz_k}{\alpha}\cdot t^{\alpha}\right), \tag{43}$$

где использованы обозначения:

$$\widehat{\mathscr{K}}(\tau,t)=\widetilde{\mathscr{K}}(\tau,t)+\overline{\lambda}\int\limits_t^{\tau}\left(\frac{t}{\zeta}\right)^{1+\frac{\alpha}{2}}\zeta^{\alpha-1}\cdot r_{\lambda-}\left(\alpha^{-1}\cdot\zeta^{\alpha}-\alpha^{-1}\cdot t^{\alpha}\right)\cdot\widetilde{\mathscr{K}}(\tau,\zeta)d\zeta=$$

$$=\widetilde{\mathscr{K}}(\tau,t)+\overline{\lambda}\cdot\widetilde{\widetilde{\mathscr{K}}}(\tau,t), \tag{44}$$

$$\widehat{g_1}(t)=g_1(t)+\overline{\lambda}\int\limits_t^{\infty}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{1+\frac{\alpha}{2}}\tau^{\alpha-1}\cdot r_{\lambda-}\left(\alpha^{-1}\cdot\tau^{\alpha}-\alpha^{-1}\cdot t^{\alpha}\right)\cdot g_1(\tau)d\tau. \tag{45}$$

Покажем, что интегральное уравнение (43) действительно регулярное (имеет единственное решение), для этого достаточно показать справедливость следующей оценки:

$$\left|\widehat{\mathscr{K}}(\tau,t)\right|\leqslant C(\alpha)\frac{t^{-\varepsilon}}{\tau^{1/2+\alpha/2-\varepsilon}(\tau-t)^{1/2}}\cdot\exp\left\{-C(\alpha)\cdot\frac{\tau^{1-\alpha}}{\tau-t}\right\},$$

$$0<\varepsilon<\alpha/2,\qquad\alpha>0,\qquad 0<t<\tau<\infty. \tag{46}$$

Отметим, что для регуляризации особых интегральных уравнений с бесконечным пределом интегрирования целесообразнее переходить к уравнениям на конечном интервале. Поэтому вначале преобразуем интегральное уравнение (43) к уравнению на конечном интервале. Для этого в нем произведем замены независимых переменных

$$t=t_1^{-1},\quad\tau=\tau_1^{-1},$$

и получим

$$\nu(t_1)-\overline{\lambda}\int\limits_0^{t_1}\mathscr{K}'(t_1,\tau_1)\nu(\tau_1)d\tau_1=\overline{\lambda}\int\limits_0^{t_1}\widetilde{\mathscr{K}}'(t_1,\tau_1)\nu(\tau_1)d\tau_1+g_1(t_1), \tag{47}$$

где

$$\widetilde{\mathscr{K}}'(t_1,\tau_1)=\mathscr{K}_2'(t_1,\tau_1)-\mathscr{K}'(t_1,\tau_1), \tag{48}$$

и ядра $\mathscr{K}_2'(t_1,\tau_1)$, $\mathscr{K}'(t_1,\tau_1)$ определяются из равенств (34). Соответственно равенства (43)—(45) примут вид:

$$\widehat{\mathbf{K}}_\lambda^{*'}\nu\equiv(I-\overline{\lambda}\widehat{\mathbf{K}}^{*'})\nu\equiv\nu(t_1)-\overline{\lambda}\int_0^{t_1}\widehat{\mathscr{K}}'(t_1,\tau_1)\nu(\tau_1)d\tau_1=$$

$$=\widehat{g}(t_1)+\sum_{k=-N_1}^{N_2}c_k\cdot t_1^{-1-\frac{\alpha}{2}}\exp\left(-\frac{iz_k}{\alpha}\cdot t_1^{-\alpha}\right), \tag{49}$$

здесь использованы обозначения

$$\widehat{\mathscr{K}'}(t_1,\tau_1)=\widetilde{\mathscr{K}'}(t_1,\tau_1)+\overline{\lambda}\int_{\tau_1}^{t_1}\left(\frac{\zeta}{t_1}\right)^{1+\frac{\alpha}{2}}\zeta^{-\alpha-1}\cdot r_{\lambda-}\left([\alpha\cdot t_1^\alpha]^{-1}-\right.$$

$$\left.-[\alpha\cdot\zeta^\alpha]^{-1}\right)\cdot\widetilde{\mathscr{K}'}(\tau_1,\zeta)d\zeta=\widetilde{\mathscr{K}'}(t_1,\tau_1)+\overline{\lambda}\cdot\overset{\approx}{\mathscr{K}}{}'(t_1,\tau_1), \tag{50}$$

$$\widehat{g_1}(t_1)=g_1(t_1)+\overline{\lambda}\int_0^{t_1}\left(\frac{\tau_1}{t_1}\right)^{1+\frac{\alpha}{2}}\tau_1^{-\alpha-1}\cdot r_{\lambda-}\left([\alpha\cdot t_1^\alpha]^{-1}-[\alpha\cdot\tau_1^\alpha]^{-1}\right)\cdot g_1(\tau_1)d\tau_1. \tag{51}$$

Теперь покажем, что интегральное уравнение (49) действительно регулярное (вольтеррово), для этого достаточно доказать справедливость следующей леммы:

Лемма 2. *Ядро интегрального уравнения (49) имеет слабую особенность, т.е. справедлива оценка*:

$$\begin{cases}\left|\widehat{\mathscr{K}'}(t_1,\tau_1)\right|\le C\dfrac{t_1^{1/2+\varepsilon}}{\tau_1^{1-\alpha/2+\varepsilon}(t_1-\tau_1)^{1/2}}\exp\{-c(\alpha)\cdot\dfrac{t_1\cdot\tau_1^\alpha}{t_1-\tau_1}\},\\ 0<\varepsilon<\alpha/2,\ \ \alpha>0,\ \ 0<\tau_1<t_1<\infty.\end{cases} \tag{52}$$

Доказательство. Так как $\widehat{\mathscr{K}'}(t_1,\tau_1)$ имеет представление $\widetilde{\mathscr{K}'}(t_1,\tau_1)+\lambda\overset{\approx}{\mathscr{K}}{}'(t_1,\tau_1)$, то оценка (52) следует из (36), (18) (последняя формула из [27]) и нижеприведенных соотношений. Используя следующее двойное неравенство [15, с.55]

$$C_1t_1^{\alpha-1}(t_1-\tau_1)\le t_1^\alpha-\tau_1^\alpha\le C_2t_1^{\alpha-1}(t_1-\tau_1),\ \text{где}\ C_1=\min\{1,\alpha\},\ \ C_2=\max\{1,\alpha\},$$

вначале получим ($\alpha=1-2\omega>0$):

$$\overset{\approx}{\mathscr{K}}{}'(t_1,\tau_1)\le M_1(\alpha)\int_{\tau_1}^{t_1}\eta^{-\alpha-1}\left(\frac{\eta}{\tau_1}\right)^{1-\alpha/2}\cdot\frac{\eta^{(\alpha-1)/2}}{\sqrt{\eta-\tau_1}}\cdot\frac{\sqrt{t_1}\eta^{\alpha/2}}{\sqrt{t_1-\eta}}\exp\left(-\frac{C_1(\alpha)(t_1-\eta)}{t_1\eta^\alpha}\right)d\eta+$$

$$+M_2(\alpha)\int_{\tau_1}^{t_1}\eta^{-\alpha-1}\left(\frac{\eta}{\tau_1}\right)^{1-\alpha/2}\cdot\frac{\eta^{(\alpha-1)/2}}{\sqrt{\eta-\tau_1}}\cdot\frac{t_1^{3/2}\eta^{3\alpha/2}}{(t_1-\eta)^{3/2}}\exp\left(-\frac{C_2(\alpha)t_1\eta^\alpha}{t_1-\eta}\right)d\eta=$$

$$=J_1(t_1,\tau_1)+J_2(t_1,\tau_1).$$

Здесь $C_j(\alpha), M_j(\alpha)$, $j=1,2$, – постоянные, зависящие только от α, функции $J_1(t_1,\tau_1)$, $J_2(t_1,\tau_1)$ соответственно равны

$$J_1 = M_1(\alpha)\frac{\sqrt{t_1}}{\tau_1^{1-\alpha/2}}\int\limits_{\tau_1}^{t_1}\frac{1}{\eta^{(\alpha+1)/2}\sqrt{(\eta-\tau_1)(t_1-\eta)}}\exp\left(-\frac{C_1(\alpha)(t_1-\eta)}{t_1\eta^\alpha}\right)d\eta =$$

$$= M_1(\alpha)\frac{\sqrt{t_1}}{\tau_1^{1-\alpha/2}}I_1(t_1,\tau_1);$$

$$J_2 = M_2(\alpha)\frac{\sqrt{t_1}}{\tau_1^{1-\alpha/2}}\int\limits_{\tau_1}^{t_1}\frac{t_1\eta^{(\alpha-1)/2}}{(t_1-\eta)^{3/2}(\eta-\tau_1)^{1/2}}\exp\left(-\frac{C_2(\alpha)t_1\eta^\alpha}{t_1-\eta}\right)d\eta =$$

$$= M_2(\alpha)\frac{\sqrt{t_1}}{\tau_1^{1-\alpha/2}}I_2(t_1,\tau_1).$$

Далее, каждую из функций $I_1(t_1,\tau_1)$, $I_2(t_1,\tau_1)$ представим в виде сумм из двух слагаемых:

$$I_1(t_1,\tau_1) = I_{11}(t_1,\tau_1) + I_{12}(t_1,\tau_1);\;\; I_2(t_1,\tau_1) = I_{21}(t_1,\tau_1) + I_{22}(t_1,\tau_1),$$

для каждого из которых последовательно будем иметь:

$$I_{11}(t_1,\tau_1) = \int\limits_{\tau_1}^{\frac{t_1+\tau_1}{2}}\frac{1}{\eta^{(\alpha+1)/2}\sqrt{(\eta-\tau_1)(t_1-\eta)}}\exp\left(-\frac{C_1(\alpha)(t_1-\eta)}{t_1\eta^\alpha}\right)d\eta \le$$

$$\le C(\alpha)\sqrt{t_1}\int\limits_{\tau_1}^{\frac{t_1+\tau_1}{2}}\frac{\sqrt{t_1}d\eta}{(t_1-\eta)\sqrt{\eta(\eta-\tau_1)}} \le \left\| \; z^2=\tfrac{t_1-\tau_1}{t_1-\eta}-1 \; \right\| \le$$

$$\le \frac{C(\alpha)}{\sqrt{t_1-\tau_1}}\int\limits_0^1\frac{dz}{\sqrt{z^2+\tau_1/t_1}} = \frac{C(\alpha)}{\sqrt{t_1-\tau_1}}\ln(\sqrt{t_1/\tau_1}+\sqrt{t_1/\tau_1+1}) =$$

$$= \frac{C(\alpha)}{\sqrt{t_1-\tau_1}}\ln\frac{1+\sqrt{1+\tau_1/t_1}}{\sqrt{\tau_1/t_1}} \le \frac{C(\alpha)}{\sqrt{t_1-\tau_1}}\ln\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{\tau_1/t_1}} \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{t_1-\tau_1}}\left[C_1+C_2\left(\tau_1/t_1\right)^\varepsilon\left|\ln\frac{\tau_1}{t_1}\right|\cdot\left(t_1/\tau_1\right)^\varepsilon\right] = \frac{1}{\sqrt{t_1-\tau_1}}\left[C_1+C_3\left(t_1/\tau_1\right)^\varepsilon\right],$$

где значение параметра ε выбирается из условия $0<\varepsilon<\alpha/2$;

$$I_{12}(t_1,\tau_1) = \int\limits_{(t_1+\tau_1)/2}^{t_1}\frac{1}{\eta^{(\alpha+1)/2}\sqrt{(\eta-\tau_1)(t_1-\eta)}}\exp\left(-\frac{C_1(\alpha)(t_1-\eta)}{t_1\eta^\alpha}\right)d\eta \le$$

$$\le \left(\frac{2}{(t_1+\tau_1)}\right)^{(\alpha+1)/2}\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t_1-\tau_1}}\int\limits_{(t_1+\tau_1)/2}^{t_1}\frac{1}{\sqrt{t_1-\eta}}\exp\left(-\frac{C_1(\alpha)(t_1-\eta)}{t_1^{\alpha+1}}\right)d\eta \le$$

$$\le C(\alpha)\left(\frac{t_1}{\sqrt{t_1+\tau_1}}\right)^{(\alpha+1)/2}\frac{1}{\sqrt{t_1-\tau_1}}\int\limits_{(t_1+\tau_1)/2}^{t_1}\exp\left(-\frac{C_1(\alpha)(t_1-\eta)}{t_1^{\alpha+1}}\right)d\left(\frac{\sqrt{C_1(\alpha)(t_1-\eta)}}{t_1^{(\alpha+1)/2}}\right) \le$$

$$\leq \left\| z = \frac{\sqrt{C_1(\alpha)(t_1-\eta)}}{t_1^{(\alpha+1)/2}} \right\| \leq \frac{C(\alpha)}{\sqrt{t_1-\tau_1}} \int\limits_0^\infty \exp\{-z^2\}dz \leq \frac{C(\alpha)}{\sqrt{t_1-\tau_1}};$$

$$I_{21}(t_1,\tau_1) = \int\limits_{\tau_1}^{(t_1+\tau_1)/2} \frac{\sqrt{t_1}\eta^{(\alpha-1)/2}}{(t_1-\eta)^{3/2}(\eta-\tau_1)^{1/2}} \exp\left(-\frac{C_2(\alpha)t_1\eta^\alpha}{t_1-\eta}\right) d\eta \leq$$

$$\leq C(\alpha) \int\limits_{\tau_1}^{\frac{t_1+\tau_1}{2}} \frac{\sqrt{t_1}d\eta}{(t_1-\eta)\sqrt{\eta(\eta-\tau_1)}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{t_1-\tau_1}} \left[C_1 + C_2\,(\tau_1/t_1)^\varepsilon \left|\ln\frac{\tau_1}{t_1}\right| \cdot (t_1/\tau_1)^\varepsilon\right] = \frac{1}{\sqrt{t_1-\tau_1}} \left[C_1 + C_3\,(t_1/\tau_1)^\varepsilon\right],$$

где последнее неравенство получается также как при оценке функции $I_{11}(t_1,\tau_1)$ и значение параметра ε выбирается также из условия $0<\varepsilon<\alpha/2$;

$$I_{22}(t_1,\tau_1) = \int\limits_{(t_1+\tau_1)/2}^{t_1} \frac{t_1\eta^{(\alpha-1)/2}}{(t_1-\eta)^{3/2}(\eta-\tau_1)^{1/2}} \exp\left(-\frac{C_2(\alpha)t_1\eta^\alpha}{t_1-\eta}\right) d\eta \leq$$

$$\leq \frac{C(\alpha)}{\sqrt{t_1-\tau_1}} \int\limits_{(t_1+\tau_1)/2}^{t_1} \frac{t_1\eta^{(\alpha-1)/2}}{(t_1-\eta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{C_3(\alpha)t_1(t_1+\tau_1)^\alpha}{t_1-\eta}\right) d\eta =$$

$$= \frac{C(\alpha)}{\sqrt{t_1-\tau_1}} \int\limits_{(t_1+\tau_1)/2}^{t_1} \frac{t_1\eta^{(\alpha-1)/2}}{(t_1-\eta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{C_3(\alpha)t_1^{\alpha+1}}{t_1-\eta}\left\{1+\frac{\tau_1}{t_1}\right\}^\alpha\right) d\eta \leq$$

$$\leq \frac{C(\alpha)}{\sqrt{t_1-\tau_1}} \int\limits_0^{t_1} \frac{t_1^{(\alpha+1)/2}}{(t_1-\eta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{C_4(\alpha)t_1^{\alpha+1}}{(t_1-\eta)}\right) d\eta = \left\| \begin{array}{c} z = \frac{t_1^{(\alpha+1)/2}}{2\sqrt{t_1-\eta}} \\ dz = \frac{t_1^{(\alpha+1)/2}d\eta}{4(t_1-\eta)^{3/2}} \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{C(\alpha)}{\sqrt{t_1-\tau_1}} \int\limits_{t_1^{\alpha/2}/2}^{\infty} \exp\{-z^2\}dz \leq \frac{C(\alpha)}{\sqrt{t_1-\tau_1}}.$$

В этих неравенствах постоянные $C(\alpha)$, $C_j(\alpha)$, $j=1,2,3,4$, разные и зависят только от α. Из полученных неравенств следует искомая оценка (52). Лемма доказана.

Итак, в силу оценки (52) для заданной правой части уравнение (49), а вместе с ним и уравнение (43), имеет только единственное решение, существование которого можно показать методом последовательных приближений.

Из соотношений (41) и (43) следует, что однородное уравнение

$$\mathbf{K}_{2\lambda}^*\nu \equiv (I-\lambda\mathbf{K}_2)\nu \equiv \nu(t) - \lambda\int\limits_t^\infty \mathscr{K}_2(\tau,t)\nu(\tau)d\tau = 0,\ \ t\in\mathbb{R}_+, \tag{53}$$

равносильно неоднородному уравнению

$$\widehat{\mathbf{K}}_\lambda^*\nu \equiv \nu(t) - \lambda\int\limits_t^\infty \widehat{\mathscr{K}}(\tau,t)\mu(\tau)d\tau = \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k\cdot t^{1+\frac{\alpha}{2}} \exp\left(-\frac{iz_k}{\alpha}\cdot t^\alpha\right),\ \ t\in\mathbb{R}_+. \tag{54}$$

Рассмотрим вместо (54) семейство интегральных уравнений:

$$\widehat{\mathbf{K}}_\lambda^*\mu \equiv \nu(t) - \lambda \int\limits_t^\infty \widehat{\mathscr{K}}(t,\tau)\nu(\tau)d\tau = t^{1+\frac{\alpha}{2}} \exp\left(-\frac{iz_k}{\alpha}\cdot t^\alpha\right), \;\; k=-N_1,...,0,...,N_2, \;\; t\in\mathbb{R}_+. \quad (55)$$

Далее, в силу того, что каждое из уравнений (55) имеет единственное нетривиальное решение $\nu_{\lambda k}(t)$, $k=-N_1,...,0,...,N_2$, (соответствующее правой части уравнения (55) $t^{1+\frac{\alpha}{2}}\cdot \exp\left(\frac{-iz_k}{\alpha}\cdot t^\alpha\right)$), то для каждого значения параметра $\lambda\in\mathbb{C}\setminus D_0$ эти функции $\nu_{\lambda k}(t)$, $k=-N_1,...,0,...,N_2$, будут соответствующими собственными функциями однородного уравнения (53) (а значит, и однородного для (20) уравнения).

Из утверждений лемм 1 и 2 из работы [27] получаем:

Лемма 3. *Значения $\lambda\in D_0$ из (11) (из [27]) являются регулярными числами оператора* $\mathbf{K}_{2\lambda}^*$ (20).

Лемма 4. *Множество $\mathbb{C}\setminus D_0$ составляет характеристические числа оператора $\mathbf{K}_{2\lambda}^*$ (20). Причем, если $\lambda\in D_m\cup\Gamma_{m-1}\setminus\{(-1)^m e^{m\pi}\}$, $m=1,2,...,$ то $dim\,Ker(\mathbf{K}_{2\lambda}^*)=m$; и соответствующими собственными функциями будут решения уравнений (55):*

$$\nu_{\lambda k}(t) = [\widehat{\mathbf{K}}_\lambda^*]^{-1}\left[t^{1+\frac{\alpha}{2}}\exp\left(-\frac{iz_k}{\alpha}\cdot t^\alpha\right)\right], \;\; k=1,...,m=N_1+N_2+1.$$

Замечание 5. *Общим решением неоднородного интегрального уравнения (43), равно как и уравнения (20), будет функция*

$$\nu_\lambda(t) = [\widehat{\mathbf{K}}_\lambda^*]^{-1}\hat{g}(t) + \sum_{k=1}^{m=N_1+N_2+1} c_k\nu_{\lambda k}(t), \;\; t\in\mathbb{R}_+, \quad (56)$$

где c_k, $k=1,...,m,$ – произвольные постоянные.

Перейдем к рассмотрению интегрального уравнения (15), являющегося союзным для уравнения (20). Из замечания 2 следует, что соответствующее (15) однородное интегральное уравнение для любого $\lambda\in\mathbb{C}$ имеет только тривиальное решение.

Итак, с учетом утверждений лемм 2, 3 и 4 получаем следующую лемму.

Лемма 5. *1. Каждое значение $\lambda\in\mathbb{C}$ является регулярным числом оператора $\mathbf{K}_{2\lambda}$ (15).*

2. Неоднородное интегральное уравнение (15) однозначно разрешимо при любой правой части $f_1(t)$, если $\overline{\lambda}\in D_0$ (50).

3. Если $\lambda\in D_m\cup\Gamma_{m-1}\setminus\{(-1)^m e^{m\pi}\}$, $m=1,2,...,$ то для однозначной разрешимости неоднородного интегрального уравнения (15) необходимо и достаточно, чтобы функции $f_1(t)$ удовлетворяли следующим условиям ортогональности:

$$\int\limits_0^\infty \overline{\nu_{\lambda k}(t)}f_1(t)dt = 0, \;\; k=1,...,m=N_1+N_2+1. \quad (57)$$

Замечание 6. *Согласно утверждению леммы 4 решением неоднородного интегрального уравнения (15) будет функция*

$$\mu_\lambda(t) = [\mathbf{K}_{2\lambda}]^{-1}f_1(t), \;\; t\in\mathbb{R}_+. \quad (58)$$

Замечание 7. *Из вышеизложенных результатов непосредственно следует, что*

$$\tilde{\mu}_\lambda(t) = e^t \mu_\lambda(t) \in L_1(\mathbb{R}_+), \ \ \widetilde{\nu}_\lambda(t) = e^{-t}\nu_\lambda(t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+). \tag{59}$$

Это согласуется с условиями (6) и (7).

6. Исследование граничных задач (1) **и** (2). Согласно (11) запишем решение задачи (1) в виде:

$$u(x,t) = -\lambda \int\limits_0^t e^{-\tau}\tau^{3/2-\omega} \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\widetilde{\mu}_\lambda(\tau)d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{60}$$

где функция $\widetilde{\mu}_\lambda(t)$ определяется из (58) и $\widetilde{\mu}_\lambda(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$. Учитывая неотрицательность функций $\mathrm{erf}\,(x/(2\sqrt{t}))$ и $G(x,\xi,t)$ заключаем, что функция (60) полностью удовлетворяет граничной задаче (1) и принадлежит классу (6).

Далее, согласно (18) запишем решение задачи (2) в виде:

$$v(x,t) = -\overline{\lambda}\int\limits_t^\infty e^{\tau}\tau^{\omega-3/2} G_{\xi\xi}(x,\xi,\tau-t)_{|\xi=\tau^\omega}\widetilde{\nu}_\lambda(\tau)d\tau + \int\limits_t^\infty\int\limits_0^\infty G(x,\xi,\tau-t)g(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{61}$$

где функция $\widetilde{\nu}_\lambda(t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$ определяется из соотношения (56).

Для того чтобы функция $v(x,t)$ была из класса (7) достаточно выполнение условий:

$$e^{-t}t^{3/2-\omega}\int\limits_t^\infty e^{\tau}\tau^{\omega-3/2}G_{\xi\xi}(x,\xi,\tau-t)_{|\xi=\tau^\omega}\widetilde{\nu}(\tau)d\tau \in L_\infty(\mathbb{R}_+^t; L_1(\mathbb{R}_+^x)), \tag{62}$$

$$e^{-t}t^{3/2-\omega}\int\limits_t^\infty\int\limits_0^\infty G(x,\xi,\tau-t)g(\xi,\tau)d\xi d\tau \in L_\infty(\mathbb{R}_+^t; L_1(\mathbb{R}_+^x)). \tag{63}$$

Включение (63) действительно имеет место согласно условиям (5). А включение (62) равносильно неравенству

$$e^{-t}t^{3/2-\omega}\int\limits_0^\infty\int\limits_t^\infty e^{\tau}\tau^{\omega-3/2}G_{\xi\xi}(x,\xi,\tau-t)_{|\xi=\tau}\widetilde{\nu}(\tau)d\tau dx \le \|\widetilde{\nu}\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \le \infty.$$

Очевидно, что для производных функции $v(x,t)$: $v_t(x,t)$, $v_{xx}(x,t)$ справедливо включение

$$e^{-t}t^{-\omega}(x+\sqrt{t})(v_t + v_{xx}) \in L_\infty(\mathbb{R}_+^t; L_1(\mathbb{R}_+^x)).$$

Сформулируем полученные результаты по разрешимости граничных задач (1) и (2) в виде следующих теорем.

Теорема 3. *Если* $\lambda \in D_0$ *(11) из [27], то для* $\forall f$ *из (5) граничная задача (1) имеет единственное решение* $u \in \mathscr{U}$ *(6). Если* $\lambda \in \{\mathbb{C}\setminus D_0\} \cap \{D_m \cup \Gamma_{m-1} \setminus \{(-1)^m e^{m\pi}\}\}$ *(11) из [27], то для однозначной разрешимости граничной задачи (1) в классе* $\mathscr{U}$ *(8) необходимо и достаточно, чтобы функция* f *из (5) удовлетворяла условиям ортогональности:*

$$\int\limits_0^\infty \overline{v_{\lambda k}(x,t)}f(x,t)dxdt = 0, \ \ k = 1,...,m = N_1 + N_2 + 1. \tag{64}$$

Теорема 4. *Если $\lambda \in D_0$ (11) из [27], то для $\forall g$ из (5) граничная задача (2) имеет единственное решение $v \in \mathcal{V}$ (7). Если $\lambda \in \{\mathbb{C} \setminus D_0\} \cap \{D_m \cup \Gamma_{m-1} \setminus \{(-1)^m e^{m\pi}\}\}$ (11) из [27], то для $\forall g$ из (5) граничная задача (2) имеет общее решение $v \in \mathcal{V}$ (7), состоящее из решения $v_{одн.}(x,t)$ однородного уравнения*

$$v_{одн.}(x,t) = \sum_{k=1}^{m} c_k v_{\lambda k}(x,t), \tag{65}$$

$$v_{\lambda k}(x,t) = -\overline{\lambda} \int_t^\infty \tau^{\omega-3/2} erf\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau - t}}\right) \nu_{\lambda k}(\tau) d\tau, \quad k = 1, ..., m, \tag{66}$$

где $\nu_{\lambda k}(t) = [\widehat{\mathbf{K}}^*_\lambda]^{-1}[\exp\left(-\frac{iz_k}{\alpha} \cdot t^\alpha\right)]^{-1})]$, $k = 1, ..., m = N_1 + N_2 + 1$, c_k- *произвольные постоянные, плюс частного решения* $v_{\text{част.}}(x,t)$:

$$v_{\text{част.}}(x,t) = -\overline{\lambda} \int_t^\infty \tau^{\omega-3/2} \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau - t}}\right) [\widehat{\mathbf{K}}^*_\lambda]^{-1} \hat{g}(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_t^\infty \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) g(\xi, \tau) d\xi d\tau. \tag{67}$$

Заключение. Установлено, что рассматриваемая в работе граничная задача для спектрально-нагруженного уравнения теплопроводности с точкой нагрузки по пространственной переменной ($\overline{x}(t) = t^\omega$, $-\infty < \omega < 1/2$) движущейся с переменной скоростью является нетеровой с неположительным индексом. Определена зависимость индекса задачи от значений коэффициента при нагруженном слагаемом.

Цитированная литература

1. **Нахушев А. М.** // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 86 – 94.
2. **Нахушев А. М.** Уравнения математической биологии. М., 1995.
3. **Дженалиев М. Т.** К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы, 1995.
4. **Дженалиев М. Т.** // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 1. С. 48 – 54.
5. **Кожанов А. И.** // Математические заметки. 2004. Т.76, вып. 6. С. 840 – 853.
6. **Рамазанов М. И.** // Доклады АМАН (Нальчик). 2004. Т.7, № 1. С. 84 – 91.
7. **Амангалиева М. М., Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.** // Доклады АМАН (Нальчик). 2004. Т.7, № 1. С. 18 – 23.
8. **Амангалиева М. М., Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И., Туймебаева А. Е.** // Мат. журнал. Алматы. 2006. Т. 6, № 1(19). С. 33 – 46.
9. **Амангалиева М. М., Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И., Туймебаева А. Е.** // Мат. журнал. Алматы 2006. Т. 6, № 2(20). С. 37–44.
10. **Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.** // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск, 2007. С. 114 – 127.
11. **Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И., Туймебаева А. Е.** // Препринт №6, ИМ ЦФМИ МОН РК. 2006. Алматы. 40с.

12. **Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.** // Диффер. уравн. 2007. Т. 43, № 4. С. 498 – 508.

13. **Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.** // Диффер. уравн. 2007. Т. 43, № 6. С. 788 – 794.

14. **Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.** // Сибирский мат. журнал. 2006. Т. 47, № 3. С. 527 – 547.

15. **Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.** Неравенства. М., 1948.

16. **Краснов М. Л.** Интегральные уравнения. М., 1975.

17. **Полянин А. Д., Манжиров А. В.** Справочник по интегральным уравнениям. М., 2003.

18. **Кириллов А. А., Гвишиани А. Д.** Теоремы и задачи функционального анализа. М., 1979.

19. **Мизохата С.** Теория уравнений с частными производными. М., 1977.

