Министерство науки и высшего образования Республики Казахстан
Комитет науки
Институт математики и математического моделирования
Механико-математический факультет
Казахского национального университета имени аль-Фараби

Традиционная международная апрельская математическая конференция
в честь Дня науки Республики Казахстан

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Алматы 2024

УДК 51
ББК 22.1, 22.2
В1

Редакторы: А. Т. Асанова, Д. Б. Базарханов, Б. С. Байжанов, Н. С. Даирбеков, М. А. Садыбеков.

Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня науки Республики Казахстан. Сборник тезисов. — Алматы: Институт математики и математического моделирования, 2024. — 266 с. — Каз., рус, eng.

ISBN XXX-XXX-XX-XXXX-X

Институт математики и математического моделирования и Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан, являясь организаторами конференции, представляют этот Сборник тезисов, который содержит короткие аннотации докладов участников Традиционной международной апрельской математической конференции в честь Дня науки Республики Казахстан, 2024.

Эта конференция ставит перед собой цель объединения математиков как Казахстана, так и других стран.

ISBN XXX-XXX-XX-XXXX-X

Министерство науки и высшего образования Республики Казахстан
Комитет науки
Институт математики и математического моделирования
Механико-математический факультет
Казахского национального университета имени аль-Фараби

Традиционная международная апрельская математическая конференция
в честь Дня науки Республики Казахстан

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня науки Республики Казахстан

Председатель программного комитета — академик НАН РК Кальменов Т. Ш.
Председатель организационного комитета — д.ф.-м.н., доцент Вербовский В. В.
Ученый секретарь — к.ф.-м.н. Сахауева М. А.

Члены Программного комитета:
профессор Алексеева Л. А. (Алматы, Казахстан)
профессор Асанова А. Т. (Алматы, Казахстан)
член-корреспондент НАН РК Байжанов Б. С. (Алматы, Казахстан)
профессор Базарханов Д. Б. (Алматы, Казахстан)
д.ф.-м.н. Вербовский В. В. (Алматы, Казахстан)
д.ф.-м.н. Даирбеков Н. С. (Алматы, Казахстан)
академик НАН РК Джумадильдаев А. С. (Алматы, Казахстан)
профессор Б.Е. Кангужин (Алматы, Казахстан)
член-корреспондент НАН РК Кулпешов Б. Ш. (Алматы, Казахстан)
профессор Нурсултанов Е. Д. (Нур-Султан, Казахстан)
член-корреспондент НАН РК Садыбеков М. А. (Алматы, Казахстан)
профессор С.Я. Серовайский (Алматы, Казахстан)
академик НАН РК Харин С. Н. (Алматы, Казахстан)

Организационный комитет:
Ж. Адиль
М. И. Алькенов
Б. С. Байжанов
Э. А. Бакирова
А. О. Бекетаева
К. Досмагулова
Т. Е. Жакупбеков
Ж. Найманова
М. А. Сахауева
О. А. Умбетбаев

Содержание

Пленарные доклады **15**

Алексеева Л.А., Айнакеева Н.Ж., Арепова Г.Д., Дадаева А.Н. Краевые задачи на волновых и тепловых графах и их решение методом обобщенных функций 16

Болсинов А.В. Геометрия Нийенхейса: симметрии, законы сохранения и геодезически эквивалентные метрики . . . 18

Лассас М., Нурсултанов М., Оксанен Л., Йлинен Л. Обратная задача на многообразиях с непересекающимися данными . . . 19

Сартабанов Ж.А. Метод периодических характеристик многопериодических систем с оператором дифференцирования по диагонали и его применение к проблемам квазипериодических систем . . . 20

Серовайский С.Я. Проблемы математической эпидемиологии . . . 22

Турметов Б.Х. О некоторых начально-краевых задачах для нелокального аналога параболического уравнения высокого порядка . . . 23

Assanova A.T. Dulat S. Dzhumabaev: Life and scientific activity (dedicated to the 70th birthday anniversary) . . . 24

Baizhanov B.S., Baizhanov S.S. Expansion, definability of types, number of non-isomorphic models in different classes of complete theories . . . 26

Ismailov N.A., Umirbaev U.U. On a variety of right-symmetric algebras . . . 28

Kulpeshov B.Sh. On the countable spectrum of weakly o-minimal theories of finite convexity rank . . . 29

Rogovoy A.V., Kabanikhin S.I., Kalmenov T.Sh. The criterion of the solvability of the overdetermined Cauchy problem for the hyperbolic Gellerstedt equation . . . 30

Sabitbek B. Mathematical Research with ChatGPT . . . 32

1 Теория функций и функциональный анализ **33**

Акишев Г. Об оценках наилучших M-членных приближений функций в анизотропном пространстве Лоренца–Зигмунда . . . 34

Ахажанов Т.Б., Матин Д.Т. Функции ограниченной p-флуктуации и абсолютная сходимость двойных рядов Фурье-Уолша . . . 35

Базарханов Д.Б. $(L_p - L_q)$ ограниченность дискретных операторов Фурье на m-мерном торе . . . 36

Байчапанова Р.Е. Линейные поперечники некоторых компактов пространства типа Никольского – Бесова, связанного с пространством Морри, на m-мерном торе . . . 38

Балгимбаева Ш.А. Характеризации и декомпозиции пространств с заданной мажорантой смешанного модуля гладкости . . . 40

Басаров С.Ж., Нурсултанов Е.Д., Тлеуханова Н.Т. Новые кубатурные формулы для пространств Соболева W_q^α с доминирующей смешанной производной . . . 42

Данабекова М. Корректные сужения дифференциально-функционального оператора, действующего в гильбертовом пространстве . . . 43

Жанабилова А.К. Поперечники Фурье некоторых компактов пространства типа Никольского – Бесова, связанного с пространством Морри, на m-мерном торе 44

Ибрагимов М.М., Тлеумуратов С.Ж. Геометрические свойства Пирсовских проекторов в WFS-пространстве . . . 46

Каршыгина Г.Ж. Описание конуса убывающих перестановок для потенциалов . . . 48

Касымов А. Логарифмические неравенства типа Соболева на группах Гейзенберга 49

Касымов А. Неравенство Стейна-Вайсса на симметрическом пространтсве некомпактного типа . . . 50

Матин Д.Т., Ахажанов Т.Б. Компактность коммутатора мультилинейного потенциала Рисса в локальных пространствах типа Морри 51
Найманова Ж. Нелинейные приближения всплесками некоторых компактов пространства типа Никольского – Бесова, связанного с пространством Морри, на m-мерном торе 52
Нурсултанов Е.Д., Канкенова А.М. Ограниченность оператора Рисса в локальном пространстве Морри 54
Омаров Б. Нелинейные тригонометрические приближения некоторых компактов пространства типа Никольского – Бесова, связанного с пространством Морри, на m-мерном торе 55
Отелбаев М. Равномерные оценки решений одного класса нелинейных уравнений в конечномерном пространстве 57
Тургумбаев М.Ж., Сулейменова З.Р., Мухамбетжан М.А. Об интегрируемости с весом суммы рядов с монотонными коэффициентами по мультипликативным системам 58
Akhymbek M. Geometric properties of ℓ^p-spaces over the unitary duals of compact groups 59
Apseit K. Factorizations and unified Hardy inequalities 60
Biyarov B. About one inverse problem for a Hill's equation with double eigenvalues . 61
Bliev N.K., Yerkinbayev N. Riemann problem for multiply-connected domain in Besov Spaces 62
Bokayev N., Matin D., Adilkhanov A. On the pre-compactness of a set in generalized Morrey spaces 62
Dauitbek D., Tulenov K. Extensions of Nazarov-Podkorytov lemma for τ-measurable operators 64
Dosmagulova K., Kanguzhin B. Correctly solvable problems for the Laplace-Beltrami operator on a Riemannian sphere with cuts 64
Dukenbayeva A.A. Blow-up and global existence of solutions to pseudo-parabolic equation related to the Baouendi-Grushin operator 65
Ilyasova R. On gradient Gibbs measures with 4-periodic boundary laws of a model of sos type on the Cayley tree of order two and three 66
Kalaman M. Extended Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities with remainder terms . 68
Karimov S.Y. On τ-bounded spaces 68
Kopezhanova A. Interpolation of anisotropic spaces 69
Mynbaev K. Hardy-Steklov operators on Hausdorff topological spaces with measures . 70
Myrzagaliyeva A.Kh. Estimates of M-term approximations of functions of the class $W^{\overline{r}}_{q,\tau}$ in the Lorentz space 72
Oryngaliyev I. On the best constants for integral Hardy inequalities with any homogeneous-quasi norm 73
Ozbekbay B., Tulenov K., Akhymbek M. Spectrum of the Hilbert transform on Lorentz spaces $L_{p,q}$ 74
Rahmatullaev M., Rasulova M. Ground states for the Potts-SOS model with an external field on the Cayley tree of order two 75
Shaimerdenov Ye. Cylindrical weighted Sobolev type inequalities and identities 76
Tastankul R.A. $L^p - L^q$ Fourier multipliers on non-commutative torus 77
Tulenov K.S. On Fourier multipliers on quantum torus and Euclidean spaces 78
Yessirkegenov N. Sharp remainder of the improved Hardy inequality related to the Baouendi-Grushin operator 78
Zaur G. On fractional inequalities on metric measure spaces with polar decomposition 79
Zhangirbayev A. Factorizations and Hardy identity related to the Baouendi-Grushin operator 79

2 Дифференциальные уравнения **81**

Ахметкалиева Р.Д., Оспанов Қ.Н. Кавахара типті сингулярлы сызықты теңдеудің корректілік шарттары . . . 82

Молдағали Е.Ө., Оспанов Қ.Н. Төртінші ретті бір дифференциалдық теңдеудің коэрцитивті шешілу шарттары . . . 83

Талипова М.Ж., Жахина Р.У., Иманчиев А.Е. Екінші ретті дербес туындылы гипергеометриялық текті біртекті емес дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімдерін тұрғызу . . . 84

Абдуллаев О.Х., Матчанова А.А. Обратная задача для нагруженного параболо-гиперболического уравнения со спектральным параметром λ . . . 86

Айтжанов С.Е., Алимжанов Е.С., Кошанов Б.Д. Разрешимость диффузионной модели неоднородной жидкости с учетом температуры . . . 87

Алдашев С.А. Корректность основной смешанной задачи для одного класса многомерных гиперболо-эллиптических уравнений . . . 88

Алдашев С.А., Танирберген А.К. Корректность смешанной задачи для вырождающихся многомерных эллиптико-параболичесих уравнений . . . 89

Арепова Г.Д., Ишан А., Кенесова А., Куандык Г. Задача Робена для уравнения Шредингера на звездном графе . . . 90

Аубакирова Г. А., Садыбеков М.А. Корректные сужения для оператора первого порядка, связанного с обратными задачами восстановления источника . . . 91

Бакирова Э.А., Несипбаева А.Н. О разрешимости краевой задачи для импульсных интегро-дифференциальных уравнений с параметром . . . 92

Бегимкулов Ф.Х. Об одной краевой задаче для вырождающегося уравнения эллиптико-гиперболического типа с условием Франкля . . . 93

Бекбауова А.У., Талипова М.Ж. О разрешимости краевой задачи в широком смысле для системы дифференциальных уравнений в частных производных 94

Бердимуратов А.М. О продолжении обобщенных решений в пространстве бесконечного порядка . . . 96

Бименов М.А., Садыбеков М.А. Начально-краевые задачи для двумерного волнового уравнения с нелокальными краевыми условиями типа задачи Самарского-Ионкина . . . 98

Ергалиев М.Г., Иманбердиев К.Б., Касымбекова А.С. О начально-граничной задаче для вырождающегося гиперболического уравнения . . . 99

Искакова Н.Б., Орал А. О численной реализации метода параметризации решения краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнения с запаздыванием . . . 100

Иманбаев Н.С., Садыбеков М.А. О системе корневых векторов нагруженного регулярного дифференциального оператора второго порядка, не обладающего свойством базисности . . . 100

Дженалиев М.Т., Ергалиев М.Г., Орынбасар Б.К. Об обобщенной спектральной задаче для возмущенного би-Лапласиана в квадратной области . . . 101

Кабдрахова С.С., Асан Ж.Ж. Об одном неклассическом уравнении 3-го порядка . 103

Кальменов Т.Ш. Свойства плотности потенциала Ньютона простого слоя . . . 104

Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д. Критерии единственности решения дифференциально-операторного уравнения с невырожденными условиями . . . 105

Койлышов У.К., Садыбеков М.А. Задача сопряжения для уравнения теплопроводности с граничными условиями типа Штурма в случае 2 точек разрыва . 107

Кошанов Б.Д., Солдатов А.П. Интегральное представление аналитических функций по Дуглису . . . 108

Мырзахметова А.К., Садыбеков М.А. Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности при краевых условиях Самарского-Ионкина в случае отсутствия согласования начальных и граничных данных 109
Муминов Ф.М., Сайфидинов О.И., Абдукодирова М.А., Махмудов Э.А. О разрешимости одной задачи для уравнения смешанного типа 110
Очилова Н.К. Краевая задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения дробного порядка 112
Панкратова И.Н. Устойчивые разностные схемы для многослойной периодической задачи теплопроводности 113
Псху А.В. Об обращении операторов дробного интегрирования и дифференцирования распределенного порядка 114
Рузиев М.Х., Казакбаева К.Б. Нелокальная задача для вырождающегося уравнения эллиптического типа с сингулярным коэффициентом 114
Сайидов О.Ж., Яхшибоев М.У. Оптимальное управление непрерывным продолжением по параметру для системы линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом 115
Сартабанов Ж.А., Абдикаликова Г.А., Омарова Б.Ж., Кульжумиева А.А., Айтенова Г.М., Жумагазиев А.Х., Сактапбергенова Г.К. Исследование линейных многопериодических D-систем методом периодических характеристик . 117
Сафаров Ж.Ш., Каландаров У.Н., Сафарова М.Ж. Об одной обратной задаче для уравнения вязкоупругости 118
Серовайский С.Я. Неразрешимая задача оптимального управления с бесконечным множеством решений условий оптимальности, образующим минимизирующую последовательность 120
Темешева С.М., Тлеулесова А.Б., Оразбекова А.С. О краевой задаче с импульсным воздействием для дифференциального уравнения 121
Тлеубергенов М.И., Василина Г.К., Сарыпбек А.Т., Ерiмбет Н.Д. О задаче восстановления с вырождающейся диффузией 122
Тлеубергенов М.И., Медетбеков М.М. О задаче Гельмгольца с вырождающейся диффузией в классе дифференциальных уравнений эквивалентных почти наверное 124
Тулакова З.Р. О явном решении смешанной задачи для многомерного сингулярного эллиптического уравнения в гипероктанте шара 125
Усманов К.И., Назарова К.Ж. Об условии разрешимости краевой задачи типа дирихле для интегро-дифференциальных уравнений с инволюцией 126
Эргашев О. Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа с оператором дробного порядка 127
Assanova A., Molybaikyzy A. Initial-boundary value problem for partial differential equations with discrete impulse memory 128
Assanova A., Uteshova R. On a boundary value problem for linear differential-algebraic equations with constant coefficients 129
Durdiev D.K., Turdiev H.H. Determination of coefficients of fractional differential equations with the Generalized Riemann-Liouville Time Derivative 131
Hasanov A., Rashidov S.G. Self-similar solutions for the membrane transverse vibration equation 132
Jumaev J. Solvability of an inverse coefficient problem for a time-fractional diffusion equation with periodic boundary and integral overdetermination conditions . . . 133
Kadirbayeva Zh.M. A numerical method for solving a boundary value problem for impulsive differential equations with loadings 134
Kadirbayeva Zh.M. A numerical method for solving a boundary value problem for impulsive differential equations with loadings 135

Kalmenov T.Sh., Kadirbek A. On spectral problem to logarithmic potential on annulus 136
Kokotova Ye.V., Uteshova R.E. On a singular boundary value problem for a loaded differential equation . . . 137
Mukash M. Averaging in boundary value problems for differential equations with impulse action at non-fixed times . . . 138
Mynbayeva S., Tankeyeva A. A method for solving a quasilinear boundary value problem for impulsive Fredholm integro-differential equation . . . 139
Omarbayeva A., Sadybekov M. Initial-boundary value problems for the wave equation with non-strongly regular boundary conditions . . . 140
Ospanov M.N., Merzetkhan A. About one research method for a first order differential equation in a non-cylindrical domain . . . 141
Sabitbek B. Well-posedness of weakly hyperbolic equations . . . 142
Sartabanov Zh., Abdikalikova G., Aitenova G., Zhumagaziyev A. Multiperiodicity of solution the initial value problem for a system of integro-differential equations with finite hereditarity . . . 142
Seilbekov B., Sarsenbi A.A., Zhanibek Z.M. Inverse problem for a fourth-order hyperbolic equation with a complex-valued coefficient . . . 144
Smadiyeva A.G. Decay estimates for Cauchy-Dirichlet problems . . . 145
Sobirjonov A., Kholmirzayev M. Boundary value problem for the non-linear parabolic-hyperbolic equation of fractional order . . . 145
Suragan D. Inverse problems of identifying the time-dependent source coefficient for subelliptic heat equations . . . 147
Tokmagambetov N. On some inverse problems regarding time-fractional mixed equations 147
Torebek B.T. Global behavior of solutions to the integro-differential reaction-diffusion equations . . . 148
Yuldashev T.K., Kadirkulov B.J., Matchanova A. A. Solvability of a mixed problem for partial differential equation with a fractional analogue of the Barenblatt–Zheltov–Kochina operator . . . 148
Yuldashova H. Integral representations for hypergeometric function of the Mittag-Leffler type $\bar{F}_D^{3)}$ . . . 150
Zhumagaziyev A., Sartabanov Zh., Abdikalikova G. Multiperiodicity of solution the initial value problem for a system of equations with two various differentiation operators . . . 151
Zhumatov S. Stability of a program manifold of indirect control systems with mixed feedback . . . 153
Zhumatov S. Absolute stability of automatic control systems in the vicinity of program manifold . . . 154

3 Математическое моделирование, уравнения математической физики и геометрия 157
Абиев Н.А. Динамика нормализованного потока Риччи относительно множества метрик положительной секционной кривизны . . . 158
Азиз Г.Н., Алексеева Л.А. Обобщенные транспортные решения бикватернионного волнового уравнения и их свойства . . . 158
Айшуақ Ә. Двухфазные задачи теплопроводности с нелокальными граничными условиями . . . 160
Акпан Д. Геодезические потоки на псевдоримановых многообразиях . . . 161
Алексеева Л.А. Дозвуковые вибротранспортные решения волнового уравнения и их приложение в задачах математической физики . . . 162
Алексеева Л.А. Транспортные решения волновых уравнений и их свойства. Ударные волны . . . 163

Алипова Б.Н. Решения стационарных краевых задач связанной термоупругости для полуплоскости . . . 164
Арзикулов З.О. Автомодельные решения четырехмерного вырождающегося дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка . . . 165
Ашуров Р., Нуралиева Н. Нелокальная по времени задача для уравнения гиперболического типа . . . 166
Бобоев К.С. Прямые и обратные задачи для кинетического уравнения переноса в P_n-приближении . . . 167
Даирбеков Н.С., Пенкин О.М., Сарыбекова Л.О. Неравенство Соболева на стратифицированном множестве . . . 168
Гульманов Н.К., Копбалина С.С., Рамазанов М.И. Параболическая задача в области, вырождающейся в точку по закону $x = t^\alpha$, $\alpha > \frac{1}{2}$ . . . 170
Закирьянова Г.К., Баегизова А.С. Транспортные решения уравнения Клейна-Гордона . . . 171
Зимин Р.Н. Оценка низкочастотной части спектра трехмерных сгущающихся сеток из струн . . . 172
Каюмов Ш., Бекчанов Ш.Э., Зиядуллаева Э.А., Хусанов Э.А. Математическое моделирование задачи нелинейной фильтрации структурированных флюидов в трехслойном изолированном пласте . . . 173
Манапова А.К., Бекетаева А.О., Численный алгоритм существенно дозвуковых течений . . . 175
Мусина А.А. Исследование математической модели неравновесной фильтрации . 176
Омаров М.Т., Псху А.В., Рамазанов М.И. Задача с условием Бицадзе–Самарского на параллельных характеристиках и общими условиями сопряжения на линии вырождения для уравнения Геллерстедта . . . 177
Орумбаева Н.Т., Бейсенбекова З., Бекбосын А. Об одном решении нелокальной краевой задачи для дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка . . . 179
Рысмендеева Г.С. Исследование данных социально-экономических опросов методами кластеризации и классификации . . . 180
Сакабеков А., Мадалиева С., Ергазина Р., Акимжанова Ш. О новой системе моментных уравнений, зависящей от скорости полета и температуры поверхности летательных аппаратов . . . 181
Тасмамбетов Ж.Н. Особенности построения решений систем Бесселя состоящих из трёх уравнений . . . 181
Тасмамбетов Ж.Н., Убаева Ж.К. О совместном решений вырожденных двух систем, полученных из системы Лауричелла . . . 183
Хайруллин Е.М., Ажибекова А.С. Задача сопряжения с нормальными производными третьего порядка для уравнения теплопроводности в многомерном пространстве . . . 184
Харин С.Н., Наурыз Т. Задача Стефана для сферического слоя . . . 185
Худойбердиев А.А. Метод Ритца (ограниченные операторы) . . . 187
Хуррамов Н. Х., Мирзоев Д. Э. Об одной задаче с локальными и нелокальными условиями на граничной характеристике для уравнения Геллерстедта . . . 189
Хуррамов Н.Х., Олтиев Б.Ж. Задача с условием Бицадзе–Самарского на параллельных характеристиках и общими условиями сопряжения на линии вырождения для уравнения Геллерстедта . . . 190
Шпади Ю.Р. Свойства решений дифференциального уравнения тепловых полиномов . . . 191
Щеглов А.Ю., Ли Ж. Восстановление изотермы сорбции в модели поглощения газа с учётом его диффузии в потоке . . . 192

Щеглов А.Ю., Шень Цин Обратная коэффициентная задача для нелинейной модели развития популяции с интегральными особенностями 194
Ainakeyeva N. Dirichlet problem on a stellar thermal graph 195
Ashirova G., Beketaeva A., Naimanova A. Construction of high-order essentially non-oscillatory (ENO) shock-capturing scheme on a non-uniform grid for a one-dimensional flux vector 198
Ashurov R., Fayziev Yu., Khudoykulova M. On the non-local problems for Boussinesq type fractional equation 200
Ashurov R., Sulaymonov I. Determining the order of time and spatial fractional derivatives 201
Beketaeva A., Naimanova A. A correction of a non-equilibrium effect in the k-ω turbulence model for high-speed flows 203
Bizhanova G.I. Solutions of the nonregular boundary value problems for the parabolic equations with the variable coefficients 204
Bizhanova G.I. Singular solution of the two phase problem for the heat equations with incompatible initial and boundary data 205
Dekhkonov F., Umarova R. Control problem for a pseudo-parabolic equation with Neumann boundary condition 205
Nuriyev Z., Issakhanov A., Kurths J., Kashkynbayev A. Finite-Time Synchronization for Fuzzy Shunting Inhibitory Cellular Neural Networks 206
Kharin S.N., Kavokin A.A., Kassabek S.A. Mathematical model of the temperature of electrical contacts under the Kohler effect 207
Kholmurodova G.N. Surface at a constant distance from the edge of regression on a transfer surface of type 1 in an isotropic space 208
Khujakulov J.R., Turapova Sh.Kh. Surface at a constant distance from the edge of regression on a transfer surface of type 1 in an isotropic space 209
Kosmakova M.T., Akhmanova D.M., Izhanova K.A. Boundary value problem with a load in the form of a fractional integral 210
Manat A.M., Orumbayeva N.T. Solution of a nonlocal boundary value problem for a nonlinear third-order partial differential equation 212
Nauryz T.A. Non-classical one-phase Stefan problem with heating effect of current flow in gradient of temperature 213
Rahmonov A.A. Well-posedness of the inverse problem for a time-fractional integro-differential equation 214
Rasulov M. S., Umirkhonov M. T. A diffusive competition model with nonlinear convection term and free boundary 215
Subhonova Z.A. A multi-dimensional diffusion coefficient determination problem for the time-fractional equation 216

4 Алгебра, математическая логика 219
Башеева А.О., Швидефски М.В. Квазимногообразие SP(L6) 220
Емельянов Д.Ю. Алгебры бинарных изолирующих формул для теорий гомоморфных произведений графов 220
Ильев А.В. Об аксиоматизируемости наследственных классов моделей конечных и бесконечных языков и разрешимости их универсальных теорий 221
Касыметова М.Т., Жумабекова Г.Е. Свойства немультиразменности для класса семантических пар 222
Кудайбергенов К.Ж. О числе счетных моделей константного расширения полной теории 223
Кулпешов Б.Ш. Об алгебрах бинарных формул для слабо циклически минимальных теорий: отношения эквивалентности 223

Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. О несущественных обогащениях вполне о-минимальных теорий . . . 225
Малышев С.Б. О видах предгеометрий композиций кубических и ациклических структур . . . 226
Мулюков И.И., Жусупова А.Т. Представление некоторых типов графов в контексте Анализа Формальных Понятий . . . 227
Туленбаев К.М., Кунанбаев А.К., Кенгесбай А.А. Антикоммутативные алгебры с тождеством степени 3 . . . 228
Туленбаев К.М., Кунанбаев А.К., Полатхан Н.Л. О простоте алгебр с переключателями . . . 228
Тунгушбаева И.О., Әлжан Б. Малые модели центра совершенного класса йонсоновского спектра семантической модели фиксированной йонсоновкой теории 229
Тунгушбаева И.О., Жакыпбаева Г. О выпуклости фрагмента йонсоновского подмножества семантической модели фиксированной йонсоновской теории . . . 230
Ульбрихт О.И., Уркен Г.А. Об определимом замыкании экзистенциально замкнутой подмодели семантической модели фиксированной йонсоновской теории . . . 231
Arzikulov F.N., Khakimov U.I. Description of almost inner Rickart algebras . . . 232
Baizhanov B.S., Baizhanov S.S. Expansion, definability of types, number of non-isomorphic models in different classes of complete theories . . . 234
Baizhanov B.S., Bakirova A. Expansion of stable theory and the order property . . . 235
Baizhanov B.S., Berdikulova M. Expansion of a model of strongly minimal trivial theory by unary predicates . . . 236
Baizhanov B.S., Umbetbayev O.A., Zambarnaya T.S. Discrete ordered theories and quasi-successor properties . . . 237
Bekenov M.I., Kabidenov A., Kasatova A. On the existence of a model companion for ω_1-categorical theories . . . 237
Dauletiyarova A.B., Verbovskiy V.V. On the number of countable models of constant and unary predicates expansions of the dense meet-tree theory . . . 238
Dzhumadil'daev A.S. Reverse associative operad and non-symmetric version of symmetric operad . . . 240
Dzhumadil'daev A.S. Associative-admissibe and Lie-admissible operads . . . 241
Dzhumadil'daev A.S., Tulenbayev K.M. On Nagata-Higman theorem for Novikov algebras 243
Kassymova D., Baizhanov B.S., Baikenges M. Expansion, equivalence relations and dp-rank . . . 243
Yeshkeyev A.R., Tungushbayeva I.O., Koshekova A. On cosemanticness classes of the fixed Jonsson spectrum . . . 244
Kulpeshov B.S., Sudoplatov S.V. On almost quasi-Urbanik structures and theories . . . 245
Lutsak S., Nurakunov A. On finite lattices generating not finitely based and non-profinite quasivarieties . . . 246
Markhabatov N.D. On Pseudofiniteness of Unars . . . 247
Ostemirova M., Mashurov F. Identities in mutations of bicommutative algebras . . . 248
Pavlyuk I.I., Sudoplatov S.V. On variations of rigidity for abelian groups . . . 248
Peretyat'kin M.G. First-level analog of Rice's theorem for semantic classes over the Cartesian layer . . . 250
Baizhanov B.S., Sargulova F. Externally definable expansion for ordered structures . 251
Smadyarov N. Leibniz analogue of Malcev algebras . . . 252
Sudoplatov S.V. On approximating formulae . . . 252
Umbetbayev O.A., Baizhanov B.S. Inessential expansion of model of the ordered theory and number of countable models . . . 254
Verbovskiy V.V., Yershigeshova A.D. No essential o-stable expansion of $(\mathbb{Z}, <, +)$ . . 255

Yarullina A.R., Amandyk B. On characteristic of equivalence classes of Robinson spectrum regarding their primitive . . . 255
Yarullina A.R., Suindykova A. On quantity of equivalence classes of Robinson spectrum of unars . . . 256
Yeshkeyev A.R., Amanbekov S. On small models of PJ-cosemanticness classes in the Positive Jonsson spectrum . . . 257
Yeshkeyev A.R., Tungushbayeva I.O., Ulbrikht O.I. On the class of existentially closed models regarding cosemanticness and ω-categoricity . . . 258
Yeshkeyev A.R., Yarullina A.R. On Δ-Jonsson spectrum of Δ-PJ-theories . . . 259
Zambarnaya T.S. Constructing models over countable sets . . . 261
Zambarnaya T.S., Baizhanov B.S. Discrete order on convex equivalence classes . . . 261
Предметный указатель . . . 263

Пленарные доклады

Председатели: член-корреспондент НАН РК Садыбеков М. А.
академик НАН РК Кальменов Т. Ш.
член-корреспондент НАН РК Кулпешов Б. Ш.

Краевые задачи на волновых и тепловых графах и их решение методом обобщенных функций

Л.А. Алексеева[a], Г.Д. Арепова[b], Н.Ж. Айнакеева[c], А.Н. Дадаева[d]

Институт математики и математического моделирования МНВО РК, Алматы, Казахстан
E-mail: [a]alexeeva47@mail.ru, [b]arepovag@mail.ru, [c]nursaule math@mail.ru, [d]dady1262@mail.ru

В последние десятилетия появилось много работ, посвященных краевым задачам на графах (в других терминах — пространственных сетях, одномерных стратифицированных множествах, одномерных клеточных комплексах). К подобным уравнениям приводит моделирование самых разных задач естествознания: процессов распространения волн в волноводных сетях, деформаций и колебаний в стержневых конструкциях и решетках, расчет гидравлических и газовых сетей, колебаний струнных сетевых систем, процессов распространения электрического сигнала в нейронах живых организмов и нейронных сетях и т.д. Поэтому разработка методов расчета краевых задач для дифференциальных уравнений и систем на графах самых разнообразных структур становится все более актуальной. Работы в этом направлении начали развиваться еще в прошлом веке в связи с решением задач транспортной логистики. Но переход к *дифференциальным графам* (так их назовем) начался только в этом столетии, число их невелико и связано в основном с постановкой и исследованием краевых задач и их спектральных свойств, а также решением частных краевых задач.

Граф представляет собой геометрическую структуру из отрезков разной длины, связанных с собой в узловых точках. Здесь мы рассмотрим решение краевых задач на звездном графе из N звеньев с одной узловой точкой. Приведем постановку краевых задач сразу для двух графов, теплового и волнового.

Состояние каждого j-го звена первого графа определяется его температурой $\theta^j(x,t)$, которая удовлетворяет уравнению теплопроводности:

$$\Delta\theta^j - \kappa_j \frac{\partial\theta^j}{\partial t} = g^j(x,t), \tag{1}$$

а второго графа — волновой функцией $u^j(x,t)$, которая удовлетворяет уравнению Даламбера:

$$\Box u^j \equiv \frac{\partial^2 u^j}{\partial x^2} - c_j^{-2}\frac{\partial^2 u^j}{\partial t^2} = f^j(x,t). \tag{2}$$

Здесь κ_j, c_j — коэффициент теплопроводности и скорость распространения волн, которые в каждом звене могут быть разными.

На концах графов выполняются условия Робена: при $x = L_j,\ t \geq 0$

$$\alpha_j\theta^j + \beta_j\partial_x\theta^j = \Theta(t); \tag{3}$$

$$a_j u^j + b_j\partial_x u^j = \mathtt{P}(t). \tag{4}$$

В узле графов задаются *условия трансмиссии*: при $x = 0,\ t \geq 0$

$$\theta^j(0,t) = \theta^1(0,t),\ j = 2,...,N; \quad \sum_{j=1}^{N}\lambda_j\partial_x\theta^j = \Gamma(t); \tag{1}$$

$$u^j(0,t) = u^1(0,t),\ j = 2,...,N; \quad \sum_{j=1}^{N}\chi_j\partial_x u^j = \Phi(t). \tag{2}$$

Здесь $\alpha_j, \beta_j, a_j, b_j, \lambda_j, \chi_j$ — действительные числа, частные производные по x обозначены ∂_x.

Для построения решения на графе вначале, с использованием Метода Обобщенных Функций [1–3], построены решения начально-краевых задач для волнового уравнения и уравнения теплопроводности на отрезке с условиями Дирихле, Неймана, Робена на его концах [4-8]. МОФ позволяет представить решение в виде сверток фундаментальных решений — функций Грина уравнений (1) и (2) — с граничными значениями функций и их производных и начальными условиями. Построена система алгебраических уравнений (из 2-х уравнений) в пространстве преобразований Фурье по времени для 4-х краевых функций. Вместе с условиями Робена они дают разрешающую систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных функций. После чего все краевые функции в представлении решения известны и трансформанта решения построена. Для восстановления оригинала используется обратное преобразование Фурье.

Совокупность этих N систем для каждого звена вместе с краевыми условиями на концах звездного графа и условиями трансмиссии в его узле дают замкнутую линейную систему уравнений для определения краевых значений трансформант решений и их производных на каждом звене графа. Решение определяется обратной матрицей системы, что не представляет вычислительных трудностей, который определяется порядком системы из 4N уравнений с 4N неизвестными. Определитель этой матрицы позволяет исследовать спектральные характеристики графа. В частности, на волновом графе, при определенной переменной Фурье ω, он обращается в ноль, что определяет спектр свободных колебаний волнового графа, которые всегда существуют.

Решения построены на классе обобщенных функций медленного роста [1], что позволяет использовать обобщенное преобразование Фурье и исследовать процессы, сопровождаемые ударными воздействиями на концах графа и в его узле. На волновом графе при таких воздействиях распространяются ударные волны со скачком производных решений на фронтах.

Разработанная методика позволяет строить разрешающие системы уравнений для графов любой структуры и должна найти применение при решении самых разных задач, упомянутых в преамбуле.

Funding: Авторы были поддержаны грантом КН МНВО РК AP19674789.

Литература

[1] Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике - Москва: "Наука 1976.

[2] Alexeyeva L.A. Метод обобщенных функций в нестационарных краевых задачах для волнового уравнения //Математический журнал. Т.6, 1(19), 2006, 16-32.

[3] Alexeyeva L.A. Boundary integral equations of nonstationary BVP for wave equations // Abstracts. Int. Congress of Mathematicians.-Madrid.-2006.- P.436.

[4] L.A. Alexeyeva, A.N. Dadaeva, N.Zh. Ainikeyeva. Fundamental and generalized solutions of the equations of nonstationary dynamics of thermoelastic rods// Bulletin of L. Gumilyov Eurasian National University, 2018, no. 2 (123), 56-65.

[5] Алексеева Л.А., Арепова Г.Д. Обобщенные решения краевых задач для уравнения Даламбера с локальными и связанными граничными условиями// Bulletin of L.N. Gumilyov ENU. Mathematics. Computer science. Mechanics series, 2022, vol. 138, no 1, 23-35. http://bulmathmc.enu.kz

[6] Алексеева Л.А., Приказчиков Д.А., Дадаева А.Н., Айнакеева Н.Ж. Краевые задачи динамики термоупругих стержней и их решения// Вестник инженерной академии, 2023, 4 , 156-168.

[7] Alexeyeva L.A., Akhmetzhanova M.M. Spatially One-Dimensional Boundary Value Problems of Coupled Thermoelasticity: Generalized Functions Method// Mechanics of Solids, 2022, vol. 57, no. 8, 2151-2165.
DOI:10.3103/S00256544220803251

[8] Alexeyeva L.A., Arepova G.D. Solution to the Dirichlet Problem of the Wave Equation on a Star Graph// Mathematics, 2023, no 11, 42-34.
https://doi.org/10.3390/ math11204234

Геометрия Нийенхейса: симметрии, законы сохранения и геодезически эквивалентные метрики

А.В. БОЛСИНОВ

Loughborough University, Loughborough, United Kingdom
E-mail: a.bolsinov@lboro.ac.uk

Две (псевдо)римановы метрики g и $\bar g$ называются *геодезически эквивалентными*, если они имеют общие геодезические, рассматриваемые как непараметризованные кривые. Многообразие M с парой таких метрик имеет естественную структуру (оператор) Нийенхейса, т.е. тензорное поле типа (1,1) с нулевым кручением Нийенхейса, задаваемое следующей формулой

$$L = \left|\frac{\det \bar g}{\det g}\right|^{\frac{1}{n+1}} \bar g^{-1} g.$$

В терминах оператора L условие геодезической эквивалентности записывается в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных

$$\nabla_\eta L = \frac{1}{2}\big(\eta \otimes \mathrm{d}\,\mathrm{tr}\, L + (\eta\otimes \mathrm{d}\,\mathrm{tr}\, L)^*\big),$$

где η — произвольное векторное поле. Если это соотношение выполняется, то метрика g и оператор Нийенхейса L называются *геодезически согласованными*.

Те точки $p \in M$, в которых алгебраический тип оператора L меняется, например, некоторые собственные значения становятся равными, называются *сингулярными*.

Открытый вопрос. Какие сингулярности являются допустимыми, т.е. могут возникать в контексте геодезически эквивалентных метрик?

Пример. $\begin{pmatrix} 2x & y \\ y & 0\end{pmatrix}$ является допустимым, а $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y\end{pmatrix}$ — нет.

Оператор L называется gl-*регулярным* (также используется термин *циклический* или просто *регулярный*), если для каждого из его собственных значений существует ровно один линейно независимый собственный вектор (это условие эквивалентно тому, что минимальный многочлен оператора L совпадает с характеристическим многочленом).

Если L gl-регулярен, то его собственные значения могут "сталкиваться" без нарушения условия gl-регулрности. В геометрии Нийенхейса сценарии таких "столкновений" могут быть вестма разнообразны. Однако, каков бы ни был этот сценарий, имеет место следующий общий локальный результат.

Теорема 1. *Если L — gl-регулярный вещественно-аналитический оператор Нийенхейса, то (локально) всегда существует псевдориманова метрика g, геодезически согласованная с L. Более того, такая метрика g может быть задана явной формулой в терминах сопровождающей формы (companion form) оператора L.*

Пусть далее L — допустимый оператор Нийенхейса в контексте теории геодезически эквивалентных метрик, т.е. L допускает хотя бы одну псевдориманову метрику g, геодезически согласованную с L.

Открытый вопрос. Как описать все геодезически экивалентные метрики для L?

Теорема 2. *Пусть L и g геодезически согласованы. Предположим, что задан оператор M, который является самосопряженным относительно g и, кроме того, является строгой симметрией для L, т.е. коммутирует с L в алгебриаческом смысле ($LM = ML$) и удовлетворяет условию*

$$LM[\xi,\eta] - L[\xi, M\eta] - M[L\xi,\eta] + [L\xi, M\eta] = 0.$$

для любых векторных полей ξ, η. Тогда L и $gM := (g_{is}M^s_j)$ геодезически согласованы. Более того, если L gl-регулярен, то всякая метрик $\tilde g$, геодезически согласованная с L, имеет вид $\tilde g = gM$, где M — строгая симметрия оператора L.

Ключевые слова: оператор Нийенхейса, геодезически эквивалентные метрики, законы сохранения, симметрии

2010 Mathematics Subject Classification: 37K05, 37K10, 37K50, 53B10, 53A20, 53D17

Литература

[1] Bolsinov A.B., Konyaev A.Yu., Matveev V.S. Nijenhuis Geometry 4: conservation laws, symmetries and integration of certain non-diagonalisable systems of hydrodynamic type in quadratures, arXiv:2304.10626.

[2] Bolsinov A.B., Konyaev A.Yu., Matveev V.S. Applications of Nijenhuis Geometry V: geodesically equivalent metrics and finite-dimensional reductions of certain integrable quasilinear systems, arXiv:2306.13238.

Обратная задача на многообразиях с непересекающимися данными

Матти ЛАССАС[1], Медет НУРСУЛТАНОВ[2,a], Лаури ОКСАНЕН[1], Лаури ЙЛИНЕН[3]

[1]*Хельсинкский университет, Хельсинки, Финляндия*
[2]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан.*
[3]*Университет Аалто, Хельсинки, Финляндия*
E-mail: [b]medet.nursultanov@gmail.com

Пусть (M, g) — гладкое, связное и компактное риманово многообразие. Обозначим через Δ_g оператор Лапласа-Бельтрами на M. Мы рассматриваем обратную задачу, соответствующую волновому уравнению

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta_g)u(t,x) = f(t,x), & \text{в } (0,\infty)\times M; \\ u\,|_{t=0} = \partial_t u\,|_{t=0} = 0, & \text{в } M. \end{cases}$$

Мы обозначаем его решение через $u^f = u(t,x)$. Для открытых и непустых множеств $\mathcal{R}$, $\mathcal{S} \subset M$, мы определяем ограниченный оператор источник-решение,

$$\Lambda_{\mathcal{S},\mathcal{R}} : f \mapsto u^f\,|_{(0,\infty)\times\mathcal{R}}, \qquad f \in C_0^\infty((0,\infty)\times\mathcal{S}).$$

Оператор $\Lambda_{\mathcal{S},\mathcal{R}}$ моделирует измерения для волнового уравнения с источниками f, создающими волну на $(0,\infty)\times\mathcal{S}$ и волнами u^f, которые наблюдаются на $(0,\infty)\times\mathcal{R}$. Мы исследуем обратную задачу для определения (M,g) при данном $\Lambda_{\mathcal{S},\mathcal{R}}$.

В рамках многообразия с границей рассматриваются аналогичные обратные задачи, где $\mathcal{S}$ и $\mathcal{R}$ составляют части границы. Эти проблемы были широко исследованы. Особенно широко изучался случай, когда $\mathcal{S} = \mathcal{R}$, см. [1-6]. Есть лишь несколько результатов для проблемы с несвязанными частичными данными, мы ссылаемся на работы [7-10].

С другой стороны, сценарий, где $\mathcal{S}$ и $\mathcal{R}$ представляют собой непустые открытые множества внутри многообразия, получил гораздо меньше внимания. На нашем сведении, этот случай был рассмотрен только в работах [11] и [12]. Обе статьи рассматривают ситуацию, где $\mathcal{S} = \mathcal{R}$.

В данной работе мы сосредоточились на случае, когда $\overline{\mathcal{S}\cap\mathcal{R}} = \emptyset$. Наш основной результат — определение многообразия (M,g), с точностью до изоморфизма, от оператора источник-решение $\Lambda_{\mathcal{S},\mathcal{R}}$, при условии, что выполняется следующее спектральное неравенство: Существует $C > 0$, такая что для любой нормированной собственной функции ϕ оператора Лапласа-Бельтрами Δ_g оценка

$$1 \le C\|\phi|_{\mathcal{S}}\|_{L^2(\mathcal{S})} \tag{1}$$

выполняется. Как основной результат, мы доказываем следующее:

Теорема 1. *Пусть (M,g) — гладкое, связное и компактное риманово многообразие. Пусть $\mathcal{R}$, $\mathcal{S} \subset M$ — непустые открытые множества, и $\Lambda_{\mathcal{S},\mathcal{R}}$ — соответствующий оператор* *источник-решение. Предположим, что спектральное ограничение (1) выполнено для множества $\mathcal{S}$. Дифференциальная структура на $\mathcal{S}$ и $\mathcal{R}$, вместе с данными $(\mathcal{S}, g|_{\mathcal{S}})$, $(\mathcal{R}, g|_{\mathcal{R}})$ и $\Lambda_{\mathcal{S},\mathcal{R}}$, определяют (M, g) с точностью до изоморфизма. Более точно, это означает следующее:*

Пусть (M_1, g_1) и (M_2, g_2) — гладкие, связные и компактные римановы многообразия, и пусть $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{S}_1 \subset M_1$ и $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{S}_2 \subset M_2$ — открытые непустые множества. Предположим, что спектральное ограничение (1) выполнено для множеств $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, и существуют изометрии $\Phi : \overline{\mathcal{S}_1} \to \overline{\mathcal{S}_2}$ и $\Psi : \overline{\mathcal{R}_1} \to \overline{\mathcal{R}_2}$. Тогда, тождество

$$\Lambda_{\mathcal{S}_1,\mathcal{R}_1} = \Psi^* \Lambda_{\mathcal{S}_2,\mathcal{R}_2} \Phi_*$$

означает, что многообразия (M_1, g_1) и (M_2, g_2) изометричны.

Funding: Второй автор был частично поддержан Министерством образования и науки Республики Казахстан в рамках гранта AP14870361.

Ключевые слова: обратные задачи, риманово волновое уравнение, отображение от источника к решению, разнесенные данные, квантовый хаос..

2010 Mathematics Subject Classification: 35R30, 35R01

Литература

[1] Belishev, M. I., *An approach to multidimensional inverse problems for the wave equation*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **297** (1987), no. 3, 524–527.

[2] Belishev, M. I. and Kurylev, Yaroslav V., *To the reconstruction of a Riemannian manifold via its spectral data (BC-method)*, Comm. Partial Differential Equations, **17** (1992), 767–804.

[3] Blagoveščenskiĭ A. S., *A one-dimensional inverse boundary value problem for a second order hyperbolic equation*, Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov., **15** (1969), 85–90.

[4] Blagoveščenskiĭ A. S., *The inverse boundary value problem of the theory of wave propagation in an anisotropic medium*, Trudy Mat. Inst. Steklov., **115** (1971), 39–56. (errata insert).

[5] Kreĭn, M. G., *Determination of the density of a nonhomogeneous symmetric cord by its frequency spectrum*, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.), **76** (1951), 345–348.

[6] Lassas, M. and Uhlmann, G., *On determining a Riemannian manifold from the Dirichlet-to-Neumann map*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **34** (2001), no. 5, 771–787.

[7] Imanuvilov, O. Yu. and Uhlmann, G. and Yamamoto, M., *Inverse boundary value problem by measuring Dirichlet data and Neumann data on disjoint sets*, Inverse Problems, **27** (2011), no. 8, 085007, 26.

[8] Lassas, M. and Oksanen, L., *An inverse problem for a wave equation with sources and observations on disjoint sets*, Inverse Problems, **26** (2010), no. 8, 085012, 19.

[9] Rakesh, *Characterization of transmission data for Webster's horn equation*, Inverse Problems, **16** (2000), no. 2, 9–24.

[10] Rakesh, Sacks, P., *Uniqueness for a hyperbolic inverse problem with angular control on the coefficients*, J. Inverse Ill-Posed Probl., **19** (2011), no. 1, 107–126.

[11] Helin, T. and Lassas, M. and Oksanen, L. and Saksala, T. *Correlation based passive imaging with a white noise source*, J. Math. Pures Appl. (9), **116** (2018), 132–160.

[12] Helin, T., Lassas, M., Ylinen, L., Zhang, Z., *Inverse problems for heat equation and space-time fractional diffusion equation with one measurement*, J. Differential Equations, **269** (2020), no. 9, 7498–7528.

Метод периодических характеристик многопериодических систем с оператором дифференцирования по диагонали и его применение к проблемам квазипериодических систем

Ж.А. САРТАБАНОВ[1,a]

[1]*Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан*
E-mail: [a]sartabanov42@mail.ru

Рассматривается многопериодическая система с оператором D [1]

$$Dx = f(\tau, t, x), \quad D = \partial/\partial\tau + \partial/\partial t_1 + ... + \partial/\partial t_m,$$

$$f(\tau + \theta, t + \omega, x) = f(\tau, t, x) \in C^{(0,e,\tilde{e})}_{\tau,t,x}(R \times R^m \times R^n), \omega = (\omega_1, ..., \omega_m) \qquad (1)$$

относительно n-векторной функции $x(\tau, t)$, где $\omega_0 = \theta, \omega_1, ..., \omega_m$ — рационально несоизмеримые положительные постоянные, $\tau \in R = (-\infty, +\infty)$, $t = (t_1, ..., t_m) \in R^m$, $e = (1, ..., 1)$ и $\tilde{e} = (1, ...1)$– m и n-векторы, f– n-вектор-функция. Уравнение

$$dt/d\tau = e \tag{2}$$

является характеристическим для оператора D, которое в пространстве $R \times R^m$ с прямолинейным координатами (τ, t) имеет δ–характеристики $t = \eta + e\tau - e\xi \equiv \delta(\tau, \xi, \eta)$, $\tau \in R, (\xi, \eta) \in R \times R^m$.

1. В данном исследовании характеристическое уравнение (2) рассматривается в бесконечной цилиндрической поверхности Ц^m, где Ц$= L \times \Gamma_\theta$, Γ_θ — окружность длины $2\pi r = \theta$, L — образующая цилиндра.

Характеристики уравнения (2) с данными $(\xi, \eta) \in$ Ц представим в виде

$$t = \beta(\tau, \xi, \eta), (\tau, t) \in L \times \Gamma_\theta. \tag{3}$$

Обосновано, что на поверхности Ц^m β–характеристики обладают свойством:

$$\beta(\xi + \theta, \tau, t) = \beta(\xi, \tau + \theta, t) = \beta(\xi, \tau, t) = \beta(\xi, \tau, t + \omega) - \omega. \tag{4}$$

Теорема 1. *Характеристическое уравнение (2) оператора D на поверхности многомерной бесконечной цилиндрической поверхности Ц^m допускает характеристики (3), θ-периодические вида (4).*

Далее, обсуждаются общие вопросы системы (1), связь между δ и β-характеристиками, где последние раскрывают суть метода периодических характеристик.

2. Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dz/d\tau = P(\tau, t)z, dt/d\tau = e, P(\tau + \theta, t + \omega) = P(\tau, t) \in C^{(0,e)}_{\tau,t}(R \times R^m). \tag{5}$$

Исследуется приводимость системы (5) к системе

$$dy/d\tau = Ay, \quad A[a_{ij}(\eta)]^n_1, \tag{6}$$

неособенной линейной заменой

$$z = Q(\tau, t)y, Q(\tau + \theta, t) = Q(\tau, t) \in C^{(1,e)}_{\tau,t}(R \times R^m), detQ(\tau, t) \neq 0, \tag{7}$$

методом β-характеристик доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Квазипериодическая система (5) приводима к системе (6) на основе периодического преобразования (7).*

Данная проблема приведена в [2] на языке условно-периодических функций.

3.Рассматривается квазипериодическая система с начальным условием

$$dz/d\tau = f(\tau, t, z), dt/d\tau = e,$$

$$f(\tau + \theta, t + \omega, z) = f(\tau, t, z) \in C^{(0,e,\tilde{e})}_{\tau,t,z}(R \times R^m \times R^n), \tag{8}$$

$$z|_{\tau=\xi} = u(\eta) \in C^{(e)}_\eta(\Gamma^m_\theta), \tag{8^0}$$

на бесконечной цилиндрической поверхности Ц^m, где характеристическое уравнение системы (8) допускает β-характеристики вида (3) с данными (ξ, η).

Мы исследуем вопрос об установлении условия квазипериодичности по τ решения $z(\tau, \eta, u(\eta))$ задачи (8)-(8^0). Методом β-характеристик доказана теорема.

Теорема 3. *Для того чтобы решение $z(\tau, \eta, u(\eta))$ задачи (8)-(8^0) было квазипериодическим по τ с частотным базисом $(\theta^{-1}, \omega_1^{-1}, ..., \omega_m^{-1})$, необходимо и достаточно, чтобы начальная функция $u(\eta)$ была ω-периодическим решением функциональной системы*

$$z(\xi + \theta, \eta + e\theta, u(\eta)) = u(\eta). \tag{9}$$

Задача об условии квазипериодичности решений колебательных систем, в обыкновенных уравнениях вида (9), упоминается в [3].

Funding: Автор был поддержан грантом AP19676629 МНВО РК.

Ключевые слова: многопериодическая система, оператор дифференцирования, периодические характеристики, квазипериодическая система, приводимость.

2010 Mathematics Subject Classification: 34C25, 35B10, 58D20

Литература

[1] Харасахал В.Х. *Почти периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений*, Алма-Ата: Наука, (1970), -200c.

[2] Арнольд В.И. *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, М.: Наука, (1978), -304c.

[3] Малкин И.Г. *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний*, М.: ГИТТЛ (1956),-492c.

Проблемы математической эпидемиологии

С.Я. СЕРОВАЙСКИЙ

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: serovajskys@mail.ru

Среди последствий эпидемии COVID-19 нельзя не отметить существенно возросший интерес к задачам математической эпидемиологии. Это направление до последнего времени находилось как-то в тени и не выдерживало никакого сравнения по своей популярности с математической физикой, математической экономикой или математической биологией. Тем не менее, оно имеет давнюю историю, а сейчас переживает бурный рост.

Первой работой, посвященной применению математических методов для решения задач эпидемиологии, была статья 1766 года выдающегося математика Даниила Бернулли, в которой давалась оценка эффективности прививки от оспы. За этим последовали исследования таких знаменитых математиков, как Пьер Симон Лаплас и Иоганн Ламберт. По-видимому, первая математическая модель эпидемиологического процесса была дана в 1911 году лауреатом нобелевской премии по медицине Рональдом Россом. Модель представляла собой систему двух дифференциальных уравнений относительно числа людей, зараженных малярией, и числа комаров, являющихся ее переносчиком. Однако началом современной математической эпидемиологии принято считать модель SIR, предложенную в 1927 г. Уильямом Кермаком и Андерсоном Мак-Кендриком.

Модель SIR относится к классу *compartmental models*, в которых вся популяция разбивается на группы людей, находящихся в одном и том же эпидемиологическом состоянии и переходящих из одной группы в другую при изменении своего состояния. В данном случае таковыми являются *susceptible* (здоровые, которые могут заболеть), *infected* (заболевшие) и *recovered* (выздоровевшие, обладающие иммунитетом). Модель характеризуется системой нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих изменение со временем указанных групп людей.

Большинство из рассматриваемых в настоящее время моделей являются обобщением модели SIR. Они различаются выбранными группами людей: в отдельных моделях добавляются группы контактных (людей, бывших в контакте с больными, но еще не заболевших), умерших, вакцинированных, госпитализированных и др. Модели различаются также учитываемыми межгрупповыми переходами. К примеру, заболевший может выздороветь с приобретением временного или постоянного иммунитета, или вообще не получить иммунитета, а может и умереть; болезнь может перейти в более тяжелую стадию, а может и не перейти и т.д. Формально рассматриваемые здесь системы уравнений напоминают те, что используются в химической кинетике и динамике популяций. Однако в отличие от них для уравнений эпидемиологии характерно (в случае изолированности популяции и наличии баланса между рождаемостью и естественной смертностью) существование первого интеграла системы, соответствующего численности всей популяции.

Наряду с непрерывными моделями, рассматриваются и дискретные модели, в которых через каждый шаг по времени осуществляется переход какого-то количество людей из одной группы в другую. Для описания распространения эпидемии по некоторой территории применяются уравнения в частных производных с диффузионными членами. Аналогичные уравнения применяются также для анализа распределения тех или иных групп популяции не только во времени, но и по возрастам. Для математического описания эпидемий используются также объектно-ориентированное моделирование, позволяющая на основе поведения децентрализованных частей системы судить о свойствах системы в целом. Для исследования распространения эпидемий применяют также методы агентного моделирования, согласно которому свойства системы более высокого уровня возникают в результате взаимодействия подсистем более низкого уровня, а макромасштабные изменения состояния системы возникают из поведения агента на микроуровне. Особую роль при изучении распространения эпидемий играют стохастические модели. Дело в том, что на этот процесс влияет значительное количество случайных факторов. Кроме того, переход человека из одного эпидемиологического состояния в другое (заболевание, выздоровление, смерть и др.) можно рассматривать как случайное событие. В настоящее время число математических моделей эпидемиологических процессов измеряется уже сотнями.

В 2021–2023 годах в Казахском национальном университет им. аль-Фараби проводилось исследование математических моделей эпидемиологии в рамках проекта МОН РК «*Разработка интеллектуальной системы оценки развития эпидемии COVID-19 и других инфекций в Казахстане*». В рамках этого проекта было разработано несколько моделей развития эпидемии. Проведена идентификация этих моделей на основе имеющейся информации об изменении эпидемиологического состояния COVID-19 в Казахстане. На основе компьютерного анализа был дан прогноз распространения эпидемии, результаты которого сравнивались с реальным ходом эпидемии.

Ключевые слова: эпидемиология, математическое моделирование, исторический обзор.

2010 Mathematics Subject Classification: 92C60

О НЕКОТОРЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО АНАЛОГА ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Б.Х. ТУРМЕТОВ

Международный казахско-турецкий университет имени Х.А.Ясави, Туркестан, Казахстан
E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

В данной работе исследуются вопросы разрешимости некоторых прямых и обратных задач для нелокального аналога параболического уравнения высокого порядка. Вводится нелокальный аналог полигармонического оператора. При определении этого оператора используются преобразования типа инволюции. В параллелепипеде и шаре изучаются собственные функции и собственные значения задачи типа Дирихле для нелокального полигармонического оператора. Собственные функции и собственные значения этой задачи строятся в явном виде и доказывается полнота системы собственных функций. Исследованы два вида обратных задач по нахождению решения уравнения и правой части. В первой задаче ищется правая часть, зависящая от пространственной переменной, а во второй задаче находится функция, зависящая от временной переменной. Первая задача решается применением метода разделения переменных Фурье, а вторая задача сведением ее к решению интегрального уравнения. Доказываются теоремы о существовании и единственности решения.

Отметим, что собственные функции и собственные значения нелокального аналога оператора Лапласа исследовались в работах [1,2]. Начально-краевые задачи для нелокальных параболических уравнений второго и четвертого порядков изучены в работах [3,4].

Funding: Авторы были поддержаны грантом № AP19677926 МНВО РК.

Ключевые слова: инволюция, нелокальный полигармонический оператор, параболическое уравнение, собственная функция, собственное значение.

2010 Mathematics Subject Classification: 34K06,34K08,35G16

Литература

[1] Turmetov B.Kh, Karachik V.V. On eigenfunctions and eigenvalues of a nonlocal Laplace operator with involution in a parallelepiped , *AIP Conf.Proc.*, **2879**:1 (2023),1–4.

[2] Turmetov B.Kh, Karacik V.V. On eigenfunctions and eigenvalues of a nonlocal Laplace operator with multiple involution , *Symmetry*, **13**:1781 (2021),1–20.

[3] Turmetov B. Kh., Kadirkulov B.J. On the solvability of an initial-boundary value problem for a fractional heat equation with involution, *Lobachevskii J. Math.*, **43**:1 (2022),249–262.

[4] Turmetov B.Kh, Karacik V.V. On solvability of some inverse problems for a nonlocal fourth-order parabolic equation with multiple involution, *AIMS Math.*, **9**:3 (2024),6832–6849.

Dulat S. Dzhumabaev Life and scientific activity (dedicated to the 70th birthday anniversary)

Anar ASSANOVA

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: assanova@math.kz

Professor Dulat S. Dzhumabaev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, was a prominent scientist, a well-known specialist in the field of the qualitative theory of differential and integro-differential equations, the theory of nonlinear operator equations, numerical and approximate methods for solving boundary value problems.

Dzhumabaev D.S. was born in Kantagi, Turkistan district, South Kazakhstan region, on April 11, 1954. From 1961 to 1971, he attended secondary school №386 in Turkistan. In 1971, he entered Faculty of Mechanics and Mathematics of Kazakh State University named after S.M. Kirov (now Al-Farabi Kazakh National University). After graduating with honors from the Department of Mathematics in 1976, he continued to pursue postgraduate studies at the Institute of Mathematics and Mechanics of the Academy of Sciences of the Kazakh SSR. His scientific activity began under the guidance of Academician Orymbek Akhmetbekovich Zhautykov, an outstanding scientist and mathematician, who made a huge contribution to the creation and development of the mathematical science in Kazakhstan. After successful completion of postgraduate studies in 1979, Dzhumabaev D.S. joined the Laboratory of Ordinary Differential Equations headed by Academician Zhautykov O.A. He went from being a junior researcher to becoming the head of the Laboratory of Differential Equations, one of the leading divisions of the Institute of Mathematics. He chaired the laboratory from 1996 to 2012.

Dzhumabaev D.S. was a successful scientist and versatile specialist in the field of mathematics and its applications. He devoted his talent and hard work to the study of nonlinear operator equations, to the creation and development of qualitative methods in the theory of boundary value problems for differential equations.

In 1980, Dzhumabaev D.S. defended his dissertation "Boundary value problems with a parameter for ordinary differential equations in a Banach space" and earned a degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences in the specialty 01.01.02 - Differential Equations.

The doctoral dissertation by Dzhumabaev D.S. titled "Singular boundary value problems for ordinary differential equations and their approximation" is a fundamental scientific work that underwent comprehensive approbation in leading scientific centers, such as the Computing Center of the Russian Academy of Sciences (A.A. Abramov, N.B. Konyukhova), the Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences (K.I. Babenko), Lomonosov Moscow State University (V.M. Millionshchikov, V.A. Kondratiev, N.Kh. Rozov), Institute of Mathematics NAS of Ukraine (Y.A. Mitropol'skii, A.M. Samoilenko, V.L. Makarov, V.L. Kulik), Voronezh State University (V.I. Perov), I. Vekua Institute of Applied Mathematics of Tbilisi State University (I.T. Kiguradze), Kiev State University named after T. Shevchenko (N.I. Perestyuk). Doctoral dissertation was defended at the Specialized Council of the Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine in 1994.

The main research areas and the results obtained by Professor Dzhumabaev can be divided into several groups:

1. Boundary value problems for ordinary differential equations with a parameter in a Banach space.
2. A linearizer and iterative processes for unbounded non-smooth operators.
3. The parametrization method for solving boundary value problems.
4. Nonlocal problems for systems of second-order hyperbolic equations.
5. Boundary value problems for loaded and integro-differential equations.
6. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications in solving boundary value problems.

Dzhumabaev D.S. was a highly qualified expert in the theory of differential, integral and nonlinear operator equations, computer and mathematical modeling of applied problems. He has published over 300 papers in scientific journals, including authoritative periodicals like *Journal of Mathematical Analysis and Applications, Journal of Computational and Applied Mathematics, Mathematical Methods in Applied Sciences, Mathematical Notes, Computational Mathematics and Mathematical Physics, Differential Equations, Ukrainian Mathematical Journal, Journal of Integral Equations and Applications, Journal of Mathematical Sciences, Eurasian Mathematical Journal*, etc. The list of his major publications is given below.

The research findings were presented and discussed at many international symposia and conferences. His scientific results were widely recognized in Kazakhstan and at the international level by experts in the field of differential equations and computational mathematics. The scientific direction formed by Dzhumabaev D.S. has been further developed by his students, who successfully work at the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling and leading universities in Kazakhstan.

In 1998, Dzhumabaev D.S. was awarded the title of professor (specialty 01.01.00 - Mathematics). Under his supervision, two doctoral, twenty candidate dissertations, and one PhD thesis were defended. He supervised five PhD students. In 2004-2005, Dzhumabaev D.S. was the chair of the Expert Commission on Mathematics and Computer Science of the Committee on Supervision and Certification in Education and Science of the Ministry Education and science of the Republic of Kazakhstan.

Professor Dzhumabaev made a great contribution to academic community. He led a scientific seminar on the qualitative theory of differential equations at the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling. He was a scientific expert of the State Expertise of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan. For many years, Dzhumabaev D.S. was a member of Dissertation Councils at the Institute of Mathematics, Al-Farabi Kazakh National University, Abai Kazakh National Pedagogical University, K.Zhubanov Aktobe Regional State University.

In 2014, at the invitation of the university authorities, Professor Dzhumabaev began to deliver lectures at the International University of Information Technology. He taught such courses as "Mathematical Analysis", "Methods of solving linear and nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations", "Problems for integro-differential equations of processes with consequences", "Boundary value problems, their applications and methods for solving". It should be noted that his scientific results of recent years were obtained under the influence of teaching at the International University of Information Technology. While giving lectures and conducting practical classes, he realized with great clarity the importance of developing numerical methods for solving applied problems. Having set himself the goal of bringing to the final numerical implementation the theoretical results and algorithms of the parameterization method, he made a breakthrough in the field of mathematical and computer modeling. Under scientific supervision of Professor Dzhumabaev, master students and undergraduates of the International University of Information Technology carried out research in the area of numerical methods for solving boundary value problems for differential and integro-differential equations.

Professor Dzhumabaev chaired the Mathematics Section of Academic Council of the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling. He was a member of the editorial board of the scientific journals *News of NAS RK. Series: Physics and Mathematics, Kazakh Mathematical Journal, Bulletin of Karaganda State University. Series: Mathematics.*

Dzhumabaev D.S. was awarded the lapel badge "For Contribution to the Development of Science and Technology" and the Certificate of Merit of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (2014).

Since 2018, Dzhumabaev D.S. headed the Department of Mathematical Physics and Mathematical Modeling at the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling. In 2019, his research team, together with mathematicians from Ukraine, Uzbekistan, Azerbaijan, Germany, and the Czech Republic, received funding from the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme under EU grant agreement 873071-H2020-MSCA-PISE-2019 (Marie Sklodowska-Curie Research and Innovation Staff Exchange), project titled "Spectral Optimization: From Mathematics to Physics and Advanced Technology" (SOMPATY).

The first publication in the framework of this project is devoted to the application of the parameterization method to multipoint problems for Fredholm integro-differential equations and was published in *Kazakh Mathematical Journal* (2020, Vol. 20, No. 1).

At the end of 2019, having applied for the competition from the International University of Information Technology, Professor Dzhumabaev became the owner of the grant "The Best University Teacher 2019" of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan.

A prominent scientist, an outstanding teacher, and a talented organizer, Dulat Syzdykbekovich Dzhumabaev passed away on February 20, 2020. He will be lovingly remembered by his wife Klara Kabdygalymovna, daughters Dana and Damira, son Anuar, and fours grandchildren. His memory will live in the hearts of his friends, colleagues, as well as generations of grateful and adoring students. His research, scientific ideas and plans will be continued and implemented by his students.

References

[1] Dulat Syzdykbekovich Dzhumabaev. Life and scientific activity (devoted to his memory), *Kazakh Mathematical Journal*, **20**:4 (2020), 6–34.

[2] Dulat S. Dzhumabaev *Selected Works*, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, JasA, Almaty (2023).

Expansion, definability of types, number of non-isomorphic models in different classes of complete theories

Bektur BAIZHANOV[1,a], Sayan BAIZHANOV[1,b]

[1]*Institute of mathematics and mathematical modelling, Almaty, Kazakhstan*

E-mail: [a]*baizhanov@hotmail.com,* [b]*sayan-5225@mail.ru*

In this report we will consider the properties of models of complete theories such that strict order property (SOP), Independence property (IP), stability and definability of types.

A structure, denoted $\mathbb{M} = \langle M; \Sigma\rangle$, with universe M and signature Σ, for which there exists a theory, that is a set of consistent sentences, constructed using logical connectives like $\wedge, \vee, ^{\neg}, \to$ and quantifiers $\exists, \forall$. For structure M consider a set $D_R(\mathbb{M}) = \{\varphi(M, \bar{a}) | a \in M\}$. The set of sentences, that holds true for M, denoted by $Th(M) = T = \{\varphi \in \Sigma | \mathbb{M} \models \varphi\}$ is called an elementary theory of $\mathbb{M}$ Any structure for which sentences of T holds true is model of theory T.

In first part we will consider known classification of complete theories in four main classes[1] by using properties of their formula trees: SOP, IP, NIP and NSOP.

A theory is called to have a strict order property if there is a formula $\varphi(x, \bar{y})$ and a sequence $(\bar{a}_i)_{i<\omega}$ such that $\models \exists x(\varphi(x, a_j) \wedge \neg\varphi(x, a_i)) \iff i < j$. Theory is NSOP if no formula has strict order property.

A theory is called to have independence property if there is a formula $\varphi(x, y)$ and a sequences $(a_i)_{i<\omega}$ and $(b_I)_{I\subseteq\omega}$ such that $\varphi(a_i, b_I)$ holds if and only if $i \in I$. Theory is NIP if no formula has independence property.

Theories with NIP and NSOP properties include stable, super stable, ω-stable and strongly minimal theories.

A theory is called stable if it is k-stable for some infinite k. A theory is k-stable if $|S_n^M(A)| \leq k$ for all models M and $A \subseteq M$ of size at most k.

A theory is called superstable if there is some cardinal λ such that T is k-stable for all $k \geq \lambda$

A theory is ω-stable if $S_n^M(A)$ is countable for all models M and countable $A \subseteq M$

A theory is strongly minimal if for all models M, any definable subset of M is finite or cofinite.

An expansion of a model $\mathbb{M} = \langle M, \Sigma\rangle$ is a model $M^+ = \langle M, \Sigma \cup \{P^n\}\rangle$. In case $A = P(M^+) \neq \varphi(M, \bar{a})$ for $\forall \bar{a} \in M$ such expansion is called essential expansion.

Problem in expansions of models is whether an expansion preserves initial properties or whether there a criteria for an expansion to preserve class of theory, from more than 20 classes theories[1].

We call a set of formulas $p = \{\varphi_i(x, \bar{a}) | i \in I, \bar{a} \in A\}$ to be a type, if any finite conjunction of formulas from p is consistent. A type p is a definable type if for any formula $\varphi(x, \bar{y})$ there exists a controlling formula $\psi_\varphi(\bar{y}, \bar{z})$, such that for any formula $\forall \bar{a}(\varphi(x, \bar{a}) \in p \leftrightarrow \models \psi_\varphi(\bar{a}, \bar{b}))$.

Theory is stable if and only if any type in this theory is definable. (Shelah)

Problem of non-definability of types in theories is one of main directions of research. Pair of models is called conservative pair if any sentence that is true in lower model is true in higher model. Thus any type in higher model is conservative over lower model. One of the areas of research is pairs of models and properties of definability of type and externally definable expansion by set of realizations of type.

For any complete theory T there is a number of non-isomorphic models. Problem of counting this models for all classes is still open.

In this context we will be considering expansion for different theories, including expansion of dp-minimal theories by equivalence relation and we will consider the number of countable models for different classes and strongly minimal theory expansion by unary predicates.

Funding: The authors were supported by the grant no. AP14972657 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: expansion, definability, types, independence property, strict order property.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C15, 03C52, 03C64

References

[1] Zambarnaya T.S., Baizhanov B.S. Countable Models of Complete Ordered Theories, *Doklady Mathematics*, **108**:2 (2023), 343–345.

[2] Zambarnaya T.S., Baizhanov B.S. Заметка об n-арных теориях, *Математические заметки, принято к публикации*

[1] https://www.forkinganddividing.com/

[3] Baizhanov B.S., Zambarnaya T.S., Umbetbayev O.A. Small ordered theories and quasi-successor properties on 1-type, *Bulletin of the NEA RK*, **90**:4 (2023), 169–178.

[4] Baizhanov B.S., Umbetbayev O.A. Constant expansion of theories and the number of countable models, *SEMR*, **20**:2 (2023), 1037–1051.

[5] Baizhanov B.S., Sargulova F. Externally definable expansion for ordered structures, *Traditional International April Mathematical Conference In Honor of the Kazakhstan Day of science workers*, 2024

On a variety of right-symmetric algebras

Nurlan ISMAILOV[1,a], Ualbai UMIRBAEV[2,b]

[1] *Astana IT University, Astana, Kazakhstan*
[2] *Wayne State University, Detroit, USA*
E-mail: [a]*nurlan.ismail@gmail.com*, [b]umirbaev@wayne.edu

The problem of the existence of a finite basis of identities for a variety of associative algebras over a field of characteristic zero was formulated by Specht in 1950 [1]. We say that a variety of algebras has the Specht property if any of its subvariety has a finite basis of identities. In 1988, A. Kemer [2-3] proved that the variety of associative algebras over a field of characteristic zero has the Specht property. Specht's problem has been studied for many well-known varieties of algebras, such as Lie algebras, alternative algebras, right-alternative algebras, and Novikov algebras.

An algebra is called *right-symmetric* if it satisfies the identity

$$(a, b, c) = (a, c, b)$$

where $(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$ is the associator of a, b, c.

The talk is devoted to the Specht problem for the variety of right-symmetric algebras. We prove that the variety of right-symmetric algebras over an arbitrary field does not satisfy the Specht property, for details see [4].

Funding: The first author is supported by the grant AP14870282 and the second author is supported by the grant AP14872073 of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan.

Keywords: right-symmetric algebras, identities, Specht property.

2010 Mathematics Subject Classification: 17D25, 17A50, 15A24, 16R10

Reference

[1] Specht W. Gesetze in Ringen. I, (German) *Math. Z.*, **52** (1950), 557–589.

[2] Kemer A.R. Solution of the problem as to whether associative algebras have a finite basis of identities, *Soviet Math. Dokl.*, **37**:1 (1988), 60–64.

[3] Kemer A.R. *Ideals of identities of associative algebras.* Translated from the Russian by C. W. Kohls. Translations Mathematical Monographs, American Mathematical Society,Providence, RI, (1991). vi+81 pp.

[4] Ismailov N.A., Umirbaev U.U. On a variety of right-symmetric algebras, *Max-Plank Institute for Mathematics,* Bonn, Preprint MPIM 23-26, (2023).

On the countable spectrum of weakly o-minimal theories of finite convexity rank

Beibut Sh. KULPESHOV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan
E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz

Let L be a countable first-order language. Here we consider L–structures and suppose that L contains a binary relation symbol $<$ which is interpreted as a linear order in these structures. A subset A of a linearly ordered structure $\mathcal{M}$ is *convex* if for any $a, b \in A$ and $c \in M$ whenever $a < c < b$ we have $c \in A$.

The present lecture deals with the notion of *weak o-minimality*, which initially deeply studied by H.D. Macpherson, D. Marker, and C. Steinhorn in [1]. A *weakly o-minimal structure* is a linearly ordered structure $\mathcal{M} = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ such that any definable (with parameters) subset of the structure $\mathcal{M}$ is a finite union of convex sets in $\mathcal{M}$.

Definition 1. Let T be a weakly o-minimal theory, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ be non-algebraic. We say that p is not *weakly orthogonal* to q (denoting this by $p \not\perp^w q$) if there exist an L_A-formula $H(x, y)$, $\alpha \in p(M)$ and $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ such that $\beta_1 \in H(M, \alpha)$ and $\beta_2 \notin H(M, \alpha)$.

Lemma 1. [2] *Let T be a weakly o-minimal theory, $M \models T$, $A \subseteq M$. Then the relation of non-weak orthogonality $\not\perp^w$ is an equivalence relation on $S_1(A)$.*

The definition of the convexity rank of a formula with one free variable was introduced in [3] and extended on an arbitrary set in [4].

Laura Mayer in [5] confirmed Vaught's Conjecture for o-minimal theories:

Theorem 1. [5] Let T be an o-minimal theory in a countable language. Then either T has 2^ω countable models or T has $3^m 6^l$ countable models for some non-negative integers $m, l < \omega$.

In [6] Vaught's Conjecture was confirmed for quite o-minimal theories, and it was established that the countable spectrum of these theories coincides with the countable spectrum of o-minimal theories. A natural question arises: for which theories in the class of weakly o-minimal theories, their countable spectrum will also coincide with countable spectrum of o-minimal theories.

For an arbitrary subset A of a linearly ordered structure M we introduce the following notations: $A^+ := \{b \in M \mid A < b\}$ and $A^- := \{b \in M \mid b < A\}$.

Let T be a weakly o-minimal theory, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ be non-algebraic types, $p \not\perp^w q$. We say that an L_A-formula $\phi(x, y)$ is said to be a (p, q)*-splitting formula* if there exists $a \in p(M)$ such that $\phi(a, M) \cap q(M) \neq \emptyset$, $\neg\phi(a, M) \cap q(M) \neq \emptyset$, $\phi(a, M) \cap q(M)$ is convex, and $[\phi(a, M) \cap q(M)]^- = [q(M)]^-$.

Definition 2. [7] Let T be a weakly o-minimal theory, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ be non-algebraic types. We say that p is not *almost quite orthogonal* to q if there exist a (p, q)-splitting formula $U(x, y)$ and an A-definable equivalence relation $E_q(x, y)$ partitioning $q(M)$ into infinitely many convex classes so that for any $a \in p(M)$ there is $b \in q(M)$ such that $\sup U(a, M) = \sup E_q(b, M)$.