20. **Владимиров В. С.** Обобщенные функции в математической физике. М., 1979.

21. **Хермандер Л.** Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. I. Теория распределений и анализ Фурье. М., 1986.

22. **Шубин М. А.** Лекции об уравнениях математической физики. М., 2001.

23. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. М., 1958.

24. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения. М., 1962.

25. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи. М., 1963.

26. **Векуа И. Н.** Обобщенные аналитические функции. М., 1959.

27. **Ахманова Д. М., Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.** // Мат. журнал. Алматы. 2008. Т. 8, № 2(28). С. 25 – 37.

28. **Ахманова Д. М., Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.** // Мат. журнал. Алматы. 2008. Т. 8, № 3(29). С. 26 – 38.

Поступила в редакцию 16.06.2008г.

Математический журнал. *Алматы. 2008. Том 8. № 4 (30) . С. 44 – 47*

УДК 517.5

ОЦЕНКИ ЛИНЕЙНЫХ ПОПЕРЕЧНИКОВ ЕДИНИЧНОГО ШАРА ПРОСТРАНСТВА НИКОЛЬСКОГО-БЕСОВА ОБОБЩЕННОЙ СМЕШАННОЙ ГЛАДКОСТИ

Д. Б. Базарханов

Институт математики МО и Н РК
Алматы ул.Пушкина, 125 dauren@math.kz

В предлагаемой заметке получены точные в смысле порядка оценки линейных поперечников единичного шара пространства Никольского-Бесова $MB^{s,\epsilon}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ обобщенной смешанной гладкости ($s \in (0,\infty)^n$, $1 \le p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $1 \le n \le d$) в метрике $L_q(\mathbb{T}^d)$ $(1 \le q \le \infty)$ для ряда значений параметров s, p, θ, q.

I. Обозначения и определения функциональных пространств. Пусть $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ — множества натуральных, вещественных и комплексных чисел соответственно; $\mathbb{R}^d$ — d-мерное вещественное евклидово пространство, $\mathbb{T}^d$ — d-мерный тор ($\mathbb{T} = [0, 2\pi)$). Для $x = (x_1, \ldots, x_d), y = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ положим $(x, y) = \sum_1^d x_j y_j$, $|x| = \sqrt{(x, x)}$.

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$, $n \le d$; для произвольных $\varepsilon \subset \varepsilon_d = \{1, \ldots, d\}$ $(\varnothing \ne \varepsilon = \{j_1, \ldots, j_{|\varepsilon|}\}$, $1 \le j_1 < \ldots < j_{|\varepsilon|} \le d$; здесь $|\varepsilon|$ — число элементов ε) и $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ положим $x(\varepsilon) = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_{|\varepsilon|}}) \in \mathbb{R}^{|\varepsilon|}$. Далее, фиксируем разбиение $\epsilon = \{\varepsilon^{(1)}, \ldots, \varepsilon^{(n)}\}$ множества ε_d (т.е. $\varepsilon_d = \cup_{i=1}^n \varepsilon^{(i)}$, $\varepsilon^{(i)} \cap \varepsilon^{(j)} = \varnothing$ при $i \ne j$, $\varepsilon^{(i)} \ne \varnothing$, $d_i := |\varepsilon^{(i)}|$, $i \in \varepsilon_n$). Для удобства для $x \in \mathbb{R}^d$ пишем $x = (x^1, \ldots, x^n)$, где $x^i = x(\varepsilon^{(i)}) \in \mathbb{R}^{d_i}$, $i \in \varepsilon_n$.

Для произвольных $\varepsilon \subset \varepsilon_n$ (включая $\varnothing$ и само ε_n), $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^d$, положим $z(\varepsilon) = (z_1(\varepsilon), \ldots, z_n(\varepsilon))$, $x[\varepsilon] = (x^1[\varepsilon], \ldots, x^n[\varepsilon])$ где $z_i(\varepsilon) = z_i$, $x^i[\varepsilon] = x^i$ при $i \in \varepsilon$ и $z_i(\varepsilon) = 0$, $x^i[\varepsilon] = 0 (\in \mathbb{R}^{d_i})$ при $i \in \overline{\varepsilon}$; иногда будет удобно считать $z(\varepsilon)$ точкой $(z_{i_1}, \ldots, z_{i_{|\varepsilon|}})$ пространства $\mathbb{R}^{|\varepsilon|}$, а $x[\varepsilon]$ точкой $(x^{i_1}, \ldots, x^{i_{|\varepsilon|}})$ пространства $\mathbb{R}^{d,\varepsilon} := \mathbb{R}^{d_{i_1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^{d_{i_{|\varepsilon|}}}$ (здесь и ниже $\varepsilon = \{i_1, \ldots, i_{|\varepsilon|}\}$, $1 \le i_1 < \ldots < i_{|\varepsilon|} \le n$).

Как обычно, $L_p = L_p(\mathbb{T}^d) (1 \le p \le \infty)$ – пространство измеримых функций $f : \mathbb{T}^d \to \mathbb{C}$, суммируемых в p-й степени (при $p = \infty$ существенно ограниченных) на $\mathbb{T}^d$, со стандартной нормой $\| f \|_p = \| f \mid L_p(\mathbb{T}^d) \|$;

Keywords: *Function space, mixed smoothness, linear width*
2000 Mathematics Subject Classification: 41A45, 26B40

$L^*_{\theta,\,\varepsilon} = L^*_\theta\,(\mathbb{R}^{d,\,\varepsilon})$ $(1 \le \theta \le \infty, \varnothing \ne \varepsilon \subset \varepsilon_n)$— пространство измеримых функций $\psi : \mathbb{R}^{d,\,\varepsilon} \to \mathbb{C}$ с конечной нормой

$$\|\,\psi\,|\,L^*_{\theta,\,\varepsilon}\,\| = \left(\int_{\mathbb{R}^{d,\,\varepsilon}} |\,\psi(x[\varepsilon])\,|^\theta \prod_{i\in\varepsilon} \frac{dx^i}{|x^i|^{d_i}} \right)^{1/\theta} \qquad (1 \le \theta < \infty),$$

$$\|\,\psi\,|\,L^*_{\infty,\,\varepsilon}\,\| = \text{ess sup}\,\{\,|\,\psi(x[\varepsilon])\,|\,:\,x[\varepsilon] \in \mathbb{R}^{d,\,\varepsilon}\,\}.$$

Для $f : \mathbb{T}^d \to \mathbb{C}$, $h = (h^1, \ldots, h^n) \in \mathbb{R}^d$, $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$, $\varnothing \ne \varepsilon \subset \varepsilon_n$ положим

$$\Delta^{k_i}(h^i)\,f(x) = \sum_{j=0}^{k_i} (-1)^{k_i+j} \mathrm{C}^j_{k_i}\, f(\ldots, x^i + j\cdot h^i, \ldots),$$

$$\Delta^{k(\varepsilon)}(h[\varepsilon])\,f(x) = \Delta^{k_{i_1}}(h^{i_1})\cdots\Delta^{k_{i_{|\varepsilon|}}}(h^{i_{|\varepsilon|}})\,f(x).$$

Определение. *Пусть $s = (s_1, \ldots, s_n) \in (0, \infty)^n$, $1 \le p\,, \theta \le \infty$, $k \in \mathbb{N}^n$ такое, что $k_i > s_i$, $i \in \varepsilon_n$. Пространство $MB = MB^{s,\,\epsilon}_{p\,\theta}(\mathbb{I}^d)$ состоит из всех функций $f \in L_p\,(\mathbb{I}^d)$, для которых выполняется условие*

$$\|\,\Delta^{k(\varepsilon)}(h[\varepsilon])\,f(\cdot)\,\|_p \cdot \prod_{i\in\varepsilon} |\,h^i|^{-s_i} \in L^*_{\theta,\,\varepsilon} \qquad \forall\ \ \varnothing \ne \varepsilon \subset \varepsilon_n;$$

норма функции $f \in MB$ определяется равенством

$$\|\,f\,|\,MB\,\| = \|\,f\,\|_p \ + \sum_{\varnothing\ne\varepsilon\subset\varepsilon_n} \|\,\|\,\Delta^{k(\varepsilon)}(h[\varepsilon])f(\cdot)\,\|_p \cdot \prod_{i\in\varepsilon} |\,h^i|^{-s_i}\,|\,L^*_{\theta,\,e}\,\|.$$

Замечание 1. *Пространства $MB^{s,\,\epsilon}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ при $n = 1$ совпадают с классическими пространствами Никольского-Бесова $B^s_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$, а при $n = d$ — с соответствующими пространствами (собственно) смешанной гладкости $MB^s_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$, подробнее см. [1], [2], [3]. В заметке [4] для пространств $MB^{s,\,\epsilon}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ (наряду с пространствами Лизоркина-Трибеля $MF^{s,\,\epsilon}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$) приведены различные характеризации и эквивалентные нормировки. В частности, установлено, что пространство $MB^{s,\,\epsilon}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ не зависит от $k\,:\,k_i > s_i\,(i \in \varepsilon_n)$, и нормы, определяемые по разным таким k, попарно эквивалентны.*

II. Линейные поперечники единичного шара пространства $MB^{s,\,\epsilon}_{p\theta}(\mathbb{T}^d)$ в метрике $L_q(\mathbb{T}^d)$. Напомним определение линейного N-поперечника единичного шара пространства $MB^{s,\,\epsilon}_{p\theta}(\mathbb{T}^d)$ в метрике L_q:

$$\lambda_N(MB^{s,\,\epsilon}_{p\,\theta},\,L_q) = \inf_A \sup_{\|f|MB\|\le 1} \|f - Af\|_q,$$

где нижняя грань берется по всем линейным операторам $A\,:\,L_q \to L_q$ с $rank(A) \le N$. Понятие линейного поперечника введено В.М. Тихомировым в 1960 г. [5]. Вычислению (главным образом, в одномерном случае) или оценке линейных поперечников компактов в различных функциональных пространствах посвящено много работ, здесь укажем лишь монографии [6, гл. 4], [7, гл. 8], [8, ch. I, §4; ch. II, §4], где приведены подробная библиография и история вопроса; см. также ниже ссылки в **Замечании 2**.

В заключение определим следующие вектор и числа: $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, $\sigma_i = \frac{s_i}{d_i}$, $i \in \varepsilon_n$; $\tau = \min\{\,\sigma_i\,:\,i \in \varepsilon_n\,\}$, $\nu = |\{\,i\,:\,\sigma_i = \tau\,\}|$ и, как обычно, p'— показатель, сопряженный с p.

Теорема. *A. Пусть $1 < p \le q \le 2$, $1 \le \theta \le \infty$ и $s \in (0,\infty)^n : \tau > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Тогда*

$$\lambda_N(MB^{s,\epsilon}_{p\,\theta},\, L_q) \asymp (N^{-1}\log^{\nu-1} N)^{\tau - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}} (\log^{\nu-1} N)^{(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta})_+}.$$

B. (i) *Пусть $1 < p \le 2 < q < p'$, $1 \le \theta \le \infty$ и $s \in (0,\infty)^n : \tau > \frac{1}{p}$. Тогда*

$$\lambda_N(MB^{s,\epsilon}_{p\,\theta},\, L_q) \asymp (N^{-1}\log^{\nu-1} N)^{\tau - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}} (\log^{\nu-1} N)^{(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})_+}.$$

(ii) *Пусть $1 < p \le 2$, $p' < q < \infty$, $2 \le \theta \le q$ и $s \in (0,\infty)^n : \tau > 1 - \frac{1}{q}$. Тогда*

$$\lambda_N(MB^{s,\epsilon}_{p\,\theta},\, L_q) \asymp (N^{-1}\log^{\nu-1} N)^{\tau + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}}.$$

Если выполнено одно из следующих двух условий:
C. $2 \le q < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ и $s \in (0,\infty)^n$;
D. $1 \le q < 2 \le p \le \infty$, $2 \le \theta \le \infty$ и $s \in (0,\infty)^n$,
то

$$\lambda_N(MB^{s,\epsilon}_{p\,\theta},\, L_q) \asymp (N^{-1}\log^{\nu-1} N)^{\tau} (\log^{\nu-1} N)^{(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})_+}.$$

E. Пусть $2 \le p \le q < \infty$, $2 \le \theta \le q$ и $s \in (0,\infty)^n : \tau > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Тогда

$$\lambda_N(MB^{s,\epsilon}_{p\,\theta},\, L_q) \asymp (N^{-1}\log^{\nu-1} N)^{\tau - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}.$$

F. Пусть $1 < q \le 2$, $1 \le \theta \le q$ и $s \in (0,\infty)^n : \tau > 1 - \frac{1}{q}$. Тогда

$$\lambda_N(MB^{s,\epsilon}_{1\,\theta},\, L_q) \asymp (N^{-1}\log^{\nu-1} N)^{\tau - 1 + \frac{1}{q}}.$$

G. Пусть $s \in (0,\infty)^n : \tau > \frac{1}{2}$. Тогда

$$\lambda_N(MB^{s,\epsilon}_{\infty\,1},\, L_\infty) \asymp (N^{-1}\log^{\nu-1} N)^{\tau}.$$

Замечание 2. *Точные в смысле порядка оценки линейных поперечников единичных шаров пространств Соболева $W^s_p(\mathbb{T}^d) \equiv F^s_{p\,2}(\mathbb{T}^d)$ и Никольского $H^s_p(\mathbb{T}^d) \equiv B^s_{p\,\infty}(\mathbb{T}^d)$ в метрике $L_q(\mathbb{T}^d)$ приведены в [8, ch. II, §4] (в действительности, там рассмотрен более общий анизотропный случай). Весьма полное изложение всей проблематики приближения функций с ограниченной смешанной производной (пространства $MW^s_p(\mathbb{T}^d) \equiv MF^s_{p\,2}(\mathbb{T}^d)$) или разностью (пространства $MH^s_p(\mathbb{T}^d) \equiv MB^s_{p\,\infty}(\mathbb{T}^d)$) (с $n = d$), включая и историю вопроса, дано в монографиях [9], [8] и обзоре [10]. Исследованию в этом направлении пространств $MB^s_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$, $1 \le \theta \le \infty$, при $n = d$ посвящены, в частности, цикл работ А.С. Романюка и ряд работ Э.М. Галеева. В частности, точные в смысле порядка оценки линейных поперечников единичных шаров пространств $MW^s_p(\mathbb{T}^d)$ и $MH^s_p(\mathbb{T}^d)$ в метрике $L_q(\mathbb{T}^d)$ для ряда соотношений между параметрами были получены Э.М. Галеевым, В.Н. Темляковым, А.С. Романюком (подробнее см., например, [11], [12], [13], [14], [15] и ссылки там). Приведенная выше теорема в случае $n = d$ доказана в [13], [14], [15]. Наконец, отметим, что в заметке [16] получены в ряде случаев точные по порядку оценки для ряда аппроксимативных характеристик единичного шара пространства $MB^{s,\epsilon}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ в метрике $L_q(\mathbb{T}^d)$ (наилучших приближений тригонометрическими полиномами со специальным спектром, наилучших N-членных тригонометрических приближений, колмогоровских и тригонометрических поперечников).*

Цитированная литература

1. **Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.** Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., 1996.

2. **Аманов Т.И.** Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. Алма-Ата, 1976.

3. **Schmeisser H.-J., Triebel H.** Topics in Fourier analysis and function spaces. Wiley, 1987.

4. **Базарханов Д.Б.** // Доклады РАН. 2005. Т.402, №3. С. 1 – 5.

5. **Тихомиров В.М.** // Успехи матем. наук. 1960. Т.15, №3. С. 81 – 120.

6. **Тихомиров В.М.** Некоторые вопросы теории приближений. М., 1976.

7. **Корнейчук Н.П.** Точные константы в теории приближения. М., 1987.

8. **Temlyakov V.N.** Approximation of Periodic Functions. Nova Science Publ., 1993.

9. **Темляков В.Н.** // Тр. МИАН СССР. 1986. Т.178. 112 с.

10. **Temlyakov V.N.** // Found. Comp. Math. 2003. V.3. P. 33 – 107.

11. **Темляков В.Н.** // Тр. МИАН СССР. 1989. Т.189. С. 138 – 168.

12. **Галеев Э.М.** // Матем.заметки. 1996. Т.59, №2. С. 189 – 199.

13. **Романюк А.С.** // Укр. матем. ж. 2001. Т.53, №5. С. 647 – 661.

14. **Романюк А.С.** // Укр. матем. ж. 2001. Т.53, №6. С. 820 – 829.

15. **Романюк А.С.** // Матем. сб. 2008. Т.199, №2. С. 93 – 114.

16. **Базарханов Д.Б.** // Доклады РАН. 2009. Т.426, №1.

Поступила в редакцию 18.09.2008г.

Математический журнал. *Алматы. 2008. Том 8. № 4 (30) . С. 48 – 51*

УДК 517.948.34

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

М. К. Дауылбаев

Казахский национальный университет им. аль-Фараби
050012 Алматы ул.Масанчи, 39/47 dauyl@kaznu.kz

В работе исследуются линейные интегро-дифференциальные уравнения с начальными условиями во внутренней точке данного отрезка, когда наличие интегральных членов качественно изменит асимптотическое поведение решений соответствующих дифференциальных уравнений. Даются интегральное представление и оценки решений исходной задачи.

Рассмотрим на отрезке [0,1] линейное дифференциальное уравнение:

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon\, y^{(n)} + A_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + A_n(t)y = F(t) \tag{1}$$

с начальными условиями в точке $t_0 \in (0,1]$:

$$y(t_0,\varepsilon) = \alpha_0, \quad y'(t_0,\varepsilon) = \alpha_1, \ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0,\varepsilon) = \alpha_{n-1}, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $\alpha_i,\ i = \overline{0, n-1}$ – известные постоянные.

Пусть выполнены следующие условия:

I. Функции $A_i(t),\ i = \overline{1,n},\ F(t)$ на отрезке $[0,1]$ являются достаточно гладкими.

II. $A_1(t) \geq \gamma = const > 0,\ 0 \leq t \leq 1$.

Так как $A_1(t) > 0$, то решение задачи (1), (2) при $\varepsilon \to 0$ стремится на $t_0 \leq t \leq 1$ к конечному пределу, являющемуся решением обычной вырожденной задачи $L_0 y(t) = F(t)$, $y^{(i)}(t_0) = \alpha_i$, $i = \overline{0, n-2}$, а в полуинтервале $0 \leq t < t_0$ стремится к бесконечности и, следовательно, не имеет конечного предела.

Добавим теперь в правую часть уравнения (1) интегральные члены

$$\int\limits_a^1 [H_0(t,x)y(x,\varepsilon) + H_1(t,x)y'(x,\varepsilon) + \cdots + H_{m+1}(t,x)y^{(m+1)}(x,\varepsilon)]dx,$$

Keywords: *integro-differential equations, initial leap, singular perturbation, asymptotic behavior*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B40

где $0 \le a < t_0 \le 1$, m – любое целое число, удовлетворяющее неравенствам $0 \le m \le n-2$, а для функции $H_i(t,x)$, $i=\overline{0,m+1}$, предположим выполнение условия:

III. $H_i(t,x)$, $i=\overline{0,m+1}$, в области $D=(0 \le t \le 1,\ a \le x \le 1)$ являются достаточно гладкими функциями и $H_{m+1}(t,) \neq 0$.

Тогда, вместо дифференциального уравнения (1) получим интегро-дифференциальное уравнение вида:

$$\begin{aligned} L_\varepsilon y \equiv \varepsilon\, y^{(n)} + A_1(t)y^{(n-1)} + \dots + A_n(t)y = F(t) + \\ + \int_a^1 [H_0(t,x)y(x,\varepsilon) + H_1(t,x)y'(x,\varepsilon) + \dots + H_{m+1}(t,x)y^{(m+1)}(x,\varepsilon)]dx. \end{aligned} \tag{3}$$

Случаи $a=0$, $t_0=1$ рассмотрены в работах [1-4].

Рассмотрим сначала однородное интегро-дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} L_\varepsilon y \equiv \varepsilon\, y^{(n)}(t,\varepsilon) + A_1(t)y^{(n-1)}(t,\varepsilon) + \dots + A_n(t)y(t,\varepsilon) = \\ = \int_a^1 [H_0(t,x)y(x,\varepsilon) + \dots + H_{m+1}(t,x)y^{(m+1)}(x,\varepsilon)]dx. \end{aligned} \tag{4}$$

Пусть функции $Q_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{0,n-1}$, являются решениями уравнения (4) с начальными условиями в точке $t=a$:

$$Q_i^{(j)}(a,\varepsilon) = \delta_{ij}, \quad j=\overline{0,n-1}, \tag{5}$$

а функции $\Phi_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{0,n-1}$, – решения того же уравнения (4), но с начальными условиями в точке $t=t_0$:

$$\Phi_i^{(j)}(t_0,\varepsilon) = \delta_{ij}, \quad j=\overline{0,n-1}, \tag{6}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

IV. Число $\lambda=1$ при достаточно малых ε не является собственным значением ядра

$$K_\varepsilon(t,s) = \frac{1}{\varepsilon}\int_s^1 [H_0(t,x)K_{n-1}(x,s,\varepsilon) + \dots + H_{m+1}(t,x)K_{n-1}^{(m+1)}(x,s,\varepsilon)]dx,$$

где $K_i(t,s,\varepsilon)$ – начальные функции (см., например [1,3]).

Лемма 1. *Пусть выполнены условия I-IV. Тогда функции* $Q_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{0,n-1}$, *на отрезке* $a \le t \le 1$ *существуют, единственны и представимы в виде*:

$$Q_i(t,\varepsilon) = K_i(t,a,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_a^t K_{n-1}(t,s,\varepsilon)[a_i(s,0,\varepsilon) + \int_a^1 R_\varepsilon(s,p)a_i(p,0,\varepsilon)dp]ds, \tag{7}$$

где $a_i(t,s,\varepsilon) = \int_s^1 [H_0(t,x)K_i(x,s,\varepsilon) + \dots + H_{m+1}(t,x)K_i^{(m+1)}(x,s,\varepsilon)]dx$, $i=\overline{0,n-1}$, $K_i(t,s,\varepsilon)$ *– начальные функции, а* $R_\varepsilon(t,s)$ *– резольвента ядра* $K_\varepsilon(t,s)$.

Рассмотрим определитель $\omega(t_0,\varepsilon) = \det\{Q_i^{(j)}(t_0,\varepsilon)\}$, $i=\overline{0,n-1}$ – номер столбца, $j=\overline{0,n-1}$ – номер строки. Для определителя $\omega(t_0,\varepsilon)$ справедливо асимптотическое при $\varepsilon \to 0$ представление:

$$\omega(t_0,\varepsilon) = -\varepsilon^{n-1-m}(\Delta_0^{(n-1)}(0,0))^{n-1}\Delta_0^{(m)}(0,0)[\bar\omega(t_0) + O(\varepsilon)], \tag{8}$$

где $\Delta_0^{(j)}(0,0) = \bar{\mu}^{j-n+1}(0)$, а $\bar{\omega}(t_0)$ – не зависящая от ε главная часть асимптотического представления (8), имеющая вид:

$$\bar{\omega}(t_0) = \begin{vmatrix} T_0(t_0) & \dots & T_{n-2}(t_0) & \bar{H}_{m+1}(t_0) \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ T_0^{(n-2)}(t_0) & \dots & T_{n-2}^{(n-2)}(t_0) & \bar{H}_{m+1}^{(n-2)}(t_0) \\ \bar{T}_0^{(n-1)}(t_0) & \dots & \bar{T}_{n-2}^{(n-1)}(t_0) & \bar{\bar{H}}_{m+1}^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix}, \tag{9}$$

а $\bar{T}_i^{(n-1)}(t) \equiv T_i^{(n-1)}(t) + S_i(t)$, $\bar{\bar{H}}_{m+1}^{(n-1)}(t) \equiv \bar{H}_{m+1}^{(n-1)}(t) + \tilde{H}_{m+1}(t)$, $i = \overline{0, n-2}$, а функции $T_i^{(j)}(t)$, $\bar{H}_{m+1}^{(j)}(t)$, $S_i(t)$, $\tilde{H}_{m+1}(t)$, $i = \overline{0, n-2}$, $j = \overline{0, n-1}$, определенным образом выражаются через коэффициенты уравнения (3).

Предположим, что выполнено условие:

V. $\bar{\omega}(t_0) \neq 0$.

Лемма 2. *Если выполнены условия I-V, то функции $\Phi_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{0, n-1}$, на отрезке $a \le t \le 1$ существуют, единственны и выражаются формулой*

$$\Phi_i(t,\varepsilon) = \frac{\omega_{i+1}(t,t_0,\varepsilon)}{\omega(t_0,\varepsilon)}, \quad i = \overline{0, n-1}, \tag{10}$$

где $\omega(t_0,\varepsilon)$ имеет представление (8), а $\omega_{i+1}(t,t_0,\varepsilon)$, $i = \overline{0, n-1}$ – определитель, получаемый из $\omega(t_0,\varepsilon)$ заменой его $(i+1)-$ой строки строкой $(Q_0(t,\varepsilon), \dots, Q_{n-1}(t,\varepsilon))$. Для функций $\Phi_i(t,\varepsilon), i = \overline{0, n-1}$, при $a \le t \le 1$ справедливы следующие асимптотические при $\varepsilon \to 0$ представления:

$$\begin{gathered} \Phi_i^{(j)}(t,\varepsilon) = \frac{\bar{\omega}_{i+1}^{(j)}(t,t_0)}{\bar{\omega}(t_0)} + O(\varepsilon), \quad j = \overline{0, m-1}, \\ \Phi_i^{(m)}(t,\varepsilon) = \frac{\bar{\omega}_{i+1}^{(m)}(t,t_0)}{\bar{\omega}(t_0)} + \frac{\Delta_0^{(m)}(t,0)}{\Delta_0^{(m)}(0,0)} \cdot \frac{A_{i+1,n}}{\bar{\omega}(t_0)} \cdot \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t \bar{\mu}(x)dx\right) + O(\varepsilon), \\ \Phi_i^{(m+j)}(t,\varepsilon) = \frac{\bar{\omega}_{i+1}^{(m+j)}(t,t_0)}{\bar{\omega}(t_0)} + \frac{1}{\varepsilon^i} \cdot \frac{\Delta_0^{(m+j)}(t,0)}{\Delta_0^{(m)}(0,0)} \cdot \frac{A_{i+1,n}}{\bar{\omega}(t_0)} \cdot \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t \bar{\mu}(x)dx\right) + \\ + O\left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^{j-1}} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t \bar{\mu}(x)dx\right)\right), \ j = \overline{1, n-1-m}, \end{gathered} \tag{11}$$

где $\bar{\mu}(t) = -A_1(t) < 0$, $\bar{\omega}(t_0)$ имеет вид (9), $\bar{\omega}_{i+1}^{(j)}(t,t_0), i,j = \overline{0, n-1}$, – определитель, получаемый из $\bar{\omega}(t_0)$ заменой его $(i+1)-$ой строки строкой из элементов $T_0^{(j)}(t), \dots, T_{n-2}^{(j)}(t)$, $\bar{H}_{m+1}^{(j)}(t)$ для $j = \overline{0, n-2}$ и строкой из элементов $\bar{T}_0^{(n-1)}(t), \dots, \bar{T}_{n-2}^{(n-1)}(t)$, $\bar{\bar{H}}_{m+1}^{(n-1)}(t)$ для $j = n-1$, $A_{i+1,n}$, $i = \overline{0, n-1}$, – алгебраическое дополнение $(i+1)$-го элемента последнего столбца $\bar{\omega}(t_0)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия I-V. Тогда решение задачи (3), (2) на отрезке $a \le t \le 1$ существует, единственно и выражается формулой*

$$y(t,\varepsilon) = (\alpha_0 - P(t_0,\varepsilon))\,\Phi_0(t,\varepsilon) + \dots + \left(\alpha_{n-1} - P^{(n-1)}(t_0,\varepsilon)\right)\Phi_{n-1}(t,\varepsilon) + P(t,\varepsilon), \tag{12}$$

где функции $\Phi_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{0, n-1}$, являются решениями однородной интегро-дифференциальной задачи (4), (6) и представимы в виде (7), а функция $P(t,\varepsilon)$ является решением неоднородного *интегро-дифференциального уравнения (3) с нулевыми начальными условиями в точке* $t = a$ *, и имеет вид*:

$$P(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_a^t K_{n-1}(t,s,\varepsilon)[F(s) + \int\limits_a^1 R_\varepsilon(s,p)F(p)dp]ds. \tag{13}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия I-V. Тогда на отрезке* $[a,1]$ *для решения* $y(t,\varepsilon)$ *задачи (3), (2) при* $\varepsilon \to 0$ *справедливы следующие асимптотические оценки:*

$$\left|y^{(i)}(t,\varepsilon)\right| \le \frac{K}{\bar\omega(t_0)}\left(|\alpha_0| + \cdots + |\alpha_{n-1}| + \|F(t)\|\right), \quad i = \overline{0, m-1}, \tag{14}$$

$$\left|y^{(m)}(t,\varepsilon)\right| \le \frac{K}{\bar\omega(t_0)}\left(1 + \exp\left(-\gamma\frac{t-a}{\varepsilon}\right)\right)\left(|\alpha_0| + \cdots + |\alpha_{n-1}| + \|F(t)\|\right),$$

$$\left|y^{(m+j)}(t,\varepsilon)\right| \le \frac{K}{\bar\omega(t_0)}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon^j}\exp\left(-\gamma\frac{t-a}{\varepsilon}\right)\right)\left(|\alpha_0| + \cdots + |\alpha_{n-1}| + \|F(t)\|\right), \quad j = \overline{1, n-1-m},$$

где $K > 0, \gamma > 0$ *– некоторые постоянные, не зависящие от* ε*.*

Доказательство теоремы следует из (14) с учетом (11), (13).