Definition 3. [2] Let M be a weakly o-minimal structure, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ be non-algebraic. We say that p is *quasirational-to-right (left)* if there exists a convex L_A-formula $U_p(x) \in p$ such that for any sufficiently saturated model $N \succ M$ we have $U_p(N)^+ = p(N)^+$ ($U_p(N)^- = p(N)^-$). A non-isolated 1-type is said to be *quasirational* if it is either quasirational-to-right or quasirational-to-left. A non-quasirational non-isolated 1-type is said to be *irrational*.

We prove the following theorem:

Theorem 2. *Let T be a weakly o-minimal theory of finite convexity rank having fewer than 2^ω countable models. Then there exist $\Gamma_1 = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$, $\Gamma_2 = \{q_1, q_2, \ldots, q_l\}$ — maximal pairwise weakly orthogonal families of quasirational and irrational 1-types over $\emptyset$ respectively* *for some $m, l < \omega$ such that*

$$I(T,\omega) = \prod_{i=1}^{m}(\kappa_i + 3) \times \prod_{j=1}^{l}(\lambda_j^2 + 5\lambda_j + 6),$$

where κ_i (λ_j) is maximal number of non-algebraic pairwise almost quite orthogonal 1-types over $\emptyset$ that are non-weakly orthogonal, but almost quite orthogonal to p_i (q_j) for each $1 \le i \le m$ ($1 \le j \le l$).

Funding: The work was supported by Science Committee of Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR20281002).

Keywords: weak o-minimality, countable model, orthogonality of types, convexity rank

2020 Mathematics Subject Classification: 03C64, 03C07, 03C15

References

[1] Macpherson H.D., Marker D., and Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields, *Transactions of the American Mathematical Society* **352**:12 (2000), 5435–5483.

[2] Baizhanov B.S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates, *The Journal of Symbolic Logic* **66** (2001), 1382–1414.

[3] Kulpeshov B.Sh. Weakly o-minimal structures and some of their properties, *The Journal of Symbolic Logic* **63** (1998), 1511–1528.

[4] Kulpeshov B.Sh. A criterion for binarity of almost ω-categorical weakly o-minimal theories, *Siberian Mathematical Journal* **62**:2 (2021), 1063–1075.

[5] Mayer L.L. Vaught's conjecture for o-minimal theories, *The Journal of Symbolic Logic* **53** (1988), 146–159.

[6] Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. Vaught's conjecture for quite o-minimal theories, *Annals of Pure and Applied Logic* **168**:1 (2017), 129–149.

[7] Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. On new variant of orthogonality of 1-types in weakly o-minimal theories preprint, 2022 (accepted for publication in Algebra and Logic).

The criterion of the solvability of the overdetermined Cauchy problem for the hyperbolic Gellerstedt equation

A.V. ROGOVOY[1,a], S.I. KABANIKHIN[2,b], T.SH. KALMENOV[1,c]

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2]*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia*
E-mail: [a]rog2005@list.ru, [b]ksi52@mail.ru, [c]kalmenov.t@mail.ru

Overdetermined boundary value problems for differential equations generating minimal operators are extremely important in the description of regular boundary value problems for differential equations, and are also widely used in the study of local properties of solutions. The study of overdetermined boundary value problems is closely related to the theory of correct restrictions and extensions and the construction of minimal differential operators. In addition, for inverse problems of mathematical physics arising from applications, when determining unknown data, it is necessary to study problems with overdetermined boundary conditions, which is reflected in the study of problems, including for hyperbolic equations and systems, arising in physics, geophysics, seismic tomography, geoelectrics, electrodynamics, medicine, ecology, economics and many other practical areas. In this paper, an overdetermined boundary value problem for the hyperbolic Gellerstedt equation with Cauchy data on the entire inner domain has been studied.

Let $\Omega_\gamma \subset R^2$ is a domain,bounded at $y = 0$ by the segment $AB : 0 < x < 1$, $y = 0$, and at $y < 0$ - by an arbitrary curve $\gamma(x)$ (Figure 1). *Overdetermined Cauchy problem.* To find in the domain Ω_γ the solution of the Gellerstedt equation

$$Lu \equiv -(-y)^m u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \quad m \ge 0, \tag{1}$$

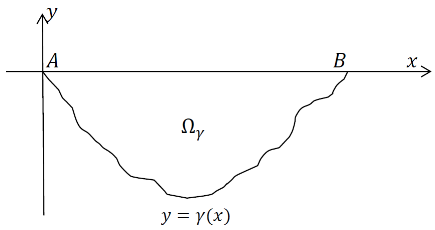

Figure 1:

satisfying the Cauchy conditions on the entire border:

$$u|_{\partial\Omega}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0. \tag{2}$$

With respect to the curve $\gamma(x)$ we assume that the characteristics $A_iC_i:\ x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=const$, $B_iC_i:\ x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=const$ intersect the curve $\gamma(x)$ once.

Let us also assume that the curve $y=\gamma(x)$ lies inside the characteristic triangle ABC, bounded by the segment $AB:0<x<1,\ y=0$ and by the characteristics $AC:\ x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=0$, $BC:\ x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=1$ of equation (1).

The main result of the work is the following theorem.

Theorem 1. *The overdetermined Cauchy problem for the hyperbolic Gellerstedt equation in an arbitrary domain Ω_γ (i.e. the problem (1), (2)) is regularly solvable (and the corresponding minimal operator is invertible in $L_2(\Omega_\gamma)$) if and only if the following conditions are met*

$$\int_0^\xi d\xi_1\int_1^\xi \frac{\widetilde{f}\left(\frac{\xi_1+\eta_1}{2},-\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-2\beta}(\eta_1-\xi_1)^{1-2\beta}\right)}{(\eta_1-\xi_1)^{2\beta}(\xi-\xi_1)^{\beta}(\eta_1-\xi)^{\beta}}d\eta_1=0, \tag{3}$$

$$\int_0^\xi d\xi_1\int_1^\xi \frac{\widetilde{f}\left(\frac{\xi_1+\eta_1}{2},-\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-2\beta}(\eta_1-\xi_1)^{1-2\beta}\right)}{(\eta_1-\xi_1)^{4\beta-1}(\xi-\xi_1)^{1-\beta}(\eta_1-\xi)^{1-\beta}}d\eta_1=0, \tag{4}$$

where $\widetilde{f}=f$ in Ω_γ and $f(x,y)\equiv 0$ in $\Omega\setminus\Omega_\gamma$. When conditions (3) and (4) are met, the solution of the problem (1), (2) is represented as:

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{4\beta}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta)\cdot\Gamma(2\beta)}\times$$
$$\times\int_0^\xi d\xi_1\int_1^\eta \frac{\widetilde{f}\left(\frac{\xi_1+\eta_1}{2},-\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-2\beta}(\eta_1-\xi_1)^{1-2\beta}\right)}{(\eta_1-\xi_1)^{2\beta}(\eta-\xi_1)^{\beta}(\eta_1-\xi)^{\beta}}F(\beta,\beta;1;\sigma)d\eta_1, \tag{5}$$

where

$$\sigma=\frac{(\xi_1-\xi)(\eta_1-\eta)}{(\xi_1-\eta)(\eta_1-\xi)},\quad \beta=\frac{1}{2(m+2)},$$

$F(a,b;c;z)$ — hypergeometric function; $\Gamma(z)$ - gamma function.

By the continuation method, it can be shown that Theorem 1 remains valid when the curve $\gamma(x)$ does not lie in the characteristic triangle ABC (Figure 2). It is enough to continue the obtained solution to the area $\Delta_{ABC}\setminus\Omega_\gamma$.

Here $A_1C_1:\ x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=a_1$, $(a_1<0)$, $B_1C_1:\ x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=b_1$, $(b_1>1)$.

Funding: The authors were supported by a grant (No. AP14871460) of the SC of the MSHE of RK.

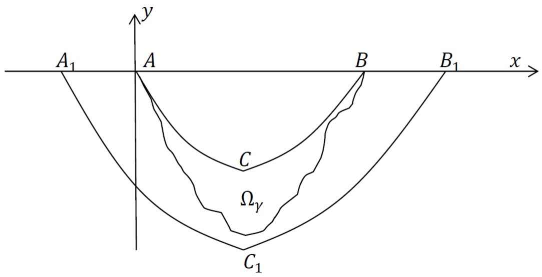

Figure 2:

Keywords: overdetermined Cauchy problem, Gellerstedt equation, criterion, minimal differential operator, hypergeometric function.

2010 Mathematics Subject Classification: 35L80, 35M10, 35N30, 33C05

Mathematical Research with ChatGPT

Bolys Sabitbek

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: b.sabitbek@math.kz

Today, using artificial intelligence tools such as ChatGPT can enhance our abilities and make both research and education more efficient. ChatGPT, a variant of the Generative Pretrained Transformer model, uses advanced deep-learning techniques to understand and generate human-like text. This makes it an incredibly helpful tool for different aspects of mathematical research. This presentation outlines the potential applications of ChatGPT in literature review, problem-solving, programming, documentation, data analysis, and education. ChatGPT significantly boosts research efficiency in several ways: it automates literature searches and idea generation, offers assistance with complex mathematical problems by integrating with tools like Mathematica Wolfram, aids in programming and creating LaTeX documentation, and supports data analysis and visualisation. Practical examples and demonstrations will illustrate its capabilities, from solving equations to drafting research papers in LaTeX. Despite its advantages, the presentation will also address the limitations and ethical considerations of using ChatGPT, emphasising the importance of critical engagement and verification.

Funding: The author was supported by the program no. BR20281002 of the Ministry of Science and Higher Education of Republic of Kazakhstan.

1 Теория функций и функциональный анализ

Руководители:	профессор Базарханов Д.Б.
	профессор Нурсултанов Е.Д.
Секретарь:	Найманова Жансая

Об оценках наилучших M-членных приближений функций в анизотропном пространстве Лоренца–Зигмунда

Г. АКИШЕВ

Казахстанский филиал МГУ, Астана, Казахстан

Институт математики и математического моделирования, Алматы akishev_g@mail.ru,

Пусть $\mathbb{T}^m=[0,2\pi)^m$, $\overline{p}=(p_1,...,p_m)$, $\overline{\tau}=(\tau_1,...,\tau_m)$, $\overline{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ и числа $\tau_j,p_j\in(1,+\infty)$, $\alpha_j\in\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$, $j=1,...,m$. Через $L^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$ обозначим анизотропное пространство Лоренца–Зигмунда — всех измеримых по Лебегу функций m переменных f имеющих период 2π по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|^*_{\overline{p},\bar{\alpha},\bar{\tau}}:=\Big[\int_0^1\Big[\ldots\Big[\int_0^1\left(f^{*_1,\ldots,*_m}(t_1,...,t_m)\right)^{\tau_1}$$

$$\times\left(\prod_{j=1}^m\Big(1+|\log_2 t_j|\Big)^{\alpha_j}t_j^{\frac{1}{p_j}-\frac{1}{\tau_j}}\right)^{\tau_1}dt_1\Big]^{\frac{\tau_2}{\tau_1}}\ldots\Big]^{\frac{\tau_m}{\tau_{m-1}}}dt_m\Big]^{\frac{1}{\tau_m}}<\infty,$$

где $f^{*_1,\ldots,*_m}(t_1,...,t_m)$ — повторная невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\bar{x})|$ по каждой переменной $x_j\in[0,1)$ при фиксированных остальных переменных (см. [1]). $\mathring{L}^*_{\overline{p},\bar{\alpha},\bar{\tau}}(\mathbb{T}^m)$ — множество всех функций $f\in L^*_{\overline{p},\bar{\alpha},\bar{\tau}}(\mathbb{T}^m)$, для которых интегральные средние по каждой переменной по периоду равны нулю. $a_{\overline{n}}(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f\in L(\mathbb{T}^m)$ по системе $\{e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}\}_{\mathbb{Z}^m}$. Положим $\langle\bar{y},\bar{x}\rangle=\sum\limits_{j=1}^m y_jx_j$, где

$$\rho(\bar{s})=\left\{\overline{k}=(k_1,...,k_m)\in\mathbb{Z}^m:\quad 2^{s_j-1}\le|k_j|<2^{s_j},j=1,...,m\right\},$$

$s_j=1,2,...$, $\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x})=\sum\limits_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})}a_{\overline{n}}(f)\,e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}$. Рассматривается аналог класса Никольского–Бесова в анизотропном пространстве Лоренца–Зигмунда:

$$S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau},\overline{\theta}}B:=\Big\{f\in\mathring{L}^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m):\ \|f\|^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}+\Big\|\Big\{\prod_{j=1}^m 2^{s_jr_j}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}\Big\}_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\Big\|_{l_{\overline{\theta}}}\le 1\Big\},$$

где $\overline{p}=(p_1,...,p_m)$, $\overline{\alpha}=(\alpha_1,...,\alpha_m)$, $\overline{\tau}=(\tau_1,...,\tau_m)$, $\overline{\theta}=(\theta_1,...,\theta_m)$, $\overline{r}=(r_1,...,r_m)$, $1<p_j$, $\tau_j<\infty$, $0<\theta_j\leqslant+\infty$, $0<r_j<+\infty$, $\alpha_j\in\mathbb{R}$, $j=1,...,m$ и $e_M(f)_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}$ — наилучшее M-членное тригонометрическое приближение функции $f\in\mathring{L}^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$, $M\in\mathbb{N}$. Положим $e_M(F)_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}$, для класса $F\subset\mathring{L}^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$.

В докладе будут представлены оценки величины $e_M(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}^{(1)},\overline{\theta}}B)_{\overline{q},\overline{\beta},\overline{\tau}^{(2)}}$ при различных соотношениях между координатами точек $\overline{p}$, $\overline{\alpha}$, $\overline{\tau}^{(1)}$, $\overline{\theta}$, $\overline{r}$, $\overline{q}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\tau}^{(2)}$.

Теорема 1. *Пусть* $\bar{p}=(p_1,\ldots,p_m)$, $\bar{q}=(q_1,\ldots,q_m)$, $\bar{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$, $\bar{\beta}=(\beta_1,\ldots,\beta_m)$, $\bar{\tau}^{(1)}=(\tau_1^{(1)},\ldots,\tau_m^{(1)})$, $\bar{\tau}^{(2)}=(\tau_1^{(2)},\ldots,\tau_m^{(2)})$, $\bar{\theta}=(\theta_1,\ldots,\theta_m)$ *и* $1<p_j<2<q_j<\infty$, $1<\tau_j^{(1)},\tau_j^{(2)}<+\infty$, $1\leqslant\theta_j\leqslant\infty$, $\alpha_j,\beta_j\in\mathbb{R}$, $0<r_j<+\infty$, $j=1,\ldots,m$, $r_{j_0}-\frac{1}{p_{j_0}}=\min\{r_j-\frac{1}{p_j}:j=1,\ldots,m\}$, $A=\{j=1,...,m:r_j-\frac{1}{p_j}=r_{j_0}-\frac{1}{p_{j_0}}\}$, $j_1=\min\{j\in A\}$. *Если* $r_{j_0}-\frac{1}{p_{j_0}}>0$, *то*

$$e_M(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau},\overline{\theta}}B)_{\overline{q},\overline{\beta},\overline{\tau}^{(2)}}\asymp\Big(\frac{\log^{|A|-1}M}{M}\Big)^{r_{j_0}+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_{j_0}}}(\log M)^{\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j}-\alpha_j)},$$

при условии $\min\{-\sum\limits_{j\in A\setminus\{j'\}}\alpha_j+\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}\big(1-\frac{1}{\theta_j}\big),\ -\alpha_{j'}+1-\frac{1}{\theta_{j'}}\}>0$, *где* $|A|$ — *количество элементов множества* A, $j'=\max\{j\in A\}$.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p_j < 2 < q_j < \infty$, $1 < \tau_j^{(1)}, \tau_j^{(2)} < +\infty$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$, $r_1 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \leqslant \ldots \leqslant r_m$. *Если* $r_j = \frac{1}{p_j}$, *для* $j = 1, ..., \nu$ *и* $r_j > \frac{1}{p_j}$, $j = \nu + 1, \ldots, m$, *то*

$$e_M(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau},\overline{\theta}}B)_{\overline{q},\overline{\beta},\overline{\tau}^{(2)}} \asymp M^{-1/2}(\log M)^{\sum_{j=1}^{\nu}(1-\frac{1}{\theta_j}-\alpha_j)},$$

при условиях, если $1 < \tau_j^{(2)} < \theta_j \leqslant \infty$, $j = 1, ..., m$, *то* $\min\{\sum\limits_{j=1}^{\nu-1}(\beta_j - \alpha_j) + \sum\limits_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{\tau_j^{(2)}} - \frac{1}{\theta_j}\right),\ \beta_\nu - \alpha_\nu + \frac{1}{\tau_\nu^{(2)}} - \frac{1}{\theta_\nu}\} > 0$; *если* $1 \leqslant \theta_j \leqslant \tau_j^{(2)} < \infty$, $j = 1, ..., m$, *то* $\beta_j - \alpha_j \geqslant 0$, $j = 1, ..., \nu$.

Замечание. В случае $p_j = \tau_j^{(1)} = p$, $q_j = \tau_j^{(2)} = q$, $\theta_j = \theta$, для $j = 1, \ldots, m$ теоремы 1–2 ранее доказаны в [2], [3]. Утверждения теорем 1–2 справедливы и в случае $p_j = 2$ и $1 < \tau_j^{(1)} \leqslant 2$, для $j = 1, \ldots, m$, а в случае $2 < \tau_j^{(1)} < \infty$, для $j = 1, \ldots, m$ другое.

Funding: Работа выполнена в рамках гранта Комитета науки МНВО РК (Проект AP19677486).

Ключевые слова: пространство Лоренца–Зигмунда, класс Никольского – Бесова, M–членное приближение.

2010 Mathematics Subject Classification: 41A10, 41A25, 42A05

Литература

[1] Нурсултанов Е.Д. Интерполяционные теоремы для анизотропных пространств и их приложения, *Докл. РАН.* **394**:1 (2004), 1–4.

[2] Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной, *Труды МИ АН СССР*, **178** (1986), 1–112.

[3] Романюк А. С. Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных, *Изв. РАН, сер. мат.*, **263**:2 (2003), 61–100.

Функции ограниченной p-флуктуации и абсолютная сходимость двойных рядов Фурье-Уолша

Т.Б. АХАЖАНОВ[1,a], Д.Т. МАТИН[2,b]

[1]*ЕНУ им.Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан*
[2]*ЕНУ им.Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан*
E-mail: [a]*talgata2008@mail.ru,* [b]*d.matin@mail.ru*

Пусть $1 \le p < \infty$ и функция $f(x, y)$ определена на $[0, 1)^2$. Через $osc\left(f, [a, b)^2\right)$ обозначим $\sup\limits_{\substack{(x,y)\in[a,b) \\ (x',y')\in[a,b)}} |f(x, y) - f(x', y')|$, а через $I^{(n_1,n_2)}_{j_1,j_2}$ — двоичный прямоугольник

$$\left[\frac{j_1 - 1}{2^n_1}, \frac{j_1}{2^n_1}\right) \times \left[\frac{j_2 - 1}{2^n_2}, \frac{j_2}{2^n_2}\right).$$

По определению

$$\kappa_p(f, n_1, n_2) := \left(\sum_{j_1=1}^{2^{n_1}}\sum_{j_2=1}^{2^{n_2}}\left(osc\left(f, I^{(n_1,n_2)}_{j_1,j_2}\right)\right)^p\right)^{1/p}.$$

Тогда, если

$$V_p(f) := \sup_{\substack{n_1\in P \\ n_2\in P}} \kappa_p(f, n_1, n_2) < \infty,$$

то $f(x, y)$ называется функцией ограниченной p-флуктуации. Введем дискретный модуль непрерывности $V_p(f)_{n_1,n_2} = \sup\limits_{\substack{k_1\geq n_1 \\ k_2\geq n_1}} \kappa_p(f, k_1, k_2)$. Множество функций $f(x, y)$, для которых

$V_p(f) < \infty$, обозначается через $FV_p\,[0,1)^2$ $(1 \le p < \infty)$, а множество функций $f(x,y)$, для которых $V_p(f)_{n_1,n_2} \to 0$ при $n_1, n_2 \to \infty$-через $FC_p\,[0,1)^2$ $(1 < p < \infty)$.

Пусть $\{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — система Уолша в нумерации Пэли.

Теорема 1. Пусть $f \in FC_p\,[0,1)^2$, $1 < \beta < 2$. Тогда при $1 < p < 2$ для сходимости ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\widehat{f}(m,n)\right|^{\beta} \tag{1}$$

достаточно выполнения одного из двух условий

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(\kappa_p(f,m,n))^{\beta}\left(2^{m+n}\right)^{1-\beta} < \infty, \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}E_{m,n}^{\beta}(f)_p(mn)^{-\beta} < \infty.$$

Если $2 \le p < \infty$, то любое из двух условий

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{m+n}\right)^{1-\frac{\beta}{p}-\frac{\beta}{2}}V_p^{\beta}(f)_{m,n} < \infty, \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}E_{m,n}^{\beta}(f)_p(mn)^{-\frac{\beta}{p}-\frac{\beta}{2}} < \infty$$

также влечет сходимость ряда (1). Теорема 1 является распространением на двумерный случай соответствующей теоремы из работы [1].

Funding: Данная работа финансируется Комитетом науки Министерство науки и высшего образования Республики Казахстан(AP15473253).

Ключевые слова: функцией ограниченной p-флуктуации, дискретный модуль непрерывности, система Уолша.

2010 Mathematics Subject Classification: 46B50, 47B47, 46A50

Литература

[1] Волосивец С. Приближение функций ограниченной p-флуктуации полиномами по мультипликативным системам, *Analysis Mathematica*, **1**:1 (1995), 61–77.

$(L_p - L_q)$ ограниченность дискретных операторов Фурье на m-мерном торе

Д.Б. БАЗАРХАНОВ

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: dauren.mirza@gmail.com

Рассмотрим интегральный оператор Фурье на $\mathbb{R}^m$ вида

$$T_a^{\phi}u(x) = \int_{\mathbb{R}^m} a(x,\xi)\widehat{u}(\xi)e^{2\pi i\phi(x,\xi)}d\xi$$

с символом $a : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ и фазой $\phi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ и его периодический аналог — дискретный оператор Фурье (ДОФ) на $\mathbb{T}^m$ вида

$$\widetilde{T}_a^{\phi}u(x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m} a(x,\xi)\widehat{u}(\xi)e^{2\pi i\phi(x,\xi)}$$

с символом $a : \mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m \to \mathbb{C}$ и фазой $\phi : \mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m \to \mathbb{R}$.

В случае скалярного произведения, $\phi(x,\xi) = x\xi$, ДОФ $\widetilde{T}_a^{\phi}$ становится тороидальным псевдодифференциальным оператором (ПДО) $\widetilde{T}_a$.

Как обычно, $L_p(\mathbb{T}^m)$ $(1 \le p < \infty)$ — пространство измеримых функций $u : \mathbb{T}^m \to \mathbb{C}$, суммируемых в степени p, со стандартной нормой $\|u \,|\, L_p(\mathbb{T}^m)\|$.

Класс Хёрмандера $S^{\tau}_{\varrho\delta}(\mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^m)$, $\tau \in \mathbb{R}$, $0 \le \delta, \varrho \le 1$, содержит все символы $a \in C^{\infty}(\mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^m)$, удовлетворяющие дифференциальным неравенствам: для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^m$ существует $c_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}(a) > 0$ такое, что

$$|\partial_{\xi}^{\alpha}\partial_x^{\beta} a(x,\xi)| \le c_{\alpha\beta}\langle\xi\rangle^{\tau-\varrho|\alpha|+\delta|\beta|}, \quad (x,\xi) \in \mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^m$$

($\mathbb{I} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{T}\}$, $\mathbb{T}^m \equiv (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^m$ — m-мерный тор).

Здесь и ниже используются следующие обозначения: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ — множества натуральных, целых, действительных и комплексных чисел соответственно; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Для $x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ положим $xy = x_1y_1 + \ldots + x_my_m$, $x \le y \Leftrightarrow x_\nu \le y_\nu$ для всех $\nu = 1, 2, \dots, m$; $\langle x\rangle = \sqrt{1 + xx}$. Далее, используем стандартные мультииндексные обозначения : для $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m), \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m) \in \mathbb{N}_0^n$ положим

$$\partial^{\alpha}u(x)(\equiv \partial_x^{\alpha}u(x)) = \partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_m^{\alpha_m}u(x), \quad \text{где} \quad \partial_\nu = \tfrac{\partial}{\partial x_\nu}, \nu \in \{1, 2, \dots, m\};$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m, \quad \alpha! = \alpha_1!\cdots\alpha_m!; \quad \binom{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!}, \quad \gamma \le \alpha.$$

Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ — пространства Шварца пробных функций и распределений соответственно; $\widehat{u}$ — преобразование Фурье для $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Далее, $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$ — пространство 1–периодических (по всем переменным) распределений, т.е. совокупность всех $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ таких, что $\langle u, \varphi(\cdot + \xi)\rangle = \langle u, \varphi\rangle$ для всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и любых $\xi \in \mathbb{Z}^m$. Известно, что $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$, если и только если $\operatorname{supp}\widehat{u} \subset \mathbb{Z}^m$, т.е. распределение $\widehat{u}$ обращается в 0 на открытом множестве $\mathbb{R}^m \setminus \mathbb{Z}^m$.

В частности, для $u \in L_1(\mathbb{R}^m)$ $(\subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m))$ и $v \in L_1(\mathbb{T}^m)$ $(\subset \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m))$

$$\widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} u(x)e^{-2\pi i\xi x}dx,\ \xi \in \mathbb{R}^m;\ \widehat{v}(\xi) = \int_{\mathbb{T}^m} v(x)e^{-2\pi i\xi x}dx,\ \xi \in \mathbb{Z}^m.$$

Периодический аналог $S^{\tau}_{\varrho\delta}(\mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m)$, $\tau \in \mathbb{R}$, $0 \le \delta, \varrho \le 1$, класса Хёрмандера состоит из всех символов $a : \mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m \to \mathbb{C}$ таких, что $a(\,\cdot\,, \xi) \in C^{\infty}(\mathbb{T}^m)$ для всех $\xi \in \mathbb{Z}^m$, и для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^m$ существует $c_{\alpha\beta} > 0$ такое, что

$$|\Delta_{\xi}^{\alpha}\partial_x^{\beta} a(x,\xi)| \le c_{\alpha\beta}\langle\xi\rangle^{\tau-\varrho|\alpha|+\delta|\beta|}, \quad (x,\xi) \in \mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m \tag{3}$$

(Δ_{ξ}^{α} — оператор конечной разности порядка α с шагом 1 по частотной переменной ξ: для $g : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{C}$

$$\Delta_{\xi}^{\alpha}g(\xi) = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^m:\gamma\le\alpha} (-1)^{|\alpha-\gamma|}\binom{\alpha}{\gamma}g(\xi+\gamma)).$$

$S^{m}_{\varrho\delta}[A, B](\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ — совокупность всех символов $a(x, \xi)$, удовлетворяющих неравенствам (7) только для $\alpha \in A, \beta \in B$ (A, B — заданные подмножества $\mathbb{N}_0^n$).

Будем предполагать, что фаза $\phi : \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ положительно-однородна порядка 1 при $\xi \ne 0$ и удовлетворяет следующим условиям : для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^m$: $|\alpha| = |\beta| = 1$ $\partial_{\xi}^{\alpha}\partial_x^{\beta}\phi \in S^0_{00}(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^m)$, кроме того,

$$|\det(\partial_x\partial_\xi\phi(x,\xi))| > C > 0, \quad |\partial_x^{\alpha}\phi(x,\xi)| < c_\alpha|\xi|,\ \xi \ne 0;$$

$$\langle\nabla_\xi\phi(x,\xi)\rangle \asymp 1, \quad \langle\nabla_x\phi(x,\xi)\rangle \asymp \langle\xi\rangle.$$

Наконец, для $t \in \mathbb{R}$ определим следующие величины: $t_- = \min\{0, t\}$, $t^* = \max\{2, t\}$, $t_* = \min\{2, t\}$, $\lfloor t\rfloor$ — целая часть t).

Введем множество мультииндексов: $C_{m,p} = \{\alpha \in \mathbb{N}_0^m : |\alpha| \le \lfloor \frac{m}{p}\rfloor + 1\}$ $(p > 0)$; $C_m \equiv C_{m,2}$.

Теорема 1. *Пусть $\tau \in \mathbb{R}, 0 \le \varrho \le 1$. Если $0 \le \delta \le 1$ и все ДОФ с символами из $S^{\tau}_{\varrho\delta}(\mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m)$ ограничены на $L_2(\mathbb{T}^m)$, то выполняется неравенство $\tau \le \frac{m}{2}(\varrho - \delta)_-$. Обратно,* *если* $0 \le \delta < 1$ *и* $\tau \le \frac{m}{2}(\varrho - \delta)_{-}$, *то все ДОФ с символами из* $S^{\tau}_{\varrho\delta}[C_m, C_m](\mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m)$ *ограничены на* $L_2(\mathbb{T}^m)$.

При $\delta = 1$ второе утверждение **теоремы 1** неверно : существует символ из $S^0_{11}(\mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m)$, для которого ПДО $\widetilde{T}_a$ не является ограниченным на $L_2(\mathbb{T}^m)$.

Теорема 1 является существенным развитием, с одной стороны, теоремы 1 из [1] (со случая тороидальных ПДО на случай ДОФ), а с другой, известного результата для ДОФ из [2, p. 407].

Пусть $1 < p \le q < \infty$. Определим число

$$\tau^{\dagger}(m,p,q,\varrho) = -m(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{q} + (1-\varrho)(\tfrac{1}{q_*} - \tfrac{1}{p^*})).$$

Теорема 2. *Пусть* $\tau \in \mathbb{R}, 0 \le \varrho \le 1, 0 \le \delta < 1, 1 < p \le q < \infty$. *Если* $\tau \le \tau^{\dagger}(m,p,q,\varrho)$, *то все ДОФ с символами из* $S^{\tau}_{\varrho\delta}[C_m, C_{m,p}](\mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m)$ *ограничены из* $L_p(\mathbb{T}^m)$ *в* $L_q(\mathbb{T}^m)$. *Если же* $\tau > \tau^{\dagger}(m,p,q,\varrho)$, *то найдется символ из* $S^{\tau}_{\varrho\delta}(\mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m)$, *для которого ПДО* $\widetilde{T}_a$ *не является ограниченным из* $L_p(\mathbb{T}^m)$ *в* $L_q(\mathbb{T}^m)$.

Теорема 2 является существенным развитием, с одной стороны, теоремы 2 из [1] (со случая тороидальных ПДО на случай ДОФ), а с другой, недавнего результата для ДОФ при $1 < p = q < \infty$ из [3].

Funding: Автор был поддержан грантом BR20281002 МНВО РК.

Ключевые слова: интегральный оператор Фурье, дискретный оператор Фурье, ограниченный оператор.

2010 Mathematics Subject Classification: 35S05, 42B15, 42B35

Литература [1] Базарханов Д.Б. $L_p - L_q$ ограниченность некоторых псевдодифференциальных операторов на m-мерном торе, *Матем. заметки*, **102**:6 (2017), 938 - 942.

[2] Ruzhansky M., Turunen V. *Pseudo - differential operators and symmetries*, Birkhauser, Basel - Boston - Berlin (2010).

[3] Cardona D., Messiouene R., Senoussaoui A. Periodic Fourier integral operators in L^p-spaces, *Comptes Rendus Mathematique*, **359**:5 (2021), 547 - 553.

Линейные поперечники некоторых компактов пространства типа Никольского – Бесова, связанного с пространством Морри, на m-мерном торе

Р. Байчапанова

КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: baychapanovaroza@mail.ru

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \ge 2$, $\mathrm{z}_m = \{1, \ldots, k\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. Для $x = (x_1, \ldots, x_m), y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, положим $xy = x_1y_1 + \ldots + x_my_m$, $|x| = |x_1| + \ldots + |x_m|$, $|x|_\infty = \max(|x_\mu| : \mu \in \mathrm{z}_m)$; $x \le y$ $(x < y) \Leftrightarrow x_\mu \le y_\mu$ $(x_\mu < y_\mu)$ for all $\mu \in \mathrm{z}_m$. For $t \in \mathbb{R}$, $t_+ := \max\{0, t\}$.

Пусть $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ — пространства Шварца пробных функций и распределений соответственно; $\widehat{f}$ — преобразование Фурье $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$; в частности, для $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) e^{-2\pi i\, \xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^m.$$

Пусть $\mathbb{T}^m = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^m$ — m-мерный тор; $\widetilde{\mathcal{S}}' \equiv \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$ —пространство 1- периодических (по всем переменным) умеренных распределений, т.е. совокупность всех f из $\mathcal{S}'$ таких, что $\langle f, \varphi(\cdot + \xi)\rangle = \langle f, \varphi\rangle$ для всех $\varphi \in \mathcal{S}$ и любых $\xi \in \mathbb{Z}^m$, $\widetilde{\mathcal{S}} := \mathcal{S}(\mathbb{T}^m)$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{T}^m$. Известно, что $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$, если и только если $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \mathbb{Z}^m$, т.е. распределение $\widehat{f}$ обращается в 0 на открытом множестве $\mathbb{R}^m \setminus \mathbb{Z}^m$.

Для $1 \le p < \infty$ и измеримого множества $G \subset \mathbb{R}^m$ $L_p(G)$ пространство измеримых функций $f : G \to \mathbb{C}$, интегрируемых по Лебегу в степени p на G со стандартной нормой $\| f \,|\, L_p(G) \|$.

Для $1 \le q \le \infty$ пусть $\ell_q := \ell_q(\mathbb{N}_0)$ — пространство (комплексных) числовых последовательностей $(c_j) = (c_j : j \in \mathbb{N}_0)$ с конечной стандартной нормой $\|(c_j) \,|\, \ell_q\|$.

Далее, пусть $\ell_q(L_p(G))$ — пространство функциональных последовательностей $(g_j(x)) = (g_j(x) : k \in \mathbb{N}_0)$ $(x \in G)$ с конечной нормой

$$\| \,(g_j(x)) \,|\, \ell_q(L_p(G)) \,\| = \| \,(\,\| \,g_j \,|\, L_p(G)\|) \,|\, \ell_q \,\|.$$

Пусть $\mathcal{Q}$ — множество всех "полуоткрытых" диадических кубов из $\mathbb{R}^m$ вида

$$Q = Q_{j\xi} = \{ \,x \in \mathbb{R}^m \,:\, 2^j x - \xi \in [0,1)^m \,\} \ (j \in \mathbb{Z}, \xi \in \mathbb{Z}^m),$$

а

$$\widetilde{\mathcal{Q}} = \{Q \in \mathcal{Q} \,|\, Q \subset Q_0 = [0,1)^m\} = \{Q_{j\xi} \,|\, j \in \mathbb{N}_0,\, \xi \in \mathbb{Z}^m : \mathbf{0} \le \xi < 2^j \mathbf{1}\} \ \ (\mathbf{0}, \mathbf{1} \in \mathbb{R}^m).$$

Для $Q = Q_{j\xi}$ обозначим через $l(Q) = 2^{-j}$, $j(Q) := j$ и $|Q| = 2^{-jm}$ его длину ребра, уровень и объем.

Выберем пробную функцию $\eta_0 \in \mathcal{S}$ такую, что

$$0 \le \widehat{\eta}_0(\xi) \le 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^m; \quad \widehat{\eta}_0(\xi) = 1 \ \text{ if } |\xi|_\infty \le 1; \quad \operatorname{supp} \widehat{\eta}_0 = \{\xi \in \mathbb{R}^m \mid |\xi|_\infty \le 2\}.$$

Положим $\widehat{\eta}(\xi) = \widehat{\eta}_0(2^{-1}\xi) - \widehat{\eta}_0(\xi)$, $\ \widehat{\eta}_j(\xi) := \widehat{\eta}_j(\xi) = \widehat{\eta}(2^{1-j}\xi)$, $\ j \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{j=0}^{\infty} \widehat{\eta}_j(\xi) \equiv 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^m,$$

т.е. $\{\widehat{\eta}_j(\xi) \,|\, j \in \mathbb{N}_0\}$ — гладкое разбиение единицы ("по коридорам") на $\mathbb{R}^m$.

Ясно, что

$$\eta(x) = 2^m \eta_0(2x) - \eta_0(x),\, \eta_j(x) := 2^{(j-1)m} \eta(2^{j-1}x),\, j \in \mathbb{N}.$$

Для произвольной функции $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ ее периодизация $\widetilde{g} : \mathbb{T}^m \to \mathbb{C}$ определяется как (формальная) сумма ряда $\sum\limits_{\xi \in \mathbb{Z}^m} g(x + \xi)$.

В частности, если $\varphi \in \mathcal{S}$, то $\widetilde{\varphi} \in \widetilde{\mathcal{S}}$ и по формуле суммирования Пуассона $\widetilde{\varphi}(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^m} \widehat{\varphi}(\xi) e^{2\pi i \xi x}$.

Обозначим через $\widetilde{\Delta}_j^\eta$ операторы, определяемые на $\widetilde{\mathcal{S}}'$ $(j \in \mathbb{N}_0)$, следующим образом: для $f \in \widetilde{\mathcal{S}}'$

$$\widetilde{\Delta}_j^\eta(f, x) = f * \widetilde{\eta}_j(x) = \langle f, \widetilde{\eta}_j(x - \cdot) \rangle = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^m} \widehat{\eta}_j(\xi) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \,\xi x}.$$

Для удобства положим $\widetilde{\Delta}_j^\eta(f, x) \equiv 0$ при $j < 0$.

Пусть $s, \tau \in \mathbb{R}$, $1 \le p, q \le \infty$. Тогда гладкостное пространство $\widetilde{B}_{p\,q}^{s\,\tau} := B_{p\,q}^{s\,\tau}(\mathbb{T}^m)$ типа Никольского – Бесова, связанное с пространством Морри, на m-мерном торе состоит из всех распределений $f \in \widetilde{\mathcal{S}}'$, для которых конечна норма

$$\| \,f \,|\, \widetilde{B}_{p\,q}^{s\,\tau} \,\| \ = \sup_{Q \in \widetilde{\mathcal{Q}}} \frac{1}{|Q|^\tau} \|(2^{sj} \widetilde{\Delta}_j^\eta(f, x) \operatorname{sign}((j + 1 - j(Q))_+)) \,|\, \ell_q(L_p(Q))\|.$$

Единичный шар $\widetilde{\mathrm{B}}_{p\,q}^{s\,\tau} := \mathrm{B}_{p\,q}^{s\,\tau}(\mathbb{T}^m)$ будем называть классом Никольского – Бесова.

Линейный поперечник порядка $N \in \mathbb{N}$ множества F линейного нормированного пространства X обозначим через $\lambda_N(\mathrm{F}, X)$:

$$\lambda_N(\mathrm{F}, X) = \inf_A \sup_{x \in \mathrm{F}} \| \, x - Ax \, | \, X \|,$$

где нижняя грань берется по всевозможным конечномерным линейным операторам $A : X \to X$ таким, что $\mathrm{rank(A)} \leq N$.

Теорема. *Пусть* $s, t \in \mathbb{R}, t < s$, $1 < p, q, r < \infty$, $0 \leq \tau \leq \min\{\frac{1}{p}, \frac{1}{r}\}$. *Если* $\frac{s-t}{m} > (\frac{1}{p} - \frac{1}{r})_+$ *и* $p \geq 2$ *или* $r \leq 2$, *то верна слабая асимптотическая оценка*

$$\lambda_N(\widetilde{\mathrm{B}}^{s\tau}_{pq}, \widetilde{B}^{t\tau}_{rq}) \asymp N^{\frac{t-s}{m} + (\frac{1}{p} - \frac{1}{r})_+} \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Ключевые слова: (гладкостное) пространство типа Никольского – Бесова, пространство Морри, линейный поперечник, m-мерный тор.

2010 Mathematics Subject Classification: 41A46, 42B05, 42B35

Характеризации и декомпозиции пространств с заданной мажорантой смешанного модуля гладкости

Ш.А. БАЛГИМБАЕВА

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: sholpan.balgyn@gmail.com

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{z}_k = \{1, \ldots, k\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.

Пусть $\mathcal{S} := \mathcal{S}^{(k)} := \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ и $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$ — пространства Шварца пробных функций и распределений соответственно; $\widehat{f} \equiv \mathcal{F}_k(f)$ и $\mathcal{F}_k^{-1}(f)$ — прямое и обратное преобразования Фурье $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$.

Пусть $\mathbb{T}^k = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^k$ — $k-$мерный тор. обозначим через $\widetilde{\mathcal{S}'} \equiv \mathcal{S}'(\mathbb{T}^k)$ пространство всех $1-$периодических распределений f из $\mathcal{S}'$, а через $\widetilde{\mathcal{S}} := \widetilde{\mathcal{S}}^{(k)} := \mathcal{S}(\mathbb{T}^k)$ пространство всех бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{T}^k$ с топологией равномерной сходимости всех производных.

Пусть $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$ — произвольная функция, ее периодизация $\widetilde{f} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{C}$ определяется как (формальная) сумма ряда $\sum\limits_{\xi \in \mathbb{Z}^k} f(x + \xi)$.

Выберем функцию $\eta_0 := \eta_0^{(k)} \in \mathcal{S}^{(k)}$ такую, что $0 \leq \widehat{\eta}_0(\xi) \leq 1$, $\xi \in \mathbb{R}^k$; $\widehat{\eta}_0(\xi) = 1$, если $|\xi|_\infty \leq 1$; $\mathrm{supp}\, \widehat{\eta}_0 = \{\xi \in \mathbb{R}^k \mid |\xi|_\infty \leq 2\}$.

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $0 < p$, $q \leq \infty$;

Введем операторы $\Delta_k^\eta = \Delta_k^{\eta, \mathtt{r}}$ на $\mathcal{S}'$ и $\widetilde{\Delta}_k^\eta = \Delta_k^{\eta, \mathtt{t}}$ на $\widetilde{\mathcal{S}'}$ $(k \in \mathbb{N}_0^m)$.

Далее будем предполагать, что функция Ω — заданный смешанный модуль гладкости порядка $l = (l_1, \ldots, l_d)$, удовлетворяющий известным условиям Бари –Стечкина. $\Omega(t) = \omega(\prod_{j=1}^m t_j^{\gamma_j})$.

Определение. Пусть $l = (l_1, \ldots, l_m) \in \mathbb{N}^m$, $0 < p, q \leq \infty$; $(\mathtt{i}, \mathbb{I}) \in \{(\mathtt{t}, \mathbb{T}), (\mathtt{r}, \mathbb{R})\}$.

I. Пространство типа Никольского–Бесова $B^{l\,\Omega}_{p\,q}(\mathbb{I}^m)$ состоит из всех распределений $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{I}^m)$, для которых конечна квазинорма

$$\| \, f \, | \, B^{l\,\Omega}_{p\,q}(\mathbb{I}^m) \, \| \; = \; \| \{ \frac{\Delta_k^{\eta, \mathtt{i}}(f, x)}{\Omega(2^{-s})} \} \, | \, \ell_q(L_p(\mathbb{I}^m)) \|.$$

II. Пространство типа Лизоркина–Трибеля $L^{l\,\Omega}_{p\,q}(\mathbb{I}^m)$ $(p < \infty)$ состоит из всех распределений $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{I}^m)$, для которых конечна квазинорма

$$\| \, f \, | \, L^{l\,\Omega}_{p\,q}(\mathbb{I}^m) \, \| \; = \; \| \{ \frac{\Delta_k^{\eta, \mathtt{i}}(f, x)}{\Omega(2^{-s})} \} \, | \, L_p(\mathbb{I}^m; \ell_q) \|.$$

Единичные шары $\mathrm{B}^{l\,\Omega}_{p\,q}(\mathbb{I}^m)$ и $\mathrm{L}^{l\,\Omega}_{p\,q}(\mathbb{I}^m)$ этих пространств будем называть классами типа Никольского–Бесова и Лизоркина–Трибеля соответственно.

Назовем набор $(\mathcal{A}_P^{(\mathtt{r})}) \equiv (\mathcal{A}_P : P \in \mathfrak{R}^1) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ семейством атомов для $F^{l\,\Omega}_{p\,q}$, если для каждого $P \in \mathfrak{R}^1$ выполнены условия

$$\operatorname{supp}\mathcal{A}_P \subset 3P, \quad |\partial^\alpha \mathcal{A}_P(x)| \le |P|^{-1/2} 2^{|k(P)\cdot\alpha|}, \ \ x \in \mathbb{R}^m, \ \alpha \le \mathtt{K}\cdot\mathbf{1} \qquad (1);$$

а набор $(\mathcal{A}_P^{(\mathtt{t})}) \equiv (\mathcal{B}_P : P \in \widetilde{\mathfrak{R}}^1) \subset \mathcal{S}(\mathbb{T}^m)$ *семейством атомов* для $\widetilde{F}^{l\,\Omega}_{p\,q}$, если для каждого $P \in \widetilde{\mathfrak{R}}^1$ $\mathcal{B}_P$ есть периодизация некоторой функции $\mathcal{A}_P \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ (т.е. $\mathcal{B}_P = \widetilde{\mathcal{A}}_P$), удовлетворяющей условиям (1) (здесь $3P$ — растяжение P с тем же центром).

Для последовательности $(c_P^{(\mathtt{i})}) \equiv (c_P^{(\mathtt{i})} : P \in \mathfrak{R}^{1\mathtt{i}}) \subset \mathbb{C}$ положим (χ_P — характеристическая функция P)

$$\|(c_P^{(\mathtt{i})}) \,|\, \mathtt{B}^{l\,\Omega\mathtt{i}}_{p\,q}\| := \|(\frac{1}{\omega(2^{-(s,\gamma)})} \sum_{P\in\mathfrak{R}^{1\mathtt{i}}:k(P)=k} c_P |P|^{-1/2}\chi_P(\cdot)) \,|\, \ell_q(L_p(\mathbb{I})^m)\|,$$

$$\|(c_P^{(\mathtt{i})}) \,|\, \mathtt{L}^{l\,\Omega\mathtt{i}}_{p\,q}\| := \|(\frac{1}{\omega(2^{-(s,\gamma)})} \sum_{P\in\mathfrak{R}^{1\mathtt{i}}:k(P)=k} c_P |P|^{-1/2}\chi_P(\cdot)) \,|\, L_p((\mathbb{I})^m; \ell_q)\|.$$

Теорема 1. *Пусть* $(\mathtt{i}, \mathbb{I}) \in \{(\mathtt{r}, \mathbb{R}), (\mathtt{t}, \mathbb{T})\}$, $(F, \mathtt{F}) \in \{(B, \mathtt{B})(L, \mathtt{L})\}$. *Тогда* $f \in F^{l\,\Omega}_{pq}(\mathbb{I}^m)$, *если и только если найдутся семейство атомов* $(\mathcal{A}_P^{(\mathtt{i})})$ *для* $F^{l\,\Omega}_{p\,q}(\mathbb{I}^m)$ *и последовательность* $(c_P^{(\mathtt{i})}) \in \mathtt{L}^{l\,\Omega\mathtt{i}}_{p\,q}$ *такие, что*

$$f = \sum_{P\in\mathfrak{R}^{1\mathtt{i}}} c_P^{(\mathtt{i})}\,\mathcal{A}_P^{(\mathtt{i})} \quad (\textit{сходимость в } \ L_p(\mathbb{I})^m), \qquad (2)$$

при этом

$$\|\, f \,|\, F^{l\,\Omega}_{p\,q}(\mathbb{I}^m)\| \asymp \inf \|(c_P^{(\mathtt{i})}) \,|\, \mathtt{F}^{l\,\Omega\mathtt{i}}_{p\,q}\|.$$

где inf *берется по всем представлениям (1).*

Функция $\mathcal{E}_{\mathcal{Q}}(x)$ называется $(s, \mathtt{K}, \mathtt{R}, \delta)$-молекулой для параллелепипеда $\mathcal{Q} = Q^1 \times \cdots \times Q^m \in \mathcal{D}_m^\varepsilon$, где $s \in (0,\infty)^m$, $\mathtt{K} = (K_1, \ldots, K_m) \in \mathbb{N}_0^m$, $\mathtt{R} = (R_1, \ldots, R_m) \in (0,\infty)^n$, $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_m) \in (0,1]^m$, если

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{x}^\alpha \mathcal{E}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{x}) d\mathrm{x} = 0$$

для всех $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m : |\alpha_i| \le K_i$ при $|Q^i| < 1$ и $\alpha_i = 0$ при $|Q^i| = 1$;

$$|\partial^\alpha \mathcal{E}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{x})| \le c_\alpha \prod_{i=1}^n |Q^i|^{-1/2-|\alpha_i|/d_i} \left\{1 + \frac{|x_i - x_{iQ^i}|}{l(Q^i)}\right\}^{-R_i}$$

для всех $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m : |\alpha_i| \le [s_i], i = 1, \ldots, m$;

$$|\partial^\alpha \mathcal{E}_{\mathcal{Q}}(x_k + y_k, x(e_m \backslash e^{(k)})) - \partial^\alpha \mathcal{E}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{x})| \le c_\alpha |Q^k|^{-1/2-[s_k]/} d_k - \delta_k/d_k |y_k|^{\delta_k} \times$$

$$\times \sup_{|\mathrm{z}_k|\le|y_k|} \left\{1 + \frac{|x_k - z_k - x_{kQ^k}|}{l(Q^k)}\right\}^{-R_i} \prod_{i\ne k} |Q^i|^{-1/2-|\alpha_i|/d_i} \left\{1 + \frac{|x_i - x_{iQ^i}|}{l(Q^i)}\right\}^{-R_i}$$

для всех $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^m : |\alpha_k| \le [s_k], |\alpha_i| \le [s_i], i \ne k$.

Теорема 2. *Пусть* $p \in (0,\infty)^m$, $s, q \in (0,\infty)^m$, $\mathtt{K} \in \mathbb{N}_0^m$, $\mathtt{R} \in (0,\infty)^m$, $\delta \in (0,1]^m$ *таковы, что* $\mathrm{R}_i \cdot \min\{1, p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m\} > 1$, $\delta_i > s_i - [s_i]$, $i = 1, \ldots, m$.

Тогда для любой последовательности $\{a_Q\} \in \Lambda^{\Omega,s}$ *и любого семейства* $(s, \mathtt{K}, \mathtt{R}, \delta)$*-молекул* $\{\mathcal{E}_Q\}_{Q\in\mathcal{D}_m^{\varepsilon}}$ *распределение*

$$f = \sum_{Q\in\mathcal{D}_m^{\varepsilon}} a_Q \mathcal{E}_Q \quad (\textit{сходимость в } \mathcal{S}'(\mathbb{I}^m))$$

принадлежит пространству $F_{pq}^{\Omega,l}(\mathbb{I}^m)$*, при этом верно соотношение*

$$\|f|F_{pq}^{\Omega,l}(\mathbb{I}^m)\| \ll \|\{a_Q\}\,|\Lambda^{\Omega\, s}\|.$$

Тогда для любой $f \in F_{pq}^{\Omega,l}(\mathbb{I}^m)$ *существуют числовая последовательность* $\{a_Q\} \in \Lambda^{\Omega\, s}$ *и семейство* $(s, \mathtt{K}, \mathtt{R}, \delta)$*-молекул* $\{\mathcal{E}_Q\}_{Q\in\mathcal{D}_m^{\varepsilon}}$ *такие, что верно разложение*

$$f = \sum_{Q\in\mathcal{D}_m^{\varepsilon}} a_Q \mathcal{E}_Q.$$

При этом выполняется неравенство

$$\|\{a_Q\}\,|\Lambda^{\Omega\, s}\| \ll \|f|F_{pq}^{\Omega,l}(\mathbb{I}^m)\|.$$

Funding: Автор была поддержана программой BR20281002 МНВО РК.

Ключевые слова: пространства типа Никольского-Бесова, пространства типа Лизоркина-Трибеля, модуль гладкости, атом, молекула.

2010 Mathematics Subject Classification: 42B35, 41A63, 41A55

Новые кубатурные формулы для пространств Соболева W_q^{α} с доминирующей смешанной производной

С.Ж. БАСАРОВ[1,a], Е.Д. НУРСУЛТАНОВ[2,b], Н.Т. ТЛЕУХАНОВА[1,c]

[1] *Евразийский Национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан*
[2] *Казахстанский филиал МГУ имени М.В. Ломоносова, Институт математики и математического моделирования, Астана, Казахстан*
E-mail: [a] *bassarov.serzhan98@gmail.com,* [b] *er-nurs@yandex.kz,* [c] *tleukhanova@rambler.ru*

Пусть F — некоторый класс функций интегрируемых в смысле Римана на $[0,1]^n$. И пусть $f \in F$. Рассмотрим кубатурную формулу

$$I(f) = \int\limits_{[0,1]^n} f(x)dx = \sum_{k=1}^{N} c_k f(M_k) - R_N.$$

В данной работе построена кубатурная формула для периодических функций по каждой переменной из пространств с доминирующей смешанной производной, в частности для пространство Соболева $W_q^{\alpha}[0,1]^n$.

Исследования вопросов численного интегрирования функции из пространств с доминирующей смешанной производной посвящены множество работ. Для полного списка литературы и история развития изучения о кубатурных формулах смотрите обзор [1, Гл. 8].

Пусть m — натуральное число, $p > 1$ — простое, $f \in C[0,1]^n$ и f — 1-периодическая. Определим функционал $F_m(f;p)$

$$F_m(f;p) = \frac{1}{p^m} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m \\ k_j\in Z^+}} \sum_{r_1=0}^{p^{k_1}-1} \cdots \sum_{r_n=0}^{p^{k_n}-1} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\sum_{l=1}^{p-1} e^{-\pi i\left(\frac{2lr_j}{p}+\varepsilon(k_j)\right)}}{(p-1)^{1-\varepsilon(k_j)}} f\left(\frac{r_1}{p^{k_1}}, \cdots, \frac{r_n}{p^{k_n}}\right), \qquad (1)$$

где $\varepsilon(x)=1$, если $x\geq 1$ и $\varepsilon(x)=0$ в остальных случаях.

Теорема 1. *Пусть* $f\in L_1[0,1]^n$ *и* $\sum_{r\in Z^n}\hat f(r)e^{2\pi i(r,x)}$ *абсолютно сходится. Тогда*

$$\int\limits_{[0,1]^n} f(x)dx = F_m(f;p)-R_m,$$

$$R_m=\sum_{l=1}^{n}\sum_{\sum_{j=1}^{l}k_j=m,\,k_j\geq 0}\prod_{j=1}^{l-1}\frac{(-1)^{\varepsilon(k_j)}}{(p-1)^{1-\varepsilon(k_j)}}\times$$

$$\sum_{\beta_1=1}^{p-1}\dots\sum_{\beta_{l-1}=1}^{p-1}\sum_{r\in Z^l,\,r_l\neq 0}\hat f(p^{k_1-1}(pr_1+\beta_1\varepsilon(k_1)),\dots,p^{k_{l-1}-1}(pr_{l-1}+\beta_{l-1}\varepsilon(k_{l-1})),p^{k_l}r_l,0\dots,0).$$

Теорема 2. *Пусть* $n,m\in\mathbb{N}$, $1\leq q\leq\infty$ *и* $\alpha>\frac{1}{\tilde q}=\max\left\{\frac{1}{q},\frac{1}{2}\right\}$. *Тогда*

$$\sup_{\|f\|_{W_q^\alpha[0,1]^n}=1}|I(f)-F_m(f;p)|\leq c\frac{m^{(n-1)/\tilde q}}{p^{\alpha m}}.$$

Если $2\leq q<\infty$, *тогда*

$$\sup_{\|f\|_{W_q^\alpha[0,1]^n}=1}|I(f)-F_m(f;p)|\asymp\frac{m^{(n-1)/2}}{p^{\alpha m}}.$$

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP 09260052.

Ключевые слова: Кубатурные формулы, пространства Соболева, периодические функций, гиперболический крест, пространства с доминирующей смешанной производной.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Литература

[1] Dũng, D., Temlyakov, V. and Ullrich, T. *Hyperbolic cross approximation*, Springer, (2018).

Корректные сужения дифференциально-функционального оператора, действующего в гильбертовом пространстве

М. ДАНАБЕКОВА

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: moldirrdanabekova@mail.ru

Через H обозначим пространство вектор-функций вида $U=(u(t),f)$, где $u(t)\in L_2(0,T)$, $f\in\mathbb{C}$. Это пространство является гильбертовым со скалярным произведением

$$\langle U_1,U_2\rangle=\int_0^T u_1(t)\overline{u_2(t)}dt+f_1\overline{f_2}.$$

Рассмотрим максимальный оператор $\widehat{L}$

$$\widehat{L}U=\begin{pmatrix}u'(t)+au-f\\ \alpha u(0)+\beta u(T)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g(t)\\ \varphi\end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $0<t<T$, $u(t)\in W_2^1(0,T)$, $g(t)\in L_2(0,T)$, $f,g,\varphi\in\mathbb{C}$.

Теорема. М.Отелбаев [1-3] Пусть $\widehat{L}$ — максимальный линейный оператор в гильбертовом пространстве H, L — какое-либо **известное корректное сужение** оператора $\widehat{L}$ и K — произвольный линейный ограниченный оператор в H, удовлетворяющий следующему условию

$$R(K) \subset Ker\widehat{L}.$$

Тогда оператор L_K^{-1}, определяемый формулой

$$L_K^{-1} f = L^{-1} f + K f,$$

описывает обратные к **всевозможным корректным сужениям** L_K **максимального оператора** $\widehat{L}$, т.е. $L_K \subset \widehat{L}$.

В качестве фиксированного корректного оператора выбирается оператор с краевым условием

$$D(L) = \{u \in H : \gamma u(0) + \delta u(T) = 0\} \tag{2}$$

при выполнении условия корректности

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Среди всех корректных сужений выделены все корректные граничные сужения максимального оператора.

Работа выполнена под руководством профессора М.А. Садыбекова (Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан).

Литература

[1] Кокебаев Б.К., Отелбаев М., Шыныбеков А.Н.,К теории сужения и расширения операторов, ч.1.,Известия АН КазССР, серия физ.-мат.,1982.

[2] Шыныбеков А.Н.,О корректных расширениях и сужениях некоторых дифференциальных операторов., КазССР, 1983.

[3] Кокебаев Б.К., Отелбаев М., Шыныбеков А.Н.,К теории сужения и расширения операторов, ч.2.,Известия АН КазССР, серия физ.-мат.,1983.

Поперечники Фурье некоторых компактов пространства типа Никольского – Бесова, связанного с пространством Морри, на m-мерном торе

А.К. ЖАНАБИЛОВА

КазНУ им. Аль Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: zh.aizere2001@gmail.com

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $\mathrm{z}_m = \{1, \ldots, k\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. Для $x = (x_1, \ldots, x_m), y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, положим $xy = x_1y_1 + \ldots + x_my_m$, $|x| = |x_1| + \ldots + |x_m|$, $|x|_\infty = \max(|x_\mu| : \mu \in \mathrm{z}_m)$; $x \leq y$ $(x < y) \Leftrightarrow x_\mu \leq y_\mu$ $(x_\mu < y_\mu)$ for all $\mu \in \mathrm{z}_m$. For $t \in \mathbb{R}$, $t_+ := \max\{0, t\}$.

Пусть $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ — пространства Шварца пробных функций и распределений соответственно; $\widehat{f}$ — преобразование Фурье $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$; в частности, для $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) e^{-2\pi i\, \xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^m.$$

Пусть $\mathbb{T}^m = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^m$ — m-мерный тор; $\widetilde{\mathcal{S}}' \equiv \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$ —пространство 1- периодических (по всем переменным) умеренных распределений, т.е. совокупность всех f из $\mathcal{S}'$ таких, что $\langle f, \varphi(\cdot + \xi)\rangle = \langle f, \varphi\rangle$ для всех $\varphi \in \mathcal{S}$ и любых $\xi \in \mathbb{Z}^m$, $\widetilde{\mathcal{S}} := \mathcal{S}(\mathbb{T}^m)$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{T}^m$. Известно, что $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$, если и только если $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \mathbb{Z}^m$, т.е. распределение $\widehat{f}$ обращается в 0 на открытом множестве $\mathbb{R}^m \setminus \mathbb{Z}^m$.

Для $1 \le p \le \infty$ и измеримого множества $G \subset \mathbb{R}^m$ $L_p(G)$ — пространство измеримых функций $f : G \to \mathbb{C}$, интегрируемых по Лебегу в степени p на G (при $p = \infty$ существенно ограниченных на G) со стандартной нормой $\| f \,|\, L_p(G) \|$.

Для $1 \le q \le \infty$ пусть $\ell_q := \ell_q(\mathbb{N}_0)$ — пространство (комплексных) числовых последовательностей $(c_j) = (c_j : j \in \mathbb{N}_0)$ с конечной стандартной нормой $\|(c_j) \,|\, \ell_q\|$.

Далее, пусть $\ell_q(L_p(G))$ — пространство функциональных последовательностей $(g_j(x)) = (g_j(x) : k \in \mathbb{N}_0)$ $(x \in G)$ с конечной нормой

$$\| (g_j(x)) \,|\, \ell_q(L_p(G)) \| = \| (\| g_j \,|\, L_p(G)\|) \,|\, \ell_q \|.$$

Пусть $\mathcal{Q}$ — множество всех "полуоткрытых" диадических кубов из $\mathbb{R}^m$ вида

$$Q = Q_{j\xi} = \{ x \in \mathbb{R}^m \,:\, 2^j x - \xi \in [0,1)^m \} \ (j \in \mathbb{Z}, \xi \in \mathbb{Z}^m),$$

а

$$\widetilde{\mathcal{Q}} = \{Q \in \mathcal{Q} \,|\, Q \subset Q_0 = [0,1)^m\} = \{Q_{j\xi} \,|\, j \in \mathbb{N}_0,\, \xi \in \mathbb{Z}^m : \mathbf{0} \le \xi < 2^j \mathbf{1}\} \ \ (\mathbf{0}, \mathbf{1} \in \mathbb{R}^m).$$

Для $Q = Q_{j\xi}$ обозначим через $l(Q) = 2^{-j}$, $j(Q) := j$ и $|Q| = 2^{-jm}$ его длину ребра, уровень и объем.

Выберем пробную функцию $\eta_0 \in \mathcal{S}$ такую, что

$$0 \le \widehat{\eta}_0(\xi) \le 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^m; \quad \widehat{\eta}_0(\xi) = 1 \ \text{ if } |\xi|_\infty \le 1; \quad \operatorname{supp} \widehat{\eta}_0 = \{\xi \in \mathbb{R}^m \mid |\xi|_\infty \le 2\}.$$

Положим $\widehat{\eta}(\xi) = \widehat{\eta}_0(2^{-1}\xi) - \widehat{\eta}_0(\xi)$, $\ \widehat{\eta}_j(\xi) := \widehat{\eta}_j(\xi) = \widehat{\eta}(2^{1-j}\xi)$, $\ j \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{j=0}^{\infty} \widehat{\eta}_j(\xi) \equiv 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^m,$$

т.е. $\{\widehat{\eta}_j(\xi) \,|\, j \in \mathbb{N}_0\}$ — гладкое разбиение единицы ("по коридорам") на $\mathbb{R}^m$.

Ясно, что

$$\eta(x) = 2^m \eta_0(2x) - \eta_0(x),\ \eta_j(x) := 2^{(j-1)m} \eta(2^{j-1}x),\ j \in \mathbb{N}.$$

Для произвольной функции $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ ее периодизация $\widetilde{g} : \mathbb{T}^m \to \mathbb{C}$ определяется как (формальная) сумма ряда $\sum\limits_{\xi \in \mathbb{Z}^m} g(x + \xi)$.

В частности, если $\varphi \in \mathcal{S}$, то $\widetilde{\varphi} \in \widetilde{\mathcal{S}}$ и по формуле суммирования Пуассона $\widetilde{\varphi}(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^m} \widehat{\varphi}(\xi) e^{2\pi i \xi x}$.

Обозначим через $\widetilde{\Delta}_j^\eta$ операторы, определяемые на $\widetilde{\mathcal{S}}'$ $(j \in \mathbb{N}_0)$, следующим образом: для $f \in \widetilde{\mathcal{S}}'$

$$\widetilde{\Delta}_j^\eta(f, x) = f * \widetilde{\eta}_j(x) = \langle f, \widetilde{\eta}_j(x - \cdot)\rangle = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^m} \widehat{\eta}_j(\xi) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i\, \xi x}.$$

Для удобства положим $\widetilde{\Delta}_j^\eta(f, x) \equiv 0$ при $j < 0$.

Пусть $s, \tau \in \mathbb{R}$, $1 \le p, q \le \infty$. Тогда гладкостное пространство $\widetilde{B}^{s\,\tau}_{p\,q} := B^{s\,\tau}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$ типа Никольского – Бесова, связанное с пространством Морри, на m-мерном торе состоит из всех распределений $f \in \widetilde{\mathcal{S}}'$, для которых конечна норма

$$\| f \,|\, \widetilde{B}^{s\,\tau}_{p\,q} \| = \sup_{Q \in \widetilde{\mathcal{Q}}} \frac{1}{|Q|^\tau} \|(2^{sj} \widetilde{\Delta}_j^\eta(f, x) \operatorname{sign}((j + 1 - j(Q))_+)) \,|\, \ell_q(L_p(Q))\|.$$

Единичный шар $\widetilde{\mathrm{B}}^{s\,\tau}_{p\,q} := \mathrm{B}^{s\,\tau}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$ будем называть классом Никольского – Бесова.

Поперечник Фурье порядка $N \in \mathbb{N}$ множества F линейного нормированного пространства $V(\subset L_1(\mathbb{T}^m))$ обозначим через $\varphi_N(\mathrm{F}, V)$:

$$\varphi_N(\mathrm{F}, V) = \inf\{\sup\{\, \| v - \sum_{n=1}^{N} \langle v, \phi_n \rangle \phi_n \,|\, V\| \mid v \in \mathrm{F}\,\} \mid \Phi_N\},$$

где нижняя грань берется по всевозможным ортонормированным (в $L_2(\mathbb{T}^m)$) системам $\Phi_N = \{\phi_1, \ldots, \phi_N\} \subset V \cap L_\infty(\mathbb{T}^m)$. Здесь $\langle u, v\rangle = \int_{\mathbb{T}^m} u(x)v(x)dx$ для $u \in L_1(\mathbb{T}^m)$ и $v \in L_\infty(\mathbb{T}^m)$.

Теорема. *Пусть $s, t \in \mathbb{R}_+, t < s$, $1 < p, q, r < \infty$, $0 \le \tau \le \min\{\frac{1}{p}, \frac{1}{r}\}$. Если $\frac{s-t}{m} > (\frac{1}{p} - \frac{1}{r})_+$, то верна слабая асимптотическая оценка*

$$\varphi_N(\widetilde{\mathrm{B}}^{s\tau}_{pq}, \widetilde{B}^{t\tau}_{rq}) \asymp N^{\frac{t-s}{m} + (\frac{1}{p} - \frac{1}{r})_+} \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Ключевые слова: (гладкостное) пространство типа Никольского – Бесова, пространство Морри, поперечник Фурье, m-мерный тор.

2010 Mathematics Subject Classification: 41A46, 42B05, 42B35

Геометрические свойства Пирсовских проекторов в WFS-пространстве

М.М. ИБРАГИМОВ[1,a], С.Ж. ТЛЕУМУРАТОВ[2,b]

[1]*Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, Нукус, Узбекистан*
[2]*Нукусский горный институт, Нукус, Узбекистан*
E-mail: [a]mukhtar_i@bk.ru, [b]sarsenbay-2011@mail.ru

Гранево симметричные пространства впервые введены и исследованы Я.Фридманом и Б.Руссо в работах [1-4] как геометрическая модель квантовой механики. Основной целью проекта исследования этих пространств было геометрическая характеризация пространств состоянии операторных алгебр, точнее предсопряженных пространств JBW^*-троек, допускающих алгебраическую структуру.

Я.Фридмана и Б.Руссо в работе [2] доказали, что предсопряженное пространство комплексных алгебр фон Неймана, $JB*$-алгебр, и более общих $JB*$-троек являются нейтральными гранево симметричными пространствами.

Данной работе показано, что Пирсовские проекторы $P_0(u)$ и $P_2(u)$ являются L-проекторами и GL-проекторами на Z и M-проекторами на Z^*. Доказано, что слабо гранево симметричное пространства слагается на двух подпространств.

Мы приводим необходимые сведение из теорий WFS пространства.

Пусть Z — действительное или комплексное нормированное пространство. Элементы $f, g \in Z$ являются взаимно ортогональными, обозначается $f \diamond g$, если $\|f + g\| = \|f - g\| = \|f\| + \|g\|$. По норме выставленной гранью единичного шара Z_1 пространства Z является не пустое множество (обязательно $\neq Z_1$) имеющий вид $F_x = \{f \in Z_1 : f(x) = 1\}$, где $x \in Z^*$, $\|x\| = 1$. Для любого подмножества $S \subset Z$ положим $S^\diamond = \{f \in Z : f \diamond g,\ \forall g \in S\}$ и назовем $S^\diamond$ ортогональным дополнением к S. Подмножества $S, T \subset Z$ называются ортогональными ($S \diamond T$), если $f \diamond g$ для всех $(f, g) \in S \times T$. Элемент $u \in Z^*$называется проективной единицей, если $\|u\| = 1$ и $\langle u, F_u^\diamond\rangle = 0$. Через $\mathcal{F}$ и $\mathcal{T}$ обозначаем множества всех выставленных по норме граней Z_1 и проективных единиц в Z_1^*, соответственно.

Действительное или комплексное нормированное пространство Z называется слабо гранево симметричным пространством (WFS-пространством), если каждая по норме выставленная грань Z_1 является симметричной. Геометрическим трипотентом называется проективная единица $u \in Z^*$ со свойством, что $F := F_u$ является симметричной гранью и

$S_F^* u = u$ для некоторой симметрии S_F соответствующей F. Через $S\mathcal{F}$ и $G\mathcal{T}$ обозначаем множества всех симметричных граней Z_1 и геометрических трипотентов в Z_1^*, соответственно. Пусть Z комплексное Банаховое пространство. Линейный проектор P на Z называется L-проектором, если для любого x в Z имеем $\|x\| = \|Px\| + \|x - Px\|$. Замкнутое подпространство, которое является образом L-проектора, называется L-слагаемым Z, а Z называется L-суммой PZ и $(id_Z - P)\,Z$:

$$Z = PZ \oplus_L (id_Z - P)\,Z.$$

Лемма 1. *Пусть Z является WFS-пространством и $u \in G\mathfrak{U}$. Если $S_u = I$, тогда*

(i) $P_0(u)$ *и* $P_2(u)$ *являются L-проекторами на Z;*

(ii) *подпространства $Z_0(u)$ и $Z_2(u)$ являются L-слагаемыми Z;*

(iii) $P_2(u)\,P_0(u) = P_0(u)\,P_2(u) = 0.$

Линейный проектор Q на комплексном банаховом пространстве E называется M-проектором, если для любого a в E имеем

$$\|a\| = \max\{\|Qa\|, \|a - Qa\|\}.$$

Замкнутое подпространство, которое является образом M-проектора, называется M-слагаемой E, а E называется M-суммой QE и $(id_E - Q)\,E$:

Лемма 2. *Пусть Z является WFS-пространством и $u \in G\mathfrak{U}$. Если $S_u = I$, тогда*

(i) *Пусть Z является WFS-пространством и $u \in G\mathfrak{U}$. Если $S_u = I$, тогда*

(ii) *Подпространства $U_0(u)$ и $U_2(u)$ являются M-слагаемыми Z^*.*

Сжимающий проектор P на комплексном банаховом пространстве E называется GL-проектором, если L-ортогональное дополнение $(PE)^\diamond$ его образа содержится в его ядре $\ker(P)$: $(PE)^\diamond \subset \ker(P)$.

Лемма 3. *Пусть Z является комплексным WFS-пространством и $u \in G\mathfrak{U}$. Если $S_u = I$, тогда*

(i) $P_0(u)$ *и* $P_2(u)$ *являются GL-проекторами на Z;*

(ii) $Z_i(u)^\diamond = Ker\,P_i(u)$, где $i \in \{0, 2\}$;

(iii) $Z_0(u) = Z_2(u)^\diamond = Ker\,P_2(u)$;

(iv) $Z_2(u) = Z_0(u)^\diamond = Ker\,P_0(u)$.

Ключевые слова: Гранево симметричное пространство, L-проектор, M- проектор и GL- проектор.

2010 Mathematics Subject Classification: 46B20

Литература

[1] Friedman Y., Russo B. A geometric spectral theorem, *Quart. J. Math.*, Oxford. 1986. Vol. 37. 2. p. 263-277.

[2] Friedman Y., Russo B. Affine structure of facially symmetric spaces, *Math. Proc.Cambridge Philos. Soc.*, 106 (1989) 107-124.

[3] Friedman Y., Russo B. Geometry of the Dual ball of the Spin Factor , *Proc. Lon. Math. Soc.* , 65 (1992), p. 142-174.

[4] Friedman Y., Russo B. Classification of atomic facially symmetric spaces, *Canad. J. Math.*, 1993. – № 1 (45). – P. 33-87.

Описание конуса убывающих перестановок для потенциалов

Г.Ж. КАРШЫГИНА

Карагандинский университет им. Е.А.Букетова, Караганда, Казахстан
E-mail: karshygina84@mail.ru

Пусть $T \in (0, \infty]$. Введем множество непрерывных, положительных, убывающих функций на $(0, T)$:

$$\Omega(T) = \{\varphi \in C(0,T) : 0 < \varphi \downarrow,\, t \in (0,T)\}\,. \tag{1}$$

Обозначим

$$f_\varphi(t,\tau) := \min\{\varphi(t), \varphi(\tau)\} = \varphi(\max\{t,\tau\});\; t,\tau \in (0,T). \tag{2}$$

Пусть $E = E(\mathbb{R}^n)$ перестановочно инвариантное пространство, $\tilde{E} = E(0,\infty)$, $\tilde{E}^{\downarrow}(0,T)$ это

$$\tilde{E}^{\downarrow}(0,T) = \left\{g \in \tilde{E}(0,T) : 0 \le g(t) \downarrow, t \in (0,T)\right\}.$$

Введем, конус K следующего вида:

$$K = K(T) = \left\{ h(t) = h(g;t) := \int\limits_0^T f_\varphi(t,\tau) g(\tau) d\tau : g \in \tilde{E}^{\downarrow}(0,T) \right\}; \tag{3}$$

$$\rho_K(h) = \inf\left\{ \|g\|_{\tilde{E}(0,T)} : g \in \tilde{E}^{\downarrow}(0,T); h(g;t) = h(t), t \in (0,T) \right\}. \tag{4}$$

Введем пространство потенциалов $H_E^G = H_E^G(\mathbb{R}^n)$ над базовым перестановочно инвариантным пространством $E = E(\mathbb{R}^n)$:

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) = \{u = G * f : f \in E(\mathbb{R}^n)\}\,, \tag{5}$$

$$\|u\|_{H_E^G} = \inf\{\|f\|_E : f \in E(\mathbb{R}^n);\, G * f = u\}\,. \tag{6}$$

В общем случае, для данной $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)$ не гарантирована единственность функции $f \in E(\mathbb{R}^n)$, дающей представление . Поэтому, в (6) взята нижняя грань по всем функциям $G * f = u$, дающим данное представление. Ядро представления G назовем допустимым, если

$$G \in L_1(\mathbb{R}^n) + E'(\mathbb{R}^n), \tag{7}$$

где $E'(\mathbb{R}^n)$ — ассоциированное пространство к $E(\mathbb{R}^n)$. Свертка $G * f$ определяется как интеграл

$$(G * f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y) f(y) dy. \tag{8}$$

Общие свойства введенных потенциалов рассмотрены в работах [2, 3].

Замечание. В случае допустимых ядер мы можем для потенциалов $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)$ определить конус убывающих перестановок:

$$M = M_E^G(t) = \left\{h(t) = u^*(t) : u \in H_E^G(\mathbb{R}^n); t \in (0,T)\right\}, \tag{9}$$

снабдив его положительно однородным невырожденным функционалом

$$\rho_M(h) = \inf\left\{ \|u\|_{H_E^G}(\mathbb{R}^n); u^*(t) = h(t), t \in (0,T) \right\}. \tag{10}$$

Приведем один из общих результатов теории.