Введем понятие порядка начального скачка.

Определение 1. *Будем говорить, что решение интегро-дифференциальной задачи (3), (2) обладает явлением начального скачка* $k-$ *го порядка в окрестности точки* $t = a$ *, если оно в окрестности этой точки имеет следующий порядок роста:*

$$y^{(k+1)}(a,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad y^{(k+2)}(a,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right), \ldots, \quad y^{(n-1)}(a,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^{n-1-k}}\right), \quad \varepsilon \to 0.$$

Из теоремы 2.2 следует, что значения $y^{(i)}(a,\varepsilon), i = \overline{0,m}$, ограничены при $\varepsilon \to 0$, а значения $y^{(i)}(a,\varepsilon)$, $i = \overline{m+1, n-1}$, при $\varepsilon \to 0$ являются бесконечно большими порядка $O\left(\frac{1}{\varepsilon^{i-m}}\right)$, $i = \overline{m+1, n-1}$. Тогда, согласно определению решение задачи (3), (2) в точке $t = a$ обладает явлением начального скачка $m-$ го порядка.

Цитированная литература

1. **Касымов К.А., Дауылбаев М.К.** // Дифференциальные уравнения. 1999. Т.35, №6. С. 822 – 830.

2. **Дауылбаев М.К., Касымов К.А.** // Ред. Сиб.мат.журн. 2003. 20 с. (Деп.в ВИНИТИ, 13.03.2003, № 449-В 2003).

3. **Касымов К.А., Дауылбаев М.К.** // Известия ВУЗов. Математика. 2003. №7 (494). С. 70 – 75.

4. **Дауылбаев М.К.** Сингулярно возмущенные интегро-дифференциальные уравнения. Алматы. 1999.

Поступила в редакцию 24.10.2008 г.

Математический журнал. *Алматы. 2008. Том 8. № 4 (30) . С. 52 – 58*

УДК 517.95:515.12

ДОКАЗАТЕЛЬНОЕ КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ОПРЕДЕЛЯЕМОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ

А. Х. Жораев

Кыргызско-Узбекский университет
Кыргызстан. г.Ош ул.Г.Айтиева, 17 jjk_kuu@mail.ru

Установлено, что риманова поверхность над комплексной плоскостью, определяемая начальной задачей для дифференциального уравнения первого порядка с правой частью, являющейся отношением двух аналитических функций, является кинематическим пространством (можно ввести метрику, соответствующую минимальному времени передвижения между двумя точками поверхности). Построен интерактивный доказательный алгоритм, дающий пользователю возможность двигаться по римановой поверхности и определять границы областей, содержащих точки ветвления.

1. Основные определения и постановка задачи. В работе [1], а также в [2] было внесено общее предложение о наглядном представлении математических объектов в научных и учебных целях. Это дает дополнительные возможности в преподавании математических дисциплин, а также возможность использовать интуицию человека для решения различных задач, которые раньше считались абстрактными. В [3] было предложено использовать для этой цели понятие инвариантов в различных разделах математики. Это предложение было реализовано для некоторых геометрических понятий в [4].

Далее в [1] отмечено, что можно осуществлять движение на римановых поверхностях над комплексной плоскостью, определяемых дифференциальными уравнениями, но не построены конкретные алгоритмы, не были выявлены условия, при которых римановы поверхности являются кинематическими пространствами.

В данной статье такие достаточные условия установлены и построен алгоритм, осуществляющий движение по римановой поверхности с получением гарантированных границ для значений функции, а также определяющий возможные особые точки.

Отметим, что в [5] такие условия были выявлены для римановых поверхностей над комплексной плоскостью, определяемых алгебраическими уравнениями.

В [1] было также предложено следующее.

Keywords: *Riemann surface, analytical functions, kinematical space*
2000 Mathematics Subject Classification: 34A12, 30F30

Рассмотрим реального человека, сидящего за дисплеем (абстракция сейчас состоит в том, что смена кадров и экран дисплея предполагаются непрерывными). В данный момент он видит на экране изображение некоторого элемента σ_0 множества G и желает получить на нем изображение другого элемента σ_1.

Было введено следующее

Определение 1 (нестрогое). *Если*

1) человек может получить это изображение только через какое-то время t_{01} (временем на задание элемента σ_1 пренебрегаем);

2) в течение всего времени t_{01} на экране будут изображения элементов множества G;

3) изображения будут меняться непрерывно, и в любой момент человек может остановить смену изображений, то компьютерную программу, дающую такие возможности, будем называть кинематическим компьютерным представлением множества G .

Такой процесс в [1] предложено считать реальным движением от σ_0 к σ_1 , поскольку дисплей – это реальный объект. Таким образом, возникла гипотеза о новом виде движения (в отличие от механического, химического и т.д.).

Если дополнительно предположить, что минимальные времена передвижения от σ_0 к σ_1 и от σ_1 к σ_0 равны, то из Определения 1 следует, также введенное в [1].

Определение 2 (строгое). *Кинематическим пространством (К-пространством) будем называть пару: множество G точек и множество маршрутов. Каждый маршрут $M\in K$, в свою очередь, состоит из положительного числа T_M (время маршрута) и функции $m_M : [0, T_M] \to G$ (траектория маршрута).*

Выполняются следующие свойства:

(K1) Для любых различных точек σ_1 и σ_2 из G существует такое $M\in K$, что $m_M(0) = \sigma_1$ и $m_M(T_M) = \sigma_2$, и множество значений T_M для таких M ограничено снизу положительным числом {сколь угодно быстрое передвижение невозможно}.

(K2) Если $\{T_M, m_M(T_M t)\} \in K$, то $\{T_M, m_M(T_M - t)\}$ также принадлежит K {движение в обратном направлении}.

(K3) Если $\{T_M, m_M(T_M t)\} \in K$, то и $T^* \in (0, T_M)$, то пара: T^* и функция $m*(t) = m_M(t)$ $(0 \le t \le T^*)$ также принадлежит K {можно остановиться в любой момент}.

(K4) Если $\{(T_1, m_1(t)\} \in K$, $\{T_2, m_2(t)\} \in K$ и $m_1(T_1) = m_2(0)$, то пара, состоящая из числа $T^* = T_1 + T_2$ и функции

$$m^*(t) = \begin{cases} m_1(t), \ (0 \le t < T_1), \\ m_2(t - T_1), \ (T_1 \le t \le T_1 + T_2 = T^*), \end{cases}$$

также принадлежит K {транзитивность} .

Очевидно также, что K-пространство является линейно связным метрическим топологическим пространством с метрикой

$d_K(\sigma_1, \sigma_2) = inf\{T_M : M \in K, \ m_M(0) = \sigma_1 \text{ и } m_M(T_M) = \sigma_2\}$.

Такая метрика также называется кинематической.

Мы также предлагаем

Определение 3. *Если множество значений T_M в (K1) замкнуто (имеет точную нижнюю грань), иными словами, существует такой маршрут, соединяющий эти точки, что его время в точности равно $d_K(\sigma_1, \sigma_2)$, то такие точки будем называть прямо соединенными, а иначе – непрямо соединенными.*

2. Кинематическое построение римановой поверхности. Применительно к подходу [1] построение кинематического пространства – римановой поверхности (см. например [6]) осуществляется следующим образом.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$w'(z) = f(z, w(z)), \tag{1}$$

где $f(z,w)$ – (по крайней мере локально) определенная и аналитическая функция своих переменных, с начальным условием

$$w(z_0) = w_0, \tag{2}$$

где z_0, w_0 – комплексные числа.

Пара точек (комплексный вектор) $\{ z_0, w_0 \}$ находится в области определения функции $f(z,w)$.

Пара точек $\{ z_0, w_0 \}$ составляет элемент римановой поверхности.

Пусть $\widetilde{z}$ – некоторая другая точка или эта же точка на комплексной плоскости, и $m-$ некоторая ломаная, соединяющая эти точки, состоящая из звеньев $m_1, m_2, \ldots, m_k$ и имеющая длину L; z_0 является "начальной" точкой отрезка m_1; при этом функция $f(z,w)$ определена на этой ломаной.

Обозначим через z_j "концевую" точку отрезка m_j, *j=1,. . . , k.*

Если существуют такие аналитические функции $\varphi_j(t)$, определенные на m_j каждая, что

1) $\varphi_1(z_0) = w_0$;

2) $\varphi_j'(z) \equiv f(z, \varphi_j(z))$ для всех точек $z \in m_j$;

3) для общей точки z_j отрезков m_j и m_{j+1}: $\varphi_j(z_j) = \varphi_{j+1}(z_j)$, $j = 1, \ldots, k-1$,

то пара $\{ \widetilde{z} = z_k,\ \varphi_k(z_k) \}$ также составит элемент римановой поверхности.

Примечание. Ломаная m может самопересекаться. Иными словами, два ее несмежных звена m_α и m_β могут иметь общую точку $z_{\alpha\beta}$. При этом значения функций $\varphi_\alpha(z_{\alpha\beta})$ и $\varphi_\beta(z_{\alpha\beta})$ могут быть различными.

Определим риманову поверхность S для (1) – (3), как множество пар точек $\{ \widetilde{z},\ \widetilde{w} \}$, для которых существует хотя бы одна такая ломаная с концевыми значениями $z_k = \widetilde{z}$, $\varphi(z_k) = \widetilde{w}$.

Если $\varphi_\alpha(z_{\alpha\beta}) \neq \varphi_\beta(z_{\alpha\beta})$, то говорится, что пары точек $\{z_{\alpha\beta}, \varphi_\alpha(z_{\alpha\beta})\}$ и $\{z_{\alpha\beta}, \varphi_\beta(z_{\alpha\beta})\}$ лежат на различных листах римановой поверхности.

Далее будем обозначать буквами с нижними индексами любые точки.

В соответствии с [1], введем

Определение 4. *Кинематическим расстоянием* $d_K(\{z_0,w_0\},\{z_1,w_1\})$ *между* $\{z_0,w_0\} \in S$ *и* $\{z_1,w_1\} \in S$ *назовем точную нижнюю грань длин* L *ломаных* m, *дающих в точке* z_1 *значение* w_1. *Кинематическим расстоянием* $d_K(\{z_1,w_1\},\{z_2,w_2\})$ *между* $\{z_1,w_1\} \in S$ *и* $\{z_2,w_2\} \in S$ *назовем точную нижнюю грань длин ломаных* m, *соединяющих точки* z_1 *и* z_2 *и соответственно связывающих между собой значения* w_1 *и* w_2.

(Поскольку обе эти пары точек можно связать ломаными с парой точек $\{z_0, w_0\}$ и выполнение тождества 2) не зависит от “направления” отрезка, ломаные, соединяющие обе пары точек, существуют.)

Корректность определения следует из:

Теорема 1. *Если функция* $f(z,w)$ *представима в виде:*

$f(z,w) = g(z,w)/h(z,w)$, *где*

$g(z,w), h(z,w)$ *– аналитические функции, и* $h(z,w)$ *не равна тождественно нулю, то риманова поверхность* S *пар точек* $\{z,w\}$ *является кинематическим пространством.*

Доказательство. Проверим выполнение аксиом Определения 2.

Выполнение (K1) доказывается следующим образом. Для двух не равных между собой элементов пространства $\{z_1, w_1\}$ и $\{z_2, w_2\}$ получаем следующее:

Если $z_1 \neq z_2$, то, очевидно, $d_K(\{z_1,w_1\},\{z_2,w_2\}) \geq |z_1 - z_2| > 0$.

Если $z_1 = z_2$, то должно быть $w_1 \neq w_2$.

Поскольку $h(z_1, w_1) \neq 0$, то в силу непрерывности существуют такие $\delta > 0, \delta < |w_2 - w_1|/2\tau > 0$, что $|h(z, w)| > \tau$ в области $S_\delta = \{(z, w) : |z - z_1| < \delta$ и $|w - w_1| < \delta\}$.

Обозначим

$$g_0 = \{sup\,|g(z, w)| \, : (z, w) \in S_\delta\}. \tag{3}$$

Перепишем уравнение (1) с начальным условием

$$w(z_1) = w_1 \tag{4}$$

вдоль ломаной $m(z)$ с начальной точкой z_1 и конечной точкой z в виде:

$$w(z) = w_1 + \int_m (z) f(s, w(s))ds. \tag{5}$$

Рассмотрим последовательные приближения:

$$w_0(z) \equiv w_1, \tag{6}$$

$$w_{k+1}(z) = w_1 + \int_m (z) f(s, w_k(s))ds, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Докажем методом полной математической индукции следующее: если длина $|m(z)|$ такой ломаной меньше

$$L_0 = min\{\delta, \delta\tau/g_0\}, \tag{8}$$

то для всех последовательных приближений:

$$|w_k(z) - w_1| \leq \delta, \quad |z - z_1| < L_0. \tag{9}$$

Для "$k = 0$" это выполняется по определению (6). Если (8) выполняется для "k", то из (3) и (8) получаем, что вдоль пути интегрирования (7) будет $|h(s, w_k(s))| > \tau$ и $|g(s, w_k(s))| \leq g_0$, откуда $|f(s, w_k(s))| < g_0/\tau$.

Из этой оценки получаем:

$|w_{k+1}(z) - w_1| \leq |m(z)| sup\{|f(s, w_k(s))| : s \in m(z)\} \leq min\{\delta, \delta\tau/g_0\} g_0/\tau = min\{\delta g_0/\tau, \delta\} \leq \delta.$

То есть доказано выполнение (9) для "$k + 1$".

Оценка (9) доказана для всех "k".

Поскольку последовательные приближения сходятся, то из (9) получаем, что $|w(z) - w_1| \leq \delta < |w_2 - w_1|/2$, то есть не может быть $w(z) = w_2$. Следовательно, длина любой замкнутой ломаной, начинающейся и заканчивающейся в z_1 и переводящей точку w_1 в точку w_2, должна быть больше, чем $L_0 > 0$.

Выполнение (K1) доказано.

Выполнение (K2) следует из того, что выполнение тождества 2) не зависит от "направления" отрезка.

Выполнение (K3), (K4) очевидно. Теорема доказана.

Пример 1. Положим $f(z, w) = 1/(2w), z_0 = 3, w_0 = -\sqrt{3}$. Тогда задача (1) – (2) принимает вид:

$w'(z) = 1/(2w(z))$,

$w(3) = -\sqrt{3}$.

Ее решение имеет вид: $w(z) = \sqrt{z}$ (нужно взять отрицательную ветвь для $\sqrt{3}$).

Некоторые кинематические расстояния:

$d_K(\{3 + 0i, -\sqrt{3 + 0i}\}, \{0 + 4i, -\sqrt{2} - \sqrt{2}i\}) = 5$ (точки соединены прямо),

$d_K(\{3+0i, -\sqrt{3+0i}\}, \{0+4i, \sqrt{2}+\sqrt{2}i\}) = 7$ (точки соединены непрямо – траектория может состоять из двух звеньев: $(3+0i)$ – $(-\varepsilon - \varepsilon i)$ – $(0+4i)$, где ε – сколь угодно малое положительное число),

$d_K(\{3+0i, -\sqrt{3+0i}\}, \{3+0i, \sqrt{3+0i}\}) = 6$ (точки соединены непрямо - траектория может состоять из трех звеньев: $(3+0i) - (-\varepsilon - \varepsilon i) - (-\varepsilon + \varepsilon i) - (3+0i))$.

3. Построение гарантированных границ и получение строгих результатов для непрерывных величин. Рассмотрим решение начальной задачи (1) – (2). Даже если заданная функция $f(z,w)$ – многочлен, найти решение в явном виде (как в примере 1) можно только в исключительных случаях. Если для построения решения этой задачи использовать один из приближенных методов решения начальной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, то результат не будет иметь доказательной силы. Как показал опыт, строгий учет вычислительной погрешности в содержательных задачах практически невозможен из-за сложности вычислений, необходимости учитывать явление "исчезновения порядка". В связи с этим, в [7] введено

Определение 4. *Доказательные вычисления – это вычисления, организованные таким образом, что полученные (числовые) результаты имеют гарантированное направленное отклонение от истинных.*

Или, в более общем виде: полученные результаты, интерпретируемые как континуальные множества, гарантированно содержат истинные.

Практически полученные на компьютере результаты представляются в виде наборов рациональных ("машинных вещественных") чисел.

Одним из способов реализации доказательных вычислений является интервальный анализ. Его применение к построению гарантированных границ решений обыкновенных дифференциальных уравнений см. в [8].

Применительно к нашей задаче получаем следующее. Если для двух точек $\{z, w_1\}$ и $\{z, w_2\}$ римановой поверхности с одинаковой (и точно представляемой в компьютере) первой компонентой удалось получить представленные в компьютере множества W_1 и W_2, гарантированно содержащие вторые компоненты соответственно этих точек, то из $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ следует, что $w_1 \neq w_2$, то есть эти две точки различны. Если же $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$, то вопрос остается неопределенным.

4. Описание алгоритма доказательных вычислений. Требуется определить, имеет ли риманова поверхность для задачи (1) – (2) особые точки и точки ветвления, при помощи движения по траекториям, задаваемым пользователем.

Для простоты мы опишем алгоритм на основе метода ломаных Эйлера (естественно, можно применять и интервальные аналоги более точных методов приближенного решения начальной задачи).

Рассмотрим опять ломаную m с "короткими" звеньями. Обозначим $w_j \approx \varphi_j(z_j), j = 1, \ldots, k$.

Из (1) получаем

$$w_j = w_{j-1} + (z_j - z_{j-1}) f(z_j, w_{j-1}),\ j = 1, \ldots, k. \tag{10}$$

Представим комплекснозначную функцию $f(z,w)$ в виде:

$$f(z,w) = p(z,w) + iq(z,w), \tag{11}$$

где $p(z,w)$ и $q(z,w)$ – соответственно действительная и мнимая части функции $f(z,w)$.

Для удобства пользователя и возможности точного возврата в уже пройденную точку будем рассматривать движение только по направлениям, параллельным осям координат. Пусть h – малое положительное (машинное) число.

При $z_j - z_{j-1} = \pm\ h$ получаем

$$w_j = w_{j-1} \pm h(p(z_{j-1}, w_{j-1}) + iq(z_{j-1}, w_{j-1})). \tag{12}$$

При $z_j - z_{j-1} = \pm$ ih получаем

$$w_j = w_{j-1} \pm h(ip(z_{j-1}, w_{j-1}) - q(z_{j-1}, w_{j-1})). \tag{13}$$

Вводя соответствующие обозначения, перепишем (12) и (13) в виде:

$$w_j = w_{j-1} + h(p_n(z_{j-1}, w_{j-1}) + iq_n(z_{j-1}, w_{j-1})), \tag{14}$$

где $n = 1$ (направление $+1$), или $n = 2$ (направление $+i$), или $n = 3$ (направление -1), или $n = 4$ (направление - i).

Для комплексных чисел будем использовать прямоугольные интервалы. Интервальные расширения функций и величин будем обозначать соответствующими заглавными буквами.

Через $\{u|v\}$ будем обозначать представление внешним интервалом [8] множества двух комплексных чисел $\{u, v\}$.

Известный факт интервального анализа применительно к нашей задаче в обозначениях, соответствующих (14), записывается следующим образом:

Если для некоторого комплексного интервала W :

$$w_{j-1} + [0, h](P_n(\{z_{j-1}|z_j\}, W) + iQ_n(\{z_{j-1}|z_j\}, W)) \subseteq W, \tag{15}$$

то решение уравнения (1) с начальным условием $w(z_{j-1}) = w_{j-1}$ существует на m_j и

$$w(z_j) \in w_{j-1} + h(P_n(\{z_{j-1}|z_j\}, W) + iQ_n(\{z_{j-1}|z_j\}, W)). \tag{16}$$

Получаем следующий

Алгоритм 1. По заданным (машинным числам) $h > 0$, начальным значениям z_0, w_0

А) Полагаем $j := 0, Z(j) := z_0, W(j) := w_0$ (одноточечные интервалы).

Б) Выводим $j, Z(j), W(j)$.

В) Если $j > 0$ и $Z(j) = Z(j_1)$ для каких-нибудь $j_1 < j$, то выводим сообщение "возврат в точку" и переходим к п. Г), иначе переходим к п. Д).

Г) Если $W(j) \cap W(j_1) = \emptyset$, то выводим (одно или несколько) сообщений "ветвление: см. шаг j_1".

Д) Запрашиваем число $n = 1$, 2, 3, 4, 5 (для удобства остановки алгоритма пользователем при $n = 5$ идти к п. К).

Е) В зависимости от значения n вычисляем $Z(j{+}1) = Z(j) \pm\ h$ или $\pm\ ih$ (одноточечный интервал). Переобозначаем j через $j + 1$.

Ж) Подбираем W такое, чтобы было
$W(j-1) + [0, h](P_n(\{Z(j-1)|Z(j)\}, W) + iQ_n(\{Z(j-1)|Z(j)\}, W)) \subseteq W$.

(Такой подбор можно осуществлять различными алгоритмическими способами. В каждом из них делается какое-либо ограниченное количество попыток.)

З) Если это не удалось, то выводим сообщение "продвижение к $Z(j + 1)$ не удалось", переобозначаем j через $j - 1$ и переходим к п. В), иначе

И) Вычисляем:
$W(j) = W(j-1) + [0, h](P_n(\{Z(j-1)|Z(j)\}, W) + iQ_n(\{Z(j-1)|Z(j)\}, W))$
и переходим к п. Б).

К) ВЫХОД.

При использовании этого алгоритма:

– в п. З) пользователь получает сообщения о возможных особых точках римановой поверхности;

– в п. Г) пользователь получает сообщение о (гарантированном) обходе одной из точек ветвления; получение нескольких различных значений $W(j)$ показывает порядок точки ветвления.

Цитированная литература

1. **Борубаев А.А., Панков П.С.** Компьютерные представления кинематических топологических пространств. Бишкек, 1999.

2. **Панков П.С., Табылды кызы Ж.** // Проблемы математики и информатики в XXI веке: Труды международной научной конференции. Вестник Кыргызского Государственного Национального университета. Сер. 3. Естественно-технические науки. Вып. 4. Математические науки. Информатика и информационные технологии. 2000. С. 297 – 299.

3. **Панков П.С., Табылды кызы Ж., Краснобородкина Т.В.** // Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике: Труды Международной научной конференции. Вестник Кыргызского Государственного Национального университета: Сер. 3. Естественно-технические науки. Вып. 6. Математические науки. Информатика и информационные технологии. 2001. С. 37 – 40.

4. **Панков П.С., Барыктабасов К.К.** // Вестник Кыргызского Государственного педагогического университета КГПУ им. И. Арабаева. Сер. 3, вып. 2: Педагогика. Психология. 2004. С. 56 – 60.

5. **Панков П.С., Жораев А.Х.** // Вестник Кыргызского Национального университета им. Ж. Баласагына. Сер. 6. Наука и инновационные образовательные технологии в вузе. Труды ИИМОП. Вып. 5. 2006. С. 422 – 426.

6. **Шабат Б.В.** Введение в комплексный анализ. Часть 1. Функции одного переменного. М., 1976. С. 154 – 203.

7. **Панков П.С.** Доказательные вычисления на электронных вычислительных машинах. Фрунзе, 1978.

8. **Шокин Ю.И.** Интервальный анализ. Новосибирск, 1981.

Поступила в редакцию 11.11.2008 г.

Математический журнал. *Алматы. 2008. Том 8. № 4 (30) . С. 59 – 67*

УДК 517.956.32

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА НА ПЛОСКОСТИ

Р. М. Жусипназаров, М. Б. Муратбеков

Таразский институт Международного казахско-турецкого университета им.Х.А. Ясауи
080000 Тараз ул.Койгельды, 192 risbektaraz@mail.ru

Рассматривается класс сингулярных гиперболических уравнений с растущими коэффициентами. Излагается метод построения решений. При некоторых ограничениях на коэффициенты получены коэрцитивные оценки решений в пространстве Соболева.

Введение и формулировка результатов. Пусть $\Omega = \{(x,\, y):\, -\infty < x < \infty,\, 0 < y < 1\}$. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$Lu = u_{xx} - u_{yy} + a(x)u_x + c(x)u, \quad u(x,y) \in C_0^\infty(\Omega), \tag{1}$$

с непрерывными коэффициентами. $C_0^\infty(\Omega)$ – множество, состоящее из бесконечно дифференцируемых функций финитных по переменной x и удовлетворяющих условиям $u(x,0) = u(x,1) = 0$.

В случае неограниченной области задача о разрешимости и гладкости решений уравнений гиперболического типа, оценки их решений в различных пространствах изучены в работах [1-5].

Методом разделения переменных разрешимость, гладкость и аппроксимативные свойства решений для дифференциального уравнения гиперболического типа

$$Lu = u_{xx} - u_{yy} + a(y)u_x + c(y)u = f(x,y), \qquad f(x,y) \in L_2(\Omega)$$

с растущими и колеблющимися коэффициентами исследовались в работах [6-7], где

$$\Omega = \{(x,\, y):\, -\infty < y < \infty,\, -\pi < x < \pi\}.$$

Обозначим через $K(\tau, b)$ класс коэффициентов, удовлетворяющих следующим условиям:
i) $|a(x)| \geq \delta_0 > 0,\ c(x) \geq \delta > 0$ – непрерывные функций в R ($R = (-\infty, +\infty)$);
ii) $c_0 c(x) \leq a^2(x) \leq c_1 c(x)$, $c_0 > 0$, $c_1 > 0$ – постоянные числа;

Keywords: *hyperbolic equations, singular differential equations, unlimited area, existence of the decision*
2000 Mathematics Subject Classification: 35L20

iii) $|a(x)-a(t)|^2+|c(x)-c(t)|\le \tau\, c(t)$,
для всех $x,\, t\in R$ таких, что $|x-t|\le bd(t)$, $d(t)=\frac{1}{[c(t)]^{\frac{1}{2}}}$, $\tau>0$, $b>0$.

Теорема 1. *Пусть $a(x),\, c(x)\in K(\tau,b)$. Тогда найдутся числа τ_0 и b_0 такие что, если $a(x),\, c(x)\in K(\tau,b)$ при некоторых $\tau\in(0,\,\tau_0)$ и $b>b_0$, то замыкание L оператора $L_0u=u_{xx}-u_{yy}+a(x)u_x+c(x)u$, $D(L_0)=C_0^{\infty}(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ существует.*

Теорема 2. *Пусть $a(x),\, c(x)\in K(\tau,b)$. Тогда найдутся числа τ_0 и b_0 такие что, если $a(x),\, c(x)\in K(\tau,b)$ при некоторых $\tau\in(0,\,\tau_0)$ и $b>b_0$, то оператор L имеет непрерывный обратный оператор.*

Теорема 3. *Пусть $a(x),\, c(x)\in K(\tau,b)$. Тогда найдутся числа τ_0 и b_0 такие что, если $a(x),\, c(x)\in K(\tau,b)$ при некоторых $\tau\in(0,\,\tau_0)$ и $b>b_0$, то справедлива оценка:*

$$\|u_x\|_2+\|u_y\|_2+\|u\|_2\le c\|Lu\|_2,$$

где $c>0$ – постоянное число.

1. Оператор с постоянными коэффициентами. Рассмотрим оператор

$$L_ju+\lambda u=u_{xx}-u_{yy}+a(x_j)u_x+(c(x_j)+\lambda)u \tag{2}$$

на $C_0^{\infty}(\Omega)$, $\lambda>0$, где $x_j\in R$ (их специальный выбор будет сделан позже), $j=1,\,2,\,\ldots$.

Нетрудно проверить, что оператор $L_j+\lambda E$ допускает замыкание в L_2 и замыкание также обозначим через $L_j+\lambda E$.

Утверждение 1.1. *Пусть выполнены условия i)-ii). Тогда*

a) для любого $u\in D(L_j)$ справедлива оценка $\|(L_j+\lambda E)u\|_2\ge c\cdot\|u\|_{2,1}$ ($\|u\|_{2,1}$ – норма пространства $W_2^1(\Omega)$);

b) оператор $L_j+\lambda E$ при $\lambda>0$ непрерывно обратим.

Утверждение 1.2. *Пусть выполнены условия i)-ii). Тогда справедливы оценки:*

a) $\left\|(L_j+\lambda E)^{-1}\right\|_{2\to2}\le\frac{c_0}{c(x_j)+\lambda}$;

b) $\left\|D_x(L_j+\lambda E)^{-1}\right\|_{2\to2}\le\frac{c_1}{|a(x_j)|}$;

c) $\left\|D_y(L_j+\lambda E)^{-1}\right\|_{2\to2}\le\frac{c_2}{\sqrt{c(x_j)+\lambda}}$, (3)

где $c_0>0,\, c_1>0,\, c_2>0$ – постоянные числа.

Для доказательства этих утверждений предварительно докажем несколько лемм.

Рассмотрим оператор

$$l_{j,t}u+\lambda u=-u_{yy}+(-t^2+ita(x_j)+c(x_j)+\lambda)u,\ (-\infty<t<\infty),$$

первоначально определенный в $C_0^{\infty}(0,1)$, где $C_0^{\infty}(0,1)$ – множество, состоящее из бесконечно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условиям $u(0)=u(1)=0$.