Теорема. *Пусть $H_E^G(\mathbb{R}^n)$ — пространство обобщенных потенциалов Рисса или Бесселя; считаем при этом, что $R = \infty$, $T = \infty$ для потенциалов Рисса, $R \in \mathbb{R}_+$, $T = V_n R^n$ для потенциалов Бесселя. 1). $G(x) = \Phi(|x|)$; $\Phi(t) = \varphi(V_n t^n)$, $\varphi \in \Omega(T)$;*

$$A_\varphi(T) := \sup\left\{\frac{1}{t\varphi(t)}\left(\int_0^t \varphi(\tau)d\tau\right) : t \in (0,T)\right\};$$

Если $A_\varphi(T) < \infty$, то имеет место поточечная эквивалентность конусов (3) и (9):

$$M \cong K(T).$$

Funding: Данная работа финансируется Комитетом науки Министерство науки и высшего образования Республики Казахстан (AP14869887).

Ключевые слова: поточечные накрывания, оценки, мажорант, эквивалентность конусов.

2010 Mathematics Subject Classification: 46B50, 47B47

Литература

[1] Bokayev N. A., Goldman M. L., Karshygina G. Zh. Cones of functions with monotonicity conditions for generalized Bessel and Riesz potentials, *Math. Notes*, **104**:3 (3), 356–373.

[2] Bokayev N. A., Goldman M. L., Karshygina G. Zh. Criteria for embeddings of generalized Bessel and Riesz potential spaces in rearrangement invariant spaces, *Eurasian Math. Journal*, **10**:2 (2019), 8–29.

[3] Gogatishvili A., Neves J. S. Opitz. Optimality of embeddings of Bessel-potential type spaces. Function spaces, differential operators and nonlinear analysis, *Math. Inst. Acad. Sci. Czech Republic*, (2005), 97—102.

Логарифмические неравенства типа Соболева на группах Гейзенберга

Айдын КАСЫМОВ

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: kassymov@math.kz

В этой докладе мы в первую очередь покажем ряд важных неравенств с явными константами в рамках группы Гейзенберга $\mathbb{H}^n$. Это включает дробные и целые неравенства Соболева, Гальярдо-Ниренберга, (взвешенные) неравенства Харди-Соболева, неравенства Нэша и их логарифмические версии. В случае неравенства Соболева первого порядка наша константа восстанавливает острую константу Джерисона и Ли. Замечательно, мы также устанавливаем аналог неравенства Гросса с полупробабильной мерой на $\mathbb{H}^n$, которая, как и в евклидовой среде, позволяет расширение до бесконечных измерений и особенно может рассматриваться как неравенство в бесконечномерном пространстве $\mathbb{H}^\infty$. Наконец, мы доказываем так называемое обобщенное неравенство Пуанкаре на $\mathbb{H}^n$ как относительно упомянутой полупробабильной меры, так и относительно меры Хаара на $\mathbb{H}^n$, также с явными константами. Эта работа было выполнено совместно с M. Cahtzakou и M. Ruzhansky.

Funding: Автор был поддержан грантом AP23484106 КН МНВО РК.

Ключевые слова: Логарифмическое неравенство Соболева; логарифмическое неравенство Гальярдо-Ниренберга; неравенство Нэша; неравенство Гросса; неравенство Пуанкаре; группа Гейзенберга; дробный оператор.

2010 Mathematics Subject Classification: 22E30.

Литература

[1] A. Kassymov, M. Ruzhansky and D. Suragan. Fractional logarithmic inequalities and blow-up results with logarithmic nonlinearity on homogeneous groups, *Nonlinear Differ. Equ. Appl.* **27**:7, 2020.

[2] A. Kassymov and D. Suragan. Fractional Hardy-Sobolev inequalities and existence results for fractional sub-Laplacians. *J. Math. Sci.*, **250**(2):337-350, 2020.

Неравенство Стейна-Вайсса на симметрическом пространтсве некомпактного типа

Айдын КАСЫМОВ

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: kassymov@math.kz

Изучение функциональных неравенств и взвешенных функциональных неравенств играет значительную роль в исследовании проблем дифференциальной геометрии, гармонического анализа, уравнений в частных производных и нескольких других областей математики. В частности, эти неравенства широко используются для изучения результатов существования, связанных с несколькими важными нелинейными уравнениями. В этой статье мы устанавливаем несколько важных функциональных неравенств, включая неравенство Штейна-Вайсса, неравенство Харди-Соболева, Гальярдо-Ниренберга и Каффарелли-Кон-Ниренберга на симметричных пространствах Римана более высокого ранга типа некомпактности и приводим некоторые приложения к изучению глобального существования волновых уравнений с демпфированием и массовым членом, связанным с оператором Лапласа-Бельтрами на симметричных пространствах. Симметричные пространства Римана являются очень важным классом неотрицательно кривизны римановых многообразий. Недавно многие исследователи внесли свой вклад в развитие определенных важных функциональных неравенств на многообразиях с неотрицательной кривизной, используя различные подходящие методы из анализа Фурье и геометрического анализа. Но большинство из них ограничивались только симметричным пространством ранга один, например, действительными или комплексными гиперболическими пространствами и их различными моделями, и в этом случае используется анализ Гельгасона-Фурье. Одно из фундаментальных функциональных неравенств в евклидовом гармоническом анализе — классическое неравенство Стейна-Вайсса, установленное Стейном и Вайссом. Оно гласит:

Теорема 1. *Пусть $0 < \lambda < N$, $1 < p < \infty$, $\alpha < \frac{N(p-1)}{p}$, $\beta < \frac{N}{q}$, $\alpha+\beta \geq 0$ и $\frac{\lambda-\alpha-\beta}{N} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Для $1 < p \leq q < \infty$ имеем*

$$\||x|^{-\beta} I_\lambda u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C\||x|^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \tag{4}$$

где C — положительная константа, не зависящая от u. Здесь потенциал Риса I_λ на $\mathbb{R}^N$ определен как

$$I_\lambda u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(y)}{|x-y|^{N-\lambda}} dy, \quad 0 < \lambda < N. \tag{5}$$

Основной результат будет в следующем виде:

Теорема 2. *Пусть X — симметрическое пространство некомпактного типа с размерностью $n \geq 3$ и ранк $l \geq 1$. Пусть $0 < \sigma < n$, $1 < p < \infty$, $\alpha < \frac{n}{p'}$, $\beta < \frac{n}{q}$, $\alpha + \beta \geq 0$ и $\frac{\sigma-\alpha-\beta}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Тогда для больших $\xi > 0$ и $1 < p \leq q < \infty$, мы имеем*

$$\left(\int_X \left|\int_X G_{\xi,\sigma}(y^{-1}x)u(y)dy\right|^q \frac{dx}{|x|^{\beta q}}\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\||x|^\alpha u\|_{L^p(X)}, \tag{6}$$

где C положительная константа независящая от u.

Эта работа было выполнено совместно с V. Kumar и M. Ruzhansky.

Funding: Автор был поддержан программой ФНИ BR20281002 КН МНВО РК.

Ключевые слова: Неравенство Стейна-Вайсса; дробный оператор.

2010 Mathematics Subject Classification: 22E30.

Литература

[1] A. Kassymov, M. Ruzhansky and D. Suragan. Fractional logarithmic inequalities and blow-up results with logarithmic nonlinearity on homogeneous groups, *Nonlinear Differ. Equ. Appl.* **27**:7, 2020.

Компактность коммутатора мультилинейного потенциала Рисса в локальных пространствах типа Морри

Д.Т. МАТИН[a], Т.Б. АХАЖАНОВ[b]

ЕНУ им.Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан
E-mail: [a]d.matin@mail.kz, [b]talgata2008@mail.ru

В данной работе приводятся достаточные условия компактности коммутатора мультилинейного потенциала Рисса в локальных пространствах типа Морри $LM_{p\theta}^{w(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Мультилинейный потенциал Рисса I_α порядка $\alpha(0<\alpha<n)$ определяется следующим образом

$$I_\alpha^{(m)}f(x)=C_{n,\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{f_1(y_1)f_2(y_3)...f_m(y_m)}{|x-y_1,x-y_2,...,x-y_m|^{mn-\alpha}}dy,$$

где $C_{n,\alpha}=\frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{2^\alpha\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$.

Для функции $b\in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ через M_b обозначим мультипликационный оператор $M_bf=bf$, где f — измеримая функция. Тогда коммутатор для потенциала Рисса I_α и оператора M_b определяется равенством

$$\left[b,I_\alpha^{(m)}\right](f)(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{[b(x)-b(y_1),b(x)-b(y_2),...,b(x)-b(y_m)]\,f_1(y_1)f_2(y_3)...f_m(y_m}{|x-y_1,x-y_2,...,x-y_m|^{mn-\alpha}}dy.$$

Функция $b(x)\in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ принадлежит пространству $BMO(\mathbb{R}^n)$, если

$$\|b\|_*=\sup_{Q\subset\mathbb{R}^n}\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q|b(x)-b_Q|\,dx=\sup_{Q\in\mathbb{R}^n}M(b,Q)<\infty,$$

где Q — куб из $\mathbb{R}^n$ и $b_Q=\frac{1}{|Q|}\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(y)dy$.

Через $VMO(\mathbb{R}^n)$ обозначим BMO-замыкание пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, где $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ множество всех функций из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ с компактным носителем. Через $\chi_{(a,b)}$ обозначим характеристическую функцию отрезка (a,b), через ${}^cB$ – дополнение множества B.

Пусть $1\le p\le\infty$, w — измеримая неотрицательная функция на $(0,\infty)$ не эквивалентная нулю. Локальное пространство типа Морри $LM_{p,\theta}^{w(\cdot)}\equiv LM_{p,\theta}^{w(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ определяется как множество всех функций $f\in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ с конечной квазинормой

$$\|f\|_{LM_{p\theta}^{w(\cdot)}}\equiv\left(\int\limits_0^\infty\left|w(r)\,\|f\|_{L_p(B(0,r))}\right|^\theta dr\right)^{\frac{1}{\theta}},$$

где $B(0,r)$ — открытый шар с центром в точке 0 радиуса $r>0$.

Теорема 1. *Пусть* $0<\alpha<n(1-\frac{1}{q})$, $1\le p\le\ \infty$, $1<q<\infty$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}$, $b\in VMO(\mathbb{R}^n)$, *функции* $w_1,w_2\in\Omega_{p,\infty}$ *удовлетворяют условию*

$$\int\limits_r^\infty ln\left(e+\frac{l}{r}\right)\frac{ess\inf\limits_{t<s<\infty}w_1(s)dt}{t}\le Cw_2(r),$$

тогда коммутатор мультилинейного потенциала Рисса $\left[b, I_\alpha^{(m)}\right]$ *является компактным оператором из* $LM_{p,\theta}^{w_1}$ *в* $LM_{q,\theta}^{w_2}$.

Funding: Данная работа финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан(AP14969523).

Ключевые слова: потенциала Рисса, компактность, пространство Морри, коммутатор, мультилинейный потенциала Рисса.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Нелинейные приближения всплесками некоторых компактов пространства типа Никольского – Бесова, связанного с пространством Морри, на m-мерном торе

Ж. НАЙМАНОВА

КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: zansaanajmanjva@gmail.com

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $\mathrm{z}_m = \{1, \ldots, k\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. Для $x = (x_1, \ldots, x_m), y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, положим $xy = x_1 y_1 + \ldots + x_m y_m$, $|x| = |x_1| + \ldots + |x_m|$, $|x|_\infty = \max(|x_\mu| : \mu \in \mathrm{z}_m)$; $x \leq y \ (x < y) \Leftrightarrow x_\mu \leq y_\mu \ (x_\mu < y_\mu)$ for all $\mu \in \mathrm{z}_m$. For $t \in \mathbb{R}$, $t_+ := \max\{0, t\}$.

Пусть $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ — пространства Шварца пробных функций и распределений соответственно; $\widehat{f}$ — преобразование Фурье $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$; в частности, для $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) e^{-2\pi i \xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^m.$$

Пусть $\mathbb{T}^m = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^m$ — m-мерный тор; $\widetilde{\mathcal{S}}' \equiv \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$ —пространство 1- периодических (по всем переменным) умеренных распределений, т.е. совокупность всех f из $\mathcal{S}'$ таких, что $\langle f, \varphi(\cdot + \xi) \rangle = \langle f, \varphi \rangle$ для всех $\varphi \in \mathcal{S}$ и любых $\xi \in \mathbb{Z}^m$, $\widetilde{\mathcal{S}} := \mathcal{S}(\mathbb{T}^m)$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{T}^m$. Известно, что $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$, если и только если $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \mathbb{Z}^m$, т.е. распределение $\widehat{f}$ обращается в 0 на открытом множестве $\mathbb{R}^m \setminus \mathbb{Z}^m$.

Для $1 \leq p < \infty$ и измеримого множества $G \subset \mathbb{R}^m$ $L_p(G)$ пространство измеримых функций $f : G \to \mathbb{C}$, интегрируемых по Лебегу в степени p на G со стандартной нормой $\| f \,|\, L_p(G) \|$.

Для $1 \leq q \leq \infty$ пусть $\ell_q := \ell_q(\mathbb{N}_0)$ — пространство (комплексных) числовых последовательностей $(c_j) = (c_j : j \in \mathbb{N}_0)$ с конечной стандартной нормой $\|(c_j) \,|\, \ell_q\|$.

Далее, пусть $\ell_q(L_p(G))$ — пространство функциональных последовательностей $(g_j(x)) = (g_j(x) : k \in \mathbb{N}_0)$ $(x \in G)$ с конечной нормой

$$\| \, (g_j(x)) \,|\, \ell_q(L_p(G)) \, \| = \| \, (\, \| \, g_j \,|\, L_p(G) \|) \,|\, \ell_q \, \|.$$

Пусть $\mathcal{Q}$ — множество всех "полуоткрытых" диадических кубов из $\mathbb{R}^m$ вида

$$Q = Q_{j\xi} = \{ \, x \in \mathbb{R}^m \, : \, 2^j x - \xi \in [0, 1)^m \, \} \ (j \in \mathbb{Z}, \xi \in \mathbb{Z}^m),$$

а

$$\widetilde{\mathcal{Q}} = \{Q \in \mathcal{Q} \,|\, Q \subset Q_0 = [0,1)^m\} = \{Q_{j\xi} \,|\, j \in \mathbb{N}_0, \, \xi \in \mathbb{Z}^m : \mathbf{0} \leq \xi < 2^j \mathbf{1}\} \ \ (\mathbf{0}, \mathbf{1} \in \mathbb{R}^m).$$

Для $Q = Q_{j\xi}$ обозначим через $l(Q) = 2^{-j}$, $j(Q) := j$ и $|Q| = 2^{-jm}$ его длину ребра, уровень и объем.

Выберем пробную функцию $\eta_0 \in \mathcal{S}$ такую, что

$$0 \le \widehat{\eta}_0(\xi) \le 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^m; \quad \widehat{\eta}_0(\xi) = 1 \text{ if } |\xi|_\infty \le 1; \quad \operatorname{supp} \widehat{\eta}_0 = \{\xi \in \mathbb{R}^m \mid |\xi|_\infty \le 2\}.$$

Положим $\widehat{\eta}(\xi) = \widehat{\eta}_0(2^{-1}\xi) - \widehat{\eta}_0(\xi)$, $\widehat{\eta}_j(\xi) := \widehat{\eta}_j(\xi) = \widehat{\eta}(2^{1-j}\xi)$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{j=0}^{\infty} \widehat{\eta}_j(\xi) \equiv 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^m,$$

т.е. $\{\widehat{\eta}_j(\xi) \mid j \in \mathbb{N}_0\}$ — гладкое разбиение единицы ("по коридорам") на $\mathbb{R}^m$.

Ясно, что

$$\eta(x) = 2^m \eta_0(2x) - \eta_0(x),\ \eta_j(x) := 2^{(j-1)m} \eta(2^{j-1}x),\ j \in \mathbb{N}.$$

Для произвольной функции $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ ее периодизация $\widetilde{g} : \mathbb{T}^m \to \mathbb{C}$ определяется как (формальная) сумма ряда $\sum\limits_{\xi \in \mathbb{Z}^m} g(x + \xi)$.

В частности, если $\varphi \in \mathcal{S}$, то $\widetilde{\varphi} \in \widetilde{\mathcal{S}}$ и по формуле суммирования Пуассона $\widetilde{\varphi}(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^m} \widehat{\varphi}(\xi) e^{2\pi i \xi x}$.

Обозначим через $\widetilde{\Delta}_j^\eta$ операторы, определяемые на $\widetilde{\mathcal{S}}'$ ($j \in \mathbb{N}_0$), следующим образом: для $f \in \widetilde{\mathcal{S}}'$

$$\widetilde{\Delta}_j^\eta(f, x) = f * \widetilde{\eta}_j(x) = \langle f, \widetilde{\eta}_j(x - \cdot)\rangle = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^m} \widehat{\eta}_j(\xi) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i\, \xi x}.$$

Для удобства положим $\widetilde{\Delta}_j^\eta(f, x) \equiv 0$ при $j < 0$.

Пусть $s, \tau \in \mathbb{R}$, $1 \le p, q \le \infty$. Тогда гладкостное пространство $\widetilde{B}_{pq}^{s\,\tau} := B_{pq}^{s\,\tau}(\mathbb{T}^m)$ типа Никольского – Бесова, связанное с пространством Морри, на m-мерном торе состоит из всех распределений $f \in \widetilde{\mathcal{S}}'$, для которых конечна норма

$$\| f \mid \widetilde{B}_{pq}^{s\,\tau} \| = \sup_{Q \in \widetilde{\mathcal{Q}}} \frac{1}{|Q|^\tau} \| (2^{sj} \widetilde{\Delta}_j^\eta(f, x) \operatorname{sign}((j + 1 - j(Q))_+)) \mid \ell_q(L_p(Q)) \|.$$

Единичный шар $\widetilde{\mathrm{B}}_{pq}^{s\,\tau} := \mathrm{B}_{pq}^{s\,\tau}(\mathbb{T}^m)$ будем называть классом Никольского – Бесова.

Пусть $\Phi = \{\phi_\upsilon \mid \upsilon \in \Upsilon\}$ — счетная система элементов линейного нормированного пространства X над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Положим ($N \in \mathbb{N}$)

$$\Sigma_N(\Phi) = \{\phi = \sum_{\upsilon \in \Upsilon} c_\upsilon \phi_\upsilon \mid (c_\upsilon)_{\upsilon \in \Upsilon} \subset \mathbb{C} \text{ такая, что } \sum_{\upsilon \in \Upsilon} \operatorname{sign}|c_\upsilon| \le N\}.$$

Наилучшее N-членное приближение элемента $x \in X$ по системе Φ определяется следующим образом :

$$\sigma_N(x, \Phi, X) = \inf\{\| x - \phi \mid X \| \mid \phi \in \Sigma_N(\Phi)\}.$$

Для множества $\mathrm{F} \subset X$ положим

$$\sigma_N(\mathrm{F}, \Phi, X) = \sup\{\sigma_N(x, \Phi, X) \mid x \in \mathrm{F}\}.$$

Пусть $\widetilde{\mathcal{W}}^{(m)}$ — m-мерная система периодизированных всплесков Мейера (определение см., например, в [1, ch. 3]).

Определим числа $r_* = \min\{r, 2\}$, $\imath = \min\{p, q, r\}$.

Теорема. *Пусть* $s, t \in \mathbb{R}, t < s$, $1 < p, q, r < \infty$, $0 \le \tau \le \min\{\frac{1}{p}, \frac{1}{r}\}$. Если $\frac{s-t}{m} > (\frac{2}{r_* \imath} - \frac{1}{r})_+$, то верна слабая асимптотическая оценка

$$\sigma_N(\widetilde{\mathrm{B}}_{pq}^{s\tau}, \widetilde{\mathcal{W}}^{(m)}, \widetilde{B}_{rq}^{t\tau}) \asymp N^{\frac{t-s}{m}} \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Ключевые слова: (гладкостное) пространство типа Никольского – Бесова, пространство Морри, наилучшее N-членное приближение, всплеск, m-мерная периодизированная система всплесков Мейера, m-мерный тор.

2010 Mathematics Subject Classification: 41A46, 42B05, 42B35

[1] Meyer Y. *Wavelets and operators*, Cambridge University Press, Cambridge (1992).

Ограниченность оператора Рисса в локальном пространстве Морри

Е.Д. НУРСУЛТАНОВ[1,a], А.М. КАНКЕНОВА[2,b]

[1] *МГУ имени М.В. Ломоносова, Казахстанский филиал, Астана, Казахстан*
[2] *ЕНУ имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан*
E-mail: [a]*er-nurs@yandex.ru*, [b]*ayagoz.zhantakbayeva@yandex.ru*

Пусть $k \in \mathbb{Z}$, через G_k обозначим множество всех кубов в $\mathbb{R}^n$ вида

$$[0, 2^k)^n + 2^k m, \quad m \in \mathbb{Z}^n.$$

Очевидно, что

$$\mathbb{R}^n = \bigsqcup_{Q \in G_k} Q,$$

здесь $\bigsqcup Q$ означает объединение взаимно не пересекающихся множеств.

Множество $\mathbb{G} = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} G_k$ назовем семейством диадических кубов в $\mathbb{R}^n$. Заметим, что каждый куб $Q \in G_k$ разбивается на 2^n кубов из G_{k-1}.

Семейство взаимно не пересекающихся кубов $\mathbb{T} = \{Q\} \subset \mathbb{G}$ назовем локальным разбиением пространства $\mathbb{R}^n$, если:

1. $\mu(\mathbb{R}^n \setminus \bigsqcup\limits_{Q \in \mathbb{T}} Q) = 0$;

2. $|\mathbb{T} \cap G_k| < \infty$.

Здесь и далее $|A|$ есть количество элементов во множестве A.

Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 < p, q \leq \infty$ и $\mathbb{T} = \{Q\}$ локальное разбиение $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим локальное пространство Морри $LM^{\lambda}_{p,q}(\mathbb{T})$ [1] как множество измеримых функций f для которых

$$\|f\|_{LM^{\lambda}_{p,q}(\mathbb{T})} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(2^{-k\lambda} \sum_{Q \in \mathbb{T}_k = \mathbb{T} \cap G_k} \|f\|_{L_p(Q)} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Выражения $\left(\int\limits_{\Omega} |\phi(t)|^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$, $\left(\sum\limits_{k \in \Omega} |a_k|^q \right)^{1/q}$ при $q = \infty$ понимаются как $\sup\limits_{x \in \Omega} |\phi(x)|$, $\sup\limits_{k \in \Omega} |a_k|$ соответственно.

Данная шкала пространств при $\lambda > 0$ охватывает пространства $LM^{\lambda}_{p,q,x}$, которые были введены Буренковым и Гулиевым в [1].

Пусть A и B — множества в $\mathbb{R}^n$. Расстояние между множествами A и B определяется следующим образом

$$\rho(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \rho(x, y), \quad \rho(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

Под разностью множеств A и B понимаем $A - B = \{x - y : x \in A, y \in B\}$.

Нам понадобится разбиение порождение соответствующее точке $u \in \mathbb{R}^n$. Данное разбиение с локализацией точки u.

Пусть $u \in \mathbb{R}^n$. В работе [2] рассмотрено локальное разбиение $\mathbb{T}(u)$. Определим семейства кубов

$$Y_k(u) = \left\{ Q \in G_{k+1} : \quad \rho(Q, u) < 2^k \right\}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Определим

$$\mathbb{T}_k(u) = \left\{ Q \in G_k : \, Q \notin Y_{k-1}, \, Q \subset \bigcup_{I \in Y_k(u)} I \right\}. \tag{1}$$

$$\mathbb{T}(u) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{T}_k(u). \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *и* $u \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{T}(u)$ *— локальное разбиение пространства* $\mathbb{R}^n$. *Тогда верно*

$$\|f\|_{(LM^{\lambda}_{p,q}(\mathbb{T}(u)))'} \asymp \|f\|_{LM^{-\lambda}_{p',q'}(\mathbb{T}(u))}.$$

Теорема 2. *Пусть* $\mathbb{T}(u)$, $\mathbb{T}(v)$ *локальные разбиения пространства* $\mathbb{R}^n$. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $0 < \lambda < \frac{n}{p}$ *и* $0 \le \gamma \le \frac{n}{p}$, $0 < \alpha = \gamma - \lambda + \frac{n}{p}$, $0 < \tau \le \infty$. *Если* $f \in LM^{\gamma}_{p,\infty}(T(u-v))$ *и* $g \in LM^{-\alpha}_{p',\tau}(\mathbb{T}(v))$, *то* $f * g \in LM^{\lambda}_{p,\tau}(T(u))$ *и выполняется неравенство*

$$\|f * g\|_{LM^{\lambda}_{p,\tau}(T(u))} < c\|f\|_{LM^{\gamma}_{p,\infty}(T(u-v))}\|g\|_{LM^{-\alpha}_{p',\tau}(T(v))},$$

где константа c *зависит только от параметров* n, λ, α, p.

Funding: Авторы были поддержаны грантом № AP14870361 МОН РК.

Ключевые слова: пространства Морри, неравенство Юнга-О'Нейла, оператор Рисса.

2010 Mathematics Subject Classification: 47B38, 47A63, 47G40, 31B25

Литература

[1] Burenkov V.I., Guliyev H.V., GuliyevV.S. Nessesary and sufficient conditions for boundedness of the fractional maximal operator in the local Morrey-type spaces, *Doklady Ross. Akad. Nauk. Matematika*, **V**. 409. (2006), 443–447.

[2] Nursultanov E.D., Suragan D. On the convolution operator in Morrey spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **V**. 515. – 126357. (20 pages) (2022).

Нелинейные тригонометрические приближения некоторых компактов пространства типа Никольского – Бесова, связанного с пространством Морри, на m-мерном торе

Б. ОМАРОВ

КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: beksultan.omarov.01@mail.ru

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \ge 2$, $\mathrm{z}_m = \{1, \dots, k\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. Для $x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, положим $xy = x_1y_1 + \ldots + x_my_m$, $|x| = |x_1| + \ldots + |x_m|$, $|x|_\infty = \max(|x_\mu| : \mu \in \mathrm{z}_m)$; $x \le y$ $(x < y) \Leftrightarrow x_\mu \le y_\mu$ $(x_\mu < y_\mu)$ for all $\mu \in \mathrm{z}_m$. For $t \in \mathbb{R}$, $t_+ := \max\{0, t\}$.

Пусть $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ — пространства Шварца пробных функций и распределений соответственно; $\widehat{f}$ — преобразование Фурье $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$; в частности, для $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) e^{-2\pi i \, \xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^m.$$

Пусть $\mathbb{T}^m = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^m$ — m-мерный тор; $\widetilde{\mathcal{S}'} \equiv \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$ —пространство 1- периодических (по всем переменным) умеренных распределений, т.е. совокупность всех f из $\mathcal{S}'$ таких, что

$\langle f, \varphi(\cdot+\xi)\rangle = \langle f,\varphi\rangle$ для всех $\varphi\in\mathcal{S}$ и любых $\xi\in\mathbb{Z}^m$, $\widetilde{\mathcal{S}} := \mathcal{S}(\mathbb{T}^m)$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{T}^m$. Известно, что $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$, если и только если $\operatorname{supp}\widehat{f}\subset\mathbb{Z}^m$, т.е. распределение $\widehat{f}$ обращается в 0 на открытом множестве $\mathbb{R}^m\setminus\mathbb{Z}^m$.

Для $1\le p<\infty$ и измеримого множества $G\subset\mathbb{R}^m$ $L_p(G)$ пространство измеримых функций $f: G\to\mathbb{C}$, интегрируемых по Лебегу в степени p на G со стандартной нормой $\|\, f \,|\, L_p(G)\,\|$.

Для $1\le q\le\infty$ пусть $\ell_q := \ell_q(\mathbb{N}_0)$ — пространство (комплексных) числовых последовательностей $(c_j) = (c_j : j\in\mathbb{N}_0)$ с конечной стандартной нормой $\|(c_j)\,|\,\ell_q\|$.

Далее, пусть $\ell_q(L_p(G))$ — пространство функциональных последовательностей $(g_j(x)) = (g_j(x) : k\in\mathbb{N}_0)$ $(x\in G)$ с конечной нормой

$$\|\,(g_j(x))\,|\,\ell_q(L_p(G))\,\| = \|\,(\,\|\,g_j\,|\,L_p(G)\|)\,|\,\ell_q\,\|.$$

Пусть $\mathcal{Q}$ — множество всех „полуоткрытых“ диадических кубов из $\mathbb{R}^m$ вида

$$Q = Q_{j\xi} = \{\, x\in\mathbb{R}^m \,:\, 2^j x-\xi\in[0,1)^m \,\}\ (j\in\mathbb{Z}, \xi\in\mathbb{Z}^m),$$

а

$$\widetilde{\mathcal{Q}} = \{Q\in\mathcal{Q}\,|\,Q\subset Q_0=[0,1)^m\} = \{Q_{j\xi}\,|\,j\in\mathbb{N}_0,\,\xi\in\mathbb{Z}^m : \mathbf{0}\le\xi<2^j\mathbf{1}\}\ \ (\mathbf{0},\mathbf{1}\in\mathbb{R}^m).$$

Для $Q = Q_{j\xi}$ обозначим через $l(Q) = 2^{-j}$, $j(Q) := j$ и $|Q| = 2^{-jm}$ его длину ребра, уровень и объем.

Выберем пробную функцию $\eta_0\in\mathcal{S}$ такую, что

$$0\le\widehat{\eta}_0(\xi)\le 1,\quad \xi\in\mathbb{R}^m;\quad \widehat{\eta}_0(\xi)=1\ \text{ if } |\xi|_\infty\le 1;\quad \operatorname{supp}\widehat{\eta}_0 = \{\xi\in\mathbb{R}^m \mid |\xi|_\infty\le 2\}.$$

Положим $\widehat{\eta}(\xi) = \widehat{\eta}_0(2^{-1}\xi)-\widehat{\eta}_0(\xi)$, $\ \widehat{\eta}_j(\xi) := \widehat{\eta}_j(\xi) = \widehat{\eta}(2^{1-j}\xi)$, $\ j\in\mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{j=0}^{\infty}\widehat{\eta}_j(\xi)\equiv 1,\quad \xi\in\mathbb{R}^m,$$

т.е. $\{\widehat{\eta}_j(\xi)\,|\,j\in\mathbb{N}_0\}$ — гладкое разбиение единицы („по коридорам“) на $\mathbb{R}^m$.

Ясно, что

$$\eta(x) = 2^m\eta_0(2x)-\eta_0(x),\ \eta_j(x) := 2^{(j-1)m}\eta(2^{j-1}x),\ j\in\mathbb{N}.$$

Для произвольной функции $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{C}$ ее периодизация $\widetilde{g}:\mathbb{T}^m\to\mathbb{C}$ определяется как (формальная) сумма ряда $\sum\limits_{\xi\in\mathbb{Z}^m} g(x+\xi)$.

В частности, если $\varphi\in\mathcal{S}$, то $\widetilde{\varphi}\in\widetilde{\mathcal{S}}$ и по формуле суммирования Пуассона $\widetilde{\varphi}(x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\widehat{\varphi}(\xi)e^{2\pi i\xi x}$.

Обозначим через $\widetilde{\Delta}_j^\eta$ операторы, определяемые на $\widetilde{\mathcal{S}}'$ $(j\in\mathbb{N}_0)$, следующим образом: для $f\in\widetilde{\mathcal{S}}'$

$$\widetilde{\Delta}_j^\eta(f,x) = f*\widetilde{\eta}_j(x) = \langle f,\widetilde{\eta}_j(x-\cdot)\rangle = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\widehat{\eta}_j(\xi)\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\,\xi x}.$$

Для удобства положим $\widetilde{\Delta}_j^\eta(f,x)\equiv 0$ при $j<0$.

Пусть $s,\tau\in\mathbb{R}$, $1\le p,q\le\infty$. Тогда гладкостное пространство $\widetilde{B}_{pq}^{s\,\tau} := B_{pq}^{s\,\tau}(\mathbb{T}^m)$ типа Никольского – Бесова, связанное с пространством Морри, на m-мерном торе состоит из всех распределений $f\in\widetilde{\mathcal{S}}'$, для которых конечна норма

$$\|\,f\,|\,\widetilde{B}_{pq}^{s\,\tau}\,\| = \sup_{Q\in\widetilde{\mathcal{Q}}}\frac{1}{|Q|^\tau}\|(2^{sj}\widetilde{\Delta}_j^\eta(f,x)\operatorname{sign}((j+1-j(Q))_+))\,|\,\ell_q(L_p(Q))\|.$$

Единичный шар $\widetilde{\mathrm{B}}^{s\,\tau}_{p\,q} := \mathrm{B}^{s\,\tau}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$ будем называть классом Никольского – Бесова.

Пусть $\Phi = \{\phi_\upsilon \,|\, \upsilon \in \Upsilon\}$ — счетная система элементов линейного нормированного пространства X над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Положим ($N \in \mathbb{N}$)

$$\Sigma_N(\Phi) = \{\phi = \sum_{\upsilon\in\Upsilon} c_\upsilon \phi_\upsilon \,|\, (c_\upsilon)_{\upsilon\in\Upsilon} \subset \mathbb{C} \text{ такая, что } \sum_{\upsilon\in\Upsilon} \mathrm{sign}|c_\upsilon| \le N\}.$$

Наилучшее N-членное приближение элемента $x \in X$ по системе Φ определяется следующим образом :

$$\sigma_N(x, \Phi, X) = \inf\{\| \, x - \phi \,|\, X\| \mid \phi \in \Sigma_N(\Phi)\}.$$

Для множества $\mathrm{F} \subset X$ положим

$$\sigma_N(\mathrm{F}, \Phi, X) = \sup\{\sigma_N(x, \Phi, X) \mid x \in \mathrm{F}\}.$$

Пусть $\mathfrak{T}^{(m)} = \{e^{2\pi i \xi x} \mid \xi \in \mathbb{Z}^m\}$ — m-кратная тригонометрическая система.

Теорема. *Пусть* $s, t \in \mathbb{R}, t < s$, $1 < p, q, r < \infty$, $0 \le \tau \le \min\{\frac{1}{p}, \frac{1}{r}\}$.

(i) Если $p < r \le 2$, $\frac{s-t}{m} > \frac{1}{p} - \frac{1}{r}$, то верна слабая асимптотическая оценка

$$\sigma_N(\widetilde{\mathrm{B}}^{s\tau}_{pq}, \mathfrak{T}^{(m)}, \widetilde{B}^{t\tau}_{rq}) \asymp N^{\frac{t-s}{m} + \frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

(ii) Если $2 \le p \le r$, $\frac{s-t}{m} > \frac{1}{2}$, то верна слабая асимптотическая оценка

$$\sigma_N(\widetilde{\mathrm{B}}^{s\tau}_{pq}, \mathfrak{T}^{(m)}, \widetilde{B}^{t\tau}_{rq}) \asymp N^{\frac{t-s}{m}} \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

(iii) Если $p \le 2 < r$, $\frac{s-t}{m} > \frac{1}{p}$, то верна слабая асимптотическая оценка

$$\sigma_N(\widetilde{\mathrm{B}}^{s\tau}_{pq}, \mathfrak{T}^{(m)}, \widetilde{B}^{t\tau}_{rq}) \asymp N^{\frac{t-s}{m} + \frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Ключевые слова: (гладкостное) пространство типа Никольского – Бесова, пространство Морри, наилучшее N-членное тригонометрическое приближение, m-мерный тор.

2010 Mathematics Subject Classification: 41A46, 42B05, 42B35

Равномерные оценки решений одного класса нелинейных уравнений в конечномерном пространстве

М. ОТЕЛБАЕВ

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: otelbaev@math.kz

Пусть H — действительное N-мерное гильбертово пространство, $N < \infty$. Рассмотрим уравнение

$$u + L(u) = g, \tag{1}$$

где u и $g \in H$, $L(\cdot)$ — нелинейное неприрывное преобразование.

Предположим, что выполнено следующее условие.

Условие y^*. Преобразование $L(\cdot)$ при любом $u \in H$ имеет непрерывную производную в смысле Гото и для любого $u \in H$ выполнена оценка

$$||Gu|| \le \alpha_0 ||u + L(u)||, \tag{2}$$

где α_0 — постоянная, не зависящая от $u \in H$, а G — самосопряженный обратимый оператор (то есть, матрица).

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполнено условие* y^*. *Тогда для любого* $u \in H$ *выполнена априорная оценка*

$$||u||^2 \leq C\exp\{||u + L(u)||\}, \tag{3}$$

где C *не зависит от* $u \in H$ *и зависит только от постоянной* α_0, *входящей в условие* y^*.

Замечание. Из неравенства (2) вытекает неравенство

$$||u|| \leq \lambda_{\min}^{-1} \cdot \alpha_0 ||u + L(u)||, \tag{4}$$

где $\lambda_{\min}$ — наименьшее по модулю собственное число оператора G. Оценка (4), в отличие от оценки (3), зависит от $\lambda_{\min}$.

В случае, когда $u+L(u)$ есть конечномерная аппроксимация бесконечномерной задачи, оценки вида (4) не позволяют переходить к пределу, а оценка вида (3) позволяет переходить к пределу и получать содержательные утверждения для бесконечномерных задач.

Funding: Данная работа финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (BR20281002).

Об интегрируемости с весом суммы рядов с монотонными коэффициентами по мультипликативным системам

М.Ж. ТУРГУМБАЕВ[1,a], З.Р. СУЛЕЙМЕНОВА[2,b] М.А. МУХАМБЕТЖАН[3,b]

[1]*Карагандинский университет им Е.А. Букетова,Караганда, Казахстан*
[2,3]*Евразийский Национальный Университет им. Л. Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан*
E-mail: [a]*mentur60@mail.ru*, [b]*manshuk-9696@mail.ru*

В работе находятся условия на весовую функцию, при которых сумма ряда по мультипликативным системам является интегрируемой с весом функцией на интервале $[0, 1]$.

В данной работе рассматривается вопрос о принадлежности пространству $L^1(0, 1)$ с весом суммы рядов по мультипликативным системам с монотонными коэффициентами. Сведения по мультипликативным системам изложены в [1]. Ниже p_n — образующая последовательность мультипликативной системы $\psi_n(x)$.

Определение 1. *Пусть* $\varphi(x)$ *— неотрицательная измеримая функция на интервале* $[0, \infty)$. *Мы говорим, что* $\varphi(x)$ *удовлетворяет условию* B_1, *если для всех* $x \geq 1$ *выполнено:* $\int_x^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt \leq C\frac{\varphi(x)}{x}$, *где* C *— положительное число, не зависящее от* x.

Определение 2. *Пусть* $\varphi(x)$ *неотрицательная, измеримая на* $(1, \infty)$ *функция. Говорят, что функция* $\varphi(x)$ *удовлетворяет условию* B_2, *если для всех* $x \geq 1$ *выполняется неравенство.* $\int_1^x \frac{\varphi(t)}{t}dt \leq C\varphi(x)$, *где* C *— положительное число, не зависящее от* x.

Теорема 1 *Пусть* $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *и* $\sup p_n = N < \infty$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \psi_k(x), \quad a_k \downarrow 0, \text{ когда } k \to \infty$$

и пусть $\varphi(x)$ *неотрицательная измеримая функция на* $[1, \infty)$. *Тогда*

1^0. *Если функция* $\varphi^p(x)$ *удовлетворяет условию* B_1 *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \cdot n^p \int_n^{n+1} \frac{\varphi^p(x)}{x^2}dx < \infty, \tag{1}$$

тогда $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \in L_p(0, 1)$.

2^0. *Если* $\varphi^{-p'}(x)$ *удовлетворяет условию* B_1 *и* $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \in L_p(0,\ 1)$, *тогда выполняется (1).*

Теорема 2 *Пусть* $a_k \downarrow 0$ *при* $k \to \infty$, $\sup\limits_n p_n = N < \infty$ *и*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \psi_k(x),$$

где пусть $\varphi(x) \geq 0$ *измеримая на* $[1,\ \infty)$ *функция, такая, что*

$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right) \in L_1[0,\ 1], \quad \frac{1}{x}\varphi\left(\frac{1}{x}\right) \bar{\in} L(0,\ 1).$$

Тогда

1^0. *Если*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_k^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx < \infty, \tag{2}$$

то

$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \in L_1(0,1).$$

2^0. *Если* $\varphi(x)$ *удовлетворяет условию* B_2 *и* $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \in L_1(0,1)$, *то имеет место (2).*

Ключевые слова: мультипликативная система, интегрируемость с весом, монотонные коэффициенты

Литература

[1] Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша, *Наука*, **343**: 1987 (год)

Geometric properties of ℓ^p-spaces over the unitary duals of compact groups

Meiram AKHYMBEK

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: akhymbek@math.kz

The main object of this talk is the class of ℓ^p-spaces over the unitary duals of compact groups based on Schatten-von Neumann ideals of compact operators. In this talk we first present some properties of these spaces such as duality, complex interpolation and else. Furthermore, we consider various geometric properties of these ℓ^p-spaces such as Clarkson's inequality, uniform convexity, uniform smoothness, type and co-type, Kadec-Klee property and else.

Funding: The author was supported by the grant no. BR20281002 of the Ministry of Science and Higher Education of Republic of Kazakhstan.

Keywords: Compact group, ℓ^p-spaces associated with compact groups, uniformly smooth Banach space, uniformly convex Banach space, Clarkson inequality, type and cotype, duality, complex interpolation.

2020 Mathematics Subject Classification: Primary 22A10, 22D05, 46B20; Secondary 46L52, 46B70.

Factorizations and unified Hardy inequalities

Kuralay APSEIT

Institute of Mathematics and Mathematical Modelling, Kazakhstan,
SDU University, Kazakhstan
E-mail: kuralay.apseit@sdu.edu.kz,

In this note, we start by recalling the results from [3]:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left|(\partial_r f)(x)\right|^2 d^n x \geqslant \\ &\geqslant \int_\Omega |x-x_0|^{-2} |f(x)|^2 \left\{ \frac{(n-2)^2}{4} + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{j} \left[\ln_k \left(\gamma/|x-x_0|\right)\right]^{-2} \right\} d^n x. \end{aligned}, \tag{1}$$

valid for $f \in C_0^\infty(\Omega)$, assuming that $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, is open and bounded with $x_0 \in \Omega, m \in \mathbb{N}$, and the logarithmic terms $\ln_k(\gamma/|x-x_0|), k \in \mathbb{N}$, are recursively given by

$$\begin{aligned} &\ln_1(\gamma/|x-x_0|) := \ln(\gamma/|x-x_0|), \quad 0 < |x-x_0| < \gamma, \\ &\ln_{k+1}(\gamma/|x-x_0|) := \ln(\ln_k(\gamma/|x-x_0|)), \quad 0 < |x-x_0| < \gamma/e_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

for $\gamma > 0, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, with $0 < |x-x_0| < \mathrm{diam}(\Omega) < \gamma/e_m$, where

$$e_1 := 1, \quad e_{k+1} := e^{e_k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

We denote $\sum_{j=1}^{0}(\cdot) := 0$ and $\prod_{k=1}^{0}(\cdot) := 1.$, so when $m = 0, x_0 = 0$.

In this talk , we discuss the inequality (1) with a more general weight. Moreover, we show the sharp remainder formula for the inequality (1)

Furthermore, we discuss the generalizations of these results on homogeneous Lie groups.

This talk is based on the joint research with Nurgissa Yessirkegenov (SDU University and Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakhstan).

Funding: This research is funded by the Committee of Science of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP14871691).

Keywords: factorization method, Hardy inequality, homogeneous Lie group, stratified group.

2010 Mathematics Subject Classification: 22E30,26D10

References

[1] Gesztesy, F., Littlejohn, L. L. Factorizations and Hardy-Rellich-type inequalities. Non-linear partial differential equations, mathematical physics, and stochastic analysis, *EMS Ser. Congr. Rep.,Eur. Math. Soc., Zürich.*, (2018), 207–226.

[2] M. Ruzhansky and N. Yessirkegenov. Factorizations and Hardy–Rellich inequalities on stratified groups, *Journal of Spectral Theory*, **10(4)**, (2021), 1361–1411

[3] F.Gesztesy, L. L. Littlejohn, I. Michael, And Michael M. H. Pang. Radial and Logarithmic refinements of Hardy's inequality, *St Petersburg Math. J.*, **30(3)**:1,(2019), 429-436.

About one inverse problem for a Hill's equation with double eigenvalues

Bazarkan BIYAROV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: bbiyarov@gmail.com

In this work, we establish necessary and sufficient conditions for the doubleness all of the eigenvalues, except the lowest, periodic and anti-periodic problems for Hill's equation in terms of the complex-valued potential $q(x)$.

We study the Hill's operator

$$\widehat{L}_H = -\frac{d^2}{dx^2} + \ q(x),$$

in the Hilbert space $L^2(0,1)$, where $q(x) = q(x+1)$ is an arbitrary complex-valued function of $L^2(0,1)$. The closure of $\widehat{L}_H$ in $L^2(0,1)$ considered on $C^\infty[0,1]$ is the maximal operator $\widehat{L}_H$ with the domain

$$D(\widehat{L}_H) = \{y \in L^2(0,1) : \ y, \ y' \in AC[0,1], \ y'' - q(x)y \in L^2(0,1)\}.$$

We consider the operator $L_D = \widehat{L}_H$ on the domain $D(L_D) = \{y \in D(\widehat{L}_H) : \ y(0) = y(1) = 0\}$, the operator $L_N = \widehat{L}_H$ on the domain $D(L_N) = \{y \in D(\widehat{L}_H) : \ y'(0) = y'(1) = 0\}$, the operator $L_{DN} = \widehat{L}_H$ on the domain $D(L_{DN}) = \{y \in D(\widehat{L}_H) : \ y(0) = y'(1) = 0\}$, and the operator $L_{ND} = \widehat{L}_H$ on the domain $D(L_{ND}) = \{y \in D(\widehat{L}_H) : \ y'(0) = y(1) = 0\}$.

Also we consider the operator $L_P = \widehat{L}_H$ on the domain

$$D(L_P) = \{y \in D(\widehat{L}_H) : y(0) = y(1), y'(0) = y'(1)\},$$

the operator $L_{AP} = \widehat{L}_H$ on the domain

$$D(L_{AP}) = \{y \in D(\widehat{L}_H) : y(0) = -y(1), y'(0) = -y'(1)\},$$

the operator $L_{D(\frac{1}{2})} = \widehat{L}_H$ on $[0, \frac{1}{2}]$ on the domain

$$D(L_{D(\frac{1}{2})}) = \{y \in D(\widehat{L}_H) : y(0) = y(1/2) = 0\},$$

and the operator $L_{N(\frac{1}{2})} = \widehat{L}_H$ on $[0, \frac{1}{2}]$ on the domain

$$D(L_{N(\frac{1}{2})}) = \{y \in D(\widehat{L}_H) : y'(0) = y'(1/2) = 0\},$$

respectivelly. Here we use subscripts D, N, DN, ND, P and AP meaning Dirichlet, Neumann, Dirichlet-Neumann, Neumann-Dirichlet, Periodic and Anti-Periodic ope-rators, respectivelly. By $\sigma(A)$ we denote the spectrum of the operator A.

Consider the Hill's equation in the Hilbert space $L^2(0,1)$

$$\widehat{L}_H y \equiv -y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \tag{1}$$

where $q(x) = q(x+1)$ is the complex-valued function of $L^2(0,1)$. By $c(x,\lambda)$ and $s(x,\lambda)$ we denote the fundamental system of solutions to the equation (1) corresponding to the initial conditions

$$c(0,\lambda) = s'(0,\lambda) = 1 \ \text{and} \ c'(0,\lambda) = s(0,\lambda) = 0.$$

Furthermore, we assume, without loss of generality, that $0 \in \sigma(L_{N(\frac{1}{2})})$. The following theorem is the main result of this work

Theorem 1. *The whole spectrum of L_P, except the lowest, or the whole spectrum of L_{AP} consist of the eigenvalues with geometric multiplicity two if and only if*

$$q(x) = q\Big(\frac{1}{2} - x\Big) \text{ on } [0, \frac{1}{2}]$$

or

$$q_1(x) = \Bigg(\int\limits_{\frac{1}{2}}^{x} q_2(t)dt\Bigg)^2,$$

where $q_1(x) = (q(x) + q(\frac{1}{2} - x))/2$, $q_2(x) = (q(x) - q(\frac{1}{2} - x))/2$ *on* $\big[0, \frac{1}{2}\big]$.

Funding: The author was supported by the grant no. BR20281002 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: periodic problem, anti-periodic problem, Hill's equation, double eigenvalues.

2010 Mathematics Subject Classification: 34A55, 58C40

References

[1] Marchenko V.A. *Sturm-Liouville Operators and Applications*, Birkhäuser, Basel-Boston-Studgard (1986).

[2] Biyarov B.N. One Inverse Problem for the Sturm-Liouville Operator, *Mat. Zametki*, **110**:1 (2021), 3–16; *Math. Notes*, **110**:1 (2021), 3–15.

[3] Magnus W., Winkler S. *Hill's Equation*, Dover Publications, Inc., New York (1966).

Riemann problem for multiply-connected domain in Besov Spaces

Nazarbay Bliev[1,a], Nurlan Yerkinbayev[2,b]

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modelling, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

[2]*Institute of Mathematics and Mathematical Modelling, Almaty, Kazakhstan*

E-mail: [a]*bliev.nazarbay@mail.ru*, [b]*erkinbaev@math.kz*

In this work, we obtained the conditions of the solvability of the Riemann problem for piecewise analytic functions in multiply-connected domains in Besov spaces, embedded in the continuous functions class. A new class of Cauchy-type integrals with continuous (not Hölder), in terms of Besov spaces, density, which is continuous in a closed region, and the Sokhotski–Plemelj formulas are valid, is indicated.

Funding: This work was supported by the Committee of Science of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan, project No. BR20281002

Keywords: Riemann problems, piecewise analytic functions, Cauchy type integrals, Besov spaces.

2010 Mathematics Subject Classification: 30H25, 30H05, 30H50, 46E15

On the pre-compactness of a set in generalized Morrey spaces

N. BOKAYEV[a], D. MATIN[b], A. ADILKHANOV[c]

L.N. Gumilev ENU, Astana, Kazakhstan

E-mail: [a]*bokayev2011@yandex.ru*, [b]*d.matin@mail.kz*, [c]*adilkhanov-kz@mail.ru*

In this paper we give sufficient conditions for the pre-compactness of sets in generalized Morrey spaces.

Generalized Morrey spaces $M_p^{w(\cdot)}$ were first considered by T. Mizuhara, E. Nakai and V.S. Guliyev.

Let $1 \le p \le \infty$ and let w be a measurable non-negative function on $(0, \infty)$ that is not equivalent to zero. The generalized Morrey space $M_p^{w(\cdot)} \equiv M_p^{w(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ is defined as the set of all functions $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ with $\|f\|_{M_p^{w(\cdot)}} < \infty$, where

$$\|f\|_{M_p^{w(\cdot)}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \quad r>0} \left(w(r) \|f\|_{L_p(B(x,r))} \right).$$

The space $M_p^{w(\cdot)}$ coincides with the Morrey space M_p^λ if $w(r) = r^{-\lambda}$, where $0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$.

By $\Omega_{p\infty}$ we denote the set of all non-negative, measurable on $(0, \infty)$ functions, not equivalent to 0 and such that for some $t > 0$,

$$\|w(r) r^{\frac{n}{p}}\|_{L_\infty(0,t)} < \infty, \quad \|w(r)\|_{L_\infty(t,\infty)} < \infty.$$

The space $M_p^{w(\cdot)}$ is non-trivial if and only if $w \in \Omega_{p\infty}$ [1].

Next theorem is pre-compactness sets in term of uniform equi-continuity.

Theorem 1. Let $1 \le p < \infty$ and $w \in \Omega_{p\infty}$. Suppose that the set $S \subset M_p^{w(\cdot)}$ satisfies the following conditions:

$$\sup_{f \in S} \|f\|_{M_p^{w(\cdot)}} < \infty,$$

$$\lim_{u \to 0} \sup_{f \in S} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_{M_p^{w(\cdot)}} = 0,$$

$$\lim_{r \to \infty} \sup_{f \in S} \|f \chi_{^c B(0,r)}\|_{M_p^{w(\cdot)}} = 0.$$

Then S is a pre-compact set in $M_p^{w(\cdot)}$.

Here $u \to 0$ means that $|u|_\infty = \max\{|u|_1, |u|_2, ..., |u|_n\} \to 0$.

The theorem 2 about the pre-compactness sets in term of uniform equi-continuity averaging function.

Theorem 2. Let $1 \le p \le \infty$, $w \in \Omega_{p\infty}$, and $S \subset M_p^{w(\cdot)}$. If

$$\sup_{f \in S} \|f\|_{M_p^{w(\cdot)}} < \infty,$$

$$\lim_{R_1 \to 0^+} \sup_{f \in S} \left\| f \chi_{B(0,R_1)} \right\|_{M_p^{w(\cdot)}} = 0,$$

$$\lim_{\delta \to 0^+} \sup_{f \in S} \|A_\delta f - f\|_{L_p(B(0,R_2) \setminus B(0,R_1))} = 0,$$

$$\lim_{R_2 \to \infty} \sup_{f \in S} \left\| f \chi_{^c B(0,R_2)} \right\|_{M_p^{w(\cdot)}} = 0.$$

then the set S is precompact in $M_p^{w(\cdot)}$, where for any $\delta > 0$ and $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$,

$$(A_\delta f)(x) = \frac{1}{|B(x,\delta)|} \int\limits_{B(x,\delta)} f(y) dy.$$

Theorem 1 was proven in article [2], and theorem 2 was considered in article [3].

The theorems of precompactness of sets in generalized Morrey spaces are used in proving the compactness theorem of the commutator of the generalized Riesz potential. The generalized Riesz potential in the following form

$$I_{p(\cdot)}f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} p(|x-y|)f(y)dy.$$

under certain assumptions on the kernel p.

Funding: This work is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (grant no. AP14869887).

Keywords: commutator; Riesz potential; compactness; generalized Morrey space; generalized Riesz potential.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

References

[1] Burenkov, V.I. Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces. II. *Eurasian Math. J.* **2013**, *1*, 21–45.

[2] Bokayev, N.; Matin, D.; Akhazhanov, T.; Adilkhanov, A. Compactness of Commutators for Riesz Potential on Generalized Morrey Spaces. Mathematics, 2024, 1–16

[3] Bokayev, N.A., Burenkov, V.I., Matin, D.T. (2016). On precompactness of a set in general local and global Morrey-type spaces. Eurasian mathematical journal, 8 (3), 109–115.

Extensions of Nazarov-Podkorytov lemma for τ-measurable operators

Dostilek DAUITBEK[a], Kanat TULENOV[b]

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: [a]dauitbek@math.kz, [b]tulenov@math.kz

In this work, we study a comparison of norms in non-commutative spaces of τ-measurable operators associated with a semifinite von Neumann algebra. In particular, we obtain Nazarov-Podkorytov type lemma [1] and extend the main results in [1] to non-commutative settings. Moreover, we complete the range of the parameter p for $0 < p < 1$.

Funding: The authors were supported by the grant no. BR20281002 of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan.

Keywords: τ-measurable operator, semifinite von Neumann algebra, non-commutative L_p-space, non-commutative symmetric space, non-commutative Orlicz space.

2010 Mathematics Subject Classification: 46E30, 47B10, 46L51, 46L52, 44A15; Secondary 47L20, 47C15

References

[1] Nazarov F.L., Podkorytov A.N. Ball, Haagerup, and distribution functions, *Compl. Anal. Operators and Rel. Topics. Oper. Theory: Adv. and Appl.*, **113** (2000), 247–267.

Correctly solvable problems for the Laplace-Beltrami operator on a Riemannian sphere with cuts

Karlygash DOSMAGULOVA[1,2,a], Baltabek KANGUZHIN[1,b]

[1]*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan;*
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
[2]*Ghent University, Ghent, Belgium*
E-mail: [a]Dosmagulova.K@kaznu.kz, [b]kanbalta@mail.ru

An arbitrary finite number of points and curve are removed from three-dimensional Euclidean space on a two-dimensional sphere. We present well-posed boundary value problems for the corresponding Laplace-Beltrami operator on the punctured sphere. To formulate well-posed problems, some properties of Green's function for the Laplace-Beltrami operator on the two-dimensional sphere are previously studied in detail.

Let any function $\hat{h}(\theta,\varphi) \in W^2_{2,loc}(S^2_0)$ and the class of function can be introduced:

$$W^2_{2,U}(S^2_0) = \{\hat{h}(\theta,\varphi) \in W^2_{2,loc}(S^2_0):$$

$$\exists U_0(\hat{h}), U_1(\hat{h}), U_2(\hat{h}) \quad \text{finite values}\}.$$

Theorem 1. *Domain of the maximum operator*

$$D(B_{max}) = W^2_{2,U}(S^2_0),$$

where $W^2_2(S^2_0) \subset W^2_{2,U}(S^2_0)$.

Remark. The space $W^2_{2,U}(S^2_0)$ introduced above is wider than the domain $D(B_0)$ of the operator B_0.

Funding: The authors were supported by grant AP19678089 of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan.

Keywords: Laplace-Beltrami operator, two-dimensional punctured sphere, well-posed problems, Green's functions for elliptic equations

2010 Mathematics Subject Classification: 31A25, 32A20, 32A50, 35J08, 35J25

References

[1] R. Courant, D. Hilbert *Methods of Mathematical Physics*, Interscience publishers (1953).

[2] B.E. Kanguzhin Changes in a finite part of the spectrum of the Laplace operator under delta-like perturbations, *Differential Equations*, **55**:10 (2019), 1328–1335.

[3] B.E. Kanguzhin, A.A. Anijarov Well-posed problems for the Laplace operator in a punctured disk, *Math Notes*, **89**:6, (2019), 819—829.

[4] B.E. Kanguzhin, K.A. Dosmagulova Well-posed problems for the Laplace-Beltrami operator on a punctured two-dimensional sphere, *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Applications.* **7**:2, (2023), 428–440.

Blow-up and global existence of solutions to pseudo-parabolic equation related to the Baouendi-Grushin operator

Aishabibi DUKENBAYEVA

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan
E-mail: a.dukenbayeva@sdu.edu.kz

In this talk, we discuss blow-up and global existence of the positive solutions to the initial-boundary value problem of the nonlinear pseudo-parabolic equation related to the Baouendi-Grushin operator. The main approach is based on the Poincaré inequality from the recent work [1] for the Baouendi-Grushin vector fields and the concavity argument.

Funding: This research is funded by the Committee of Science of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP14972714).

Keywords: pseudo-parabolic equation, Baouendi-Grushin operator, global existence.

2020 Mathematics Subject Classification: 35K91, 35B44, 35A01

References

[1] D. Suragan, N. Yessirkegenov. Sharp remainder of the Poincaré inequality for Baouendi–Grushin vector fields, *Asian-European Journal of Mathematics*, 16(3): Art. No. 2350041, 2023.

On gradient Gibbs measures with 4-periodic boundary laws of a model of sos type on the Cayley tree of order two and three

Risolat ILYASOVA

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: ilyasova.risolat@mail.ru

Consider a model on Cayley tree $\Gamma^k = (V, \vec{L})$, where the spin takes values in the set of all integer numbers $\mathbb{Z}$. The set of all configurations is $\Omega := \mathbb{Z}^V$.

We consider the following hamiltonian as a hamiltonian of generalised SOS model:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y \rangle} \alpha(|\sigma_x - \sigma_y|)|\sigma_x - \sigma_y|, \tag{1}$$

where

$$\alpha(|m|) = \begin{cases} p_1, & \text{if } m \in 2\mathbb{Z} \\ p_2, & \text{if } m \in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases}, p_1, p_2 \in \mathbb{R}^+.$$

Note that if $p_1 = p_2 = 1$ then the considered model is called SOS model.

We call a vector $l \in (0, \infty)^{\mathbb{Z}}$ a spatially homogenous boundary law if there exists a constant $c > 0$ such that the consistency equation (see [6])

$$l(i) = c \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} Q(i,j) l(j) \right)^k$$

is satisfied for every $i \in \mathbb{Z}$.

For translation-invariant boundary law corresponding to the hamiltonian (1), the transfer operator Q reads

$$Q(i,j) = e^{-J\beta\alpha(|i-j|)|i-j|}, i, j \in \mathbb{Z}$$

where $\beta > 0$ is the inverse temperature and $J > 0$. Therefore, using this transfer operator and denoting $z(i) = z_i = \frac{l(i)}{l(0)}$, the spatially homogenous boundary law equation for our model now reads

$$z_i = \left(\frac{\theta^{\alpha(|i|)|i|} + \sum_{j \in Z_0} \theta^{\alpha(|i-j|)|i-j|} z_j}{1 + \sum_{j \in Z_0} \theta^{\alpha(|j|)|j|} z_j} \right)^k, \ i \in \mathbb{Z}_0 := \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{2}$$

Proposition 1. Let $\{z_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ be q-periodic sequence, i.e. $z_i = z_{i+q}$ for all $i \in \mathbb{Z}$. Then finding q-periodic solutions to the system (2) is equivalent to solving the system of equations (3).

$$\begin{cases} z_1 = \left(\frac{\theta^{\alpha(|1|)} + \sum_{j \in Z_0} \theta^{\alpha(|1-j|)|1-j|} z_j}{1 + \sum_{j \in Z_0} \theta^{\alpha(|j|)|j|} z_j} \right)^k; \\ z_2 = \left(\frac{\theta^{2\alpha(|2|)} + \sum_{j \in Z_0} \theta^{\alpha(|2-j|)|2-j|} z_j}{1 + \sum_{j \in Z_0} \theta^{\alpha(|j|)|j|} z_j} \right)^k; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ z_{q-1} = \left(\frac{\theta^{q\alpha(|q-1|)} + \sum_{j \in Z_0} \theta^{\alpha(|q-j-1|)|q-j|} z_j}{1 + \sum_{j \in Z_0} \theta^{\alpha(|j|)|j|} z_j} \right)^k. \end{cases} \tag{3}$$

We find periodic solutions (defined in [10]) to (2) which correspond to periodic boundary condition. Namely, for all $m \in \mathbb{Z}$ we consider the following sequence:

$$u_n = \begin{cases} 1, & \textit{if } n = 2m; \\ a, & \textit{if } n = 4m-1; \\ b, & \textit{if } n = 4m+1, \end{cases} \tag{4}$$

where a and b are some positive numbers.

By Proposition 1, finding solutions that are formed in (4) to (2) is equivalent to solving the following system of equations:

$$\begin{cases} a = \dfrac{... + \theta^{4p_1}a^k + \theta^{3p_2} + \theta^{2p_1}b^k + \theta^{p_2} + a^k + \theta^{p_2} + \theta^{2p_1}b^k + \theta^{3p_2} + \theta^{4p_1}a^k + ...}{... + \theta^{4p_1} + \theta^{3p_2}b^k + \theta^{2p_1} + \theta^{p_2}a^k + 1 + \theta^{p_2}b^k + \theta^{2p_1} + \theta^{3p_2}a^k + \theta^{4p_1} + ...}; \\ b = \dfrac{... + \theta^{4p_1}b^k + \theta^{3p_2} + \theta^{2p_1}a^k + \theta^{p_2} + b^k + \theta^{p_2} + \theta^{2p_1}a^k + \theta^{3p_2} + \theta^{4p_1}b^k + ...}{... + \theta^{4p_1} + \theta^{3p_2}b^k + \theta^{2p_1} + \theta^{p_2}a^k + 1 + \theta^{p_2}b^k + \theta^{2p_1} + \theta^{3p_2}a^k + \theta^{4p_1} + ...}. \end{cases} \tag{5}$$

We consider the case $\frac{1}{p_1} = p_2 = 2, k = 2$ and by solving the system of equations (5) we get the following main results:

Theorem 1. Let $\tau = J\beta + \frac{1}{J\beta}$. Then for the model (1) on the the Cayley tree of order k (k=1, 2) and for any value of the parameter τ there are precisely three GGMs associated with a 2-periodic boundary law.

Theorem 2. Let $\tau = J\beta + \frac{1}{J\beta}$, $\tau_{cr}^{(1)} \approx 3.22$. Then for Gradient Gibbs measures associated with a 4-periodic boundary law for the model (1) on the Cayley tree of order two the following statements hold:

1. If $\tau < \tau_{cr}^{(1)}$, then there are three GGMs associated with a 4-periodic boundary law.
2. $\tau = \tau_{cr}^{(1)}$, then there are five such GGMs.
3. If $\tau > \tau_{cr}^{(1)}$, then there are exactly seven such GGMs. In each case one of solutions is $a = b = 1$.

Theorem 3. Let $\tau = J\beta + \frac{1}{J\beta}$, $\tau_{cr}^{(2)} \approx 2.26$. Then for the parameter $\tau \in (2, \tau_{cr}^{(2)})$ there are not any Gradient Gibbs measures associated with a 4-periodic boundary law satisfying the equality $a \neq b$ for the model (1) on the Cayley tree of order three.

Funding: The authors were supported by the grant no. 0824/GF4 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: Generalized SOS model, specification, potential, hamiltonian, boundary law, spin values, Cayley tree, gradient Gibbs measure.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

References

[1] Biskup M., Kotecky R. Phase coexistence of gradient Gibbs states, Probab. Theory Related Fields 139(1-2), 1-39(2007).

[2] Bissacot R., Endo E.O., A.C.D. van Enter. Stability of the phase transition of critical-field Ising model on Cayley trees under inhomogeneous external fields, Stoch. Process. Appl. 127(12), (2017) 4126-4138.

[3] A.C.D. van Enter, Kulske C. Non-existence of random gradient Gibbs measures in continuous interface models in $d = 2$, Ann. Appl. Probab. 18 (2008) 109-119.

[4] Friedli S., Velenik Y. Statistical mechanics of lattice systems. A concrete mathematical introduction, Cambridge University Press, Cambridge, (2018).

[5] Georgii H.O. Gibbs Measures and Phase Transitions, Second edition. de Gruyter Studies in Mathematics, 9. Walter de Gruyter, Berlin, (2011).

[6] Henning F., Kulske C., A. Le Ny, Rozikov U.A. Gradient Gibbs measures for the SOS model with countable values on a Cayley tree, Electron. J. Probab. 24 (2019), Paper No. 104, 23 pp.

[7] Henning F., Kulske C. Existence of gradient Gibbs measures on regular trees which are not translation invariant, Ann. Appl. Probab. 33(4): (2023), 3010-3038.

[8] Henning F., Kulske C. Coexistence of localized Gibbs measures and delocalized gradient Gibbs measures on trees, Ann. Appl. Probab. 31(5): (2021), 2284-2310.

[9] Henning F. Gibbs measures and gradient Gibbs measures on regular trees, PhD Thesis, Ruhr University, (2021), p109.

[10] Haydarov F.H., Rozikov U.A. Gradient Gibbs measures of an SOS model on Cayley trees: 4-periodic boundary laws, Reports on Mathematical Physics, 90(1), (2022), 81-101.

[11] Kulske C., Schriever P. Gradient Gibbs measures and fuzzy transformations on trees, Markov Process. Relat. Fields 23, (2017), 553-590.

[12] Prasolov V.V. Polynomials, Springer, Berlin. (2004).

[13] Rozikov U.A. Gibbs measures on Cayley trees, World Sci. Publ. Singapore. (2013).

[14] Sheffield S. Random surfaces: Large deviations principles and gradient Gibbs measure classifications, Thesis (Ph.D.)-Stanford University, (2003), 205 pages.

[15] Zachary S. Countable state space Markov random fields and Markov chains on trees, Ann. Probab. 11(4) (1983), 894-903.

[16] Rozikov U.A. Mirror Symmetry of Height-Periodic Gradient Gibbs Measures of an SOS Model on Cayley Trees, J Stat Phys 188, 26 (2022).

[17] Haydarov F.H., Ilyasova R.A. Gradient Gibbs measures with periodic boundary laws of a generalised SOS model on a Cayley tree, J. Stat. Mech. Theory Exp. (2023), 123101, 12 pp.

Extended Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities with remainder terms

Madina KALAMAN

SDU University, Kaskelen, Kazakhstan
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan E-mail: madina.kalaman22@gmail.com

In this work, our primary focus will be on remainder terms for the extended Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequality from [1]. For this, we first obtain a weighted L^p-Hardy identity with weights for all complex-valued functions $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ that implies an improved Hardy inequality. As a byproduct, we also discuss improved versions of the classical Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequality and Heisenberg-Paul-Weyl type uncertainty principles. Moreover, in some cases we show optimality of constants.

This talk is based on the joint research with Nurgissa Yessirkegenov (SDU University, Kazakhstan).

Funding: This research is funded by the Committee of Science of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP14871691).

Keywords: Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequality, Hardy identity, anisotropic Euclidean space.

2010 Mathematics Subject Classification: 22E30, 43A80

References

[1] Ruzhansky M., Suragan D., Yessirkegenov N. Extended Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities, and remainders, stability, and superweights for Lp-weighted Hardy inequalities, *Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B*, **5**: (2018), 32–62.

On τ-bounded spaces

Sardor Yashinovich KARIMOV

Almalyk branch of TSTU named after Islam Karimov, Almalyk, Uzbekistan
E-mail: mr_man89@mail.ru

In this paper, we say about that one of properties of τ-bounded spaces. Throughout the paper τ is an infinite cardinal number.

Definition 1.[1] *A space X is called τ-bounded, if the closure in X of every subset of cardinality at most τ is compact.*

Direct verification shows that every closed subset of a τ-bounded space is τ -bounded.

Theorem 1.[2] *The finite sum $\sum X_k$ of nonempty spaces is compact if and only if all spaces X_k, $k = 1, 2, ...,$ are compact.*

The following example is an example of a τ-bounded space.

Example 1.[3] Let W be the set of all ordinal numbers less than or equal to the first uncountable ordinal number ω_1. The set W is well-ordered by the natural order $<$. Consider on W the topology generated by the base B consisting of all segments $(y; x] = \{z \in W : y \leq z \leq x\}$

where $y \leq z \leq \omega_1$, and the one-point set (0) is the order type of the empty set. One easily sees that W is a Hausdorff space.

We know that infinite sum of compact spaces is not compact.

We proved the following result.

Theorem 1. *The finite sum* $\sum X_k$ *of nonempty spaces is* τ *-bounded if and only if all spaces* X_k, $k = 1, 2, ...$, *are* τ*-bounded.*

Key words: τ-bounded spaces, finite sum.

2010 Mathematics Subject Classification: 54A05, 54D20

References

[1] Okunev O The minitightness of products, *Topology and its applications*, **1**:208 (2016), 10–16.

[2] Engelking R. *General topology*, Helderman, Berlin (1989).

[3] Mamadaliyev N.K., Karimov S.Y. ON τ-BOUNDED SPACES, in: *Problems of modern mathematics and its applications*, Bishkek (2021), 30–31.

Interpolation of anisotropic spaces

Aigerim KOPEZHANOVA

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan
E-mail: Kopezhanova@mail.ru

In this work we construct interpolation methods with parametric functions that can be used to study the interpolation properties of spaces with mixed metrics and obtain an interpolation theorem for Lebesgue and Lorentz spaces with mixed metrics

Let (A_i^0, A_i^1), $i = 1, 2$ be compatible pairs of Banach spaces. Let $A_{00} = (A_1^0, A_2^0)$, $A_{01} = (A_1^0, A_2^1)$, $A_{10} = (A_1^1, A_2^0)$, $A_{11} = (A_1^1, A_2^1)$ be spaces with mixed metric [1], [2].

Let $\sum A = A_{00} + A_{01} + A_{10} + A_{11}$. For $f \in \sum(A)$ and $t > 0$ we define the Petre functional $K(f, t)$ by formula

$$K(f,t) = K(f,t; A_{00}, A_{11})$$
$$= \inf_{f=f_{00}+f_{01}+f_{10}+f_{11}} \left(\|f_{00}\|_{A_{00}} + t_1\|f_{10}\|_{A_{10}} + t_2\|f_{01}\|_{A_{01}} + t_1t_2\|f_{11}\|_{A_{11}}\right),$$

where

$$\|f_{11}\|_{A_{11}} = \|\|f\|_{A_1^1}\|_{A_1^2}, \ \ \|f_{00}\|_{A_{00}} = \|\|f\|_{A_0^1}\|_{A_0^2},$$
$$\|f_{10}\|_{A_{10}} = \|\|f\|_{A_1^1}\|_{A_0^2}, \ \ \|f_{01}\|_{A_{01}} = \|\|f\|_{A_0^1}\|_{A_1^2}.$$

Let $1 \leq \bar{q} = (q_1, q_2) \leq \infty$, $\bar{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \geq 0$, $t = (t_1, t_2) > 0$.
The space $A_{\bar{\varphi},\bar{q}} = (A_{00}, A_{11})_{\bar{\varphi},\bar{q}}$ are set of all elemets for which the following norm is finite

$$\|f\|_{A_{\bar{\varphi},\bar{q}}} = \left(\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{K(f,t_1,t_2;A_{00},A_{11})}{\varphi_1(t)\varphi_2(t_2)}\right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{q_2}}.$$

We define anisotropic Lorentz spaces as follows:

$$\Lambda_{\bar{q}}(\bar{\varphi}) := \left\{ f: \ \left(\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \left(f^{*_1*_2}(t_1,t_2)\varphi_1(t_1)\varphi_2(t_2)\right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{q_2}} < \infty \right\},$$

where $f^{*_1*_2} = f^{*_1*_2}(t_1, t_2)$ is the nonincreasing permutation of a function f [1], [2]. The paper [3] studies one-dimensional generalized Lorentz spaces.

If $\bar{q} < \infty$, then

$$\|f\|_{\Lambda_{\bar{q}}(\bar{\varphi})} = \left(\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} (f^{*_1*_2}(t_1,t_2)\varphi_1(t_1)\varphi_2(t_2))^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}}.$$

If $\bar{q} = \infty$, then

$$\|f\|_{\Lambda_\infty(\bar{\varphi})} = \sup_{t_2>0} \sup_{t_1>0} f^{*_1*_2}(t_1,t_2)\varphi_1(t_1)\varphi_2(t_2).$$

Let $\delta > 0$ and $\varphi(t)$ be nonnegative function on $[0,+\infty)$. Define a function class C_δ :

$$C_\delta = \big\{ \varphi(t) : \quad \varphi(t)t^{-\delta} \text{ is an increasing function and}$$

$$\varphi(t)t^{-1+\delta} \text{ is a decreasing function} \big\}.$$

The class C is defined as follows:

$$C = \bigcup_{\delta>0} C_\delta.$$

Theorem 1. *Let $0 < \bar{p}_0 = (p_1^0, p_2^0) < \bar{p}_1 = (p_1^1, p_2^1) < \infty$, $1 \le \bar{q} = (q_1, q_2) \le \infty$, $\gamma_i = \frac{1}{p_i^0} - \frac{1}{p_i^1}$, $i = 1,2$, $\varphi_1, \varphi_2 \in C$. Then the following inequality is true*

$$(L_{\bar{p}_0}, L_{\bar{p}_1})_{\bar{\varphi},\bar{q}} = \Lambda^{\bar{q}}\left(\bar{\psi}\right),$$

where $\bar{\psi}(t_1,t_2) = \left(\frac{t_1^{\frac{1}{p_1^0}}}{\varphi_1(t_1^{\gamma_1})}, \frac{t_2^{\frac{1}{p_2^0}}}{\varphi_2(t_2^{\gamma_2})} \right)$

Funding: The authors were supported by the grant no. AP14870361 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: Interpolation theorem, parametric function, Lebesgue spaces, Lorentz spaces.

2010 Mathematics Subject Classification: 46B70, 46E30

References

[1] Nursultanov E.D. On the coefficients of multiple Fourier series from Lp-spaces, *Izv. Math.*, **64**:1 (2000), 95–122.

[2] Nursultanov E.D. Interpolation theorems for anisotropic spaces and their applications, *Doklady Akademii Nauk*, **394**:1 (2004), 22–25.

[3] Persson L.-E. Interpolation with a parameter function, *Math. Scand.*, **59**:2 (1986), 199–222.