Лемма 1.1. *Пусть выполнены условия i)- ii). Тогда:*

a) $\|(l_{j,t}+\lambda E)u\|_2\ge|a(x_j)|\,|t|\,\|u\|_2,\quad u\in D(l_{j,t}),-\infty<t<\infty;$ (4)

b) $\sqrt{2}\|(l_{j,t}+\lambda E)u\|_2\ge(c(x_j)+\lambda)\ \|u\|_2,\quad u\in D(l_{j,t}),\ -\infty<t<\infty;$ (5)

c) $\frac{1}{\sqrt{c(x_j)+\lambda}}\|(l_{j,t}+\lambda E)u\|_2\ge\ \|u'\|_2,\quad u\in D(l_{j,t})$.

Лемма 1.2. *Пусть выполнены условия i)-ii) и $\lambda>0$. Тогда оператор $(l_{j,t}+\lambda E)$ непрерывно обратим в $L_2(0,1)$, причем*

$$\left\|(l_{j,t}+\lambda E)^{-1}\right\|_{2\to2}\le\frac{\sqrt{2}}{c(x_j)+\lambda}. \tag{6}$$

Доказательство леммы 1.1. Для всех $u \in C_0^\infty(0,1)$ имеем:

$$|< l_{j,t}u+\lambda u, u >| = \left|\int\limits_0^1 \left[|u_y|^2 + (-t^2 + ita(x_j) + c(x_j)+\lambda)|u|^2\right]dy\right|. \qquad (7)$$

Отсюда, используя свойства комплексных чисел, получаем, что

$$\|l_{j,t}u+\lambda u\|_2 \geq |t|\,|a(x_j)|\|u\|_2, (-\infty < t < \infty). \qquad (8)$$

Пункт $a)$ леммы 1.1. доказан.

Докажем пункт $b)$ леммы 1.1. Из (8), используя неравенства Коши с $\varepsilon > 0$ и Коши-Буняковского, имеем:

$$\frac{1}{2(c(x_j)+\lambda)}\|(l_{j,t}+\lambda E)u\|_2^2 + \frac{c(x_j)+\lambda}{2}\|u\|_2^2 \geq \int\limits_0^1 \left[|u'|^2 + (c(x_j)+\lambda)|u|^2\right]dy - \int\limits_0^1 t^2|u|^2 dy, \qquad (9)$$

где $\varepsilon = c(x_j)+\lambda$.

Умножим $\frac{1}{2(c(x_j)+\lambda)}$ на обе части неравенства (9). Тогда

$$\frac{1}{2(c(x_j)+\lambda)}\|(l_{j,t}+\lambda E)u\|_2^2 \geq \frac{|t|^2\,a^2(x_j)}{2(c(x_j)+\lambda)}\|u\|_2^2. \qquad (10)$$

Из (9) и (10), учитывая условие *ii)*, получаем, что

$$\sqrt{2}\|(l_{j,t}+\lambda E)u\|_2 \geq (c(x_j)+\lambda)\,\|u\|_2.$$

Таким образом пункт $b)$ леммы 1.1. доказан.

Из (8) также следует доказательство пункта $c)$ леммы 1.1.

Доказательство леммы 1.2. Повторяя выкладки и рассуждения, использованные в работе [8], получаем доказательство леммы 1.2.

Доказательство утверждений 1.1, 1.2 следует из работы [5].

2. Построение правого обратного для оператора $(\mathbf{L}+\lambda\mathbf{E})$. В дальнейшем нам нужна следующая лемма о покрытии.

Лемма 2.1. *Пусть выполнены условия i)- iii). Тогда существует такое покрытие*:

1) $\sum\limits_{\{j\}} \varphi_j^2 \equiv 1,\ \varphi_j \in C_0^\infty(\Delta_j),\ \bigcup\limits_j \Delta_j = R$;

2) $\|D_x^\alpha \varphi_j\|_{C(R)} \leq \frac{c}{b^\alpha d_x^\alpha}, \alpha = 0,1;$

3) $\frac{1}{\tau+1} \leq \frac{(x)}{c(t)} \leq \tau+1$ *при* $|x-t| \leq bd(t),\ \ d(t) = \frac{1}{[c(t)]^{\frac{1}{2}}},\ b>0,\ \ \tau>0;$

4) Каждое множество Δ_j *может пересекаться не более чем 3 множествами из семейства* $\{\Delta_j\}_{j\geq 1}$.

Мы не будем доказывать лемму 2.1. Она доказывается аналогичным образом, как в работах [9-11].

Определим оператор $Kf = \sum\limits_{\{j\}} \varphi_j\,(L_j+\lambda E)^{-1}\,\varphi_j f,\ \ f \in C_0^\infty(\Omega)$.

Непосредственно можно проверить, что оператор ограниченный и допускает замыкание в $L_2(\Omega)$ и $Kf \subseteq D(L)$.

Действуя на Kf оператором $(L+\lambda E)$ имеем:

$$(L+\lambda E)Kf = (L+\lambda E)\sum_{\{j\}}\varphi_j(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f = f + Af + Bf, \qquad (11)$$

где

$$Af = \sum_{\{j\}} \varphi_j (a(x) - a(x_j))((L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f)_x + \sum_{\{j\}} \varphi_j (c(x) - c(x_j))(L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f, \qquad (12)$$

$$Bf = \sum_{\{j\}} \varphi_{j_x} a(x)(L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f + \sum_{\{j\}} \varphi_{j_{xx}} (L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f + 2\sum_{\{j\}} \varphi_{j_x} ((L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f)_x. \quad (13)$$

И так нами доказана следующая

Лемма 2.2. *Пусть выполнены условия i)- ii). Тогда для любой функции* $f \in C_0^\infty(\Omega)$ *справедливо равенство*:

$$(L + \lambda E)\, Kf = [E + A + B]f, \qquad (14)$$

где операторы A, B *определяются по формулам (12) – (13).*

Лемма 2.3. *Пусть выполнены условия i)- iii). Тогда найдутся числа* τ_0 *и* b_0 *такие что, если* $a(x),\, c(x) \in K(\tau, b)$ *при некоторых* $\tau \in (0, \tau_0)$ *и* $b > b_0$, *то операторы* A *и* B *ограничены, причем* $\|A + B\|_{2\to 2} < 1$.

Лемма 2.4. *Пусть выполнены условия i)- iii) и пусть* $\|A + B\|_{2\to 2} < 1$. *Тогда*

$$(L + \lambda E)^{-1} = K[E + A + B]^{-1}, \qquad (15)$$

где $(L + \lambda E)^{-1}$ *– правый обратный оператор оператора* $(L + \lambda E)$ *.*

Доказательство. По предположению леммы 2.3 $\|A + B\|_{2\to 2} < 1$. Пользуясь этим неравенством и равенством (14), приходим к представлению (15).

Доказательство леммы 2.3. Оценим норму операторов A и B в L_2 :

$$\|Af\|_2^2 \le 24 \left[\sup_{\{j\}} \sup_{x \in \bar{\Delta}_j} \frac{|a(x) - a(x_j)|^2}{|a(x_j)|^2} + \sup_{\{j\}} \sup_{x \in \bar{\Delta}_j} \frac{|c(x) - c(x_j)|^2}{c^2(x_j)} \right] \|f\|_2^2, \qquad (16)$$

$$\|B\|_2^2 \le 12 \left[\sup_{\{j\}} \sup_{x \in \bar{\Delta}_j} \frac{c^2 |a(x)|^2}{b^2 d_j^2\, (c(x_j) + \lambda)^2} + \sup_{\{j\}} \sup_{x \in \bar{\Delta}_j} \frac{c^4 |a(x)|^2}{b^4 d_j^4\, (c(x_j) + \lambda)^2} + 2\sup_{\{j\}} \sup_{(x \in \bar{\Delta}_j} \frac{c^2}{b^2 d_j^2 |a(x_j)|^2} \right]. \quad (17)$$

Для справедливости леммы 2.3 теперь надо брать τ_0 и b_0 так, чтобы $\|A + B\| < 1$.

Далее, предположим:

$$\tilde{a}(x) = \sum_{\{j\}} a(x_j) \varphi_j^2, \;\; \tilde{c}(x) = \sum_{\{j\}} c(x_j) \varphi_j^2$$

$$\left(\tilde{L} + \lambda E\right) u = u_{xx} - u_{yy} + \tilde{a}(x) u_x + \tilde{c}(x) u + \lambda u, \;\; u \in C_0^\infty(\Omega),$$

$$\left(\tilde{L}' + \lambda E\right) u = u_{xx} - u_{yy} - \tilde{a}(x) u_x + \tilde{c}(x) u - (\tilde{a}(x))'_x\, u + \lambda u, \;\; u \in C_0^\infty(\Omega),$$

где $\tilde{L}'$ – формально сопряженный оператор. Заметим, что на функциях $u,\, \upsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ выполняется равенство

$$\left\langle \tilde{L} u,\, \upsilon \right\rangle = \left\langle u,\, \tilde{L}' \upsilon \right\rangle, \quad u,\, \upsilon \in C_0^\infty(\Omega).$$

Введем оператор

$$M^{\#} f = \sum_{\{j\}} \varphi_j \left(L_j^{\#} + \lambda E \right)^{-1} \varphi_j f, \quad f \in C_0^\infty(\Omega),$$

где $L_j^{\#^{-1}}$ – оператор, обратный к оператору $L_j^{\#} u = u_{xx} - u_{yy} - a(x_j)u_x + c(x_j)u, \ \ u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Лемма 2.5. *Пусть выполнены условия i)- ii). Тогда для любой функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$ справедливы равенства:*

$$\left(\tilde{L} + \lambda E\right) Kf = [E + A_1 + B_1]f, \tag{18}$$

$$\left(\tilde{L}' + \lambda E\right) M^{\#} f = [E + A_2 + B_2]f, \tag{19}$$

где

$$A_1 f = \sum_{\{j\}} \varphi_j \left(\tilde{a}(x) - a(x_j)\right) \left[\left(L_j + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f\right]_x + \sum_{\{j\}} \varphi_j \left(\tilde{c}(x) - c(x_j)\right) \left(L_j + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f,$$

$$B_1 f = \sum_{\{j\}} \varphi_{j_x} \tilde{a}(x) \left(L_j + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f + \sum_{\{j\}} \varphi_{j_{xx}} \left(L_j + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f + 2\sum_{\{j\}} \varphi_{j_x} \left[\left(L_j + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f\right]_x,$$

$$A_2 f = \sum_{\{j\}} \varphi_j \left(a(x_j) - \tilde{a}(x)\right) \left[\left(L_j^{\#} + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f\right]_x,$$

$$B_2 f = \sum_{\{j\}} \tilde{a}(x) \varphi_{j_x} \left(L_j^{\#} + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f - \sum_{\{j\}} \varphi_j \left(\tilde{a}(x)\right)_x \left(L_j^{\#} + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f.$$

Здесь учтено, что $\varphi_{j_{yy}} = 0$, $\varphi_{j_y} = 0$.

Доказательство. Действуя на Kf оператором $\left(\tilde{L} + \lambda E\right)$ имеем:

$$[\left(\tilde{L} + \lambda E\right) Kf = [E + A_1 + B_1]f.$$

Точно так же действуя оператором $\left(\tilde{L}' + \lambda E\right)$ на $M^{\#} f$ получаем, что

$$\left(\tilde{L}' + \lambda E\right) M^{\#} f = f + \left(A_2 + B_2\right) f.$$

Лемма 2.6. *Пусть выполнены условия i)- iii). Тогда найдутся числа τ_0 и b_0, такие что, если $a(x), c(x) \in K(\tau, b)$ при некоторых $\tau \in (0, \tau_0)$ и $b > b_0$, то существуют операторы A_1, B_1, A_2, B_2 с нормами $\|A_i + B_i\|_2 < \frac{1}{2}$, $i = 1, 2$, такие, что выполняются равенства:*

$$\left(\tilde{L} + \lambda E\right)^{-1} = K[E + A_1 + B_1]^{-1}, \tag{20}$$

$$\left(\tilde{L}' + \lambda E\right)^{-1} = M^{\#}[E + A_2 + B_2]^{-1}, \tag{21}$$

где $\left(\tilde{L} + \lambda E\right)^{-1}$, $\left(\tilde{L}' + \lambda E\right)^{-1}$ – операторы правые обратные к операторам $\tilde{L} + \lambda E$, $\tilde{L}' + \lambda E$ соответственно.

Доказательство. Оценим $\|A_1\|_2$. Для этого, в силу леммы 2.3, распишем оператор A_1:

$$\|A_1 f\|_2^2 =$$

$$= \left\| \sum_{\{j\}} \varphi_j \left(\tilde{a}(x) - a(x_j)\right) \left[\left(L_j + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f\right]_x + \sum_{\{j\}} \varphi_j \left(\tilde{c}(x) - c(x_j)\right) \left(L_j + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f \right\|_2^2. \tag{22}$$

Оценим норму оператора A_1 в L_2. Для этого будем оценивать каждое слагаемое отдельно. Используя утверждения 1.2, получаем:

$$\left\|\sum_{\{j\}}\varphi_j(\tilde{a}(x)-a(x_j))D_x(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_2^2=\sum_{\{j\}}\int_{\Omega_j}\left|\sum_{\{j\}}\varphi_j(\tilde{a}(x)-a(x_j))D_x(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right|^2 dxdy.$$

Здесь мы воспользовались тем, что на Ω_j количество φ_j отличных от нуля не больше трех, где $\Omega_j=\{(x,y):\, x\in\Delta_j,\, 0<y<1\}$.

На основании вышесказанного имеем:

$$\left\|\sum_{\{j\}}\varphi_j(\tilde{a}(x)-a(x_j))D_x(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_2^2\le$$

$$\le 12\sum_{\{j\}}\sup_{x\in\bar{\Delta}_j}|\tilde{a}(x)-a(x_j)|^2\left\|D_x(L_j+\lambda E)^{-1}\right\|_2^2\cdot\|\varphi_j f\|_2^2. \tag{23}$$

Согласно лемме 2.1 $\sum\limits_{j-1}^{j+1}\varphi_j^2\equiv 1$, $x\in\bar{\Delta}_j$. Учитывая это и условия *i)-iii)*, имеем:

$$|\tilde{a}(x)-a(x_j)|=\left|\sum_{j-1}^{j+1}a(x_j)\varphi_j^2-a(x_j)\right|=\left|\sum_{j-1}^{j+1}a(x_j)\varphi_j^2-a(x_j)\sum_{j-1}^{j+1}\varphi_j^2\right|\le 2\tau(2+\tau)|a(x_j)|. \tag{24}$$

Из неравенства (23) с помощью неравенств пункта $b)$ утверждения 1.2 и (24) получаем, что

$$\left\|\sum_{\{j\}}\varphi_j(\tilde{a}(x)-a(x_j))D_x(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_2^2\le 48\tau^2(2+\tau)^2\|f\|_2^2. \tag{25}$$

Точно также повторяя выкладки и рассуждения, использованные при доказательстве неравенства (25), находим, что

$$\left\|\sum_{\{j\}}\varphi_j(\tilde{a}(x)-a(x_j))(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_2^2\le 48\tau^3(2+\tau)^2\|f\|_2^2. \tag{26}$$

В результате из равенства (22) с помощью (25) – (26) получаем неравенство:

$$\|A_1 f\|_2^2\le 48\left(\tau^2(2+\tau)^2+\tau^3(2+\tau)^2\right)\|f\|_2^2. \tag{27}$$

Отсюда

$$\|A_1\|_{2\to 2}^2\le 48\left(\tau^2(2+\tau)^2+\tau^3(2+\tau)^2\right). \tag{28}$$

Оценим норму оператора B_1:

$$\|B_1\|_{2\to 2}^2\le\left(12\sup_{\{j\}}\frac{9^2(1+\tau)|a(x_j)|^2}{b^2d_j^2\left(c(x_j)+\lambda\right)^2}+12\sup_{\{j\}}\frac{c^4}{b^4d_j^4}\cdot\frac{1}{\left(c(x_j)+\lambda\right)^2}+48\sup_{\{j\}}\frac{c^2}{b^2d_j^2|a(x_j)|^2}\right), \tag{29}$$

где $c>0$ – постоянное число.

Теперь для справедливости леммы 2.3 выберем τ и b так, чтобы

$$\|A_1+B_1\|_{2\to 2}\le\|A_1\|_{2\to 2}+\|B_1\|_{2\to 2}<\frac{1}{2}. \tag{30}$$

Точно так же
$$\|A_2 + B_2\|_{2\to 2} < \frac{1}{2}. \tag{31}$$

Мы не будем доказывать эту оценку. Она доказывается таким же путем как (30).

Лемма 2.7. *Пусть выполнены условия леммы 2.6. Тогда справедливо равенство*:

$$\left(\tilde{L} + \lambda E\right)^{-1} = K[E + A_1 + B_1]^{-1}. \tag{32}$$

Доказательство. Из общей теории операторов известны следующие утверждения:

$$L_2(\Omega) = R(\tilde{L}) \dot{+} N(\tilde{L}^*), \quad L_2(\Omega) = R(\tilde{L}') \dot{+} N\left(\left(\tilde{L}'\right)^*\right),$$

где $\dot{+}$ ортогональное дополнение, $N(\tilde{L}^*) = Ker\tilde{L}^*$, $N\left(\left(\tilde{L}'\right)^*\right) = Ker\left(\left(\tilde{L}'\right)^*\right)$.

Из равенств (20), (21) следует, что

$$N(\tilde{L}^*) \equiv 0, \quad N\left(\left(\tilde{L}'\right)^*\right) \equiv 0. \tag{33}$$

Так как $D\left(\tilde{L}\right) \subseteq D\left(\left(\tilde{L}'\right)^*\right)$, то из равенства (33) следует, что

$$N(\tilde{L}) \equiv 0. \tag{34}$$

Учитывая (34) из (21) имеем:

$$[\left(\tilde{L} + \lambda E\right)^{-1} = K[E + A_1 + B_1]^{-1}.$$

Лемма 2.7 доказана.

Лемма 2.8. *Пусть выполнены условия леммы 2.7. Тогда* $KerK \equiv 0$.

Доказательство. Поскольку $Ker[E + A_1 + B_1] \equiv 0$, то из (32) и (34) следует, что $KerK \equiv 0$. Лемма 2.8 доказана.

Лемма 2.9. *Пусть выполнены условия утверждения 1. Тогда оператор* L *допускает замыкание.*

Доказательство. Пусть $u_n \to 0,\ Lu_n \to \upsilon\ \ (u \in L_2(\Omega),\ u_n \in C_0^\infty(\Omega),\ n = 1, 2, ...)$. Из леммы 2.8 следует, что u_n представима в виде $K\upsilon_n \in L_2(\Omega)$ (так как $C_0^\infty(\Omega) \subset D(\tilde{L}) = R(K))$. Поэтому, при $n \to \infty$ имеем:

$$Lu_n = LK\upsilon_n = [E + A + B]\upsilon_n \to \upsilon.$$

Отсюда,
$$\upsilon_n \to [E + A + B]^{-1}\upsilon, \quad K\upsilon_n \to K[E + A + B]^{-1}\upsilon.$$

Из того, что $u_n = K\upsilon_n \to 0$ получаем, что $K[E + A + B]^{-1}\upsilon = 0$. Откуда заключаем $\upsilon = 0$. Лемма доказана.

Лемма 2.10. *Пусть выполнены условия леммы 2.6. Тогда* $KerL \equiv 0$.

Доказательство. Пусть $Lu = 0$, $u \in D\,(L)$, $u \neq 0$. Тогда для этой функции существует последовательность $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ такая, что

$$u_n \to u,\ Lu_n \to Lu, \quad u_n \in C_0^\infty(\Omega) \subset D(L).$$

Теперь, используя представление $u_n = Kv_n$, $v_n \in L_2(\Omega)$, получаем:

$$Lu_n = LKv_n = [E + A + B]v_n \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{35}$$

Поскольку $Ker[E + A + B] \equiv 0$, то из (35) следует, что $v_n \to 0$. Отсюда из представления $u_n = Kv_n$ получаем, что $u_n \to 0$. Следовательно $u = 0$. Лемма доказана.

Доказательства теорем 1, 2 и 3. Доказательства теоремы 1 и 2 следует из лемм 2.9 и 2.10. Теорема 3 доказывается с помощью утверждений 1.1-1.2 и лемм 2.9 и 2.10.

3. Обобщения. Рассмотрим уравнение:

$$Lu \equiv u_{xx} - u_{yy} + a(x, y)u_x + c(x, y)u = f(x, y), \qquad f(x, y) \in L_2(R^2). \tag{36}$$

Обозначим через $K(\tau, b)$ класс коэффициентов, удовлетворяющих следующим условиям:

i) $|a(x, y)| \geq \delta_0 > 0,\ c(x, y) \geq \delta > 0$ – непрерывные функции по обоим аргументам в R^2 ;

ii) $c_0 c(x, y) \leq a^2(x, y) \leq c_1 c(x, y)$, $c_0 > 0,\ c_1 > 0$ – постоянные числа;

iii) $|a(x) - a(t)|^2 + |c(x) - c(t)| \leq \tau\, c(t),$

для всех $x(x_1, x_2),\ t(t_1, t_2) \in R^2$ таких, что $|x - t| \leq bd(t),\ d(t) = \frac{1}{[c(t)]^{\frac{1}{2}}},\ b > 0,\ \tau > 0.$

Теорема 3.1. *Пусть* $a(x, y), c(x, y) \in K(\tau, b)$. *Тогда найдутся числа* τ_0 *и* b_0 *такие что, если* $a(x, y), c(x, y) \in K(\tau, b)$ *при некоторых* $\tau \in (0, \tau_0)$ *и* $b > b_0$, *то справедливо следующее утверждение*:

Замыкание L *оператора* $L_0 u = u_{xx} - u_{yy} + a(x, y)u_x + c(x, y)u$, $D(L_0) = C_0^\infty(\Omega)$ *в* $L_2(R^2)$, *существует.*

Теорема 3.2. *Пусть* $a(x, y), c(x, y) \in K(\tau, b)$. *Тогда найдутся числа* τ_0 *и* b_0 *такие что, если* $a(x, y), c(x, y) \in K(\tau, b)$ *при некоторых* $\tau \in (0, \tau_0)$ *и* $b > b_0$, *то оператор* L *имеет непрерывный обратный оператор.*

Теорема 3.3. *Пусть* $a(x, y), c(x, y) \in K(\tau, b)$. *Тогда найдутся числа* τ_0 *и* b_0, *такие что, если* $a(x, y), c(x, y) \in K(\tau, b)$ *при некоторых* $\tau \in (0, \tau_0)$ *и* $b > b_0$, *то справедлива оценка*:

$$\|u_x\|_2 + \|u_y\|_2 + \|u\|_2 \leq c\|Lu\|_2,$$

где $c > 0$ *– постоянное число.*

Теоремы 3.1 – 3.3. доказываются точно также как и теоремы 1 – 3.

Цитированная литература

1. **Нагумо М.** Лекции по современной теории уравнений в частных производных. М. 1967.

2. **Нахушев А.М.** // Дифференциальные уравнения. 1970. Т.6, №2. С. 192 – 195.

3. **Кигурадзе Т.И.** // Дифференциальные уравнения. 1994. Т.30, №10. С. 1760 – 1773.

4. **Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.** // Доклады РАН. 2003. Т.391, №3. С. 295 – 297.

5. **Muratbekov M.** // Complex Variables and Elliptic Equations. 2007. V.52, №12. P. 1121 – 1144.

6. **Муратбеков М.Б., Ахметжанов М.А.** // Международная конференция "Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ", посвященная столетию С.М. Никольского, Москва. 23-29 мая 2005. С.157.

7. **Муратбеков М.Б., Ахметжанов М.А.** // Вестник КазНУ спец. выпуск серии Механика, математика, информатика. Алматы. 2006. №1. С. 83 – 87.

8. **Муратбеков М.Б., Ахметжанов М.А.** // Математический журнал. Алматы. 2005. Т.5, №2. С. 57 – 65.

9. **Бойматов К.Х.** // ДАН СССР. 1973. Т.213, №5. С. 1009 – 1011.

10. **Feigin V.I.** // (Differentsial'nye Uravneniya 1975. №11. P. 2231 – 2235. English transl. in Differential Equations 11 (1975).)

11. **Otelbaev M.** // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 1984. issue 3. P. 213 – 239.

Поступила в редакцию 20.08.2008г.

Математический журнал. *Алматы. 2008. Том 8. № 4 (30) . С. 68 – 72*

УДК 517.95

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОБЪЕМНОГО ПОТЕНЦИАЛА И РЕГУЛЯРНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Т. Ш. Кальменов, Б. Д. Кошанов, Д. Сураган

Институт математики, информатики и механики МОН РК
050010 Алматы ул.Пушкина, 125 koshanov@list.ru

В данной статье найдены граничное условие для объемного потенциала, а также представление регулярного решения для уравнения Лапласа.

Пусть $\Omega \subset R^n$ – конечная область с гладкой границей $\partial\Omega$. В области рассмотрим объемный потенциал

$$u(x) = Kf(x) \equiv \int\limits_{\Omega} f(x)\varepsilon_n(x,y)dy, \tag{1}$$

где

$$\varepsilon_n(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} ln|x-y|, & n=2, \\ \frac{1}{(n-2)\sigma_n}|x-y|^{2-n}, & n \geq 3, \end{cases}$$

здесь σ_n – площадь поверхности единичной сферы в R^n, $\varepsilon_n(x,y)$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа, т.е. [1]

$$-\Delta_x \varepsilon_n(x,y) \equiv -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \varepsilon_n(x,y)}{\partial x_i^2} = \delta(x-y).$$

Отметим, в частности, что ньютонов или кулонов потенциал $u = Kf$ определяет объем масс или зарядов, распределенных в пространстве с плотностью $\dfrac{f}{(n-2)\sigma_n}$, а также часто используется в теоремах вложения. Так как фундаментальное решение $\varepsilon_n(x,y)$ симметрично, вещественнозначно и имеет слабую особенность, то интегральный оператор K является вполне непрерывным самосопряженным оператором в $L_2(\Omega)$ и функция $u(x) = (Kf)(x)$ удовлетворяет неоднородному уравнению Лапласа

$$-\Delta u = f, \tag{2}$$

Keywords: *Laplace equation, regular problems, three-dimensional potential*
2000 Mathematics Subject Classification: 35J67, 31A30, 31A10

которое также еще называют уравнением Пуассона.

Самосопряженные дифференциальные операторы, как показано в работах М.О. Отелбаева и его учеников [2-4], порождаются граничными условиями. Одним из основных результатов настоящей работы является описание граничных условий, которыми однозначно определяется объемный потенциал (1).

Имеет место

Теорема 1. *Для любой функции* $f \in L_2(\Omega)$ *решение неоднородного уравнения Лапласа* $-\Delta u = f$, *записанное через объемный потенциал (1), удовлетворяет граничному условию:*

$$\frac{1}{2}u(x) = -\int\limits_{\partial\Omega} \varepsilon_n(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}dS_y + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon_n(x-y)}{\partial n_y}u(y)dS_y, \;\; x \in \partial\Omega. \tag{3}$$

Обратно, если функция $u \in W_2^2(\Omega)$ *удовлетворяет уравнению (2) и граничному условию (3), то она определяет объемный потенциал (1).*

Здесь и далее интеграл $\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon_n(x-y)}{\partial n_y}u(y)dS_y, \;\; x \in \partial\Omega$, понимается в смысле главного значения по Коши.

Доказательство. Предполагая сначала, что $u \in C^2(\Omega)\bigcap C^1(\overline{\Omega})$, непосредственным вычислением при любом $x \in \partial\Omega$ находим:

$$u(x) = (Kf)(x) = -\int\limits_{\Omega} \varepsilon_n(x-y)\Delta u(y)dy =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega}\Big(-\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\varepsilon_n(x-y) + \frac{\partial \varepsilon_n(x-y)}{\partial n_y}u(y)\Big)dS_y + \int\limits_{\Omega} \Delta_y \varepsilon_n(x-y)u(y)dy =$$

$$= u(x) + \int\limits_{\partial\Omega}\Big(\frac{\partial \varepsilon_n(x-y)}{\partial n_y}u(y) - \frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\varepsilon_n(x-y)\Big)dS_y,$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n_y} = n_1\frac{\partial}{\partial y_1} + ... + n_n\frac{\partial}{\partial y_n}$ – нормальная производная, а $n_1, ..., n_n$ – составляющие единичной нормали. Отсюда находим:

$$I_n(x) = \int\limits_{\partial\Omega}\Big(\frac{\partial \varepsilon_n(x-y)}{\partial n_y}u(y) - \frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\varepsilon_n(x-y)\Big)dS_y \equiv 0, \;\; x \in \Omega. \tag{4}$$

Так как $\Delta_x \varepsilon_n(x-y) = 0$ при $x \neq y$ и $\dfrac{\partial \varepsilon_n(x-y)}{\partial n_y}$ при $x \neq y$, то имеем $\Delta_x I_n(x) \equiv 0$. Используя свойства потенциала двойного слоя [5], из (4) при $x \to \partial\Omega$ находим:

$$I_n(x) = \frac{1}{2}u(x) + \int\limits_{\partial\Omega}\Big(\frac{\partial \varepsilon_n(x-y)}{\partial n_y}u(y) - \frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\varepsilon_n(x-y)\Big)dS_y = 0, \, x \in \partial\Omega, \tag{5}$$

где интеграл $\int\limits_{\partial\Omega}\Big(\frac{\partial \varepsilon_n(x-y)}{\partial n_y}u(y) - \frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\varepsilon_n(x-y)\Big)dS_y$ понимается в смысле главного значения по Коши.

Так как $I_n(x)$ решение однородного уравнения Лапласа, то в силу единственности решения задачи Дирихле, тождество $I_n(x) \equiv 0$ равносильно соотношению (5), т.е. равенство $I_n(x) = 0$ является граничным условием объемного потенциала (1).

Далее, предельным переходом несложно показать, что формула (5) остается справедливой и для всех $u \in W_2^2(\Omega)$.

Таким образом, объемный потенциал (1) удовлетворяет граничному условию (5).

Обратно, покажем, что если функция $u_1 \in W_2^2(\Omega)$ удовлетворяет уравнению $-\Delta u_1 = f$ и граничному условию (8), то она совпадает с объемным потенциалом (1).

Действительно, если не так, то функция $\nu = u - u_1 \in W_2^2(\Omega)$, где $u = Kf$ объемный потенциал, удовлетворяет однородному уравнению $\Delta\nu = 0$ и однородному условию (5).

Применив формулу Грина к функции $\nu \in W_2^2(\Omega)$, как и выше убеждаемся в том, что

$$\int\limits_{\Omega} \varepsilon_n(x-y)\Delta\nu(y)dy = \nu(x) + \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial\varepsilon_n(x-y)}{\partial n_y}\nu(y) - \frac{\partial\nu(y)}{\partial n_y}\varepsilon_n(x-y) \right) dS_y = \nu(x) + I_n(x) \equiv 0, \;\; x \in \Omega.$$

Отсюда, переходя к пределу при $x \to \partial\Omega$, получим:

$$\nu(y)dy - \frac{1}{2}\nu(x) + \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial\varepsilon_n(x-y)}{\partial n_y}\nu(y) - \frac{\partial\nu(y)}{\partial n_y}\varepsilon_n(x-y) \right) dS_y = \nu(x) + I_n(x) = 0, \;\; x \in \partial\Omega. \quad (6)$$

Из условия (5) имеем $I_n(x)|_{x\in\partial\Omega} = 0$ и поэтому из (6) следует, что $\nu(x) \equiv 0$, $\forall x \in \partial\Omega$. В силу единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа, отсюда следует, что $\nu(x) = u(x) - u_1(x) \equiv 0$, $\forall x \in \partial\Omega$, т.е. $u_1 \equiv u$ совпадает с объемным потенциалом.

Теорема 1 доказана.

Пример. При $n = 1$ одномерный объемный потенциал на интервале $\Omega = (0,1)$ задается формулой

$$u(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 |x-t| f(t)dt.$$

Отсюда

$$u(x) = \frac{1}{2}\left[-\int_0^x (x-t)u''(t)dt - \int_x^1 (t-x)u''(t)dt \right] = u(x) - x\frac{[u'(0)+u'(1)]}{2} - \frac{[u'(1)+u(0)+u(1)]}{2} = 0.$$

Следовательно, самосопряженное граничное условие одномерного объемного потенциала имеет следующий вид:

$$u'(0) + u'(1) = 0, \;\; u'(1) + u(0) + u(1) = 0.$$

Определение 1. *Будем говорить, что функция $u \in L_2(\Omega)$ линейно непрерывно зависит от $f \in L_2(\Omega)$, если для почти всех $x \in \Omega$ (т.е. для всех x из плотного в Ω множества Ω') выполняется условие:*

$$u(x, \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 u(x, f_1) + \alpha_2 u(x, f_2),$$

а при каждой фиксированной функции $f \in L_2(\Omega)$ имеет место неравенство:

$$|u(x,f)| \le c(x)\|f\|_{L_2(\Omega)}, \;\; c(x) \in L_2(\Omega),$$

здесь α_1, α_2 – произвольные комплексные постоянные.

Определение 2. *Задачу для уравнения Лапласа (2) назовем регулярно разрешимой, а соответствующий линейный оператор L_Q^{-1} регулярным оператором, если для любой $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное решение задачи, линейно непрерывно зависящее от f.*

Регулярные операторы в [3,4] определены как корректные сужения максимального оператора L_Q^*.

В частности, регулярно разрешимые задачи могут порождаться как граничными условиями (задача Дирихле, задача Неймана), так и полуграничными условиями (задача Бицадзе-Самарского), либо граничными интегральными условиями.

Ниже дадим интегральное представление регулярного оператора L_Q^{-1}.

Теорема 2. *Задача является регулярно разрешимой (оператор L_Q^{-1} – регулярен) тогда и только тогда, когда существует такая функция $Q(x,y) \in L_2(\Omega \times \Omega)$, что*

$$L_x Q(x,y) = 0, \ \forall (x,y) \in \Omega \times \Omega,$$

$$u = L_Q^{-1} f = \int\limits_\Omega (\varepsilon_n(x,y) + Q(x,y)) f(y) dy. \tag{7}$$

Доказательство. Общее решение уравнения

$$Lu = -\Delta u = f \tag{8}$$

представимо в виде:

$$u = \varepsilon_n * f + \nu(x) = \int\limits_\Omega \varepsilon_n(x,y) f(y) dy + \nu(x),$$

где

$$\Delta_x \nu(x) = 0. \tag{9}$$

Поскольку фундаментальное решение $\varepsilon_n(x,y)$ при $x = y$ имеет слабую особенность, то интегральный оператор $\varepsilon_n * f$ является линейным вполне непрерывным оператором в $L_2(\Omega)$.

В силу неравенства Коши – Буняковского имеем:

$$|u_f(x)| = \left| \int\limits_\Omega \varepsilon_n(x-y) f(y) dy \right| \le \left(\int\limits_\Omega |\varepsilon_n(x-y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} |\|f\|_0.$$

Так как функция

$$c(x) = \left(\int\limits_\Omega |\varepsilon_n(x-y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \in L_2(\Omega),$$

то объемный потенциал u_f линейно непрерывно зависит от f. Поэтому решение уравнения (8) линейно непрерывно зависит от f тогда и только тогда, когда решение $\nu(x)$ однородного уравнения (9) линейно непрерывно зависит от f.

Последнее равносильно тому, что $\nu(x) = \nu(x,f) \in C^2(\Omega)$ (см.[5]) и удовлетворяет соотношениям:

$$\nu(x, \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 \nu(x, f_1) + \alpha_2 \nu(x, f_2), \tag{10}$$

здесь α_1, α_2 – произвольные комплексные постоянные,

$$|\nu(x,f)| \le c(x) \|f\|_{L_2(\Omega)}, \ \ c(x) \in L_2(\Omega). \tag{11}$$

Из соотношений (10) – (11) следует, что для почти всех $x \in \Omega$, то есть для всех Ω', функция $\nu(x,f)$ является линейным непрерывным функционалом от $f \in L_2(\Omega)$.

В силу теоремы Рисса [6] о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ имеем, что при каждом фиксированном $x \in \Omega$ существует единственная функция $Q(x,y) \in L_2(\Omega)$ по переменной y такая, что

$$\nu(x,f) = \int\limits_\Omega Q(x,y) f(y) dy. \tag{12}$$

При этом норма функционала $\nu_f(x)$ по f определена равенством:

$$\sup_{\|f\|=1} \|\nu_f(x)\| = \left(\int_\Omega |Q(x,y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \leq c(x).$$

В силу соотношения (11) убеждаемся в том, что

$$\int_\Omega \int_\Omega |Q(x,y)|^2 dydx = \int_\Omega \sup_{\|f\|=1} \|\nu_f(x)\|^2 dx \leq \int_\Omega c^2(x)dx < \infty.$$

Отсюда $Q(x,y) \in L_2(\Omega)$.

Пусть теперь $x \in \overline{\Omega}_\rho \subset \Omega$ и расстояние $\rho = dist|\Omega \setminus \Omega_\rho| > 0$. Введем конечно-разностный оператор

$$\delta_h \nu = \frac{\nu(x+h,f) - \nu(x,f)}{h} = \int_\Omega \frac{Q(x+h,y) - Q(x,y)}{h} f(y)dy. \tag{13}$$

При малых h имеем $\delta_h \nu \in C^2(\Omega)$ и, устремляя $h \to 0$, из (13) находим:

$$\frac{\partial}{\partial x}\nu(x,f) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x} Q(x,y) f(y)dy.$$

Точно также имеем:

$$\Delta_x \nu(x,f) = \int_\Omega \Delta_x Q(x,y) f(y)dy = 0. \tag{14}$$

Так как равенство (14) выполняется для всех $f \in L_2(\Omega)$, то

$$\Delta_x Q(x,y) \equiv 0.$$

Теорема 2 доказана.

Из представления (7) непосредственным вычислением несложно доказать следующее следствие.

Следствие 1. *Регулярно разрешимые задачи порождаются граничными условиями тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$\Delta_x Q(x,y) = 0, \;\; \Delta_y Q(x,y) = 0.$$

Сравнивая представление (1) решения задачи с краевыми условиями (3) для неоднородного уравнения Лапласа (2) с формулой (7) теоремы 2, легко получаем

Следствие 2. *Краевая задача (3) для неоднородного уравнения Лапласа (4) является регулярно разрешимой.*

Цитированная литература

1. **Соболев С.Л.** Введение в теорию кубатурных формул. М., 1974.

2. **Отелбаев М. Шыныбеков А.Н.** //Доклады АН СССР. 1982. Т.265, №4. С. 815 – 819.

3. **Отелбаев М. Кокебаев Б.К., Шыныбеков А.Н.** //Изв. АН КазССР. сер. физ.-мат. 1982. №5. С. 24 – 26.

4. **Отелбаев М. Кокебаев Б.К., Шыныбеков А.Н.** //Доклады АН СССР. 1983. Т.271, №4. С. 1307 – 1311.

5. **Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.** Уравнения с частыми производными. М., 1966.

6. **Треногин В.А.** Функциональный анализ. М., 1986.

Поступила в редакцию 18.09.2008г.

Математический журнал. *Алматы. 2008. Том 8. № 4 (30) . С. 73 – 77*

УДК 511

НАГЕЛЛОВО УРАВНЕНИЕ $x^2 + y^3 = z^5$

С. Ш. Кожегельдинов

Семипалатинский государственный педагогический институт
sagdulla@ok.kz

Получены три формулы, каждая из которых является общей формулой, описывающей все натуральные решения уравнения $x^2+y^3 = z^5$. Сформулирована и доказана теорема об эквивалентности этих формул.

1. Напомним [1,2], что нагелловым уравнением называется диофантово уравнение

$$x^2 + y^3 = z^5, \tag{1}$$

где

$$x, y, z \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Решение $\langle x, y, z\rangle$ нагеллова уравнения (1) с условием (2) называется основным, если $(x^2, y^3, z^5)_{\deg 30} = 1$, т.е. если x^2, y^3, z^5 – взаимно простые числа степени 30.

Например, решение $\langle 3 \cdot 17^{12}, 2 \cdot 17^8, 17^5\rangle$ нагеллова уравнения (1) с условием (2) является основным, так как $((3 \cdot 17^{12})^2, (2 \cdot 17^8)^3, (17^5)^5)_{\deg 30} = 1$, т.е. так как $(3 \cdot 17^{12})^2, (2 \cdot 17^8)^3, (17^5)^5$ взаимно простые числа степени 30.

2. Целая часть числа α обозначается $[\alpha]$ и что каноническим разложением целого числа $a > 1$ называется представление a в виде $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, где $k, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ – натуральные числа, $p_1, p_2, ..., p_k$ – попарно различные простые числа. Пусть n – натуральное число. Известно, что число вида

$$p_1^{[\frac{\alpha_1}{n}]} p_2^{[\frac{\alpha_2}{n}]} ... p_k^{[\frac{\alpha_k}{n}]}$$

называется целым положительным числом a степени n и обозначается через $a_{\deg n}$. Таким образом, по определению

$$a_{\deg n} = p_1^{[\frac{\alpha_1}{n}]} p_2^{[\frac{\alpha_2}{n}]} ... p_k^{[\frac{\alpha_k}{n}]}.$$

Если $a = 777600000$ и $n = 2$, то $a_{\deg 2} = (777600000)_{\deg 2} = (2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^5)_{\deg 2} = 2^{[\frac{10}{2}]} \cdot 3^{[\frac{5}{2}]} \cdot 5^{[\frac{5}{2}]} = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 7200$.

Keywords: *diofant's equations*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B15

Наибольший общий делитель степени n чисел $a_1, a_2, ..., a_m$ обозначается символом $(a_1, a_2, ..., a_m)_{\deg n}$. Наибольший общий делитель $(a_1, a_2, ..., a_m)_{\deg n}$ называется арифметической функцией степени n тогда и только тогда, когда с его помощью можно получить по крайней мере одну общую формулу, дающую параметризацию всех натуральных решений хотя бы для одного конкретного диофантова уравнения. Арифметическую функцию степени n кратко называют арифметическая функция. Если $n = 1$, то арифметическая функция называется простейшей. Если же $n > 1$, то она называется арифметической функцией более сложной природы.

Само собой разумеется, что числа $a_1, a_2, ..., a_m$ называются: а) взаимно простыми степени n тогда и только тогда, когда $(a_1, a_2, ..., a_m)_{\deg n} = 1$, т.е. если наибольший общий делитель степени n этих чисел равен 1; б) попарно взаимно простыми степени n тогда и только тогда, когда $(a_i, a_j)_{\deg n} = 1$ при всех $i \neq j$ $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq m)$.

3. Исследуемое уравнение (1) с условием (2) названо именем автора работы [1]. В конце работы [1] приведена формула

$$x = u(u^2 + v^3)^{-3}, \quad y = v(u^2 + v^3)^{-2}, \quad z = (u^2 + v^3)^{-1}.$$

Последнюю формулу, не худшим образом, можно написать так:

$$x = u(u^2 + v^3)^{12}, \quad y = v(u^2 + v^3)^{8}, \quad z = (u^2 + v^3)^{5}.$$

Более того, в виде:

$$x = k^{15}\frac{u(u^2 + v^3)^{12}}{\Delta^{15}}, \quad y = k^{10}\frac{v(u^2 + v^3)^{8}}{\Delta^{10}}, \quad z = k^{6}\frac{(u^2 + v^3)^{5}}{\Delta^{6}}, \tag{3^0}$$

где

$$k, u, v \in \mathbb{N}, \quad (u^2, v^3)_{\deg 6} = 1, \quad \Delta = ((u^2 + v^3)^{24}(u^2, v^3))_{\deg 30}. \tag{4^0}$$

В дальнейшем мы убедимся в том, что формула (3^0) с условием (4^0) является общей формулой всех решений нагеллова уравнения (1) с условием (2).

Здесь и в дальнейшем для удобства совокупность формул вида (3^0) называется формулой.

Наличие общей формулы вида (3^0) с условием (4^0) обуславливает актуальность настоящей работы. Поэтому вполне естественной является постановка и решение следующей задачи.

4. Постановка задачи. Пусть $\{\langle x; y; z\rangle | (1) \wedge (2)\}$ – множество всех решений нагеллова уравнения (1) с условием (2). Требуется найти общую формулу, описывающую все эти решения. При этом ставится задача, чтобы число целых параметров, входящих в такую общую формулу, не превышало трех.

Для решения поставленной задачи используются, без специального напоминания каждый раз, идеи, методы и результаты работ [2-6].

5. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Все решения нагеллова уравнения (1) с условием (2) получаются из формулы:*

$$x = k^{15}\frac{a(a^2 + b^3)^{12}}{\Delta_1^{15}}, \quad y = k^{10}\frac{b(a^2 + b^3)^{8}}{\Delta_1^{10}}, \quad z = k^{6}\frac{(a^2 + b^3)^{5}}{\Delta_1^{6}}, \tag{3}$$

где

$$k, a, b \in \mathbb{N}, \quad (a^2, b^3)_{\deg 6} = 1, \quad \Delta_1 = ((a^2 + b^3)^{24}(a^2, b^3))_{\deg 30}. \tag{4}$$

Каждое такое решение нагеллова уравнения (1) с условием (2) определяется этим способом однозначно.

Пример 1. *Если* $k = 3$, $a = 1$, $b = 1$, *то условие (4) выполнено. Так как* $\Delta_1 = 1$, *то формула (3) дает:* $x = 2^{12} \cdot 3^{15}$, $y = 2^8 \cdot 3^{10}$, $z = 2^5 \cdot 3^6$.

Теорема 2. *Все решения нагеллова уравнения (1) с условием (2) получаются из формулы:*

$$x = k^{15}\frac{d(c^5-d^2)^{10}}{\Delta_2^{15}}, \quad y = k^{10}\frac{(c^5-d^2)^7}{\Delta_2^{10}}, \quad z = k^6\frac{c(c^5-d^2)^4}{\Delta_2^6}, \tag{5}$$

где

$$k, c, d \in \mathbb{N}, \quad c^5 > d^2, \quad (c^5, d^2)_{\deg 10} = 1, \quad \Delta_2 = ((c^5-d^2)^{20}(c^5, d^2))_{\deg 30}. \tag{6}$$

Каждое такое решение нагеллова уравнения (1) с условием (2) определяется этим способом однозначно.

Пример 2. *Если* $k = 2, \quad c = 2, \quad d = 3,$ *то условие (6) выполнено. Так как* $\Delta_2 = 1,$ *то формула (5) дает:* $x = 2^{15}\cdot 3\cdot 23^{10}, \quad y = 2^{10}\cdot 23^7, \quad z = 2^7\cdot 23^4.$

Теорема 3. *Все решения нагеллова уравнения (1) с условием (2) получаются из формулы:*

$$x = k^{15}\frac{(e^5-f^3)^8}{\Delta_3^{15}}, \quad y = k^{10}\frac{f(e^5-f^3)^5}{\Delta_3^{10}}, \quad z = k^6\frac{e(e^5-f^3)^3}{\Delta_3^6}, \tag{7}$$

где

$$k, e, f \in \mathbb{N}, \quad e^5 > f^3, \quad (e^5, f^3)_{\deg 15} = 1, \quad \Delta_3 = ((e^5-f^3)^{15}(e^5, f^3))_{\deg 30}. \tag{8}$$

Каждое такое решение нагеллова уравнения (1) с условием (2) определяется этим способом однозначно.

Пример 3. *Если* $k = 7, \quad e = 2, \quad f = 3,$ *то условие (8) выполнено. Так как* $\Delta_3 = 1,$ *то формула (7) дает:* $x = 5^8\cdot 7^{15}, \quad y = 3\cdot 5^5\cdot 7^{10}, \quad z = 2\cdot 5^3\cdot 7^6.$

Теорема 4. *Если имеют место соответственно условия (4) – (8) (четные номера), то общие формулы (3) – (7) (нечетные номера) всех решений нагеллова уравнения (1) с условием (2) эквивалентны.*

Пример 4. *Одно и то же решение* $\langle 2^{15}\cdot 3\cdot 17^{12}; 2^{11}\cdot 17^8; 2^6\cdot 17^5\rangle$ *нагеллова уравнения (1) с условием (2) получается: из формулы (3) с условием (4) при* $k = 2, \quad a = 3, \quad b = 2;$ *из формулы (5) с условием (6) при* $k = 2, \quad c = 17, \quad d = 3\cdot 17^2$ *и из формулы (7) с условием (8) при* $k = 2, \quad e = 17^2, \quad f = 2\cdot 17^3.$

6. Теперь становится совершенно очевидным какую роль в формулах, дающих все натуральные решения нагеллова уравнения (1), играют арифметические функции, в частности, арифметические функции более сложной природы Δ_1, Δ_2 и Δ_3.

7. Доказательство теоремы 1.

Воспользуемся методом автора этих строк, и в (1) с условием (2) положим, что

$$x = k^{15}\frac{at^{12}}{\Delta_1^{15}}, \quad y = k^{10}\frac{bt^8}{\Delta_1^{10}}, \quad z = k^6\frac{t^5}{\Delta_1^6}, \tag{9}$$

где

$$t \in \mathbb{N}, \quad k, a, b \in \mathbb{N}, \quad (a^2, b^3)_{\deg 6} = 1, \quad \Delta_1 = ((a^2+b^3)^{24}(a^2, b^3))_{\deg 30}. \tag{10}$$

Из (1) с условием (2) в силу (9) с условием (10) имеем, что

$$\Big(k^{15}\frac{at^{12}}{\Delta_1^{15}}\Big)^2 + \Big(k^{10}\frac{bt^8}{\Delta_1^{10}}\Big)^3 = \Big(k^6\frac{t^5}{\Delta_1^6}\Big)^5$$

или

$$k^{30}\frac{a^2t^{24}}{\Delta_1^{30}} + k^{30}\frac{b^3t^{24}}{\Delta_1^{30}} = k^{30}\frac{t^{25}}{\Delta_1^{30}},$$

откуда

$$t = a^2 + b^3, \tag{11}$$

где
$$a, b \in \mathbb{N}, \quad (a^2, b^3)_{\deg 6} = 1. \tag{12}$$

Из (9) с условием (10) в силу (11) с условием (12) получаем формулу (3) с условием (4), которая является общей формулой всех решений нагеллова уравнения (1) с условием (2). Без особого труда можно убедиться в том, что значения x, y, z из формулы (3) с условием (4) действительно удовлетворяют нагеллову уравнению (1) с условием (2). При этом нетрудно заметить, что $(x^2, y^3, z^5)_{\deg 30} = k$, где $k \in \mathbb{N}$. И так как $(a^2, b^3)_{\deg 6} = 1$, то каждое решение $\langle x, y, z \rangle$ нагеллова уравнения (1) с условием (2) определяется этим способом однозначно. Теорема 1 доказана.

Доказательства теорем 2 и 3 аналогичны доказательству теоремы 1.

8. Доказательство теоремы 4. Схема доказательства эквивалентности формул (3) – (7) (нечетные номера) такова: (3) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (7) $\Rightarrow$ (3).

Пусть в (3) $k = k$,
$$a = \frac{d(c^5 - d^2)}{(((c^5 - d^2)^2(c^5, d^2))_{\deg 6})^3}, \quad b = \frac{c^5 - d^2}{(((c^5 - d^2)^2(c^5, d^2))_{\deg 6})^2},$$

где $k, c, d \in \mathbb{N}$, $c^5 > d^2$, $(c^5, d^2)_{\deg 10} = 1$. Тогда из формулы (3) получается формула (5). Действительно, так как $k = k$,
$$\Delta_1 = \frac{c^4(c^5 - d^2)\Delta_2}{(((c^5 - d^2)^2(c^5, d^2))_{\deg 6})^5}, \quad a(a^2 + b^3)^{12} = \frac{c^{60}d(c^5 - d^2)^{25}}{(((c^5 - d^2)^2(c^5, d^2))_{\deg 6})^{75}},$$
$$b(a^2 + b^3)^8 = \frac{c^{40}(c^5 - d^2)^{17}}{(((c^5 - d^2)^2(c^5, d^2))_{\deg 6})^{50}}, \quad (a^2 + b^3)^5 = \frac{c^{25}(c^5 - d^2)^{10}}{(((c^5 - d^2)^2(c^5, d^2))_{\deg 6})^{30}},$$

где $k, c, d \in \mathbb{N}$, $c^5 > d^2$, $(c^5, d^2)_{\deg 10} = 1$, $\Delta_2 = ((c^5 - d^2)^{20}(c^5, d^2))_{\deg 30}$, то из формулы (3) следует формула (5). Теперь пусть в (5) $k = k$,
$$c = \frac{e(e^5 - f^3)}{(((e^5 - f^3)^5(e^5, f^3))_{\deg 10})^2}, \quad d = \frac{(e^5 - f^3)^3}{(((e^5 - f^3)^5(e^5, f^3))_{\deg 10})^5},$$

где $k, e, f \in \mathbb{N}$, $e^5 > f^3$, $(e^5, f^3)_{\deg 15} = 1$. Тогда из формулы (5) получается формула (7). В самом деле, так как $k = k$,
$$\Delta_2 = \frac{f^2(e^5 - f^3)^3\Delta_3}{(((e^5 - f^3)^5(e^5, f^3))_{\deg 10})^7}, \quad d(c^5 - d^2)^{10} = \frac{f^{30}(e^5 - f^3)^{53}}{(((e^5 - f^3)^5(e^5, f^3))_{\deg 10})^{105}},$$
$$(c^5 - d^2)^7 = \frac{f^{21}(e^5 - f^3)^{35}}{(((e^5 - f^3)^5(e^5, f^3))_{\deg 10})^{70}}, \quad c(c^5 - d^2)^4 = \frac{ef^{12}(e^5 - f^3)^{21}}{(((e^5 - f^3)^5(e^5, f^3))_{\deg 10})^{42}},$$

где $k, e, f \in \mathbb{N}$, $e^5 > f^3$, $(e^5, f^3)_{\deg 15} = 1$, $\Delta_3 = ((e^5 - f^3)^{15}(e^5, f^3))_{\deg 30}$, то из формулы (5) следует формула (7). Наконец, пусть в (7) $k = k$,
$$e = \frac{(a^2 + b^3)^2}{(((a^2 + b^3)^9(a^2, b^3))_{\deg 15})^3}, \quad f = \frac{b(a^2 + b^3)^3}{(((a^2 + b^3)^9(a^2, b^3))_{\deg 15})^5},$$

где $k, a, b \in \mathbb{N}$, $(a^2, b^3)_{\deg 6} = 1$. Тогда из формулы (7) получается формула (3). Действительно, так как $k = k$,
$$\Delta_3 = \frac{a(a^2 + b^3)^4\Delta_1}{(((a^2 + b^3)^9(a^2, b^3))_{\deg 15})^8}, \quad (e^5 - f^3)^8 = \frac{a^{16}(a^2 + b^3)^{72}}{(((a^2 + b^3)^9(a^2, b^3))_{\deg 15})^{120}},$$

$$f(e^5-f^3)^5=\frac{a^{10}b(a^2+b^3)^{48}}{(((a^2+b^3)^9(a^2,b^3))_{\deg 15})^{80}},\quad e(e^5-f^3)^3=\frac{a^6(a^2+b^3)^{29}}{(((a^2+b^3)^9(a^2,b^3))_{\deg 15})^{48}},$$

где $k,a,b\in\mathbb{N}$, $(a^2,b^3)_{\deg 6}=1$, $\Delta_1=((a^2+b^3)^{24}(a^2,b^3))_{\deg 30}$, то из формулы (7) следует формула (3).

Таким образом, при выполнении условий (4) – (8) (четные номера) общие формулы (3) – (7) (нечетные номера) всех решений нагеллова уравнения (1) с условием (2) эквивалентны.

Теорема 4 эквивалентности доказана.

9. Заметим, что число целых параметров, входящих в каждую из общих формул (3) – (7) (нечетные номера) соответственно с условием (4) – (8) (четные номера), не превышает трех.

10. Из теорем 1-3 очевидным образом вытекает

Следствие. Каждая из следующих эквивалентных формул:

$$x=\frac{a(a^2+b^3)^{12}}{\Delta_1^{15}},\quad y=\frac{b(a^2+b^3)^8}{\Delta_1^{10}},\quad z=\frac{(a^2+b^3)^5}{\Delta_1^6},\tag{13}$$

где

$$a,b\in\mathbb{N},\quad (a^2,b^3)_{\deg 6}=1,\quad \Delta_1=((a^2+b^3)^{24}(a^2,b^3))_{\deg 30},\tag{14}$$

$$x=\frac{d(c^5-d^2)^{10}}{\Delta_2^{15}},\quad y=\frac{(c^5-d^2)^7}{\Delta_2^{10}},\quad z=\frac{c(c^5-d^2)^4}{\Delta_2^6},\tag{15}$$

где

$$c,d\in\mathbb{N},\quad c^5>d^2,\quad (c^5,d^2)_{\deg 10}=1,\quad \Delta_2=((c^5-d^2)^{20}(c^5,d^2))_{\deg 30},\tag{16}$$

$$x=\frac{(e^5-f^3)^8}{\Delta_3^{15}},\quad y=\frac{f(e^5-f^3)^5}{\Delta_3^{10}},\quad z=\frac{e(e^5-f^3)^3}{\Delta_3^6},\tag{17}$$

где

$$e,f\in\mathbb{N},\quad e^5>f^3,\quad (e^5,f^3)_{\deg 15}=1,\quad \Delta_3=((e^5-f^3)^{15}(e^5,f^3))_{\deg 30},\tag{18}$$

является общей формулой всех основных решений нагеллова уравнения (1) с условием (2). При этом каждое такое основное решение нагеллова уравнения (1) с условием (2) определяется каждым из этих способов однозначно.

Пример 5. Одно и то же основное решение $\langle 3\cdot 17^{12}; 2\cdot 17^8; 17^5\rangle$ получается из формулы (13) с условием (14) при $a=3$, $b=2$; из формулы (15) с условием (16) при $c=17$, $d=867$ и из формулы (17) с условием (18) при $e=289$, $f=9826$.

Цитированная литература

1. **Nagell T.** // Acta Arithmetica. 1964. IX, 3. P. 227 – 235.

2. **Кожегельдинов С.Ш.** Некоторые классические диофантовы уравнения от трех и более переменных. Новосибирск. Т.1. 2002. Алматы. Т.2. 2004. Алматы. Т.3. 2006. Семей. Т.4. 2008.

3. **Кожегельдинов С.Ш.** Двухтысячелетний барьер взят. Алматы. 2001.