Hardy-Steklov operators on Hausdorff topological spaces with measures

Kairat MYNBAEV

Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan
E-mail: k_mynbayev@ise.ac

Let Ω be an open set in a Hausdorff topological space X with σ-finite Borel measures μ, ν. The measures are defined on the same σ-algebra $\mathfrak{M}$ that contains Borel-measurable sets. The domains $\Omega(t) \subset \Omega$ are assumed to be parameterized by $t \ge 0$ and satisfy monotonicity: for $t_1 < t_2$, $\Omega(t_1)$ is a proper subset of $\Omega(t_2)$. We assume that $\Omega(0) = \cap_{t>0}\Omega(t) = \varnothing$, $\mu\left(\Omega \backslash \cup_{t>0} \Omega(t)\right) = 0$. Denote $\omega(t) = \overline{\Omega(t)} \cap \overline{(\Omega \backslash \Omega(t))}$ the boundary of $\Omega(t)$ in the relative topology. We require the boundaries to be disjoint and cover almost all Ω: $\omega(t_1) \cap \omega(t_2) = \varnothing$, $t_1 \ne t_2$, $\mu(\Omega \backslash \cup_{t>0} \omega(t)) = 0$. This implies that for μ-almost each $y \in \Omega$ there exists a unique $\tau(y) > 0$ such that $y \in \omega(\tau(y))$. On the set $\Omega_0 \subset \Omega$ of those y for which $\tau(y)$ is not defined we can put $\tau(\Omega_0) = \emptyset$. Passing to a different parametrization, if necessary, we can assume that $\mu\left(\Omega\backslash\cup_{t\le N}\omega(t)\right)>0$ for any $N<\infty$.

We also assume a condition on the measure μ:

a) We suppose that $\mu\left(\Omega\left(t\right)\right)<\infty$ for all $t>0$ and with some $c>0$ we have for all $0<s<t<\infty$ that $\mu\left(\Omega[s,t]\right)\le c\mu\left(\Omega[a\left(s\right),a\left(t\right)]\right)$ and $\mu\left(\Omega[s,t]\right)\le c\mu\left(\Omega[b\left(s\right),b\left(t\right)]\right)$.

b) Let Ω be of a special type, namely: suppose Σ is all or a part of the unit sphere $\{x\in R^n:|x|=1\}$ and let $\Omega=\{x\in R^n:x/\left|x\right|\in\Sigma,\ 0\acute{<}\left|x\right|<\infty\}$ be a cone provided with Lebesgue measure. In this case, we assume that a,b are differentiable.

For a set Δ on R define a set $\Omega\left[\Delta\right]=\{y\in\Omega:\tau\left(y\right)\in\Delta\}$. We consider a multi-dimensional version of the Hardy-Steklov inequality

$$\left[\int_\Omega\left(\int_{\Omega[a(\tau(x)),b(\tau(x))]}fd\nu\right)^q u(x)d\mu(x)\right]^{1/q}\le C\left(\int_\Omega f^p v d\nu\right)^{1/p}. \tag{1}$$

where the functions a,b are non-negative, increasing, continuous and satisfy

$$a\left(0\right)=b\left(0\right)=0,\ a\left(x\right)<b\left(x\right)\ \text{for}\ x\in\left(0,\infty\right),\ a\left(\infty\right)=b\left(\infty\right)=\infty.$$

In the one-dimensional case the first result was obtained in [1]. Then [2] solved the problem under the conditions on a,b imposed here. [3] obtained bounds for the best constant C in somewhat simplified terms. Our contribution is a multidimensional generalization. We employ the results for the Hardy operator from [4] and about ordered cores from [5].

Because of the lack of space, of the two possible cases, $p\le q$ and $q<p$, we state our result only for the former case. For segments $\Delta_1,\Delta_2\subseteq[0,\infty)$ denote

$$\Psi(\Delta_1,\Delta_2)=\left(\int_{\Omega[\Delta_1]}ud\mu\right)^{1/q}\left(\int_{\Omega[\Delta_2]}v^{-p'/p}d\nu\right)^{1/p'},\ p\le q$$

Define

$$\begin{aligned} A\left(x\right) &= \sup_{\{t\in(0,\infty):\ a(\tau(x))\le b(t)\le b(\tau(x))\}}\Psi([t,\tau\left(x\right)],[a\left(\tau\left(x\right)\right),b\left(t\right)]) \\ K &= \sup_{x\in\Omega}A\left(x\right). \end{aligned}$$

Denote also

$$l_i=\limsup_{\tau(x)\to i}A\left(x\right),\ \text{for}\ i=0\ \text{or}\ i=\infty,\ l=\max\left\{l_0,l_\infty\right\}.$$

$\|T\|_{ess}=\inf\|T-S\|$, where S runs over the set of all finite-rank operators, denotes the essential norm of T.

Theorem. *If $1<p\le q<\infty$ then for the best constant in (1) we have $C\asymp K$.* Further, $\|T\|_{ess}\asymp l$. In particular, T is compact if and only if $l=0$.

Funding: The author was supported by the grant no. AP19676673 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: Hardy inequality, Hardy-Steklov operator, Hausdorff topological space, ordered core.

2010 Mathematics Subject Classification: 26D15, 47G10, 26D10

References

[1] Batuev E.N., Stepanov V.D. Weighted inequalities of Hardy type, *Siberian Math. J.* **30** (1989), 8–16.

[2] Heinig H.P., Sinnamon G. Mapping properties of integral averaging operators, *Stud. Math.* **129** (1998), 157–177.

[3] Stepanov V.D., Ushakova E.P. On integral operators with variable limits of integration, *Proc. Steklov Inst. Math.* **232** (2001), 290–309.

[4] Mynbaev K. Three weight Hardy inequality on measure topological spaces, *Eurasian Math. J.* **14** (2023), 58–78.

[5] Sinnamon G. Hardy inequalities in normal form, *Trans. Amer. Math. Soc.* **375** (2022), 961–995.

Estimates of M-term approximations of functions of the class $W^{\overline{r}}_{q,\tau}$ in the Lorentz space

A.Kh. MYRZAGALIYEVA

AITU, Astana, Kazakhstan
E-mail: aigul.myrzagalieva@astanait.edu.com

Let $\mathbb{N}$ be a set of natural numbers and $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Let $\mathbb{R}^m$ be m-dimensional Euclidean space of points $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)$ with real coordinates and $\mathbb{Z}^m$ be a set of points $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$ with integer coordinates; $\mathbb{T}^m = [0, 2\pi)^m$ and $\mathbb{I}^m = [0,1)^m$ be m-dimensional cubes.

$L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ denotes the Lorentz space of all real-valued Lebesgue measurable functions f, which have a 2π-period in each variable and for which the quantity is finite

$$\|f\|_{p,\tau} = \left\{ \frac{\tau}{p} \int\limits_0^1 \left(f^*(t)\right)^\tau t^{\frac{\tau}{p}-1} dt \right\}^{\frac{1}{\tau}}, \ 1 < p < \infty, 1 \leqslant \tau < \infty,$$

where $f^*(t)$ is a nonincreasing rearrangement of the function $|f(2\pi\overline{x})|$, $\overline{x} \in \mathbb{I}^m$ (see [1], P. 213–216).

Let us introduce some notation. Let $a_{\overline{n}}(f)$ be Fourier coefficients of a function $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ according to the system $\{e^{i\langle \overline{n}, \overline{x}\rangle}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m}$ and $\langle \overline{y}, \overline{x}\rangle = \sum\limits_{j=1}^m y_j x_j$;

$$\delta_{\overline{s}}(f, \overline{x}) = \sum_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})} a_{\overline{n}}(f)\, e^{i\langle \overline{n}, \overline{x}\rangle},$$

where $\rho(\overline{s}) = \left\{ \overline{k} = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m \colon [2^{s_j-1}] \le |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, \dots, m \right\}$, $[a]$ is an integer part of the number a, $\overline{s} = (s_1, \dots, s_m)$, $s_j = 0, 1, 2, \dots$.

For a given vector $\overline{r} = (r_1, \dots, r_m) > \overline{0} = (0, \dots, 0)$, we set $\overline{\gamma} = \frac{\overline{r}}{r_1}$ and $Q_n^{(\overline{\gamma})} = \cup_{\langle \overline{s}, \overline{\gamma}\rangle < n} \rho(\overline{s})$, $S_n^{(\overline{\gamma})}(f, \overline{x}) = \sum_{\overline{k}\in Q_n^{(\overline{\gamma})}} a_{\overline{k}}(f) e^{i\langle \overline{k}, \overline{x}\rangle}$, where $S_n^{(\overline{\gamma})}(f, \overline{x})$ is a partial sum of the Fourier series of a function f.

Consider the functional class

$$W^{\overline{r}}_{p,\tau} = \{f \colon f = \varphi \star F_{\overline{r}}, \ \|\varphi\|_{p,\tau} \leqslant 1\},$$

where $1 < p < \infty$, $1 \le \tau < \infty$,

$$(\varphi \star F_{\overline{r}})(\overline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{T}^m} \varphi(\overline{x} - \overline{u}) F_{\overline{r}})(\overline{u}) d\overline{u}.$$

The value $e_M(f)_{p,\tau} = \inf\limits_{\{\bar{k}^{(j)}\}_{j=1}^M, \{b_j\}_{j=1}^M} \left\| f - \sum\limits_{j=1}^M b_j e^{\langle i\bar{k}^{(j)}, \bar{x}\rangle} \right\|_{p,\tau}$ is called the best M–term trigonometric approximation of a function $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, $M \in \mathbb{N}$, $\bar{k}^{(j)} \in \mathbb{Z}^m$.

For a functional class $F \subset L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, we set $e_M(F)_{p,\tau} = \sup_{f\in F} e_M(f)_{p,\tau}$. We write $e_M(F)_p$ instead of $e_M(F)_{p,\tau}$ in the case $\tau = p$.

Theorem 1. *Let $0 < r_1 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \le \ldots r_m$, $1 < q \leqslant p \le 2$, $1 < \tau_1, \tau_2 < \infty$.*

1. If $r_1 > \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$ and $1 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant 2$, then

$$e_M(W^{\overline{r}}_{q,\tau_1})_{p,\tau_2} \asymp M^{-(r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (\log_2 M)^{(\nu-1)(r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1})}, \ M > 1.$$

2. If $\frac{1}{q} - \frac{1}{p} < r_1 < \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$ *and* $1 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leq 2$, *then*

$$e_M(W^{\overline{r}}_{q,\tau_1})_{p,\tau_2} \asymp M^{-(r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

3. If $r_1 = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$ *and* $1 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant 2$, *then*

$$e_M(W^{\overline{r}}_{q,\tau_1})_{p,\tau_2} \asymp M^{-(\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2})}(\log_2 \log_2 M)^{\frac{1}{\tau_1}}, \ M > 2.$$

4. If $\frac{1}{q} - \frac{1}{p} < r_1 < \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}$ *and* $1 < \tau_2 \leqslant 2 < \tau_1 < \infty$, *then*

$$e_M(W^{\overline{r}}_{q,\tau_1})_{p,\tau_2} \asymp M^{-(r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(\log_2 M)^{(\nu-1)(r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})+(m-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1})}.$$

Remark. For $\tau_1 = q$ and $\tau_2 = p$, Theorem 1 implies the results of E.S. Belinsky [2, Theorem 2.1] and V.N. Temlyakov [3, Theorem 2.2], [4, Theorem 2.7, Theorem 2.8], [5, Theorem 1.3, Theorem 1.4].

Key words: M-term approximation, Lorentz space, Sobolev class, trigonometric polynomial.

2010 Mathematics Subject Classification: 41A10, 41A25, 42A05.

Bibliography

[1] Stein E.M., Weiss G. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Univ. Press, Princeton (1971).

[2] Belinsky E. S. Approximation by a 'floating' system of exponentials on the classes of smooth periodic functions with bounded mixed derivative, *Research on the theory of functions of many real variables Yaroslavl' State University* (1988), 16-33.

[3] Temlyakov V.N. Approximation of functions with bounded mixed derivative, *Tr. Mat. Inst. Steklov.*, **178** (1986), 3–112.

[4] Temlyakov V.N. Constructive sparse trigonometric approximation and other problems for functions with mixed smoothness, *Sbornic Mathematics*, **206**:11 (2015), 131–160.

[5] Temlyakov V.N. Constructive sparse trigonometric approximation for functions with small mixed smoothness, *Constr. Approx.*, **45**:3 (2017), 467–495.

On the best constants for integral Hardy inequalities with any homogeneous-quasi norm

Imangali ORYNGALIYEV

SDU University, Kaskelen, Kazakhstan
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakhstan
E-mail: imangali.oryngaliyev@gmail.com

It is well-known that within the L^p spaces with $0 < p < 1$, the Hardy inequality does not hold for arbitrary non-negative functions, yet it remains valid for non-negative monotone functions. In [1] Burenkov found sharp constants in integral Hardy-type inequalities for non-negative monotone functions when $0 < p < 1$.

In [2] it was introduced Hardy inequalities within metric measure spaces possessing polar decompositions when $p = 1$ and $1 \leq q < \infty$. The authors in [3] obtained weighted integral Hardy inequalities and conjugate integral Hardy inequalities on homogeneous Lie groups for any homogeneous quasi-norm with sharp constants within the range $1 < p \leq q < \infty$.

In this talk, we explore Hardy-type integral inequalities for $0 < p < 1$, incorporating a second parameter $q > 0$ with sharp constants. These inequalities represent novel generalizations of those obtained in [1].

This talk is based on the joint research with Nurgissa Yessirkegenov (SDU University and Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakhstan).

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP14871691).

Keywords: Integral Hardy-type inequality, sharp constant, homogeneous Lie groups.

2020 Mathematics Subject Classification: 22E30, 26D15

References

[1] V. I. Burenkov. On the best constant in Hardy's inequality with $0 < p < 1$ for monotone functions, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 194: 59-63, 1993.

[2] M. Ruzhansky, A. Shriwastawa, B. Tiwari. Hardy inequalities on metric measure spaces, IV: The case p=1, *Forum Mathematicum*, 2024. DOI: 10.1515/forum-2023-0319

[3] M. Ruzhansky, A. Shriwastawa, B. Tiwari. A note on best constants for weighted integral Hardy inequalities on homogeneous groups, *Results in Mathematics*, 79(1), 29, 2024.

Spectrum of the Hilbert transform on Lorentz spaces $L_{p,q}$

B. OZBEKBAY[a], K. TULENOV[b], M. AKHYMBEK[c]

Institute of Mathematics and Mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: [a]ozbekbay.b00@gmail.com, [b]tulenov@math.kz, [c], akhymbek@math.kz

Let f be a complex-valued locally integrable function on Ω, where Ω is either $\mathbb{R}_+$ or $\mathbb{R}$. The Hilbert transform of the function f on Ω is defined by the following singular integral

$$(Hf)(t) \overset{\text{p.v.}}{:=} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Omega} \frac{f(x)}{t-x} dx$$

where p.v. means the Cauchy principal value of the integral.

DEFINITION.[1. Definition 4.1] Let $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$. Then the Lorentz $L_{p,q}(\mathbb{R}_+)$ space is the set of all Lebesgue measurable functions f such that the functional $\|f\|_{L_{p,q}} < \infty$, where

$$\|f\|_{L_{p,q}} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} & \text{if } 1 < p < \infty,\ 1 \leq q < \infty, \\ \sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) & \text{if } 0 < p \leq \infty,\ q = \infty. \end{cases}$$

The Lorentz space $L_{p,q}$ is the generalization of the Lebesgue space L_p. If we take $p = q$, $L_{p,q}$ coincides with L_p and

$$\|f\|_{L_{p,p}} = \|f\|_{L_p}, \quad (f \in L_p).$$

REMARK. The Hilbert transform is bounded from $L_{p,q}(\Omega)$ to $L_{p,q}(\Omega)$ [2].

Theorem 1. *Let $p \in (1, \infty)$, $q \in (1, \infty]$. For the Hilbert transform H on $L_{p,q}(\mathbb{R}_+)$ we have*

$$\sigma(H) = \left\{ \lambda : \lambda = \pm 1 \quad or \quad \frac{1}{2\pi} \arg \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} = \frac{1}{p} \right\}$$

and, for $\lambda \in \rho(H)$, one can define its resolvent $R(\lambda, S_{p,q})$ as follows

$$R(\lambda, H)f(x) = (\lambda^2 - 1)^{-1} \left\{ \lambda f(x) + \frac{1}{\pi i} \int\limits_0^\infty \left(\frac{y}{x} \right)^{w(\lambda)} (y-x)^{-1} f(y) dy \right\},$$

where $w(\lambda) = \dfrac{1}{2\pi i} \log \dfrac{\lambda + 1}{\lambda - 1}$ is a holomorphic function and $w(\infty) = 0$.

Theorem 2. *Let $L_{p,q}(\mathbb{R})$ be a Lorentz space over $\mathbb{R}$ with $1 < p < \infty$ and $1 \leq q \leq \infty$ and let H be the Hilbert transform on $L_{p,q}(\mathbb{R})$. Then,*

$$\sigma(H) = \sigma_p(H) = \{\pm 1\},$$

and for $\lambda \in \rho(\lambda) = \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ *we have*

$$R(\lambda, H) = \frac{1}{2}(\lambda+1)^{-1}(I-H) + \frac{1}{2}(\lambda-1)^{-1}(I+H).$$

Key words: Hilbert transform, the spectrum, a resolvent, the Lorentz spaces $L_{p,q}$, Banach algebra.

2010 Mathematics Subject Classification: 47A10, 47A75, 46E30

References

[1] Bennett C., Sharpley R. C. *Interpolation of operators*, Academic press, (1988).

[2] Boyd, D. W. *The Hilbert transform on rearrangement-invariant spaces*, Canadian Journal of Mathematics, 19 (1967), pp. 599–617.

Ground states for the Potts-SOS model with an external field on the Cayley tree of order two

Muzaffar RAHMATULLAEV[1,2,3,a], Muhayyo RASULOVA[1,3,b]

[1]*Institute of mathematics named after V. I. Romanovsky, Tashkent, Uzbekistan*
[2]*New Uzbekistan University, Tashkent, Uzbekistan*
[3]*Namangan state university, Namangan, Uzbekistan*
E-mail: [a]*mrahmatullaev@rambler.ru*, [b]*m_rasulova_a@rambler.ru*

The Cayley tree $\Gamma^k = (V, L)$ (see, e.g., [1]) of order $k \geq 1$ is an infinite tree, i.e., a graph without cycles, from each vertex of which exactly $k+1$ edges issue. Consider model where the spin takes values in the set $\Phi = \{0, 1, 2\}$. For $A \subseteq V$ a spin *configuration* σ_A on A is defined as a function $x \in A \mapsto \sigma_A(x) \in \Phi$; the set of all configurations coincides with $\Omega_A = \Phi^A$. Denote $\Omega = \Omega_V$ and $\sigma = \sigma_V$.

The Potts-SOS model with an external field is defined by the following Hamiltonian

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \mid \sigma(x) - \sigma(y) \mid - J_p \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + \alpha \sum_{x \in V} \sigma(x), \tag{1}$$

where $J, J_p, \alpha \in \mathbb{R}$, α is an external field and $\sigma \in \Omega$.

Remark. Recall that model (1) coincides with the Potts-SOS model under the condition $\alpha = 0$ (see, e.g., [2]).

Let M be the set of all unit balls with vertices in V and $S_1(x)$ be the set of all nearest neighboring vertices of $x \in V$.

We call the restriction of a configuration σ to the ball $b \in M$ a *bounded configuration* σ_b.

The energy of configuration σ_b on b is defined by the formula

$$U(\sigma_b) = -\frac{1}{2} \sum_{x \in S_1(c_b)} \big(J \mid \sigma(x) - \sigma(c_b) \mid + J_p \delta_{\sigma(x)\sigma(c_b)} \big) + \frac{\alpha}{k+2} \sum_{x \in b} \sigma(x).$$

where $J = (J, J_p, \alpha) \in \mathbb{R}^3$ and c_b is the center of the unit ball b.

The Hamiltonian (1) can be written as

$$H(\sigma) = \sum_{b \in M} U(\sigma_b).$$

Lemma. *For each configuration* φ_b*, we have the following*

$$U(\varphi_b) \in \{U_{i,n}^{(j)} : i = 0, 1, 2, ..., k+1, n = 0, ..., k+1-i, j = 0, 1, 2\},$$

where

$$U_{i,n}^{(j)}=\begin{cases} -\frac{J}{2}(k+1+n-i)-\frac{J_p}{2}i+\frac{\alpha}{k+2}(k+1+n-i),\ if\ \ j=0,\\ -\frac{J}{2}(k+1-i)-\frac{J_p}{2}i+\frac{\alpha}{k+2}(2n+i+1),\ if\ \ j=1,\\ -\frac{J}{2}(k+1+n-i)-\frac{J_p}{2}i+\frac{\alpha}{k+2}(k+3-n+i),\ if\ \ j=2.\end{cases}$$

Definition. A configuration φ is called a ground state for the Hamiltonian (1), if

$$U(\varphi_b)=\min\{U_{i,n}^{(j)}:i=0,1,2,...,k+1,n=0,...,k+1-i,j=0,1,2\}$$

for any $b\in M$.

We denote $A_{\xi,\eta}^{(\zeta)}=\{(J,J_p,\alpha)\in\mathbb{R}^3:U_{\xi,\eta}^{(\zeta)}=\min\{U_{i,n}^{(j)}:i=0,1,2,...,k+1,n=0,...,k+1-i,j=0,1,2\}\}$.

Let $k=2$. Calculations show that:

$$A_{3,0}^{(0)}=\{(J,J_p,\alpha)\in\mathbb{R}^3:J\le J_p+\frac{1}{6}\alpha,J_p\le0,\alpha\ge0\}\cup$$

$$\{(J,J_p,\alpha)\in\mathbb{R}^3:J\le\frac{1}{2}J_p+\frac{1}{6}\alpha,J_p\ge0,\alpha\ge0\},$$

$$A_{3,0}^{(2)}=\{(J,J_p,\alpha)\in\mathbb{R}^3:J\le J_p-\frac{1}{6}\alpha,J_p\le0,\alpha\le0\}\cup$$

$$\{(J,J_p,\alpha)\in\mathbb{R}^3:J\le\frac{1}{2}J_p-\frac{1}{6}\alpha,J_p\ge0,\alpha\le0\}.$$

We let $GS(H)$ denote the set of all ground states of the Hamiltonian (1).

Theorem. *Let $k=2$ and $\alpha\neq0$. Then the following assertions hold*
i) if $(J,J_p,\alpha)\in A_{3,0}^{(j)}$, then $GS(H)=\{\sigma(x)=j,\forall x\in V\},j\in\{0,2\}$;
ii) if $(J,J_p,\alpha)\in\mathbb{R}^3\setminus(A_{3,0}^{(0)}\cup A_{3,0}^{(2)})$, then $GS(H)=\emptyset$.

Keywords: Cayley tree, Potts-SOS model, external field, ground state.

2010 Mathematics Subject Classification: 82B05, 82B20, 60K35

References

[1] Rozikov, U.A. *Gibbs Measures in Biology and Physics: The Potts Model*, World Scientific, Singapore (2023).

[2] Rahmatullaev, M.M., Rasulova, M.A. Extremality of translation-invariant Gibbs measures for the Potts-SOS model on the Cayley tree, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, **073201** (2021).

Cylindrical weighted Sobolev type inequalities and identities

Yerkin SHAIMERDENOV

Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
Ghent University, Ghent, Belgium
E-mail: yerkin.shaimerdenov@sdu.edu.kz

Let us recall the cylindrical extended weighted Hardy type inequality [2]: Let $x=(x',x'')\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^{n-N}, 2\le N\le n$ and $1\le p<N$. Then we have

$$\left\|\frac{f}{|x'|^{\frac{\alpha}{p}}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\le\frac{p}{N-\alpha}\left\|\frac{x'\cdot\nabla_N f}{|x'|^{\frac{\alpha}{p}}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},\tag{7}$$

where $|x'|$ is the Euclidean norm on $\mathbb{R}^N$ and ∇_N is the standard gradient on R^N. The constant $\frac{p}{N-\alpha}$ is optimal for all $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{x'=0\})$. When $\alpha=0$ inequality (7) implies the cylindrical extension of the Sobolev type inequality in [3], when $\alpha = p$ and the Cauchy-Schwarz inequality is used on the right-hand side it implies the Cylindrical Hardy inequality in [1].

In this talk, we demostrate the critical case $\alpha = N$ of the inequality (7) with an optimal constant. Moreover, we show identities and higher order versions. Interestingly, higher order versions generate Stirling numbers of the second kind.

This talk is based on the joint research with Nurgissa Yessirkegenov (SDU University and Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakhstan).

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP14871691).

Keywords: Cylindrical extension, Critical Hardy inequality, Stirling number.

2020 Mathematics Subject Classification: 22E30, 11B73, 26D10

References

[1] Badiale M., Tarantello G. A Sobolev–Hardy inequality with applications to a nonlinear elliptic equation arising in astrophysics, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **163** (2002), 259–293.

[2] Kalaman M. Functional inequalities on Lie groups and applications., *Master's thesis, SDU University,* (2023).

[3] Ozawa T., Sasaki H. Inequalities associated with dilations, *Commun. Contemp. Math.*, **11(2)** (2009), 265—277.

$L^p - L^q$ Fourier multipliers on non-commutative torus

R.A. TASTANKUL

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
E-mail: ramazan.tastankul@mail.ru,

In this work we consider $L^p - L^q$ Fourier multipliers on non-commutative torus. Let $\mathbb{T}^d_\theta$ be the non-commutative torus (quantum torus or quantum tori), where $d \geq 2$ and $\theta = \{\theta_{i,j}\}$ skew symmetric(anti-symmetric) $d \times d$-matrix, and let $m \in \mathbb{Z}^d$. Let $L^p(\mathbb{T}^d_\theta), 1 \leq p < \infty$ be a non-commutative L^p spaces endowed with following L^p-norm $\|f\|_p = (\tau(|f|^p))^{1/p}$, where τ is a normal semifinite faithful tracial state on $\mathbb{T}^d_\theta$, and $|f| = (f^*f)^{1/2}$. Let $l^{p,q}(\mathbb{Z}^d), 1 \leq p, q \leq \infty$ be a sequence Lorentz space. Let $\{\tilde{e}^\theta_m\}_{m\in\mathbb{Z}^d}$ be a system of orthonormal unital operators on $\mathbb{T}^d_\theta$. Then for $f \in L^1(\mathbb{T}^d_\theta)$ we can define the formal Fourier series by the next formula

$$f \sim \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(m)\tilde{e}^\theta_m \tag{1}$$

where $\widehat{f}(m) = \tau(f(\tilde{e}^\theta_m)^*)$. Let $\varphi = \{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{Z}^d} \subset \mathbb{C}$. We define Fourier multiplier T_φ on f with the symbol ϕ by

$$\widehat{T_\varphi f}(m) = \varphi_m \widehat{f}(m), \forall m \in \mathbb{Z}^d. \tag{2}$$

φ is called bounded L^p Fourier multiplier (resp. $L^p - L^q$ Fourier multiplier) on the non-commutative torus $\mathbb{T}^d_\theta$ if T_φ extends to a bounded map on $L^p(\mathbb{T}^d_\theta)$ (resp. from $L^p(\mathbb{T}^d_\theta)$ to $L^q(\mathbb{T}^d_\theta)$) [1,2].

Theorem 1. Let $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$. Then for $\varphi \in l^{r,\infty}(\mathbb{Z}^d)$, where $1/r = 1/q - 1/p$, T_φ is an $L^p - L^q$ Fourier multiplier and holds the following

$$\|T_\varphi f\|_{L^p(\mathbb{T}^d_\theta)\to L^q(\mathbb{T}^d_\theta)} \lesssim_{p,q} \|\varphi\|_{l^{r,\infty}(\mathbb{Z}^d)}.$$

Keywords: non-commutative torus, non-commutative L^p spaces, Fourier series, Fourier multiplier.

2010 Mathematics Subject Classification: 46L52, 47L25, 42B05, 42A16, 42B15.

References

[1] Chen Z., Xu Q., Yin Z., Harmonic Analysis on Quantum Tori., *Commun. Math. Phys.* , **322** (2013), 755-805

[2] Ruzhansky M., Shaimardan S., Tulenov K., Hörmander type Fourier multiplier theorem and Nikolskii inequality on quantum tori, and applications, *arXiv:2402.17353 [math.FA]*, (2024), 45p.

On Fourier multipliers on quantum torus and Euclidean spaces

K.S. TULENOV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: tulenov@math.kz

In this work, we will discuss Fourier multipliers and their boundedness, as well as their complete boundedness properties on quantum torus and Euclidean spaces. We also present some applications of these results. These are some parts of our joint papers with M. Ruzhansky and S. Shaimardan and with F. Sukochev and D. Zanin.

Funding: The authors were supported by the grant no. AP14869301 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: Quantum torus and Euclidean space, Hörmander Fourier multiplier, Hausdorff-Young inequality, $L^p - L^q$-estimate, complete boundedness

2010 Mathematics Subject Classification: 46L51, 46L52, 58B34, 47L25, 11M55, 46E35, 42B05, 43A50, 42A16, 42B15

Sharp remainder of the improved Hardy inequality related to the Baouendi-Grushin operator

Nurgissa YESSIRKEGENOV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan
E-mail: nurgissa.yessirkegenov@gmail.com

In [1] Garofalo introduced the following Hardy inequality related to the Baouendi-Grushin operator:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla_x f|^2 + |x|^{2\gamma} |\nabla_y f|^2\right) dz \geq \left(\frac{Q-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|x|^{2\gamma}}{|x|^{2+2\gamma} + (1+\gamma)^2 |y|^2}\right) |f|^2 dz, \qquad (1)$$

where $z = (x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_k) = (x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ with $n = m + k,\ m, k \geq 1,\ \gamma \geq 0,\ Q = m + (1+\gamma)k$ and $f \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \backslash \{(0,0)\}\right)$. Here, $\nabla_x f$ and $\nabla_y f$ are the gradients of f in the variables x and y, respectively.

In this talk, we discuss an improvement of this result with a sharp remainder term and with more general weights related to the Baouendi-Grushin operator involving radial derivatives in some of the variables. Moreover, we show their applications in magnetic Hardy inequalities related to the Baouendi-Grushin operator with Aharonov-Bohm type magnetic field.

This talk is based on the joint research with Ari Laptev (Imperial College London, UK) and Michael Ruzhansky (Ghent University, Belgium) [2]-[3].

Funding: This research is funded by the Committee of Science of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP14871691).

Keywords: Hardy inequalities, Baouendi-Grushin operator, Aharonov-Bohm magnetic field .

2020 Mathematics Subject Classification: 26D10, 35P15

References

[1] N. Garofalo. Unique continuation for a class of elliptic operators which degenerate on a manifold of arbitrary codimension, *J. Differental Equations*, 104(1):117–146, 1993.

[2] A. Laptev, M. Ruzhansky, N. Yessirkegenov. Hardy inequalities for Landau Hamiltonian and for Baouendi-Grushin operator with Aharonov-Bohm type magnetic field. Part I., *Math. Scand.*, 125: 239–269, 2019.

[3] A. Laptev, M. Ruzhansky, N. Yessirkegenov. Hardy inequalities for Landau Hamiltonian and for Baouendi-Grushin operator with Aharonov-Bohm type magnetic field. Part II., *in preparation.*

On fractional inequalities on metric measure spaces with polar decomposition

Gulnur ZAUR

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: z.gulnur.t@gmail.com,

In the presentation, we present the fractional Hardy inequality on polarisable metric measure spaces. The integral Hardy inequality for $1 < p \leq q < \infty$ is playing a key role in the proof. Moreover, we also show the fractional Hardy-Sobolev type inequality on metric measure spaces. Logarithmic Hardy-Sobolev and fractional Nash type inequalities on metric measure spaces are presented. In addition, we present applications on homogeneous groups and on the Heisenberg group.

Funding: The author was supported by the grant no. AP23484106 of the Ministry of Science and Higher Education of Republic of Kazakhstan.

Keywords: metric measure spaces; polar decomposition; fractional Hardy inequality; fractional Hardy-Sobolev type inequality; logarithmic Hardy-Sobolev inequality; fractional Nash type inequal- ity; homogeneous groups; Heisenberg group.

2010 Mathematics Subject Classification: 22E30

References

[1] Ruzhansky M., Verma D. Hardy inequalities on metric measure spaces, *Proc. R. Soc. A.*, (2019)

[2] Ruzhansky M., Suragan D. *Hardy inequalities on homogeneous groups*, Progress in Math. Vol. 327, Birkhäuser (2019).

[3] Kassymov A., Suragan D. Lyapunov-type inequalities for the fractional p-sub-Laplacian, *Adv. Oper. Theory*, **5**:2 (year), 435–452.

Factorizations and Hardy identity related to the Baouendi-Grushin operator

Amir ZHANGIRBAYEV

SDU University, Kaskelen, Kazakhstan
E-mail: amir.zhangirbayev@gmail.com

Let us revisit the Hardy inequality related to the Baouendi-Grushin operator by Garofalo [1]. Suppose $z = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_k)$ or simply $z = (x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ with $k + m = n$ and $k, m \geq 1$. The sub-elliptic gradient is the n dimensional vector field given by

$$\nabla_\gamma = (X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_k).$$

Here, the components are defined as:

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad Y_j = |x|^\gamma \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad j = 1, \ldots, k.$$

The Baouendi-Grushin operator on $\mathbb{R}^n$ is the operator

$$\Delta_\gamma = \nabla_\gamma \cdot \nabla_\gamma = \Delta_x + |x|^{2\gamma} \Delta_y,$$

where Δ_x and Δ_y are Laplace operators in the variables $x \in \mathbb{R}^m$ and $y \in \mathbb{R}^k$, respectively. In this setting, we have the following inequality:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla_x f|^2 + |x|^{2\gamma} |\nabla_y f|^2\right) dz \geq \left(\frac{Q-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^{2\gamma}}{|x|^{2+2\gamma} + (1+\gamma)^2 |y|^2} |f|^2 dz,$$

for every $f \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \backslash\{(0,0)\}\right)$ with $Q=m+(1+\gamma)k$. Here, $\nabla_x f$ represents the gradient of f with respect to the variable x, while $\nabla_y f$ denotes the gradient of f with respect to the variable y.

In this paper, we obtain a weighted Hardy identity related to the Baouendi-Grushin operator with general weights $\phi(z)$ and $\psi(z)$ by factorizing differential expres-sions, inspired by the work of Gesztesy and Littlejohn [2]. In the special cases, the identity reduces to the classical, critical and weighted Hardy inequalities in the Euclidean settings. Similarly, the identity allows us to recover the improved L^2-Caffareli-Kohn- Nirenberg inequality, which in turn gives the Heisenberg and Hydro-gen Uncertainty Principles, as well as the classical Hardy inequality.

If time permits, we also discuss the Rellich identity for the Baouendi-Grushin operator.

This talk is based on the joint research with Nurgissa Yessirkegenov (SDU University, Kazakhstan).

Funding: This research is funded by the Committee of Science of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP14871691)

Keywords: Hardy identities, Baouendi-Grushin operator, factorization method.

2020 Mathematics Subject Classification: 26D10, 35J70

References

[1] N. Garofalo. Unique continuation for a class of elliptic operators which degenerate on a manifold of arbitrary codimension, *J. Differental Equations*, 104(1):117–146, 1993.

[2] F. Gesztesy, L. Littlejohn. Factorizations and Hardy-Rellich-type inequalities, *Non-Linear Partial Differential Equations, Mathematical Physics, and Stochastic Analysis*, EMS Ser. Congr. Rep., Zürich, 207–226, 2018.

2 Дифференциальные уравнения

Руководители:	профессор Асанова А.Т. член-корреспондент НАН РК Садыбеков М.А.
Секретари:	профессор Бакирова Э.А. ассоц. профессор Кадирбаева Ж.М.

Кавахара типті сингулярлы сызықты теңдеудің корректілік шарттары

Р.Д. АХМЕТКАЛИЕВА[a], К.Н. ОСПАНОВ[b]

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан
E-mail: [a]raya84ad@gmail.com, [b]kordan.ospanov@gmail.com

Кавахара теңдеуі немесе жалпыланған Кортевег-де Фриз теңдеуі

$$-\beta y_x^{(5)}(x,t)+\alpha y_x^{(3)}(x,t)+\frac{3}{2}y(x,t)y_x'(x,t)+y_t'(x,t)=0 \tag{1}$$

алғаш рет [1] мақаласында алынған. Ол бір өлшемді сызықты емес толқындардың дисперсивті ортада таралуын сипаттайды. Компакт емес облыста берілген коэффициенттері шенелген Кавахара типті теңдеу үшін Коши есебі [2] жұмысында қарастырылған. Бұл зерттеулердің табиғи жалғасы коэффициенттері шенелмеген Кавахара типті теңдеулерді зерттеу болып табылады.

Біз келесі түрдегі бесінші ретті сызықты теңдеуді қарастырамыз:

$$L_0y=-y^{(5)}+r(x)y^{(3)}+q(x)y'+p(x)y=f(x), \tag{2}$$

мұндағы $x\in R$, $f(x)\in L_2(R)$. r — үш рет үзіліссіз дифференциалданатын, q — үзіліссіз дифференциалданатын, ал $p(x)$ — үзіліссіз, нөлге тең болуы мүмкін функция деп ұйғарамыз.

Бұл жұмыста біз (2) теңдеуінің корректілі шешілуі мен y шешім үшін максималды регулярлық бағалауы деп аталатын келесі түрдегі

$$\|y^{(5)}\|_2+\|ry^{(3)}\|_2+\|qy'\|_2+\|py\|_2\le c\|f\|_2 \tag{3}$$

теңсіздіктің орындалуының жеткілікті шарттарын аламыз, мұндағы $c>0$ тек r, q, p-дан тәуелді, $\|\cdot\|_2$ — $L_2(R)$-дегі норма.

Бес рет үзіліссіз дифференциалданатын және финитті функциялардың $C_0^{(5)}(R)$ жиынында анықталған $L_0y=-y^{(5)}+r(x)y^{(3)}+q(x)y'+p(x)y$ дифференциалдық операторының $L_2(R)$ кеңістігі нормасында тұйықталуын L арқылы белгілейміз.

$Ly=f$ теңдігін қанағаттандыратын $y\in D(L)$ функциясын (2) теңдеудің шешімі деп атаймыз.