4. **Кожегельдинов С.Ш.** // Сб. тез. докл. III Междунар. конф. "Современные проблемы теории чисел и ее приложения." Тула. 1996. С. 77.

5. **Кожегельдинов С.Ш.** // Тез. докл. Междунар. 11-ой межвуз. конф. по математике и механике. Астана. 2006. С.110.

6. **Кожегельдинов С.Ш.** Элементы теории диофантовых уравнений в упражнениях и задачах. Семипалатинск. 2003.

Поступила в редакцию 25.09.2008 г.

Математический журнал. *Алматы. 2008. Том 8. № 4 (30) . С. 78 – 87*

УДК 517.512

ПОРЯДОК РОСТА НОРМЫ ПРОИЗВОДНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ И АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ П.Л.УЛЬЯНОВА

А. Т. Омарова, Е. С. Смаилов

РГКП Институт прикладной математики МОН РК
100026 г.Караганды ул.Университетская, 28а esmailov@mail.ru

Данная статья посвящена исследованию структурных и интегральных свойств функций в терминах роста нормы производных многочленов наилучшего приближения в пространстве Лебега с весом Эрмита на всей числовой оси.

1. Определения и вспомогательные предложения. Пусть $L_{p,\rho}(\mathbb{R})$, $1 \le p \le +\infty$ – пространство измеримых на $\mathbb{R}$ функций, удовлетворяющих условию:

$$\|f\|_{L_{p,\rho}(\mathbb{R})} = \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}} \left| f(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}} \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty, \ \ 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_{\infty,\rho}(\mathbb{R})} = ess \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) e^{-\frac{x^2}{2}}| < +\infty, \ \ p = +\infty.$$

T_h- оператор обобщенного сдвига [1], [2], заданный на функциях из $L_{p,\rho}(R)$, $1 \le p \le +\infty$, по формуле:

$$T_h f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(e^{-h}\left(x + y\sqrt{e^{2h}-1}\right)\right) \rho^2(y)\, dy,$$

где

$$h \ge 0, \quad \rho(y) = e^{-\frac{y^2}{2}}, \quad y \in R.$$

Обобщенный модуль гладкости определяется следующим образом:

$$\omega_k(f,\delta)_{p,\rho} = \sup_{|h|\le\delta} \left\| (T_h - I)^k f \right\|_{p,\rho},$$

Keywords: *The best approximation, norm of the derivatives, differential operator of Hermit, algebraic polynomials, generalized shift, inequality of Bernschtein, inequality of different metrics, module of continuity*

2000 Mathematics Subject Classification: 54C25, 42C10

где I – тождественный оператор; через $E_k(f)_{p,\rho}$ обозначим наилучшее приближение функции $f \in L_{p,\rho}(R)$ алгебраическими многочленами порядка не выше k; $D = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx}$ – дифференциальный оператор Эрмита [3], который коммутирует с оператором обобщенного сдвига [1], [2]. $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}^+$ – множество неотрицательных целых чисел. В [4], [5] в терминах скорости убывания к нулю наилучших приближений периодических функций посредством тригонометрических многочленов исследованы интегральные свойства функций. Впоследствии данная тематика получила бурное развитие в работах многих математиков [6-12].

Лемма 1.[9] *Пусть $s \geq 2$ и числа $\delta_{\nu_1}, \delta_{\nu_2}, ..., \delta_{\nu_s}$ положительны. Тогда имеет место равенство:*

$$\delta_{\nu_1} \cdot \delta_{\nu_2} ... \cdot \delta_{\nu_s} = \left[\prod_{1\leq i<j\leq s} \delta_{\nu_i} \cdot \delta_{\nu_j}\right]^{\frac{1}{s-1}}.$$

Лемма 2.[9] *Пусть $s \geq 2$, $\alpha > 0$ и $\theta = \frac{s(s-1)}{2}$, числа $\sigma_{\nu_i} > 0$, $\forall i = 1, 2, .., s$. Тогда имеет место равенство:*

$$\prod_{1\leq i<j\leq s} \left[\sigma_{\nu_i}^{\frac{1}{2}} \sigma_{\nu_j}^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{-|\nu_i-\nu_j|}{2}\alpha}\right]^{\frac{1}{\theta}} = \prod_{i=1}^{s} \sigma_{\nu_i}^{\frac{1}{s}} \prod_{j=1}^{s} 2^{-\frac{|\nu_i-\nu_j|}{4}\frac{\alpha}{\theta}}. \tag{1}$$

Лемма 3. *Пусть $\alpha > 0, 1 \leq q < +\infty, d_s > 0, \forall s \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\sum_{\nu=\mu}^{+\infty} 2^{\nu\alpha q} \left(\sum_{s=\nu}^{+\infty} d_s\right)^q \leq C_{\alpha q} \sum_{\nu=\mu}^{+\infty} 2^{\nu\alpha q} d_\nu^q, \ \forall \mu \in \mathbb{N}.$$

Лемма доказывается стандартным образом, [13].

Лемма 4.[14] *Пусть $1 \leq p < q \leq +\infty$ и P_n - алгебраический многочлен степени не выше n. Тогда справедливо неравенство:*

$$\|P_n\|_{L_{q,\rho}(\mathbb{R})} \leq C_{pq} n^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|P_n\|_{L_{p,\rho}(\mathbb{R})},$$

где константа $C_{pq} > 0$ не зависит от многочленов P_n.

Лемма 5.[15] *Для любого алгебраического многочлена $P_N(x)$ справедливо неравенство:*

$$\|DP_N\|_{L_{p,\rho}(\mathbb{R})} \leq B_p N \|P_N\|_{L_{p,\rho}(\mathbb{R})}, \ \ 1 \leq p \leq +\infty.$$

Лемма 6.[15] $\forall f \in L_{p,\rho}(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq +\infty :$ *справедливо неравенство:*

$$E_n(f)_{p,\rho} \leq C_p \omega_l \left(f; \frac{1}{n}\right)_{p,\rho},$$

где $C_p > 0$ не зависит от f и $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 7.[15] *Пусть для $f \in L_{p,\rho}(\mathbb{R}), 1 \leq p \leq +\infty$, существует $D^l f \in L_{p,\rho}(\mathbb{R}), l \in \mathbb{N}$, тогда справедливо неравенство:*

$$\omega_l \left(f; \frac{1}{n}\right)_{p,\rho} \leq C_{lp} \left\|D^l f\right\|_{p,\rho} \frac{1}{n^l},$$

где константа $C_{lp} > 0$ не зависит от f и $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 8. [14]. *Пусть $f \in L_p(\mathbb{R}, \rho), 1 \leq p \leq +\infty, h \in \mathbb{R}$. Тогда существует число $D_p > 0$, которое не зависит от f и h, такое, что*

$$\|T_h f\|_{L_{p,\rho}(\mathbb{R})} \leq D_p \|f\|_{L_{p,\rho}(\mathbb{R})}.$$

Лемма 9.[16] *Пусть* $1 \le q \le +\infty$ *и* $\{P_{k_\nu}(x)\}$ *– последовательность алгебраических многочленов. Если при всех* $i = 0, 1, ..., m$ $\left\|D^i P_{k_l} - D^i P_{k_\mu}\right\|_{q,\rho} \to 0$, *при* $l \to +\infty$, $\mu \to +\infty$, *то* $\exists \varphi_i \in L_{q,\rho}(\mathbb{R})$ *такие, что* $\left\|\varphi_i - D^i P_{k_\nu}\right\|_{q,\rho} \to 0$, $\nu \to +\infty$ *и* $\varphi_i(x) = D^i \varphi_o(x), \forall i = 1, 2, ..., m$ *почти для всех* $x \in \mathbb{R}$.

2. Основные результаты

Теорема. *Пусть* $f \in L_{p,\rho}(\mathbb{R})$, $1 \le p < q < +\infty$, *алгебраический многочлен* $P_k(x)$ *такой, что* $E_k(f)_{p,\rho} = \|f - P_k\|_{p,\rho}$, $k \in \mathbb{Z}^+$. *Если для некоторых* $r \in \mathbb{N}$ *и* $m \in \mathbb{Z}^+$ *сходится ряд*

$$A^q_{pqrm} = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-qr + \frac{q}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) - 1} \left\|D^{m+r} P_k\right\|^q_{p,\rho} < +\infty,$$

то существует $D^m f \in L_{q,\rho}(\mathbb{R})$ *и*

$$\|D^m f\|_{q,\rho} \le C_{pqrm} \left\{ \|f\|_{p,\rho} + A_{pqrm} \right\},$$

$$\omega_r \left(D^m f; \frac{1}{n} \right)_{q,\rho} \le B_{pqrm} \left\{ \sum_{k=n+1}^{+\infty} k^{-qr - 1 + \frac{q}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \left\|D^{m+r} P_k\right\|^q_{p,\rho} \right\}^{\frac{1}{q}},$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ *и константы* $C_{pqrm}, B_{pqrm} > 0$ *не зависят от* $P_k(x)$ *и* n.

Доказательство. Подберем целое μ: $2^{\mu-1} < n \le 2^\mu$ и $k_\nu \in \mathbb{N} \cap \left[2^\nu + 1, 2^{\nu+1}\right]$:

$$k_\nu^{-r + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \left\|D^{m+r} P_{k_\nu}\right\|_{p,\rho} \le k^{-r + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \left\|D^{m+r} P_k\right\|_{p,\rho}, \ \forall k \in \left[2^\nu + 1, 2^{\nu+1}\right]. \tag{2}$$

Так как

$$E_{k_\nu}(f)_{p,\rho} \le E_{k_\nu}(f - P_{k_{\nu+1}})_{p,\rho} + E_{k_\nu}(P_{k_{\nu+1}})_{p,\rho} \equiv E_{k_{\nu+1}}(f)_{p,\rho} + E_{k_\nu}(P_{k_{\nu+1}})_{p,\rho},$$

то

$$E_{k_\nu}(f)_{p,\rho} - E_{k_{\nu+1}}(f)_{p,\rho} \le E_{k_\nu}\left(P_{k_{\nu+1}}\right)_{p,\rho}.$$

Далее, правую часть этого неравенства оценим с помощью леммы 6 и леммы 7:

$$E_{k_\nu}(f)_{p,\rho} - E_{k_{\nu+1}}(f)_{p,\rho} \le C_{pl} \omega_l \left(P_{k_{\nu+1}}; \frac{1}{k_\nu + 1} \right)_{p,\rho} \le \frac{C'_{lp}}{(k_\nu + 1)^l} \left\|D^l P_{k_{\nu+1}}\right\|_{p,\rho}, \ \nu \in \mathbb{Z}^+,$$

где $l \in \mathbb{N}$. Тогда

$$E_{k_\mu}(f)_{p,\rho} \le C'_{pl} \sum_{\nu=\mu}^{+\infty} \frac{1}{(k_\nu + 1)^l} \left\|D^l P_{k_{\nu+1}}\right\|_{p,\rho}. \tag{3}$$

Пусть $l > \mu, l \in \mathbb{N}, \mu \in \mathbb{N}$. Для всех $i \in \{0, 1, ..., m\}$ имеем:

$$D^i P_{k_l}(x) - D^i P_{k_\mu}(x) = \sum_{\nu=\mu}^{l-1} \left(D^i P_{k_{\nu+1}}(x) - D^i P_{k_\nu}(x) \right) = \sum_{\nu=\mu}^{l-1} \Delta^{(i)}_\nu(x),$$

$$\Delta_\nu^{(i)}(x) = D^i P_{k_{\nu+1}}(x) - D^i P_{k_\nu}(x), i \in \{0,1,...,m\}, \nu \in [\mu, l-1].$$

Положим $s = [q]+1$, $[q]$ – целая часть числа q. Тогда $\frac{q}{s} < 1$ и

$$\left\|D^i P_{k_l} - D^i P_{k_\mu}\right\|_{q,\rho}^q \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{\nu=\mu}^{l-1} |\Delta_\nu^{(i)}(x)| e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^q dx \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\sum_{\nu=\mu}^{l-1} |\Delta_\nu^{(i)}(x)| e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{\frac{q}{s}}\right]^s dx =$$

$$= \left(\text{положим } \delta_\nu^{(i)}(x) = |\Delta_\nu^{(i)}(x)|^{\frac{q}{s}}\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{\nu=\mu}^{l-1} \delta_\nu^{(i)}(x) e^{-\frac{x}{2}\frac{q}{s}}\right)^s dx =$$

$$= \sum_{\nu_1=\mu}^{l-1} ... \sum_{\nu_s=\mu}^{l-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\delta_{\nu_1}^{(i)}(x)...\delta_{\nu_s}^{(i)}(x)\right) e^{-\frac{x^2}{2}q} dx = (\text{Лемма } 1) =$$

$$= \sum_{\nu_1=\mu}^{l-1} ... \sum_{\nu_s=\mu}^{l-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_{1\le\tau<j\le s} \delta_{\nu_\tau}^{(i)}(x)\delta_{\nu_j}^{(i)}(x)\right]^{\frac{1}{s-1}} e^{-\frac{x^2}{2}q} dx.$$

Таким образом,

$$\left\|D^i P_{k_l} - D^i P_{k_\mu}\right\|_{q,\rho}^q \le \sum_{\nu_1=\mu}^{l-1} ... \sum_{\nu_s=\mu}^{l-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_{1\le\tau<j\le s} \delta_{\nu_\tau}^{(i)}(x)\delta_{\nu_j}^{(i)}(x)\right]^{\frac{1}{s-1}} e^{-\frac{x^2}{2}q} dx. \tag{4}$$

а) Сначала рассмотрим случай $q \ge 2$.

Положим $\theta = \frac{s(s-1)}{2}$, где $s = [q]+1 \ge 3$, $s-1 = [q] \ge 2$, поэтому $\theta \ge 3 > 1$. Применим неравенство Гельдера с показателем θ :

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_{1\le\tau<j\le s} \delta_{\nu_\tau}^{(i)}(x)\delta_{\nu_j}^{(i)}(x)\right]^{\frac{1}{s-1}} e^{-\frac{x^2}{2}q} dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_{1\le\tau<j\le s} \delta_{\nu_\tau}^{(i)}(x)\delta_{\nu_j}^{(i)}(x)\right]^{\frac{1}{s-1}} e^{-\frac{x^2}{2}q\left(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta'}\right)} dx =$$

$$= \prod_{1\le\tau<j\le s} \left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\delta_{\nu_\tau}^{(i)}(x)\delta_{\nu_j}^{(i)}(x)\right)^{\frac{s}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}q} dx\right\}^{\frac{1}{\theta}} \left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}q} dx\right\}^{\frac{1}{\theta'}} =$$

$$= C_q \prod_{1\le\tau<j\le s} \left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\delta_{\nu_\tau}^{(i)}(x)\delta_{\nu_j}^{(i)}(x)\right)^{\frac{s}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}q} dx\right\}^{\frac{1}{\theta}} = \left(\delta_{\nu_j}^{(i)}(x) = |\Delta_{\nu_j}^{(i)}(x)|^{\frac{q}{s}}\right) =$$

$$= C_q \prod_{1\le\tau<j\le s} \left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Delta_{\nu_\tau}^{(i)}(x)|^{\frac{q}{2}} |\Delta_{\nu_j}^{(i)}(x)|^{\frac{q}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}q} dx\right\}^{\frac{1}{\theta}}. \tag{5}$$

Оценим интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Delta_{\nu_\tau}^{(i)}(x)|^{\frac{q}{2}} |\Delta_{\nu_j}^{(i)}(x)|^{\frac{q}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}q} dx = (\text{применяем неравенство Гельдера с показателями}$$

$$r=\frac{p+q}{p}, r'=\frac{p+q}{q}\Bigg)\le\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\Delta_{\nu_\tau}^{(i)}(x)|^{\frac{q}{2}r}e^{-\frac{x^2}{2}\frac{q}{2}r}dx\right\}^{\frac{1}{r}}\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\Delta_{\nu_j}^{(i)}(x)|^{\frac{q}{2}r'}e^{-\frac{x^2}{2}\frac{q}{2}r'}dx\right\}^{\frac{1}{r'}}=$$

$$=\left\|\Delta_{\nu_\tau}^{(i)}\right\|_{q\frac{r}{2},\rho}^{\frac{q}{2}}\left\|\Delta_{\nu_j}^{(i)}\right\|_{q\frac{r'}{2},\rho}^{\frac{q}{2}}. \qquad (6)$$

При этом будем считать, что в степень r' возвели тот сомножитель, у которого индекс больше: будем считать, что $\nu_\tau<\nu_j$. Так как $\frac{qr}{2}>p$, $\frac{qr'}{2}>p$, то примененяя лемму 4, соотношение (6) продолжим следующим образом:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\Delta_{\nu_\tau}^{(i)}(x)|^{\frac{q}{2}}|\Delta_{\nu_j}^{(i)}(x)|^{\frac{q}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}q}dx\le$$

$$\le C_{pq}\left\{k_{\nu_\tau+1}^{\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)}\left\|\Delta_{\nu_\tau}^{(i)}\right\|_{p,\rho}^{q}k_{\nu_j+1}^{\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)}\left\|\Delta_{\nu_j}^{(i)}\right\|_{p,\rho}^{q}\right\}^{\frac{1}{2}}k_{\nu_\tau+1}^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)}k_{\nu_j+1}^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\right)}.$$

$$\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{2}{qr}\right)\frac{q}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)\right];\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{2}{qr'}\right)\frac{q}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r'}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)+\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\right)\right]\right).$$

Так как $2^\nu<k_\nu\le2^{\nu+1}$ и $r>2$, то

$$k_{\nu_\tau+1}\le2^{\nu_\tau+2}, k_{\nu_j+1}>2^{\nu_j+1}.$$

Тогда

$$k_{\nu_\tau+1}^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)}k_{\nu_j+1}^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\right)}\le2^{(\nu_\tau+2)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)}2^{(\nu_j+1)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\right)}=2^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)}2^{\nu_\tau\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)}2^{\nu_j\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=2^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)}2^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)|\nu_j-\nu_\tau|}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\Delta_{\nu_\tau}^{(i)}(x)|^{\frac{q}{2}}|\Delta_{\nu_j}^{(i)}(x)|^{\frac{q}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}q}dx\le C'_{pq}\left\{k_{\nu_\tau+1}^{\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)}\left\|\Delta_{\nu_\tau}^{(i)}\right\|_{p,\rho}^{q}k_{\nu_j+1}^{\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)}\left\|\Delta_{\nu_j}^{(i)}\right\|_{p,\rho}^{q}\right\}^{\frac{1}{2}}2^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)|\nu_j-\nu_\tau|}. \qquad (7)$$

Теперь из (5), (6) и (7) имеем:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\prod_{1\le\tau<j\le s}\delta_{\nu_\tau}^{(i)}(x)\delta_{\nu_j}^{(i)}(x)\right]^{\frac{1}{s-1}}e^{-\frac{x^2}{2}q}dx\le$$

$$\le C'''_{pq}\prod_{1\le\tau<j\le s}\left[\left\{k_{\nu_\tau+1}^{\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)}\left\|\Delta_{\nu_\tau}^{(i)}\right\|_{p,\rho}^{q}k_{\nu_j+1}^{\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)}\left\|\Delta_{\nu_j}^{(i)}\right\|_{p,\rho}^{q}\right\}^{\frac{1}{2}}2^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)|\nu_j-\nu_\tau|}\right]^{\frac{1}{\theta}}. \qquad (8)$$

б) Пусть теперь $1\le p<q\le2$. Тогда $s=2, \theta=\frac{s(s-1)}{2}=1$. В этом случае $r=\frac{p+q}{p}, r'=\frac{p+q}{q}$, поэтому $\frac{qr}{2}>p$, $\frac{qr'}{2}>p$. Повторяем все предыдущие действия:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\prod_{1\le\tau<2\le s}\delta_{\nu_\tau}^{(i)}(x)\delta_{\nu_j}^{(i)}(x)\right]e^{-\frac{x^2}{2}q}dx=\prod_{1\le\tau<j\le2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\Delta_{\nu_\tau}^{(i)}(x)|^{\frac{q}{2}}|\Delta_{\nu_j}^{(i)}(x)|^{\frac{q}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\le$$

$$\le\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\Delta_{\nu_1}^{(i)}(x)|^{\frac{q}{2}r}e^{-\frac{x^2}{2}\frac{q}{2}r}dx\right\}^{\frac{1}{r}}\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\Delta_{\nu_2}^{(i)}(x)|^{\frac{q}{2}r'}e^{-\frac{x^2}{2}\frac{q}{2}r'}dx\right\}^{\frac{1}{r'}}=$$

$$=\left\|\Delta_{\nu_1}^{(i)}\right\|_{q\frac{r}{2},\rho}^{\frac{q}{2}}\left\|\Delta_{\nu_2}^{(i)}\right\|_{q\frac{r}{2},\rho}^{\frac{q}{2}}\le(\text{применяем лемму 4})\le$$

$$\le C''_{pq}\left\{k_{\nu_1+1}^{\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)}\left\|\Delta_{\nu_1}^{(i)}\right\|_{p,\rho}^{q}k_{\nu_2+1}^{\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)}\left\|\Delta_{\nu_2}^{(i)}\right\|_{p,\rho}^{q}\right\}^{\frac{1}{2}}k_{\nu_1+1}^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)}k_{\nu_2+1}^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\right)}\le$$

$$\le C'''_{pq}\left\{k_{\nu_1+1}^{\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)}\left\|\Delta_{\nu_1}^{(i)}\right\|_{p,\rho}^{q}k_{\nu_2+1}^{\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)}\left\|\Delta_{\nu_2}^{(i)}\right\|_{p,\rho}^{q}\right\}^{\frac{1}{2}}2^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)|\nu_2-\nu_1|}. \tag{9}$$

Положим

$$\sigma_{\nu_j}^{(i)}=k_{\nu_j}^{\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)}\left\|\Delta_{\nu_j}^{(i)}\right\|_{p,\rho}^{q},\, j\in[1,2].$$

Теперь из $(4),(5),(8)$ и (9) выводим:

$$\left\|D^iP_{k_l}-D^iP_{k_\mu}\right\|_{q,\rho}^q\le\overline{C}_{pq}\sum_{\nu_1=\mu}^{l-1}\dots\sum_{\nu_s=\mu}^{l-1}\prod_{1\le\tau<j\le s}\left(2^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)|\nu_j-\nu_\tau|}\left(\sigma_{\nu_\tau}^{(i)}\sigma_{\nu_j}^{(i)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{\theta}}=$$

$$=\left(\text{полагая }\ \alpha=\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\ \text{ применяем лемму }\ 2\right)=$$

$$=C_{pq}\sum_{\nu_1=\mu}^{l-1}\dots\sum_{\nu_s=\mu}^{l-1}\prod_{j=1}^{s}\left(\sigma_{\nu_j}^{(i)}\right)^{\frac{1}{s}}\prod_{\tau=1}^{s}2^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)\frac{1}{2\theta}}\le$$

$$\le(\text{применим неравенство Гельдера для кратной суммы})\le$$

$$\le\overline{C}_{pq}\prod_{j=1}^{s}\left[\sum_{\nu_1=\mu}^{l-1}\dots\sum_{\nu_s=\mu}^{l-1}\sigma_{\nu_j}^{(i)}\prod_{\tau=1}^{s}2^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)\frac{|\nu_j-\nu_\tau|}{s-1}}\right]^{\frac{1}{s}}. \tag{10}$$

При каждом фиксированном j имеет место равенство:

$$\sum_{\nu_1=\mu}^{l-1}\dots\sum_{\nu_s=\mu}^{l-1}\sigma_{\nu_j}^{(i)}\prod_{\tau=1}^{s}2^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)\frac{|\nu_j-\nu_\tau|}{s-1}}=\left(2^{-\frac{|\nu_j-\nu_j|}{s-1}}=1,\ \ \forall j=1,...,s\right)=$$

$$=\sum_{\nu_j=\mu}^{l-1}\sigma_{\nu_j}^{(i)}\sum_{\nu_1=\mu}^{l-1}\dots\sum_{\nu_{j-1}=\mu}^{l-1}\sum_{\nu_{j+1}=\mu}^{l-1}\dots\sum_{\nu_s=\mu}^{l-1}\prod_{\tau\ne j}2^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)\frac{|\nu_j-\nu_\tau|}{s-1}}=$$

$$=\sum_{\nu_j=\mu}^{l-1}\sigma_{\nu_j}^{(i)}\left\{\sum_{\nu_1=\mu}^{l-1}2^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)\frac{|\nu_j-\nu_1|}{s-1}}\right\}\dots\left\{\sum_{\nu_{j-1}=\mu}^{l-1}2^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)\frac{|\nu_j-\nu_{j-1}|}{s-1}}\right\}\left\{\sum_{\nu_{j+1}=\mu}^{l-1}2^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)\frac{|\nu_j-\nu_{j+1}|}{s-1}}\right\}\dots$$

$$\ldots\left\{\sum_{\nu_s=\mu}^{l-1}2^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)\frac{|\nu_j-\nu_s|}{s-1}}\right\}=\sum_{\nu_j=\mu}^{l-1}\sigma_{\nu_j}^{(i)}\left\{\sum_{t=\mu}^{l-1}2^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)\frac{|\nu_j-t|}{s-1}}\right\}^{s-1}\leq\sum_{\nu_j=\mu}^{l-1}\sigma_{\nu_j}^{(i)}\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)\frac{|k|}{s-1}}\right\}^{s-1}. \tag{11}$$

Ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}2^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)\frac{|k|}{s-1}}$ сходится, потому что по определению $r>2, s\geq 2$. Тогда из (10) и (11) получим:

$$\left\|D^iP_{k_l}-D^iP_{k_\mu}\right\|_{q,\rho}^q\leq\overline{\overline{C}}_{pq}\prod_{j=1}^{s}\left\{\sum_{\nu_j=\mu}^{l-1}\sigma_{\nu_j}^{(i)}\right\}^{\frac{1}{s}}=\overline{\overline{C}}_{pq}\sum_{\nu=\mu}^{l-1}\sigma_{\nu}^{(i)}=\overline{\overline{C}}_{pq}\sum_{\nu=\mu}^{l-1}k_\nu^{\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)}\left\|\Delta_\nu^{(i)}\right\|_{p,\rho}^q=$$

$$=\overline{\overline{C}}_{pq}\sum_{\nu=\mu}^{l-1}k_\nu^{\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)}\left\|D^iP_{k_{\nu+1}}-D^iP_{k_\nu}\right\|_{p,\rho}^q. \tag{12}$$

Применяя лемму 5, имеем:

$$\left\|D^iP_{k_l}-D^iP_{k_\mu}\right\|_{q,\rho}^q\leq\overline{\overline{\overline{C}}}_{pq}\sum_{\nu=\mu}^{l-1}k_\nu^{\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)}(k_{\nu+1})^{qi}\left\|P_{k_{\nu+1}}-P_{k_\nu}\right\|_{p,\rho}^q\leq$$

$$\leq 2\overline{\overline{\overline{C}}}_{pq}\sum_{\nu=\mu}^{l-1}k_\nu^{\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)}(k_{\nu+1})^{qi}E_{k_\nu}^q(f)_{p,\rho}\leq$$

$$\leq(\text{подставляем (3) полагая } l=r+m)\leq$$

$$\leq 2\overline{\overline{\overline{C}}}_{pq}\sum_{\nu=\mu}^{l-1}k_\nu^{\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)}(k_{\nu+1})^{qi}\left(\sum_{s=\nu}^{+\infty}\frac{\|D^{m+r}P_{k_s}\|_{p,\rho}}{(k_s+1)^{r+m}}\right)^q.$$

Далее, учитывая выбор чисел $k_\nu\in\left[2^\nu+1,2^{\nu+1}\right]$, имеем: $1\leq\frac{k_{\nu+1}}{k_\nu}\leq 4$. Поэтому

$$\sum_{\nu=\mu}^{l-1}k_\nu^{\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)}(k_{\nu+1})^{qi}\left(\sum_{s=\nu}^{+\infty}\frac{\|D^{m+r}P_{k_s}\|_{p,\rho}}{(k_s+1)^{r+m}}\right)^q\leq B_{pq}\sum_{\nu=\mu}^{l-1}k_\nu^{\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)+qm}\left(\sum_{s=\nu}^{+\infty}\frac{\|D^{m+r}P_{k_s}\|_{p,\rho}}{(k_s+1)^{r+m}}\right)^q\leq$$

$$\leq B_{pqm}\sum_{\nu=\mu}^{+\infty}2^{\nu\left(\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)+qm\right)}\left(\sum_{s=\nu}^{+\infty}\frac{\|D^{m+r}P_{k_s}\|_{p,\rho}}{(k_s+1)^{r+m}}\right)^q\leq(\text{лемма 3})\leq$$

$$\leq B'_{pqm}\sum_{\nu=\mu}^{+\infty}2^{\nu\left(\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p}-1\right)+qm\right)}\frac{\|D^{m+r}P_{k_\nu}\|_{p,\rho}^q}{(k_\nu+1)^{(r+m)q}}\leq B''_{pqmr}\sum_{\nu=\mu}^{+\infty}k_\nu^{-q\left(r-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)}\left\|D^{m+r}P_{k_\nu}\right\|_{p,\rho}^q. \tag{13}$$

В силу соотношения (2) имеем:

$$\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}}k^{-rq+\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1}\left\|D^{m+r}P_k\right\|_{p,\rho}^q\geq k_\nu^{-rq+\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left\|D^{m+r}P_{k_\nu}\right\|_{p,\rho}^q\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}}k^{-1}\geq$$

$$\geq k_\nu^{-rq+\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left\|D^{m+r}P_{k_\nu}\right\|_{p,\rho}^q2^{-\nu-1}2^\nu=\frac{1}{2}k_\nu^{-qr+\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left\|D^{m+r}P_{k_\nu}\right\|_{p,\rho}^q. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (13), получим:

$$\left\|D^iP_{k_l}-D^iP_{k_\mu}\right\|_{q,\rho}^q\le\frac{1}{2}C''_{pqr}\sum_{\nu=\mu}^{+\infty}\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}}k^{-rq+\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1}\left\|D^{m+r}P_k\right\|_{p,\rho}^q=$$

$$=\frac{1}{2}C''_{pqr}\sum_{k=2^\mu+1}^{+\infty}k^{-rq+\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1}\left\|D^{m+r}P_k\right\|_{p,\rho}^q,\, l>\mu. \tag{15}$$

По условию теоремы ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty}k^{-rq+\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1}\left\|D^{m+r}P_k\right\|_{p,\rho}^q<+\infty$$

сходится, поэтому для любого $\varepsilon>0$ найдется $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ такое что, $\forall N\ge N_\varepsilon$:

$$\sum_{k=2^N+1}^{+\infty}k^{-rq+\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1}\left\|D^{m+r}P_k\right\|_{p,\rho}^q<\varepsilon.$$

Следовательно, по лемме 9 $D^i\varphi_o(x)=\varphi_i(x)\in L_{q,\rho}(\mathbb{R})$, где $i=0,1,...,m$. С другой стороны, по определению последовательности $P_k(x)$ $E_k(f)_{p,\rho}=\|f-P_k\|_{p,\rho}\longrightarrow 0$ при $k\longrightarrow+\infty$. Следовательно, $\varphi_0(x)\sim f(x)$ на $\mathbb{R}$, $Df(x)\sim\varphi_1(x)$, $D^2f(x)\sim D\varphi_1(x)\sim\varphi_2(x)$, ... , $D^mf(x)\sim\varphi_m(x)$. При этом, так как $\varphi_{(i)}\in L_{q,\rho}(\mathbb{R})$, $i=1,2,...,m$, то $D^if\in L_{q,\rho}(\mathbb{R})$. Теперь в неравенстве (15) при $i=m$ переходя к пределу при $l\to+\infty$, получим:

$$\left\|D^mf-D^mP_{k_\mu}\right\|_{q,\rho}\le C_{qprm}\left\{\sum_{k=2^\mu+1}^{+\infty}k^{-qr+\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1}\left\|D^{r+m}P_k\right\|_{p,\rho}^q\right\}^{\frac{1}{q}}\le\left(2^{\mu-1}<n\le2^\mu\right)\le$$

$$\le C_{qprm}\left\{\sum_{k=n+1}^{+\infty}k^{-qr+\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1}\left\|D^{r+m}P_k\right\|_{p,\rho}^q\right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{16}$$

На основании свойств модуля гладкости по обобщенному сдвигу имеем:

$$\omega_r\left(D^mf;\frac{1}{n}\right)_{q,\rho}\le\omega_r\left(D^mf-D^mP_{k_\mu};\frac{1}{n}\right)_{q,\rho}+\omega_r\left(D^mP_{k_\mu};\frac{1}{n}\right)_{q,\rho}\le$$

$$\le 2^r\left\|D^mf-D^mP_{k_\mu}\right\|_{q,\rho}+\frac{1}{n^r}\left\|D^{r+m}P_{k_\mu}\right\|_{q,\rho}. \tag{17}$$

Так как $2^{\mu-1}<n\le2^\mu$, $2^\mu+1\le k_\mu\le2^{\mu+1}$, то

$$\frac{1}{n^r}\left\|D^{r+m}P_{k_\mu}\right\|_{q,\rho}<\frac{2^r}{2^{\mu r}}\left\|D^{r+m}P_{k_\mu}\right\|_{q,\rho}=\frac{2^{2r}}{2^{(\mu+1)r}}\left\|D^{r+m}P_{k_\mu}\right\|_{q,\rho}\le\frac{2^{2r}}{k_\mu^r}\left\|D^{r+m}P_{k_\mu}\right\|_{q,\rho}\le$$

$$\le(\text{лемма } 4)\le$$

$$\le\frac{C_{pqr}}{k_\mu^r}k_\mu^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left\|D^{r+m}P_{k_\mu}\right\|_{p,\rho}\le(14)\le C'_{qprm}\left\{\sum_{k=2^\mu+1}^{2^{\mu+1}}k^{-qr+\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1}\left\|D^{r+m}P_k\right\|_{p,\rho}^q\right\}^{\frac{1}{q}}\le$$

$$\le C'_{qprm}\left\{\sum_{k=n+1}^{+\infty}k^{-qr+\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1}\left\|D^{r+m}P_k\right\|_{p,\rho}^q\right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{18}$$

Теперь из $(16), (17), (18)$ окончательно имеем:

$$\omega_r\left(D^m f;\frac{1}{n}\right)_{q,\rho}\leq C'_{qprm}\left\{\sum_{k=n+1}^{+\infty}k^{-qr+\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1}\left\|D^{r+m}P_k\right\|_{p,\rho}^{q}\right\}^{\frac{1}{q}},\ \forall n\in\mathbb{N},$$

и константа $C'_{pqrm}>0$ не зависит от $n\in\mathbb{N}$ и $f(x), P_k(x)$. Далее,

$$\|D^m f\|_{q,\rho}\leq\|D^m f-D^m P_{k_1}\|_{q,\rho}+\|D^m P_{k_1}\|_{q,\rho}\leq(16)\leq$$

$$\leq C_{qprm}\left\{\sum_{k=3}^{+\infty}k^{-qr+\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1}\left\|D^{r+m}P_k\right\|_{p,\rho}^{q}\right\}^{\frac{1}{q}}+$$

$$+\|D^m P_{k_1}\|_{q,\rho}\leq C_{qprm}\left\{\sum_{k=1}^{+\infty}k^{-qr+\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1}\left\|D^{r+m}P_k\right\|_{p,\rho}^{q}\right\}^{\frac{1}{q}}+C_{pqm}k_1^{r+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|P_{k_1}\|_{p,\rho}. \quad (19)$$

$$\|P_{k_1}\|_{p,\rho}\leq\|f-P_{k_1}\|_{p,\rho}+\|f\|_{p,\rho}=E_{k_1}(f)_{p,\rho}+\|f\|_{p,\rho}\leq E_o(f)_{p,\rho}+\|f\|_{p,\rho}\leq 2\,\|f\|_{p,\rho}. \quad (20)$$

Исходя из неравенств (19) и (20), получим требуемое неравенство:

$$\|D^m f\|_{q,\rho}\leq B_{pqrm}\left\{\|f\|_{p,\rho}+\left[\sum_{k=1}^{+\infty}k^{-qr+\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1}\left\|D^{r+m}P_k\right\|_{p,\rho}^{q}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

Замечание. *Исследованию дифференциальных и структурных свойств функций в терминах роста нормы производных тригонометрических приближающих агрегатов была посвящена работа [17]. Дальнейшее развитие тематики в периодическом случае получено в работах [12],[18-20].*

Цитированная литература

1. **Федоров В.М.** // Изв. ВУЗов. матем. 1984. №6. С. 55 – 63.
2. **Алексеев Д.В.** // Вестник Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. 1997. №6. С. 68 – 71.
3. **Лебедев Н.Н.** Специальные функции и их приложения. Москва, 1963.
4. **Конюшков А.А.** // Матем. сб. 1958. Т.44(86), №1. С. 53 – 84.
5. **5 . Ульянов П.Л.** // Матем. сб. Т.81(123). №1.
6. **Стороженко Э.А.** //Матем. сб. 1975. Т.97(139), №2. С. 230 – 241.
7. **Коляда В.И.** // Матем.сб. Т.102(144), №2. С. 195 – 215.
8. **Потапов М.К.** // Труды МИАН СССР. 1980. Т.156. С. 143 – 156.
9. **Тиман М.Ф.** // Изв.вузов. Математика. 1974. С. 61 – 74.
10. **Смаилов Е.С.** // Диссертация на соискание ученой степени д.ф.-м.н. Караганда, 1997.
11. **Темиргалиев Н.** //Матем. заметки. 1976. Т.20, №6. С. 835 – 841.
12. **Акишев Г.А.** // Диссертация на соискание ученой степени к.ф.-м.н. Караганда, 1982.
13. **Коляда В.И.** Матем. заметки. 1992. Т.51. вып.3. С. 24 – 35.
14. **Федоров В.М.** // Тез. докл. VII казахстанской межвуз. науч. конф. по математике и механике (15-18 сентября 1981г.). Караганда, 1981. С. 47 – 48.

15. **Алексеев Д.В.** //Диссертация на соискание уч. степени к.ф.-м.н. Москва, 2006.

16. **Омарова А.Т.** //Вестник КарГУ. Серия Математика. 2008. №2(50). С. 42 – 46.

17. **Жук В.В., Натансон Г.И.** //ДАН СССР. 1973. Т.212. С. 19 – 22.

18. **Бокаев Н.А.** //Математические исследования. Караганда, 1976. Вып.3. С. 14 – 20.

19. **Каримов С.К.** //Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Алма-Ата, 1978.

20. **Есмаганбетов М.Г.** //Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Алма-Ата, 1983.

Поступила в редакцию 03.06.2008г.

Математический журнал. *Алматы. 2008. Том 8. № 4 (30) . С. 88 – 97*

УДК 517.9

О СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ КОШИ В ПРОСТРАНСТВЕ $L^2(0,1)$

А. Ш. Шалданбаев

Южно-Казахстанский государственный университет им.М.О.Ауезова
160012 г.Шымкент пр.Тауке-Хана, 5 mtshomanbaeva@mail.ru

В настоящей работе получена равномерная оценка по норме пространства $L^2(0,1)$ остатка асимптотического разложения решения сингулярно возмущенной задачи Коши для простейшего уравнения $\varepsilon y' + ay = f(x), a = const, a > 0, f(x) \in W_2^n(0,1)$.

1. Рассмотрим в пространстве $L^2(0,1)$ сингулярно возмущенную задачу Коши:

$$\varepsilon y'(x) + ay(x) = f(x,t), \tag{1.1}$$

$$y(0) = 0, \tag{1.2}$$

где $f(x) \in L^2(0,1)$, $a = const$, $a > 0$, $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Известно, что если $f(x)$ – бесконечно дифференцируемая функция, то имеет место асимптотическое разложение:

$$y(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k [x_k(t) + \Pi_k(\tau)], \tag{1.3}$$

где каждая из функций $\Pi_k(\tau)$ содержит в качестве множителя $exp(-a\tau), \tau = \frac{t}{\varepsilon}$, и обладает тем свойством, что $x_k(0) + \Pi_k(0) = 0, k = 0,1,2,...$ [1].

Если функция $f(x)$ обладает конечной гладкостью, то возникает проблема оценки остаточного члена. В этой ситуации sup-норма не позволяет получить требуемую оценку, поэтому задача рассматривается в пространстве $L^2(0,1)$.

Постановка задачи. Пусть правая часть уравнения (1) принадлежит пространству Соболева $W_2^n(0,1)$, т.е. $f(x) \in W_2^n(0,1)$.

Требуется найти асимптотическое разложение решения задачи (1.1),(1.2) вида (1.3) с равномерной оценкой остаточного члена по норме пространства $L^2(0,1)$.

2. Вспомогательные предложения. Пусть $f(x) \in C[0,1]$, т.е. является непрерывной функцией. Рассмотрим задачу Коши:

$$L\varepsilon y = \varepsilon y'(x) + ay(x) = f(x), \tag{2.1}$$

Keywords: *Caushy's problem, Hilbert's space*
2000 Mathematics Subject Classification: 42A16

$$y(0)=0. \tag{2.2}$$

Определение 1.1. *Регулярным решением начальной задачи* $(2.1),(2.2)$ *называется непрерывно дифференцируемая функция* $y(x)$, *удовлетворяющая уравнению* (2.1) *и начальному условию* (2.2).

Определение 2.2. *Функцию* $y(x)$ *назовем сильным решением задачи* $(2.1),(2.2)$, *если существует последовательность регулярных решений* $\{y_n(x)\}, n=1,2,...,$ *начальных задач* $(2.1),(2.2)$ *такая, что* $Ly_n=f_n\to f, \quad y_n\to y$, *в пространстве* $L^2(0,1)$.

Определение 2.3. *Начальная задача* $(2.1),(2.2)$ *называется сильно разрешимой, если для любого* $f(x,t)\in L^2(0,1)$ *существует единственное сильное решение* $y(x)$ *задачи* $(2.1),(2.2)$.

Теорема 2.1. (Гильберт-Шмидт) [2]. *Если* A *вполне непрерывный самосопряженный оператор в* H, *то при всяком* $x\in H$ *элемент* Ax *разлагается в сходящийся ряд Фурье по ортонормированной системе собственных векторов оператора* A.

Следствие 2.1. *Если вполне непрерывный самосопряженный оператор* A *обратим, то из его собственных векторов можно набрать базис в* H.

Лемма 2.1. *Если* $a=\bar a$ *и* $a\neq -1$, *то нормированные собственные функции задачи Штурма-Лиувилля*

$$Ly=-y'(x)=\mu\cdot y(x),\ x\in(0,1), \tag{2.3}$$

$$y(0)=y'(1)+ay(1)=0, \tag{2.4}$$

образуют ортонормированный базис пространства $L^2(0,1)$.

Доказательство.

а) Симметричность. Пусть $y(x),z(x)\in D(L)$, т.е. $y(x)\in C^2(0,1)\cap C^1[0,1]$, $y(0)=y'(1)+ay(1)=0;\ \ z(x)\in C^2(0,1)\cap C^1[0,1]$, $z(0)=z'(1)+az(1)=0$, тогда

$$(Ly,z)=-\int_0^1 y''\overline{z}dx=-\int_0^1\overline{z}dy'=-\overline{z}y'|_0^1+\int_0^1(\overline{z})'y'dx=-\overline{z}(1)y'(1)+\int_0^1(\overline{z})'dy=$$

$$=-\overline{z}(1)y''(1)+\overline{z}'y|_0^1-\int_0^1(\overline{z})''ydx=-\overline{z}(1)y'(1)+\overline{z}'(1)y(1)+(y,Lz)=$$

$$=\overline{z}(1)\cdot ay(1)+\overline{z}'(1)y(1)+(y,Lz)=y(1)[z'(1)+az(1)]+(y,Lz)=y(1)\cdot\overline{\left[\underbrace{z'(1)+az(1)}_{\acute{0}}\right]}+(y,Lz).$$

б) Построение функции Грина. Проинтегрировав уравнение

$$-y''(x)=f(x) \tag{2.5}$$

от x до 1, затем проинтегрировав полученное выражение от 0 до x, получим решение уравнения (2.5), удовлетворяющее краевым условиям (2.4):

$$y''(x)=-f(x),\ y'(1)-y'(x)=-\int_x^1 f(t)dt,\quad y'(x)=y'(1)+\int_x^1 f(t)dt,$$

$$y(x)-y(0)=y'(1)\cdot x+\int_0^x\int_t^1 f(\xi)d\xi dt=y'(1)\cdot x+t\cdot\int_t^1 f(\xi)d\xi\Big|_0^x+\int_0^x tf(t)dt=$$

$$= y'(1)x + x\int\limits_x^1 f(t)dt + \int\limits_0^x tf(t)dt = -ay(1)\cdot x + x\int\limits_x^1 f(t)dt + \int\limits_0^x tf(t)dt.$$

Полагая $x = 1$, из последней формулы имеем:

$$y(1) = -ay(1) + \int\limits_0^1 tf(t)dt, (a+1)y(1) = \int\limits_0^1 tf(t)dt, y(1) = \frac{1}{a+1}\int\limits_0^1 tf(t)dt.$$

Следовательно,

$$y(x) = -\frac{ax}{a+1}\int\limits_0^1 tf(t)dt + x\int\limits_x^1 f(t)dt + \int\limits_0^x tf(t)dt =$$

$$= \left(1 - \frac{ax}{a+1}\right)\int\limits_0^x tf(t)dt + \int\limits_x^1 \left(x - \frac{axt}{a+1}\right) f(t)dt =$$

$$= \left(1 - \frac{ax}{a+1}\right)\int\limits_0^x tf(t)dt + x\int\limits_x^1 \left(1 - \frac{at}{a+1}\right) f(t)dt, \tag{2.6}$$

или

$$y(x) = L^{-1}f(x) = \int\limits_0^1 K(x,t)f(t)dt, \tag{2.7}$$

где

$$K(x,t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{ax}{a+1}\right)\cdot t, & 0 \le t \le x, \\ \left(1 - \frac{at}{a+1}\right)\cdot x, & x \le t \le 1. \end{cases} \tag{2.8}$$

Проверим полученную формулу (2.6) с помощью прямых вычислений:

1) $y(0) = 0$;

2) $$y'(x) = -\frac{a}{a+1}\int\limits_0^x tf(t)dt + \left(1 - \frac{ax}{a+1}\right)\cdot xf(x) + \int\limits_x^1 \left(1 - \frac{at}{a+1}\right) f(t)dt - x\left(1 - \frac{ax}{a+1}\right) f(x) =$$

$$= -\frac{a}{a+1}\int\limits_0^x tf(t)dt + \int\limits_x^1 \left(1 - \frac{at}{a+1}\right) f(t)dt;$$

$$y'(1) = -\frac{a}{a+1}\int\limits_0^1 tf(t)dt,\ y(1) = \left(1 - \frac{a}{a+1}\right)\int\limits_0^1 tf(t)dt = \frac{1}{a+1}\int\limits_0^1 tf(t)dt,$$

$$y'(1) + ay(1) = -\frac{a}{a+1}\int\limits_0^1 tf(t)dt + \frac{a}{a+1}\int\limits_0^1 tf(t)dt = 0.$$

Замыкание оператора L^{-1} самосопряжено и вполне непрерывно в пространстве $L^2(0,1)$. По теореме Гильберта-Шмидта собственные векторы оператора $\overline{L^{-1}}$ образуют полную ортогональную систему в пространстве $L^2(0,1)$.

Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. *Если* $b>0$ *, то все собственные значения задачи Штурма-Лиувилля*

$$Ly=-y'(x)=\mu\cdot y(x),\quad x\in(0,1), \tag{2.3}$$

$$y(0)=y'(1)+by(1)=0, \tag{2.4}$$

больше единицы и являются корнями уравнения

$$\Delta(\mu)=\cos\sqrt{\mu}+b\frac{\sin\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}, \tag{2.9}$$

а собственные функции имеют вид:

$$y_n(x)=B_n\sin\sqrt{\mu_n}x,\quad n=1,2,..., \tag{2.10}$$

где B_n *– нормированные коэффициенты.*

Доказательство. Пусть $y(x)\in D(L)$, то есть $y(x)\in C^2(0,1)\cap C^1[0,1]$ и $y(0)=y'(1)+$ $+by(1)=0$.

Тогда имеет место равенство:

$$y(0)=-\int\limits_0^1 y''\overline{y}dx=-\int\limits_0^1\overline{y}dy'=-\overline{y}y'|_0^1+\int\limits_0^1|y'|^2dx=$$

$$=-\overline{y}(1)y'(1)+\int\limits_0^1|\dot{y}|^2dx=\left|y'(1)=-by(1)\right|=b|y(1)|^2+\int\limits_0^1|\dot{y}|^2dx\geq\int\limits_0^1|\dot{y}|^2dx\geq\int\limits_0^1|y|^2dx.$$

Если $Ly=\mu y$, то $(Ly,y)=(\mu y,y)\geq\|y\|^2,\ \Rightarrow\ \mu\|y\|^2\geq\|y\|^2,\ \mu\geq1$. Для собственных функций имеет место строгое неравенство $(Ly,y)>\|y\|^2$, поэтому $\mu>1$.

Общее решение уравнения (2.3) имеет вид:

$$y(x,\mu)=A(\mu)\cdot cos\sqrt{\mu}x+B(\mu)\cdot\frac{sin\sqrt{\mu}x}{\sqrt{\mu}}.$$

Подставив это выражение в граничное условие (2.4), получим:

$$y(0,\mu)=A=0,\ \Rightarrow\ y(x,\mu)=\frac{Bsin\sqrt{\mu}x}{\sqrt{\mu}},$$

$$y'(x,\mu)=B\cdot cos\sqrt{\mu}x,\ y'(1)+by(1)=Bcos\sqrt{\mu}+\frac{Bsin\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}\cdot b=0.$$

Поскольку $B\neq0$, то

$$cos\sqrt{\mu}+\frac{sin\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}\cdot b=0.$$

Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. *Если* $\varphi_n(x)$ *является собственной функцией оператора Штурма-Лиувилля*

$$Ly=-y'(x)=\mu\cdot y(x),\quad x\in(0,1), \tag{2.3}$$

$$y(0)=y'(1)+by(1)=0, \tag{2.4}$$

то имеет место формула:

$$\varphi_n(1-x) = -\left[\frac{\varphi_n'(x)}{b} + \varphi_n(x)\right] \cdot cos\sqrt{\mu_n}, \tag{2.11}$$

где μ_n *– собственное значение, соответствующее собственной функции* $\varphi_n(x)$.

Доказательство. В силу леммы 2.2 $\varphi_n(x) = B_n \cdot sin\sqrt{\mu}x$;

$$\varphi_n(1-x) = B_n \cdot sin\sqrt{\mu_n}(1-x) = B_n \cdot sin\sqrt{\mu_n} \cdot cos\sqrt{\mu_n}x - B_n \cdot cos\sqrt{\mu_n} \cdot sin\sqrt{\mu_n}x =$$

$$= B_n \cdot sin\sqrt{\mu_n} \cdot cos\sqrt{\mu_n}x - cos\sqrt{\mu_n} \cdot \varphi_n(x);$$

$$\varphi_n'(x) = \sqrt{\mu_n} \cdot B_n cos\sqrt{\mu_n}x, \ \Rightarrow \ B_n cos\sqrt{\mu_n}x = \frac{\varphi_n'(x)}{\sqrt{\mu_n}},$$

$$\varphi_n(1-x) = \frac{\varphi_n'(x)}{\sqrt{\mu_n}} sin\sqrt{\mu_n} - cos\sqrt{\mu_n} \cdot \varphi_n(x) = \left| \frac{sin\sqrt{\mu_n}}{\sqrt{\mu_n}} = -\frac{cos\sqrt{\mu_n}}{b} \right| =$$

$$= -\frac{\varphi_n'(x)}{b} cos\sqrt{\mu_n} - cos\sqrt{\mu_n} \cdot \varphi_n(x) = -cos\sqrt{\mu_n}\left[\frac{\varphi_n'(x)}{b} + \varphi_n(x)\right].$$

Следствие 2.2. $\varphi_n' cos\sqrt{\mu_n} = -b\left[\varphi_n(1-x) + \varphi_n(x) cos\sqrt{\mu_n}\right]$.

Лемма 2.4.(Об ортогональности) *Если* $a \neq 0, \infty$ *и*

$$\frac{sin\lambda}{\lambda} = a cos\lambda, \quad \frac{sin\mu}{\mu} = a cos\mu, \tag{2.12}$$

то для ненулевых λ, μ *равенство*

$$(sin\lambda x, sin\mu x) = 0 \tag{2.13}$$

выполняется тогда и только тогда, когда $a = \bar{a}$.

Доказательство.

$$(sin\lambda x, sin\mu x) = \int_0^1 sin\lambda x \cdot \overline{sin\mu x} dx = \int_0^1 sin\lambda x \cdot sin\bar{\mu}x dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[cos(\lambda - \bar{\mu})x - cos(\lambda + \bar{\mu})x\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{sin(\lambda - \bar{\mu})x}{\lambda - \bar{\mu}} - \frac{sin(\lambda + \bar{\mu})x}{\lambda + \bar{\mu}}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\left[\frac{sin(\lambda - \bar{\mu})}{\lambda - \bar{\mu}} - \frac{sin(\lambda + \bar{\mu})}{\lambda + \bar{\mu}}\right],$$

$$sin(\lambda - \bar{\mu}) = sin\lambda \cdot cos\bar{\mu} - cos\lambda \cdot sin\bar{\mu},$$

$$sin\lambda = \lambda \cdot a \cdot cos\lambda, \quad sin\bar{\mu} = \bar{\mu} \cdot a \ cos\bar{\mu}.$$

Перемножая эти равенства, имеем:

$$sin\lambda \cdot \bar{\mu} \cdot a \ cos\bar{\mu} = \lambda \cdot a \cdot cos \ a \cdot sin\bar{\mu}.$$

В силу этой формулы преобразуем $sin(\lambda - \bar{\mu})$ и $sin(\lambda + \bar{\mu})$:

$$sin(\lambda - \bar{\mu}) = \frac{\lambda \cdot a}{\bar{a} \cdot \bar{\mu}} cos\lambda \cdot sin\bar{\mu} - cos\lambda \cdot sin\bar{\mu} = \frac{a\lambda - \bar{a}\bar{\mu}}{\bar{a} \cdot \bar{\mu}} cos\lambda \cdot sin\bar{\mu},$$

$$sin(\lambda+\overline{\mu})=\frac{\lambda\cdot a}{\bar{a}\cdot(-\overline{\mu})}cos\lambda\cdot sin(-\overline{\mu})-cos\lambda\cdot sin(-\overline{\mu})=\frac{a\lambda+\bar{a}\overline{\mu}}{\bar{a}\cdot\overline{\mu}}cos\lambda\cdot sin\overline{\mu},$$

$$\frac{sin(\lambda-\overline{\mu})}{\lambda-\overline{\mu}}-\frac{sin(\lambda+\overline{\mu})}{\lambda+\overline{\mu}}=\left[\frac{a\lambda-\bar{a}\overline{\mu}}{\bar{a}\overline{\mu}(\lambda-\overline{\mu})}-\frac{a\lambda+\bar{a}\overline{\mu}}{\bar{a}\overline{\mu}(\lambda+\overline{\mu})}\right]\cdot cos\lambda\cdot sin\overline{\mu};$$

$$\frac{a\lambda-\bar{a}\overline{\mu}}{\bar{a}\overline{\mu}(\lambda-\overline{\mu})}-\frac{a\lambda+\bar{a}\overline{\mu}}{\bar{a}\overline{\mu}(\lambda+\overline{\mu})}=\frac{(\lambda+\overline{\mu})(a\lambda-\bar{a}\overline{\mu})-(a\lambda+\bar{a}\overline{\mu})(\lambda-\overline{\mu})}{(\lambda-\overline{\mu})(\lambda+\overline{\mu})}\cdot cos\lambda\cdot sin\overline{\mu}=$$

$$=\frac{-2\bar{a}\overline{\mu}\lambda+2a\lambda\overline{\mu}}{(\lambda-\overline{\mu})(\lambda+\overline{\mu})}\cdot cos\lambda\cdot sin\overline{\mu}=\frac{2\lambda\overline{\mu}(a-\bar{a})}{(\lambda-\overline{\mu})(\lambda+\overline{\mu})}\cdot cos\lambda\cdot sin\overline{\mu};\ \Rightarrow$$

$$(sin\lambda x, sin\mu x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\lambda\overline{\mu}(a-\bar{a})}{\bar{a}\overline{\mu}(\lambda-\overline{\mu})(\lambda+\overline{\mu})}\cdot cos\lambda\cdot sin\overline{\mu}=\frac{\lambda(a-\bar{a})}{\bar{a}(\lambda-\overline{\mu})(\lambda+\overline{\mu})}\cdot cos\lambda\cdot sin\overline{\mu}.$$

Если $(sin\lambda x, sin\mu x)=0$, то $a=\bar{a}$ или $cos\lambda\cdot sin\overline{\mu}=0$. Второе равенство противоречит условию (2.12), поэтому $a=\bar{a}$.

Замечание 2.1. *Если $a=\bar{a}$ и*

$$\frac{sin\lambda_n}{\lambda_n}=acos\lambda_n,$$

то функция $y_n(x)=sin\lambda_n x$ является собственной функцией самосопряженной задачи Штурма-Лиувилля:

$$-y''=\lambda^2 y(x),$$

$$y(0)=0,\quad y'(1)-ay(1)=0.$$

Поэтому ортогональность системы $\{sin\lambda_n x\}$, $n=1,2,...$, является следствием самосопряженности задачи Штурма-Лиувилля, т.е. равенство $a=\bar{a}$ является достаточным условием ортогональности системы $\{sin\lambda_n x\}$, $n=1,2,\ldots$. Доказанная лемма говорит о необходимости этого условия.

3. Основные результаты.

Теорема 3.1. *Если $y(x,\varepsilon)$ является решением сингулярно возмущенной задачи Коши*

$$L_\varepsilon y=\varepsilon y'(x)+ay(x)=f(x),\quad x\in(0,1), \tag{3.1}$$

$$y(0)=0,\ a=const, f(x)\in L^2(0,1), \tag{3.2}$$

то имеет место формула

$$y(x,\varepsilon)=-\frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}(Sf,\varphi_n)\cdot cos\sqrt{\mu_n}\cdot\varphi_n(x), \tag{3.3}$$

где $Sf(x)=f(1-x)$, μ_n является собственным значением задачи Штурма-Лиувилля

$$-y''=\mu\cdot y(x), \tag{3.4}$$

$$y(0)=y'(1)+\frac{a}{\varepsilon}y(1)=0, \tag{3.5}$$

а $\varphi_n(x)$ – нормированная собственная функция этой задачи.

Доказательство. Пусть $y_N(x,\varepsilon)$ есть частичная сумма ряда (3.3), тогда имеет место равенство:

$$y_N(x,\varepsilon)=-\frac{1}{a}\sum_{n=1}^{N}(Sf,\varphi_n)\cdot cos\sqrt{\mu_n}\cdot\varphi_n(x),$$

$$y'_N(x,\varepsilon) = -\frac{1}{a}\sum_{n=1}^{N}(Sf,\varphi_n)\cdot cos\sqrt{\mu_n}\cdot\varphi'_n(x) =$$

$$= \left| cos\sqrt{\mu_n}\cdot\varphi'_n(x) = -\frac{a}{\varepsilon}\left[\varphi_n(1-x)+\varphi_n(x)cos\sqrt{\mu_n}\right]\right| =$$

$$= -\frac{1}{a}\sum_{n=1}^{N}(Sf,\varphi_n)\left\{-\frac{a}{\varepsilon}\left[\varphi_n(1-x)+\varphi_n(x)cos\sqrt{\mu_n}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=1}^{N}(Sf,\varphi_n)\left[\varphi_n(1-x)+\varphi_n(x)cos\sqrt{\mu_n}\right],$$

$$\varepsilon y'_N(x,\varepsilon) = \sum_{n=1}^{N}(Sf,\varphi_n)\varphi_n(1-x) + \sum_{n=1}^{N}(Sf,\varphi_n)cos\sqrt{\mu_n}\cdot\varphi_n(x),$$

$$\varepsilon y'_N(x,\varepsilon) = \sum_{n=1}^{N}(f,S\varphi_n)\cdot S\varphi_n(x) - ay_N(x,\varepsilon),\ \Rightarrow$$

$$\varepsilon y'_N(x,\varepsilon) + ay_N(x,\varepsilon) = \sum_{n=1}^{N}(f,S\varphi_n)\cdot S\varphi_n(x). \qquad (3.6)$$

По предположению $\{\varphi_n(x)\}$ нормированная система, поэтому она является ортонормированным базисом пространства $L^2(0,1)$. Оператор S является унитарным, поэтому он переводит ортонормированный базис в ортонормированный базис, следовательно, система $\{S\varphi_n(x)\}, n = 1,2,...$, также является ортонормированным базисом пространства $L^2(0,1)$. Поэтому функция

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N}(f,S\varphi_n)\cdot S\varphi_n(x)$$

является частичной суммой ряда Фурье функции $f(x)$ по системе $\{S\varphi_n(x)\}, n = 1,2,...$, т.е.

$$\lim_{N\to\infty} f_N(x) = f(x,t)$$

в пространстве $L^2(0,1)$. Таким образом, нами доказано предельное соотношение:

$$L_\varepsilon y_N = \varepsilon y'_N(x,\varepsilon) + ay_N(x,\varepsilon) = f_N(x) \ \to\ f(x).$$

Теперь покажем, что последовательность $\{y_N(x)\}, N = 1,2,...$, также сходится в $L^2(0,1)$, для этого достаточно показать ее фундаментальность в $L^2(0,1)$:

$$\|y_{N'} - y_{N''}\|^2 = \frac{1}{a^2}\left\|\sum_{N'}^{N''}(Sf,\varphi_n)cos\sqrt{\mu_n}\cdot\varphi_n(x)\right\|^2 =$$

$$= \frac{1}{a^2}\sum_{N'}^{N''}|(Sf,\varphi_n)|^2 cos^2\sqrt{\mu_n} \ \le\ \frac{1}{a^2}\sum_{N'}^{N''}|(Sf,\varphi_n)|^2 < \varepsilon,$$

$\forall N', N'' > N(\varepsilon)$, поскольку имеет место равенство (теорема Парсеваля):

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(Sf,\varphi_n)|^2 = \|Sf\|^2 = (Sf,Sf) = (S^2f,f) = \|f\|^2 < \infty.$$

По определению функция

$$y(x,\varepsilon) = lim\, y_N(x,\varepsilon)$$
$$N\to\infty$$

является сильным решением сингулярно возмущенной задачи Коши в пространстве $L^2(0,1)$.

Теорема 1 доказана.

Следствие 3.1. *Имеет место равномерная по ε оценка нормы обратного оператора L_ε^{-1}:*

$$\|L_\varepsilon^{-1}\| \le \frac{1}{a},\ a>0.$$

Доказательство. Из формулы (3.3) следует, что

$$\|y(x,\varepsilon)\|^2 = \|L_\varepsilon^{-1} f(x)\|^2 = \frac{1}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}|(Sf,\varphi_n)|^2 cos^2\sqrt{\mu_n} \le || \le \frac{1}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}|(Sf,\varphi_n)|^2 =$$

$$= \frac{\|Sf\|^2}{a^2} = \frac{(Sf,Sf)}{a^2} = \frac{\|f\|^2}{a^2},\ \Rightarrow$$

$$\|y(x,\varepsilon)\| = \|L_\varepsilon^{-1} f\| \le \frac{\|f\|}{a},\ \Rightarrow\ \|L_\varepsilon^{-1}\| \le \frac{1}{a}. \tag{3.7}$$

Теорема 3.2. *Если функция $f(x)$ является негладкой, то при $\varepsilon\to 0$ последовательность решений сингулярно возмущенной задачи Коши $\{y(x,\varepsilon)\}$ сходится к $\frac{f(x)}{a}$ слабо.*

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ произвольный элемент множества $C_0^\infty(0,1)$, т.е. бесконечно дифференцируемая и финитная функция. Тогда имеет место равенство

$$(L_\varepsilon y,\varphi) = (f,\varphi),\quad (\varepsilon y' + ay,\varphi) = (f,\varphi),$$

или

$$(\varepsilon y',\varphi) + (ay,\varphi) = (f,\varphi),$$

$$(\varepsilon y',\varphi) = \varepsilon\int_0^1 y'\overline{\varphi}dx = \varepsilon\int_0^1 \overline{\varphi}dy = \varepsilon\cdot\overline{\varphi}\cdot y|_0^1 - \varepsilon\int_0^1 \overline{\varphi}' y dx = \varepsilon\int_0^1 \overline{\varphi}\ ' y dx \ \to\ 0,\quad \varepsilon\ \to\ 0.$$

Следовательно, для любого $\varphi(x)\in C_0^\infty(0,1)$ имеет место равенство $(y,\varphi)\to(\frac{f}{a},\varphi)$ при $\varepsilon\to 0$.

В силу формулы (3.7) имеет место (равномерная по ε) оценка $\|y(x,\varepsilon\| \le \frac{1}{a}$. Тогда утверждение теоремы следует из критерия слабой сходимости [2].

Теорема 3.3. *Если функция $f(x)\in W_2^n(0,1)$, то решение сингулярно возмущенной задачи Коши*

$$\varepsilon y'(x) + ay(x) = f(x),\quad x\in(0,1), \tag{3.1}$$

$$y(0) = 0 \tag{3.2}$$

принадлежит пространству $W_2^{n+1}(0,1)$ и удовлетворяет оценке:

$$\left\| y(x,\varepsilon) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\left[f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(0)e^{-\frac{a}{\varepsilon}x}\right]\cdot\varepsilon^{k-1}}{a^k}\right\| \le \frac{\varepsilon^n}{a^{n+1}}\left\|f^{(n)}(x)\right\|. \tag{3.8}$$

Доказательство. Если $f(x)\in W_2^n(0,1)$, то имеет место формула:

$$\int\limits_0^x f(t)e^{\frac{a}{\varepsilon}t}dt=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left[f^{(k-1)}(x)e^{\frac{a}{\varepsilon}x}-f^{(k-1)}(0)\right]\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^k+(-1)^n\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^n\int\limits_0^x f^{(n)}(t)e^{\frac{a}{\varepsilon}t}dt. \quad (3.9)$$

В самом деле, интегрируя по частям имеем:

$$\int\limits_0^x f(t)e^{\frac{a}{\varepsilon}t}dt=\frac{\varepsilon}{a}\int\limits_0^x f(t)de^{\frac{a}{\varepsilon}t}=\frac{\varepsilon}{a}f(t)\cdot e^{\frac{a}{\varepsilon}t}\Big|_0^x-\frac{\varepsilon}{a}\int\limits_0^x f'(t)e^{\frac{a}{\varepsilon}t}dt=$$

$$=\left[f(x)\cdot e^{\frac{a}{\varepsilon}x}-f(0)\right]\cdot\frac{\varepsilon}{a}-\frac{\varepsilon}{a}\int\limits_0^x f'(t)e^{\frac{a}{\varepsilon}t}dt.$$

Следовательно, формула верна при $n=1$, еще раз проинтегрировав по частям убедимся, что она верна также и при $n=2$:

$$\int\limits_0^x f(t)e^{\frac{a}{\varepsilon}t}dt=\left[f(x)e^{\frac{a}{\varepsilon}x}-f(0)\right]\cdot\frac{\varepsilon}{a}-\frac{\varepsilon}{a}\int\limits_0^x f'(t)e^{\frac{a}{\varepsilon}t}dt=\left[f(x)e^{\frac{a}{\varepsilon}x}-f(0)\right]\cdot\frac{\varepsilon}{a}-\frac{\varepsilon}{a}\left[\frac{\varepsilon}{a}\int\limits_0^x f'(t)de^{\frac{a}{\varepsilon}t}\right]=$$

$$=\left[f(x)e^{\frac{a}{\varepsilon}x}-f(0)\right]\cdot\frac{\varepsilon}{a}-\frac{\varepsilon}{a}\left[\frac{\varepsilon}{a}f'(t)\cdot e^{\frac{a}{\varepsilon}t}\Big|_0^x-\frac{\varepsilon}{a}\int\limits_0^x f''(t)e^{\frac{a}{\varepsilon}t}dt\right]=\frac{\varepsilon}{a}\cdot\left[f(x)e^{\frac{a}{\varepsilon}x}-f(0)\right]-$$

$$-\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^2\cdot\left[f'(x)e^{\frac{a}{\varepsilon}x}-f'(0)\right]+\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^2\int\limits_0^x f''(t)e^{\frac{a}{\varepsilon}t}dt.$$

Предположим, что формула (3.9) верна при $k=n$ и покажем ее справедливость при $k==n+1$:

$$\int\limits_0^x f(t)e^{\frac{a}{\varepsilon}t}dt=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left[f^{(k-1)}(x)e^{\frac{a}{\varepsilon}x}-f^{(k-1)}(0)\right]\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^k+(-1)^n\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^n\int\limits_0^x f^{(n)}(t)e^{\frac{a}{\varepsilon}t}dt=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left[f^{(k-1)}(x)e^{\frac{a}{\varepsilon}x}-f^{(k-1)}(0)\right]\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^k+(-1)^n\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^n\left[\frac{\varepsilon}{a}\int\limits_0^x f^{(n)}(t)de^{\frac{a}{\varepsilon}t}\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left[f^{(k-1)}(x)e^{\frac{a}{\varepsilon}x}-f^{(k-1)}(0)\right]\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^k+(-1)^n\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^n\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{\varepsilon}{a}f^{(n)}(t)e^{\frac{a}{\varepsilon}t}\Big|_0^x-\frac{\varepsilon}{a}\int\limits_0^x f^{(n+1)}(t)e^{\frac{a}{\varepsilon}t}dt\right]=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left[f^{(k-1)}(x)e^{\frac{a}{\varepsilon}x}-f^{(k-1)}(0)\right]\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^k+$$

$$+(-1)^n\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^{n+1}\left[f^{(n)}(x)e^{\frac{a}{\varepsilon}x}-f^{(n)}(0)\right]+(-1)^{n+1}\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^{n+1}\int\limits_0^x f^{(n+1)}(t)e^{\frac{a}{\varepsilon}t}dt=$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\left[f^{(k-1)}(x)e^{\frac{a}{\varepsilon}x}-f^{(k-1)}(0)\right]\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^k+(-1)^{n+1}\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^{n+1}\int\limits_0^x f^{(n+1)}(t)e^{\frac{a}{\varepsilon}t}dt.$$

Умножив обе части формулы (3.9) на $e^{-\frac{a}{\varepsilon}x}$, получим:

$$\int\limits_0^x f(t)e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)}dt = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left[f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(0)e^{-\frac{a}{\varepsilon}x}\right]\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^k +$$

$$+(-1)^n\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^n\int\limits_0^x f^{(n)}(t)e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)}dt. \tag{3.10}$$

Решение задачи (3.1), (3.2) имеет вид:

$$y(x,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^x f(t)e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)}dt.$$

Тогда, в силу формулы (3.10) имеет место представление:

$$y(x,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\left[f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(0)e^{-\frac{a}{\varepsilon}x}\right]\cdot\varepsilon^{k-1}}{a^k} + (-1)^n\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^n\cdot\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^x f^{(n)}(t)e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)}dt. \tag{3.11}$$

Полагая

$$y_n(x,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^x f^{(n)}(t)e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)}dt, \tag{3.12}$$

получим задачу Коши для остаточного члена $y_n(x,\varepsilon)$:

$$\varepsilon y_n'(x,\varepsilon) = f^{(n)}(x) - \frac{a}{\varepsilon}\int\limits_0^x f^{(n)}(t)e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)}dt = f^{(n)}(x) - ay_n(x,\varepsilon),$$

$$\varepsilon y_n'(x,\varepsilon) + ay_n(x,\varepsilon) = f^{(n)}(x),$$
$$y_n(0,\varepsilon) = 0.$$

В силу неравенства (3.7) имеем:

$$\|y_n(x,\varepsilon)\| \leq \frac{\|f^{(n)}(x)\|}{a}.$$

Теорема 3.3 доказана.

Цитированная литература

1. **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.** Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М., 1990.

2. **Треногин В.А.** Функциональный анализ. М., 1980.

3. **Кальменов Т.Ш.** Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Шымкент, 1993.

Поступила в редакцию 10.05.2007г.

РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 517.925.5:519.216 2000 MSC: 34K29,60H10

Azhymbaev D. T., Tleubergenov M. I. **On construction the force function by given properties of movement in the presence of random disturbances**// Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 4 (30). P.5 – 9.

The force function on the set properties of movement is under construction. Preliminary a stochastic Ito equation of second order on given integral manifold with means of quasi-inversion' method is under construction. An equivalent equation of Lagrangian structure with stochastic Ito equation is constructed and then the force function is defined with Lagrange function.

References – 5.

УДК: 517.925.5:519.216 2000 MSC: 34K29,60H10

Ажымбаев Д. Т., Тілеубергенов М. Ы. **Кездейсоқ түрткісі бар жағдайда қозғалыстың берілген қасиеттері бойынша күштік функция құрастыру туралы** // Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 4 (30). Б.5 – 9.

Қозғалыстың берілген қасиеттері бойынша күштік функция құрылады. Берілген интегралдық көпбейне бойынша алдынала квазиаударым әдісі бойынша екінші ретті Ито стохастикалық теңдеу құрылады. Сонан кейін Ито стохастикалық теңдеу арқылы эквивалентті Лагранж құрылымды теңдеу тұрғызылып, Лагранж функциясы бойынша күштік функция анықталады.

Библ. – 5.

УДК: 517.518 2000 MSC: 42A10

Akishev G. **The estimate degree of approximation H^{Ω} – classes** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 4 (30). P.10 – 19.

In the paper is obtained exact the estimate approximation function H^{Ω} – classes by trigonometric polynomials in the space Lorentz with anisotropic norms.

References – 25.

УДК: 517.518 2000 MSC: 42A10

Ақышев Ғ. **H^{Ω} – класын жуықтаудың реті** // Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 4 (30). Б.10 – 19.

Мақалада H^{Ω} – класын аралас мөлшерлі Лоренц кеңістігінде тригонометрикалық көпмүшемен жуықтаудың реті анықталған.

Библ. – 25.

УДК: 517.956.6 2000 MSC: 35L20

A l y b a e v K. S., N a r b a e v M. R. **The structural analysis of solutions of system out of two singular perturbed equation in disturb of stability** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 4 (30). P.20 – 26.

The structural analysis of the solution for linear singular perturbed equations is lead in disturb of stability with use of properties of conjugate harmonic functions.
References – 8.

УДК: 517.956.6 2000 MSC: 35L20

А л ы м б а е в К. С., Н а р б а е в М. Р. **Орнықтылық шарты орындалмаған жағдайдағы сингулярлы ауытқу теңдеулер жүйесіің шешімін құрылымдық талдау** // Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 4 (30). Б.20 – 26.

Түйіндес гармоникалық функция қасиеттерінің көмегімен орнықтылық шарты орындалмаған жағдайдағы сингулярлы ауытқу теңдеулер жүйесіің шешімін құрылымдық талдау жүргізілген.
Библ. – 8.

УДК: 517.958 2000 MSC: 35F30

A u z h a n i D., S a k a b e k o v A. **Cauchy problem for onedimensional nonlinear Boltzmann's moment system equation in second approximation**// Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 4 (30). P.27 – 33.

In this work we prove existence of the global solution of the Cauchy problem for onedimensional nonlinear Boltzmann's moment system
References – 4.

УДК: 517.958 2000 MSC: 35F30

А у ж а н и Д., С а қ а б е к о в Ә. **Больцманның моменттік теңдеулер жүйесінің екінші жуықтауы үшін Коши есебі**// Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 4 (30). Б.27 – 33.

Жұмыста Больцманның моменттік теңдеулер жүйесінің екінші жуықтауы үшін қойылған Коши есебінің $C([0,T];L^1(R))$ кеңістігінде жобалды шешуі бар екендігі дәлелденген.
Библ. – 4.

УДК: 517.956, 517.968.2 2000 MSC: 35K05, 47A52, 65L15, 65N25

A k h m a n o v a D. M., D z h e n a l i y e v M. T., R a m a z a n o v M. I. **The boundary value problems for spectrally loaded heat operator with the way of loading curve to time axis at zero or at infinity. II**// Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 4 (30). P.34 – 43.

In this work we continue a investigation of the boundary value problems for spectrally loaded parabolic equations in unbounded regions. The order of the derivative in the loaded summand is equal to that of the differential part of the operator. The space variable loading point moves in an law $\overline{x}(t) = t^{\omega},\ -\infty < \omega < 1/2$. In second part of work we give a solution of the boundary value problems for spectrally loaded heat equation by the method of Carleman-Vekua's regularization of special integral equations using the results on the investigations of associating characteristic integral equations.

References – 28.

УДК: 517.956, 517.968.2 2000 MSC: 35K05, 47A52, 65L15, 65N25

Ахманова Д. М., Жиенәлиев М. Т., Рамазанов М. Ы. **Жүктелу сызығы уақыт осіне нолде немесе шексіздікте жақындандайтын спектралды жүктелген жылуөткізгіш операторының шекаралық есептері. II**// Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 4 (30). Б.34 – 43.

Бұл жұмыста шексіз облыстарда спектралды жүктелген параболалық теңдеулердің шекаралық есептерінің зерттеулері жалғастырылады. Жүктелген мүшемен теңдеудің бас бөлігінің дифференциалдық реттері бірдей. Кеңістік айнымалысы бойынша жүктелу нүктесінің қозғалу заңдылығы берілген $\overline{x}(t) = t^{\omega}$, $-\infty < \omega < 1/2$. Мақаланың екінші бөлігінде біз ерекше интегралдық теңдеулерге арналған Карлеман-Векуа регуляризациялау әдісі арқылы және сәйкес характеристикалық интегралдық теңдеулерін зерттеу нәтижелеріне сүйене отырып спектралды жүктелген жылуөткізгіш теңдеулері бастапқы шекаралық есептерінің шешілеіндігін көрсетеміз.
Библ. – 28.

УДК: 517.5 2000 MSC: 41A45, 26B40

Bazarkhanov D. B. **Estimates for linear widths of unit ball of Nikol'skii – Besov space with generalized mixed smoothness** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 4 (30). P.44 – 47.
$MB^{s,\epsilon}_{p\theta}(\mathbb{T}^d)$ with mixed smoothness ($s \in (0,\infty)^n$, $1 \le p,\theta \le \infty$, $1 \le n \le d$) in $L_q(\mathbb{T}^d)$—norm ($1 \le q \le \infty$) are established for a number of values of parameters s, p, θ, q.

References – 16.

УДК: 517.5 2000 MSC: 41A45, 26B40
Базарханов Д. Б. **Жалпыланған аралас тегістікті Никольский – Бесов кеңістігінің бірлік шарының сызықты ендіктерінің бағалары**// Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 4 (30). Б.44 – 47.

s, p, θ, q параметрлерінің бір қатар мәндері үшін $L_q(\mathbb{T}^d)$ метрикасында ($1 \le q \le \infty$) жалпыланған аралас тегістікті Никольский - Бесов $MB^{s,\epsilon}_{p\theta}(\mathbb{T}^d)$ кеңістігінің ($s \in (0,\infty)^n$, $1 \le p,\theta \le \infty$, $1 \le n \le d$) бірлік шарының сызықты ендіктерінің реті бойынша нақты бағалары алынған.
Библ. – 16.

УДК: 517.948.34 2000 MSC: 34B40
Dauylbayev M. K. **Asymptotic estimations of solutions of integro-differential equations with small parameter** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 4 (30). P. 48 – 51.

The linear integro-differential equations with initial conditions in interior point of the given segment, when the integral terms qualitatively change asymptotic behavior of solutions of the corresponding differential equations are investigated. Integral representation and estimations of solutions of the original problem are given.
References – 4.

УДК: 517.948.34 2000 MSC: 34B40

Д а у ы л б а е в М . Қ . **Кіші параметрлі интегралды дифференциалдық теңдеулер шешімінің асимптотикалық бағалауы**// Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 4 (30). Б.48 – 51.

Жұмыста интегралдық мүшелері сәйкес дифференциалдық теңдеулер шешімінің асимптотикалық сипатын сапалы өзгертетін бастапқы шарттары берілген кесіндінің ішкі нүктесінде қойылған сызықты интегралды дифференциалдық теңдеулер зерттелген.
Библ. – 4.

УДК: 517.95:515.12 2000 MSC: 34A12, 30F30

J o r a e v A . H . **Validating kinematical presentation of a Riemann surface defined by a differential equation** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 4 (30). P. 52 – 58.

It is proved that a Riemann surface over the complex plane defined by an initial value problem for a differential equation of the first order with the right side part being a ratio of two analytical functions is a kinematical space (metrics corresponding the minimal time of moving between two points on a surface can be introduced). There is construction interactive validating algorithm providing the opportunity for the user to move along the Riemann surface and to detect boundaries of the domains containing points of branching.
References – 8.

УДК: 517.95:515.12 2000 MSC: 34A12, 30F30

Ж о р а е в А . Х . **Дифференциалдық теңдеумен анықталатын, Риман бетінің кинематикалық көрінісінің дәлелденуі** // Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 4 (30). Б.52 – 58.

Бірінші ретті оң жақты дифференциалдық теңдеуі үшін анықталатын бастапқы есептің, екі аналитикалық функцияның қатынасы болып табылатын, комплекс жазықтығындағы риман беті, кинематикалық кеңістік екендігі құрылды (метрика енгізуге болады, екі нүктенің арасындағы ең аз уақыттағы қозғалысына сәйкес). Пайдаланушыға Риман бетімен қозғалуға мүмкіндік беретін және облыстардың шекарасын анықтайтын, тармақталу нүктесі бар, интерактивті дәлелдеу алгоритмі құрылды.
Библ. – 8.

УДК: 517.956.32 2000 MSC: 35L20

Z h u s s i p n a z a r o v R . M . , M u r a t b e k o v M . B . **About existence and differential properties of solutions of one class singular differential equations of hyperbolic type on a plane** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 4 (30). P. 59 – 67.
The class of the singular hyperbolic equations with growing coefficients is considered. The method of construction of solutions is stated. It some restrictions on coefficients are received coercive estimations of solutions in Sobolev’ space.
References – 11.

УДК: 517.956.32 2000 MSC: 35L20

Ж у с и п н а з а р о в Р . М . , М у р а т б е к о в М . Б . **Гиперболалық түрдегі сингулярлы дифференциалдық теңдеулердің бір класы үшін жазықтықта шешімдерінің бар болуы және олардың қасиеттері туралы**// Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 4 (30). Б. 59 – 67.

Гиперболалық түрдегі сингулярлы дифференциалдық теңдеулердің бір класы үшін жазықтықта шешімдерінің бар болуы және олардың қасиеттері зерттеледі. Шешімдерін алу әдістері ұсынылған.

Библ. – 11.

УДК: 517.95 2000 MSC: 35J67, 31A30, 31A10

K a l m e n o v T . S H . , K o s h a n o v B . D . , S u r a g a n D . **The boundary condition for the three-dimensional potential and regular problems for the Laplace equations** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 4 (30). P.68 – 72.

In this work are found a boundary condition for the three-dimensional potential and representation of the regular solution for the Laplace equation.

References – 6.

УДК: 517.95 2000 MSC: 35J67, 31A30, 31A10

К ә л м е н о в Т . Ш . , Қ о ш а н о в Б . Д . , С у р а г а н Д . **Көлемді потенциалдың шекаралық шарты мен Лаплас теңдеуінің регулярлы шешімі**// Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 4 (30). Б.68 – 72.

Көлемді потенциал үшін шекаралық шарты табылды және Лаплас теңдеуінің регулярлы шешімінің түрі анықталды.

Библ. – 6.

УДК: 511 2000 MSC: 35L20, 35L70,35B10

K o z h e g e l d i n o v S . S h . **Nagell's equation** $x^2+y^3=z^5$// Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 4 (30). P.73 – 77.

Three formulaes are obtained each of which is general formula describing all the natural solutions Nagell's equation. The theorem of equivalence of general formulas all the natural solutions this equation is formulated and is proved.

References – 6.

УДК: 511 2000 MSC: 35L20, 35L70,35B10

К о ж е г е л ь д и н о в С . Ш . $x^2+y^3=z^5$ **Нагелл теңдеуі** // Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 4 (30). Б.73 – 77.

Аланған үш формулалардың әрқайсысы $x^2+y^3=z^5$ теңдеуінің барлық натурал шешімдерін өрнектейтін жалпы формула болып табылады. Осы формулалардың эквиваленттігінің теоремасы тұжырымдалды және дәлелденді.

Библ. – 6.

УДК: 517.512 2000 MSC: 54C25, 42C10

O m a r o v a A . T . , S m a i l o v E . S . **The order of growth of norm of derivatives of polynomials of the best approximation and analogue of P.L. Ulyanov's theorem** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 4 (30). P.78 – 87.

This article have written on to research structural and integral characteristics of functions in the terms of growth of norms derivatives of algebraic polynomials of the best approximation.

References – 20.

УДК: 517.512 2000 MSC: 54C25, 42C10

О м а р о в а А . Т . , С м а и л о в Е . С . **Ең жақсы жуықтайтын көпмүшеліктердің туындыларының өсу реті және П.Л. Ульянов теоремасының аналогы** // Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 4 (30). Б.78 – 87.

Бұл мақала функцияның құрылымдық және интегралдық қасиеттерін функцияны ең жақсы жуықтайтын алгебралық көпмүшеліктердің туындыларының нормасының өсу терминінде зерттеуге арналған.

Библ. – 20.

УДК: 517.9 2000 MSC: 42A16

S h a l d a n b a e v A . S h . **About singular perturbed of the Cauchy problem in $L^2(0,1)$ space** // Mathematical journal. 2008. Vol. 8. № 4 (30). P.88 – 97.

In the work the uniform estimation on norm of space $L^2(0,1)$ of the rest asymptotical decomposition of the solution singular perturbed of the Couchy problem for the elementary equation is received.

References – 3.

УДК: 517.9 2000 MSC: 42A16

Ш а л д а н б а е в А . Ш . $L^2(0,1)$ **кеңістігіндегі сингулярлы ауытқу Коши есебі туралы**// Математикалық журнал. 2008. Т. 8. № 4 (30). Б.88 – 97.

Жұмыста $\varepsilon y' + ay = f(x), a = const, a > 0, f(x) \in W_2^n(0,1)$ жәй теңдеуі үшін сингулярлы ауытқу Коши есебі шешімінің асмытотикалық жіктеу қалдығының $L^2(0,1)$ кеңістік нормасы бойынша бірқалыпты бағалауы алынған.

Библ. – 3.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в **"Математический журнал",** должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.

2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК,** далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту.

3. К статье прилагаются в двух экземплярах на казахском, русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.

4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в LaTeXtex-файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в **http://www.math.kz/** в разделе **"Математический журнал"**).

5. Объем статей (стандартный формат в LaTeX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).

6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.

7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

   Цитированная литература

   (a) **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)

   (b) **Мельников А. В.**// Успехи матем.наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61 – 69.

   (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.

8. Статья должна быть подписана всеми авторами. В конце статьи необходимо указать организацию, от которой направлена статья, и e-mail (при наличии).

9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О. (полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 8 № 4 (30) 2008

Адрес редколлегии и редакции:
050010 Алматы, ул.Жамбыла, 25, к.705
тел.: 8(7272)-91-13-15, *journal@math.kz, http://www.math.kz*

Подписано в печать 23.12.2008г.
Тираж 300 экз. Объем 105 стр.
Формат 62 94/16 см
Бумага офсетная № 1

г.Алматы, ул.Мауленова, 129
Тел./факс: 8(3272) 675047, 675053
e-mail: print_express@bk.ru