Айталық g және $h\neq 0$ нақты мәнді үзіліссіз функциялар болсын.

$$\gamma_{g,h,j}=max\left(\sup_{x>0}\alpha_{g,h,j}(x),\sup_{\tau<0}\beta_{g,h,j}(\tau)\right)\quad (j=1,2),$$

шамасын енгіземіз, мұндағы

$$\alpha_{g,h,j}(x)=\left(\int_0^x|g(t)|^2\,dt\right)^{\frac12}\left(\int_x^{+\infty}t^{2j}h^{-2}(t)\,dt\right)^{\frac12}(x>0),$$

$$\beta_{g,h,j}(\tau)=\left(\int_\tau^0 g^2(t)\,dt\right)^{\frac12}\left(\int_{-\infty}^\tau t^{2j}h^{-2}(t)\,dt\right)^{\frac12}(\tau<0).$$

Келесі тұжырым орынды.

Теорема. *Айталық $r(x)$ функциясы $r\ge 1$, $\gamma_{1,\sqrt{r},2}<\infty$,*

$$C^{-1}\le\frac{r(x)}{r(\eta}\le C,\ |x-\eta|\le 1,\ x,\eta\in R,\ C>1,$$

шарттарын, ал $q(x)$ және $p(x)$ функциялары

$$\gamma_{q,r,1} < \infty, \ \gamma_{p,r,2} < \infty$$

шарттарын қанағаттандырсын. Онда әрбір $f \in L_2(R)$ үшін (2) теңдеудің жалғыз y шешімі бар және ол шешім үшін (3) теңсіздігі орындалады.

Funding: Авторлар AP14870261: ҚР ҒЖБМ грантпен қолдау тапты.

Түйінді сөздер: Кавахара теңдеуі, нұқсанды бесінші ретті теңдеу, шенелмеген коэффициент, жалпыланған шешім, коэрцитивті бағалау.

2010 Mathematics Subject Classification: 35J70

Әдебиет

[1] Kawahara T. Oscillatory solitary waves in dispersive media, *J. Phys. Soc. Japan*, **33**:1 (1972), 260–264.

[2] Opritova M.A., Faminskii A.V. On the Cauchy problem for the generalized Kawahara equation, *Diff. Equat*, **52**:3 (2019), 378–390.

Төртінші ретті бір дифференциалдық теңдеудің коэрцитивті шешілу шарттары

Е.Ө. МОЛДАҒАЛИ[a], Қ.Н. ОСПАНОВ[b]

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан
E-mail: [a]yerka2998@gmail.com, [b]kordan.ospanov@gmail.com

Біз келесі төртінші ретті дифференциалдық теңдеуді қарастырамыз:

$$L_0 y = y^{(4)} + p(x)y^{(3)} + q(x)y = F(x), \tag{1}$$

мұндағы $x \in \mathbb{R}$. Алдағы уақытта p үш рет үзіліссіз дифференциалданатын, q — үзіліссіз функциялар, ал $F \in L_2(\mathbb{R})$ деп ұйғарамыз.

$C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ төрт рет үзіліссіз дифференциалданатын және финитті функциялардың жиынында анықталған $L_0 y = y^{(4)} + p(x)y^{(3)} + q(x)y$ операторының $L_2(\mathbb{R})$ кеңістігі нормасында тұйықталуын L деп белгілейік. (1) теңдеуінің шешімі деп $Ly = f$ теңдігін қанағаттандыратын $y \in D(L)$ элементін атаймыз.

Біздің мақсатымыз — (1) теңдеуінің әрбір у шешімі үшін

$$\|y^{(4)}\|_2 + \|py^{(3)}\|_2 + \|qy\|_2 \leq C(\|F\|_2 + \|y\|_2 \tag{2}$$

теңсіздігі орындалуының жеткілікті шарттарын алу. (2) — дегі $\|y\|_2$ — $L_2(\mathbb{R})$ кеңістігінің нормасы. (2) теңсіздігі y шешімнің коэрцитивтік, немесе максималды регулярлық бағасы делінеді.

(1) теңдеуі негізінен $p = 0$ жағдайында біршама зерттелген. Егер $p = 0, \ q > 0$ болса, онда оның бірмәнді шешілетіні [1] жұмысынан шығады. Ал осыларға қосымша, q-дің тербелісі белгілі бір шарттарды қанағаттандырса, онда (2) теңсіздігі орындалады [2]. Бірақ егер $p(x)$ нөлдік емес жылдам өсетін функция болса, онда [1, 2] әдістері қолдануға жарамсыз. Себебі $p\frac{d^3}{dx^3}$ операторы $\frac{d^4}{dx^4} + q(x)E$ (E — бірлік оператор) — дің аз бұлқынуы болмауы мүмкін. Үзіліссіз $\rho(t)$ және $v(t) \neq 0$ функциялары және k натурал саны берілсін. $\alpha_{\rho,v,k} = \sup\limits_{x>0} \|\rho\|_{L_2(0,x)} \|v\|_{L_2(x,\infty)}$, $\beta_{\rho,v,k} = \sup\limits_{t<0} \|\rho\|_{L_2(t,0)} \|v\|_{L_2(-\infty,t).}$, $\gamma_{\rho,v,k} = \max(\alpha_{\rho,v,k}, \beta_{\rho,v,k})$.

Жұмыстың негізгі нәтижесі мынадай.

Теорема 1. *Айталық $p \geq 1$ үш рет үзіліссіз дифференциалданатын, ал q үзіліссіз функциялар болып, $\gamma_{1,\sqrt{p},3} < \infty$ және $\gamma_{q,p,3} < \infty$ шарттары орындалсын. Онда әрбір $F \in L_2(\mathbb{R})$ үшін (1) теңдеуінің y шешімі табылады және ол жалғыз. Ал егер, сонымен бірге,*

$$\sup_{x,\eta \in \mathbb{R}: |x-\eta| \leq 1} \frac{p(x)}{p(\eta)} < \infty$$

қатысы орындалса, онда y шешімі үшін (2) теңсіздігі орынды.

Funding: Авторлар AP14870261 :ҚР ҒЖБМ грантпен қолдау тапты.

Түйінді сөздер: дифференциалдық теңдеу, күшті шешім, коэрцитивті баға.

2010 Mathematics Subject Classification: 34A30

Әдебиет

[1] Исмагилов Р.С. Об условиях самосопряженности дифференциальных операторов высшего порядка, *Доклады АН СССР*, **142**:6 (1962), 1239—1242.

[2] Отелбаев М. О разделимости эллиптических операторов, *Доклады АН СССР*, **234**:3 (1977), 540–543.

Екінші ретті дербес туындылы гипергеометриялық текті біртекті емес дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімдерін тұрғызу

М.Ж. ТАЛИПОВА[1,a], Р.У. ЖАХИНА[1,b] А.Е. ИМАНЧИЕВ[1,c]

[1]*Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан*
E-mail: [a]*mira_talipova@mail.ru*, [b]*riscul_75@mail.ru*, [c]*imanchiev_ae@mail.ru*

Екінші ретті дербес туындылы біртекті емес екі дифференциалдық теңдеуден тұратын

$$\begin{array}{c} x^2 \cdot g_0 p_{2,0} + xy \cdot g_1 p_{1,1} + x \cdot g_3 p_{1,0} + y \cdot g_4 p_{0,1} + g_5 p_{0,0} = g_6(x,y) \\ y^2 \cdot q_0 p_{0,2} + xy \cdot q_1 p_{1,1} + x \cdot q_3 p_{1,0} + y \cdot q_4 p_{0,1} + q_5 p_{0,0} = p_6(x,y) \end{array} \tag{1}$$

жүйе қарастырылады. Жүйенің коэфициенттері

$$g_i(x,y) = r_{j,k} - \alpha_{j,k} \cdot x^k,\ q_i(x,y) = t_{j,k} - \beta_{j,k} \cdot y^k \tag{2}$$

түрінде берілген, мұндағы $g_6(x,y)$ және $p_6(x,y)$ – екі айнымалылы аналитикалық функциялар, $p_{0,0} = Z(x,y)$ ортақ белгісіз, $r_{j,k}, \alpha_{j,k}, t_{j,k}, \beta_{j,k} (j,k = \overline{0,2}; i = 1,5)$ — белгісіз тұрақтылар.

Мұндай жүйелерді зерттегенде ең алдымен жүйенің үйлесімділік пен интегралдану шарттары орнатылуы қажет [1]. Осы шарттар орындалған кезде ғана

$$\begin{array}{c} x^2 \cdot g_0 p_{2,0} + xy \cdot g_1 p_{1,1} + x \cdot g_3 p_{1,0} + y \cdot g_4 p_{0,1} + g_5 p_{0,0} = 0 \\ y^2 \cdot q_0 p_{0,2} + xy \cdot q_1 p_{1,1} + x \cdot q_3 p_{1,0} + y \cdot q_4 p_{0,1} + q_5 p_{0,0} = 0 \end{array} \tag{3}$$

біртекті жүйенің төрт шешімге дейін сызықтық-тәуелсіз дербес шешімдерінің бар болатындығы Ж.Н.Тасмамбетовтың жұмыстарында Латышева-Фробениус әдістерін қолдана отырып зерттелген [2].

Шешімдері көп айнымалылы ортогональды көпмүшеліктер болатын біртекті емес дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі аз зерттелген.

Жалпыланған гипергеометриялық текті біртекті емес дифференциалдық теңдеулер жүйесінің көп айнымалылы ортогональ көпмүшелігі түріндегі шешімдерін табу мақсатында Ш.Эрмит жүйесін қарастырайық.

$$\begin{array}{c} (1-x^2) \cdot p_{2,0} - xy \cdot p_{1,1} + (n-2) \cdot x \cdot p_{1,0} - (m+1) \cdot y \cdot p_{0,1} + \\ +(m+n)(m+1) \cdot p_{0,0} = g(x,y) \\ (1-y^2) \cdot p_{0,2} - xy \cdot p_{1,1} + (n+1) \cdot x \cdot p_{1,0} + (m-2) \cdot y \cdot p_{0,1} + \\ +(m+n)(n+1) \cdot p_{0,0} = q(x,y) \end{array} \tag{4}$$

мұндағы, оң жағы

$$g(x,y)=(m+n)(m+1)+\frac{(n-2)+(m+n)(m+1)}{n+1}\cdot x+(m+n-1)\cdot y+$$
$$+\frac{n-m-4+(m+n)(m+1)}{(m+1)(n+1)}\cdot xy,$$
$$q(x,y)=(m+n)(n+1)+(m+n-1)\cdot x+\frac{(m-2)+(m+n)(n+1)}{m+1}\cdot y+$$
$$+(m+n-1)\cdot y+\frac{n-m-4+(m+n)(n+1)}{(n+1)(m+1)}\cdot xy$$

түрінде берілсін.

Теорема 1. *(4) жүйенің жалпы шешімі, сәйкес біртекті жүйенің жалпы шешімі мен біртекті емес (4) жүйенің дербес шешімдерінің қосындысынан тұрады.*

Сәйкес біртекті жүйенің жалпы шешімі

$$\begin{aligned} Z(x,y)=&\,C_{1,1}F_2\left(-\frac{m+n}{2},\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2};x^2,y^2\right)+\\ &+C_{1,2}yF_2\left(-\frac{m+n-1}{2},\frac{m+1}{2},\frac{n+2}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2};x^2,y^2\right)+\\ &+C_{1,3}xF_2\left(-\frac{m+n-1}{2},\frac{m+2}{2},\frac{n+1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2};x^2,y^2\right)+\\ &+C_{1,4}xyF_2\left(-\frac{m+n-2}{2},\frac{m+2}{2},\frac{n+2}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2};x^2,y^2\right) \end{aligned} \tag{5}$$

түрінде болатындығы белгілі [2, 125 б.]. Ал (4) біртекті емес жүйенің дербес шешімі

$$Z_0(x,y)=1+\frac{1}{n+1}x+\frac{1}{m+1}y-\frac{1}{(m+1)(n+1)}xy$$

көпмүшелігі түрінде табылады.

Сондықтан, сәйкес біртекті жүйенің (5) жалпы шешімін ескере отырып, біртекті емес (4) жүйенің жалпы шешімі

$$\begin{aligned} Z(x,y)=\overline{Z}(x,y)+Z_0(x,y)=&\,C_{1,1}F_2\left(-\frac{m+n}{2},\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2};x^2,y^2\right)+\\ &+C_{1,2}yF_2\left(-\frac{m+n-1}{2},\frac{m+1}{2},\frac{n+2}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2};x^2,y^2\right)+\\ &+C_{1,3}xF_2\left(-\frac{m+n-1}{2},\frac{m+2}{2},\frac{n+1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2};x^2,y^2\right)+\\ &+C_{1,4}xyF_2\left(-\frac{m+n-2}{2},\frac{m+2}{2},\frac{n+2}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2};x^2,y^2\right)+\\ &+1+\tfrac{1}{n+1}x+\tfrac{1}{m+1}y-\tfrac{1}{(m+1)(n+1)}xy \end{aligned} \tag{5}$$

түрінде анықталады.

Түйінді сөздер: біртекті емес дифференциалдық теңдеулер жүйесі, біртекті жүйе, гипергеометриялық текті жүйе, көпмүшелік.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

ӘДЕБИЕТ

[1] Талипова М.Ж. *Построение нормальных решений неоднородных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка*, Автореферат канд ...диссер., Алматы, 2007. - 20 с.

[2] Тасмамбетов Ж.Н. *Построение нормальных и нормально-регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.* ИП Жандилдаева С.Т., Актобе, 2015. - 464 с.

Обратная задача для нагруженного параболо-гиперболического уравнения со спектральным параметром λ

О.Х. АБДУЛЛАЕВ[1,2,a], А.А. МАТЧАНОВА[1,2,b].

[1]Alfraganus University, Ташкент, Узбекистан
[2]Институт математики имени В.И.Романовского, Ташкент, Узбекистан
E-mail: [a]obidjon.mth@gmail.com, [b]oygul87-87@mail.ru

Известно, что теория прямых и обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка развивается высокими темпами. Это можно заметить в недавно опубликованных работах многих авторов в этом направлении. Особенно следует отметить работы Р.Р. Ашурова, Б.Х. Турметова, Б. Кадыркулова и др. Также, хотелось бы отметить, что в последние годы увеличивается число опубликованных работ со значительными результатами, посвященных краевым задачам для уравнений смешанного типа с дробными производными (см [1],[2] и др.).

В данной работе исследуется однозначная разрешимость обратной задачи для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с дробной производной Капуто и со спектральным параметром λ. Рассмотрим уравнение

$$f(x)=\begin{cases} u_{xx} - {}_C D^{\alpha}_{0t}u + p_1(x,u(x,0)), & \text{при } 0<x<l,\ \ t>0, \\ u_{xx}-u_{tt}-\lambda^2 u + p_2(x,u(x,0)), & \text{при } 0<x<l,\ \ t<0, \end{cases} \tag{1}$$

где λ — заданное комплексное число, $0<\alpha<1$, $(\alpha\in R)$, $p_i(x,z(x))$, $(i=1,2)$, — заданные функция переменных $(x,z(x))$,

$${}_C D^{\alpha}_{0t}u=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha}u_s(x,s)ds \text{ —}$$

дифференциальный оператор Капуто дробного порядка α, $f(x)$ и $u(x,t)$ — неизвестные функции, которые требуется определить.

Пусть Ω — конечная область, ограниченная отрезками $B_1B_2=\{(x,\,t):\, x=l,\, 0\le t\le h\}$, $A_1A_2=\{(x,\,t):\, x=0,\, 0\le t\le h\}$, $B_2A_2=\{(x,\,t):\, t=h,\, 0\le x\le l\}$ при $t>0$, и характеристиками $B_1C:\, x-t=l$, $A_1C:\, x+t=0$ уравнения (1) при $t<0$, где $B_1=(l;\,0)$, $B_2=(l;\,h)$, $A_1=(0;\,0)$, $A_2=(0;\,h)$ и $C=\left(\frac{l}{2};\,\frac{-l}{2}\right)$.

Введем обозначения, $\Omega^+=\Omega\cap\{t>0\}$, $\Omega^-=\Omega\cap\{t<0\}$ и $I=\{(x,t):0<x<l,t=0\}$.

Постановка задачи. В области Ω для уравнения (1) исследуется следующая задача.

Задача Требуется найти пару функций $\{f(x),u(x,t)\}$ со следующими свойствами:
1) $f(x)\in C(0,l)\cap L_1(0,l)$;
2) $u(x,t)\in C(\bar\Omega)\cap C^2(\Omega^-)$, $u_{xx}, {}_C D^{\alpha}_{0t}u\in C(\Omega^+)$, $u_t\in C(\Omega^-\cup I)$, $u_x,u_t\in C(\Omega^-\cup A_1C\cup B_1C)$;
3) $u(x,t)$ удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u(0,t)=\varphi_1(t),\ \ u(l,t)=\varphi_2(t),\ \ 0\le t\le h,$$

$$u(x,-x)=\psi(x),\ \ 0\le x\le \frac{l}{2},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{A_1C}=\psi_1(x),\ 0<x\le\frac{l}{2};\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{B_1C}=\psi_2(x),\ \frac{l}{2}\le x<l,$$

и условию склеивания:

$$\lim_{t\to+0} t^{1-\alpha}u_t(x,\,t)=\lambda_1(x)\,u_t(x,\,-0)+\lambda_2(x),\ 0<x<l,$$

где $\varphi_j(t), \lambda_j(x), \psi(x), \psi_j(x), \ \ (j=\overline{1,2})$ — заданные функции, причем $\varphi_1(0)=\psi(0)$, $\psi_1(\frac{l}{2})=\psi_2(\frac{l}{2})$, $\psi_1'(\frac{l}{2})=-\psi_2'(\frac{l}{2})$.

Лемма 1. *Пусть* $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & \text{при } 0<x\le \frac{l}{2}, \\ f_2(x), & \text{при } \frac{l}{2}\le x<l, \end{cases}$, *и* $\psi(x)\in C^1\left[0,\frac{l}{2}\right]$, *причем* $\psi(0)=0$. *Тогда* $f_1(x)=p_2\left(x,u(x,0)\right)+\sqrt{2}\psi_1'(x)+A(x),\ 0\le x\le\frac{l}{2}$,

$$f_2(x)=p_2\left(x,u(x,0)\right)-\sqrt{2}\psi_2'(x)+B(x),\ \frac{l}{2}\le x\le l$$

где $A(x)$ *и* $B(x)$ *— известные функции, которые выражаются через заданные функции.*

Теорема 1. *Если выполняются условия*

$$\varphi_j(t)\in C[0,h]\cap C^1(0,h), \lambda_j(x)\in C[0,l]\cap C^1(0,l), \psi(x)\in C^1\left[0,\frac{l}{2}\right]\cap C^2\left(0,\frac{l}{2}\right),$$

$$\psi_1(x)\in C\left[0,\frac{l}{2}\right]\cap C^1\left(0,\frac{l}{2}\right],\ \ \psi_2(x)\in C\left[\frac{l}{2},l\right]\cap C^1\left[\frac{l}{2},l\right),$$

$$|p_i(x,z)|\le const|z|,\ \ |p_i(x,z_1)-p_i(x,z_2)|\le L_i|z_1-z_2|,$$

то поставленная задача однозначна разрешима, где $L_i=const>0$.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, дифференциальный оператор дробного порядка, функции Бесселя, однородная разрешимость, обратная задача.

2010 Mathematics Subject Classification: 35M10, 35K05, 35K20

Литература

[1] Salakhitdinov M.S., Karimov E.T. Uniqueness of an inverse source non-local problem for fractional order mixed type equations. *Eurasian Math.Jorn.*,, **7**:1 (2016),74–83.

[2] O.Kh Abdullaev Boundary Value Problems for a Parabolic-Hyperbolic Equation with Nonlinear Loaded Terms. *Lobachevskii Journal of Mathematics*,,**44**:10 (2023), 4205-4214.

Разрешимость диффузионной модели неоднородной жидкости с учетом температуры

С.Е. АЙТЖАНОВ[1,a], Е.С. АЛИМЖАНОВ[2,b], Б.Д. КОШАНОВ[3,c]

[1]*Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
[2]*Astana IT University, Астана, Казахстан*
[3]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*aitzhanovserik81@gmail.com,* [b]*ermek.alimzhanov@astanait.edu.kz,* [c]*koshanov@list.ru*

В механике сплошной среды и дифференциальных уравнениях одной из наиболее известных и интересных является модель Навье-Стокса сжимаемой вязкой теплопроводной жидкости. Эта модель включает в себя систему дифференциальных уравнений, которые выражают в дифференциальной форме законы сохранения массы, импульса и энергии [1]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho\vec{u})=0, \tag{1}$$

$$\rho(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\vec{u},\nabla)\vec{u})=div(\vec{\tau_i})+\xi\nabla(div\vec{u})-\nabla p+\rho\vec{f}, \tag{2}$$

$$\rho(\frac{\partial\Theta}{\partial t}+(\vec{u},\nabla)\Theta)=\chi\Delta\Theta\frac{1}{2}\vec{\tau}^2+\xi(div\vec{u})^2. \tag{3}$$

Локальная по времени разрешимость начально-краевой задачи для системы уравнений (1)-(3) впервые была установлена в работах В.А. Солонникова [2] и A. Tani [3]. В работе [5]

А.В. Кажиховым и Ш.Смагуловым впервые была построена и исследована система дифференциальных уравнений, описывающей движение двухкомпонентной жидкости. Подобная модель неоднородной жидкости среды получена при условии малости коэффициента диффузии, а также массовой концентрации примеси и ее производных. В данной работе некоторой модификации уравнении (1)-(3) доказана разрешимость начально-краевой задачи.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP19678182 МН и ВО РК.

Ключевые слова: уравнение Навье-Стокса, температура, движение жидкости, неоднородная жидкость, разрешимость.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q30, 76D05

Литература

[1] Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. *Краевые задачи механики неоднородных жидкостей*, Наука, Новосибирск (1983).

[2] Вольперт А.И., Худяев С.И. О задаче Коши для составных систем нелинейных дифференциальных уравнений, *Матем. сб.*, **87**(129):4 (1972), 504–528.

[3] Ладыженская О.А., Солонников В.А. Об однозначной разрешимости начально-краевой задачи для вязких несжимаемых неоднородных жидкостей, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **52** (1975), 52–109.

[4] Солонников В.А. О разрешимости начально-краевой задачи для уравнений движения вязкой сжимаемой жидкости, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **56** (1976), 128–142.

[5] Tani A. On the first initial - boundary value problem of compressible viscous fluid motion, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **13**:1 (1977), 193–253.

Корректность основной смешанной задачи для одного класса многомерных гиперболо-эллиптических уравнений

С.А. Алдашев

Институт математики и математического моделирования МНВО РК, Алматы, Казахстан
E-mail: aldash51@mail.ru

Основная смешанная задача для многомерных гиперболических уравнений в пространстве обобщенных функций хорошо изучена. В работах автора доказана однозначная разрешимость этой задачи для многомерных гиперболических и эллиптических уравнений. Для многомерных гиперболо-эллиптических уравнений эта задача не исследована.

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$– цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, $m \geq 2$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$ и плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$. Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через Γ_α, Γ_β — части поверхности Γ, лежащие в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$; σ_α -верхнее, а σ_β — нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$. В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим многомерные гиперболо-эллиптические уравнения

$$\Delta_x u - (sgnt)u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x, t)u_{x_i} + b(x, t)u_t + c(x, t)u = 0. \qquad (1)$$

Задача 1. *Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t \neq 0$ из класса $C(\bar{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^1(\Omega_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям*

$$u\Big|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t, \theta), u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t, \theta),\ u\Big|_{\sigma_\beta} = \tau(r, \theta),\ u_t\Big|_{\sigma_\beta} = \nu(r, \theta).$$

Показано, что задача 1 имеет единственное решение и получен его явный вид.

Funding: Автор был поддержен грантом BR20281002 МНВО РК.

Ключевые слова: коррекность, основная смешанная задача, гиперболо-эллиптические уравнения, цилиндрическая область, функция Бесселя.

2010 Mathematics Subject Classification: 35M12.

Корректность смешанной задачи для вырождающихся многомерных эллиптико-параболичесих уравнений

Серик Аймурзаевич АЛДАШЕВ[1,a], Айсулу Кобейсинкызы ТАНИРБЕРГЕН[2,b]

[1]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2]*Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан*
[a]*aldash51@mail.ru* , [b]*aisulu21@mail.ru*

Смешанная задача для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений в обобщенных пространствах хорошо изучены. В работах авторов доказана корректность этой для вырождающихся многомерных эллиптических уравнений и получен явный вид классического решения.

Насколько известно, эти вопросы для вырождающихся многомерных эллиптико-параболических уравнений не изучены.

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$ где $|x|$ — длина вектора $(x_1, ..., x_m, t)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через Γ_α, Γ_β — части поверхности Γ, лежащие в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$; σ_α — верхнее, а σ_β — нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$.

В области $\Omega_{\alpha\beta}$, рассмотрим вырождающихся многомерные эллиптико-параболические уравнения

$$0 = \begin{cases} p(t)\Delta_x u + u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u, t > 0 \\ q(t)\Delta_x u - u_t + \sum_{i=1}^m d_i(x,t)u_{x_i} + e(x,t)u, t < 0 \end{cases} \tag{1}$$

где $p(t) > 0$ при $t > 0$, $p(0) = 0$, $p(t) \in C([0,\alpha]) \cap C^2((0,\alpha))$, $g(t) > 0$ при $t > 0$, $g(t) = 0$, $g(t) \in C([\beta, 0])$, а Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m, m \geq 2$.

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t \neq 0$ из класса $C(\overline{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^1(\Omega_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям $u|_{\Gamma_\alpha} = \Psi_1(t,\theta)$, $u|_{\Gamma_\beta} = \Psi_2(t,\theta)$, $u|_{\sigma_\beta} = \varphi(t,\theta)$, Показано, что задача 1 однозначно разрешима и получено явное представление.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP14871460 МНВО РК.

Ключевые слова: корректность, смешанная задача, вырождающиеся многомерные уравнения, сферические функции.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Литература

[1] Барановский Ф.Т. *Смешанная задача для линейного гиперболического уравнения второго порядка, вырождающегося на начальной плоскости*, Ученые записки Ленинградский государственный педагогический институтa, Ленинград (1958).

[2] Краснов М.Л. *Смешанные краевые задачи для вырождающихся линейных гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка*, Математический сборник, (1959).

[3] Алдашев С.А. Корректность смешанной задачи для одного класса вырождающихся многомерных эллиптических уравнений, *Научные ведомости БелГУ, математика, физика*, **51**:2 (2019), 174-182.

[4] Михлин С.Г. *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения*, Физматгиз, Москва (1962).

Задача Робена для уравнения Шредингера на звездном графе

Г.Д. АРЕПОВА[1,2,a], А. ИШАН[2,b], А. КЕНЕСОВА[2,c], Г. КУАНДЫК[2,d]

[1]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2]*Университет SDU, Каскелен, Казахстан*
E-mail: [a]arepovag@mail.ru, [b]*200101066@stu.sdu.edu.kz*,
[c]*200101099@stu.sdu.edu.kz*,[d]*200101005@stu.sdu.edu.kz*,

Рассмотрим уравнение Шредингера на звездном графе $G(V,E)$ с тремя ребрами ($j = 1,2,3$):

$$i\frac{\partial u_j}{\partial t}+\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2}=G_j(x_j,t),\quad 0<x_j<L_j,\ \ t>0,$$

с начальными условиями $u_j(x_j,0)=u_0^j(x_j),\quad 0\le x_j\le L_j,\ \ t=0$ и граничными условиями на граничных вершинах $u_j(L_j,t)=w_2^j(t)+p_2^j(t),\quad x_j=L_j,\ \ t\ge 0$, с условием непрерывности во внутренней вершине

$$u_1(0,t)=u_2(0,t)=...=u_n(0,t),\qquad t\ge 0,$$

и с условием Кирхгофа во внутренней вершине

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}u_j(x_j,t)|_{x_j=0}=0.$$

Теорема 1. *Разрешающая система уравнений для транстформант задачи Робена на графе G с тремя ребрами имеет вид*

$$\begin{cases}
\widehat{w}_1^1(\omega)-\cos(kL_1)\widehat{w}_2^1(\omega)+k^{-1}\sin(kL_1)\widehat{p}_2^1(\omega)=\widehat{F}_1^1(\omega),\\
\widehat{w}_2^1(\omega)-\cos(kL_1)\widehat{w}_1^1(\omega)-k^{-1}\sin(kL_1)\widehat{p}_1^1(\omega)=\widehat{F}_2^1(\omega),\\
\widehat{w}_1^2(\omega)-\cos(kL_2)\widehat{w}_2^2(\omega)+k^{-1}\sin(kL_2)\widehat{p}_2^2(\omega)=\widehat{F}_1^2(\omega),\\
\widehat{w}_2^2(\omega)-\cos(kL_2)\widehat{w}_1^2(\omega)-k^{-1}\sin(kL_2)\widehat{p}_1^2(\omega)=\widehat{F}_2^2(\omega),\\
\widehat{w}_1^3(\omega)-\cos(kL_3)\widehat{w}_2^3(\omega)+k^{-1}\sin(kL_3)\widehat{p}_2^3(\omega)=\widehat{F}_1^3(\omega),\\
\widehat{w}_2^3(\omega)-\cos(kL_3)\widehat{w}_1^3(\omega)-k^{-1}\sin(kL_3)\widehat{p}_1^3(\omega)=\widehat{F}_2^3(\omega),\\
w_1^1(t)-w_1^2(t)=0,\\
w_1^2(t)-w_1^3(t)=0,\\
p_1^1(t)+p_1^2(t)+p_1^3(t)=0,\\
w_2^1(t)+p_2^1(t)=\mu_1(t),\\
w_2^2(t)+p_2^2(t)=\mu_2(t),\\
w_2^3(t)+p_2^3(t)=\mu_3(t).
\end{cases}$$

Решение задачи Робена определялось методом обобщенных функций, а неизвестные граничные функций определялись с помощью преобразований Фурье.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP23489777 МНВО РК.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, звездный граф, условие Кирхгофа, граничное условие Робена.

2010 Mathematics Subject Classification: 68R99, 81Q05, 35Q41

Литература

[1] Владимиров В.С. *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, Москва (1978).

[2] Алексеева Л.А. Метод обобщенных функций в нестационарных краевых задачах для волнового уравнения, *Математический журнал*, **6**:1 (2006), 16–32.

[3] Arepova G.D., Alexeyeva L.A., Arepova D.D. Solution to the Dirichlet problem of the wave equation on a star graph, *Mathematics*, **11** (2023), 4234.

Корректные сужения для оператора первого порядка, связанного с обратными задачами восстановления источника

Г.А. АУБАКИРОВА[a], М.А. САДЫБЕКОВ[b]

Институт математики и математического моделирования КН МНВО РК, Алматы, Казахстан
E-mail: [a]guldaraaubakirova2001@gmail.com, [b]sadybekov@math.kz

Продемонстрировано применение теории М.Отелбаева [1-3] о корректных сужениях и расширениях операторов к обратным задачам по восстановлению источника внешнего влияния. Для этого рассмотрены операторы, заданные на векторах, одна из компонент которых является функцией, а другие — скаляры.

Пусть H — гильбертово пространство пар $f = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2 \end{pmatrix}$, где $f_1(x) \in L_2(0,T), f_2 \in \mathbb{C}$, со скалярным произведением $\langle f, g\rangle_H = \langle f_1, g_1\rangle_{L_2(0,T)} + f_2\bar{g}_2$.

Рассмотрим максимальный оператор $\widehat{L}$, заданный выражением

$$\widehat{L}y \equiv \widehat{L}\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) - qy_2 \\ ay_1(0) + by_1(T) \end{pmatrix},$$

на области определения $D(\widehat{L}) = \{y \in H : y_1 \in W_2^1(0,T), y_2 \in \mathbb{C}\}$, где a, b, q — известные постоянные коэффициенты и $a + b \neq 0$.

Его ядро является однопараметрическим семейством

$$Ker\{\widehat{L}\} = \left\{ y \in H : y = Const \begin{pmatrix} q\left((a+b)x - bT\right) \\ a+b \end{pmatrix} \right\}.$$

По теории М. Отелбаева, оператор L_k^{-1}, определяемый формулой

$$L_k^{-1}f = L^{-1}f + Kf,$$

является обратным к всевозможным корректным сужениям оператора $\widehat{L}$, где K ограниченный оператор в $L_2(0,T)$, удовлетворяющий условию

$$R(K) \subset Ker\widehat{L},$$

а $L^{-1}f$ — обратный к некоторому известному корректному сужению. По теореме Рисса представление оператора K имеет вид

$$Kf = \left[\int_0^T f_1(t)\overline{\sigma_1(t)}\,dt + f_2\overline{\sigma_2} \right] \begin{pmatrix} q\left((a+b)x - bT\right) \\ a+b \end{pmatrix},\ \sigma_1 \in L_2(0,T), \sigma_2 \in \mathbb{C}.$$

В качестве известного корректного сужения выберем оператор

$$Ly = \widehat{L}y, D(L) = \{y \in H : y_1(0) = 0\},$$

Этот оператор корректный, его обратный существует, определен на всем пространстве H и ограничен.

$$L^{-1}f = L^{-1}\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^T k_1(x,t)f_1(t)\,dt + \frac{f_2}{bT}x \\ \int_0^T k_2 f_1(t)\,dt + \frac{f_2}{qbT} \end{pmatrix},$$

где $k_1(x,t) = \theta(x-t) - \frac{1}{T}x$, $k_2 = -\frac{1}{qT}$. Следовательно, имеем описание обратных операторов к всевозможным корректным сужениям в виде

$$L_k^{-1}\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^T k_1(x,t) f_1(t)\,dt + \frac{f_2}{bT}x \\ \int_0^T k_2 f_1(t)\,dt + \frac{f_2}{qbT} \end{pmatrix} + \left[\int_0^T f_1(t)\overline{\sigma_1(t)}\,dt + f_2\overline{\sigma_2}\right]\begin{pmatrix} q\left((a+b)x - bT\right) \\ a+b \end{pmatrix}$$

где $\sigma_1 \in L_2(0,T), \sigma_2 \in \mathbb{C}$.

Его прямой оператор имеет следующий вид

$$L_k y = \widehat{L}y, D(L_k) = \Big\{ y \in H : y_1(0)\left(1 - bT\sigma_1(0)\right) + by_1(T)\left(T\sigma_1(T) + y_2\right) - bTqy_2\int_0^T \overline{\sigma_1(t)}dt - bT\int_0^T y_1(t)\overline{\sigma_1'(t)}dt = 0 \Big\}.$$

В теории, разработанной М. Отелбаевым, доказано, что корректное сужение является граничным если и только если $\sigma \in Ker\{L_0^*\}$. Не сложно убедиться в том, что

$$Ker\{L_0^*\} = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2 \end{pmatrix} \in H : u_1(x) = const, u_2 = 0, \forall x \in [0,T] \right\}.$$

Поэтому все корректные граничные имеют вид

$$L_k y = \widehat{L}y, D(L_k) = \left\{ y \in H : (1 - \alpha bT)y_1(0) + \alpha bTy_1(T) = \alpha bqT^2 y_2 \right\},$$

где α — произвольное комплексное число.

Funding: Авторы были поддержаны грантом №AP14869063 МНВО РК.

Литература

[1] Kokebaev B.K., Otelbaev M., Shynybekov A.N. Some questions of Expansion and Restriction of Operators, *Akademii Nauk SSSR*, 1983, V.271, No 6., P. 1307-1310.

[2] Кокебаев Б.К., Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. К теории сужения и расширения операторов, ч.1., *Известия АН КазССР, серия физ.-мат.*, 1982, №5, 24-26.

[3] Кокебаев Б.К., Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. К теории сужения и расширения операторов, ч.2., *Известия АН КазССР, серия физ.-мат.*, 1983, №1, 24-26.

О разрешимости краевой задачи для импульсных интегро-дифференциальных уравнений с параметром

Э.А. БАКИРОВА[1,a], А.Н. НЕСИПБАЕВА[2,b]

[1]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2]*Казахский национальный женский педагогический университет*
E-mail: [a]*e.bakirova@math.kz,* [b]*nessipbayeva@mail.ru*

Рассматривается линейная краевая задача для импульсных интегро-дифференциальных уравнений с параметром

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^T \varphi(t)\psi(s)x(s)ds + A_0(t)\mu + f(t),\ t \neq \theta_j,\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$$B_0\mu + M_0x(0) + L_0x(T) = d_0,\ d_0 \in R^{n+l},\ \mu \in R^l, \tag{2}$$

$$M_i x(\theta_i - 0) - L_i x(\theta_i + 0) = d_i, \quad d_i \in R^n, \quad i = \overline{1, m}. \tag{3}$$

На основе метода параметризации были установлены условия разрешимости краевой задачи для импульсных интегро-дифференциальных уравнений с параметром (1)-(3) и построены алгоритмы нахождения ее решения.

Funding: Авторы были поддержаны грантом BR20281002 МНВО РК.

Ключевые слова: импульсное интегро-дифференциальное уравнение, краевая задача, условия разрешимости, алгоритм.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B37, 65L06

Литература

[1] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, *Comput. Maths. Math. Phys.* **29**:1 (1989), 34-46.

[2] Asanova A.T., Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M. A problem with parameter for the integro-differenti al equations, *Mathematical Modeling and Analysis.* **26**:1 (2021), С.34-54.

[3] Bakirova E.A., Iskakova N.B., Kadirbayeva Zh.M. Numerical implementation for solving the boundary value problem for impulsive integro-differential equations with parameter *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, al-Farabi KazNU* **119**:3 (2023), 19-29.

Об одной краевой задаче для вырождающегося уравнения эллиптико-гиперболического типа с условием Франкля

Ф.Х. БЕГИМКУЛОВ

Университет «Perfect», Ташкент, Узбекистан
E-mail: begimqulov.fozil181511@gmail.com

Краевые задачи с условием Франкля для уравнений смешанного параболо-гиперболического, эллиптико-гиперболического и эллиптико-параболического типов с одной линией вырождения изучены в работе [1], а для уравнений с двумя линиями вырождения в работах [2],[3].

В настоящей работе исследуется краевая задача типа Франкля для уравнения эллиптико-гиперболического типа

$$0 \equiv \begin{cases} y^n u_{xx} + x^n u_{yy}, & \Omega_0, \\ (-y)^n u_{xx} - x^n u_{yy}, & \Omega_1, \\ y^n u_{xx} - (-x)^n u_{yy}, & \Omega_2, \end{cases} \tag{1}$$

Пусть Ω_0 - конечная односвязная область в плоскости переменных x, y, ограниченная $x > 0$, $y > 0$ нормальной кривой $\sigma : x^{2p} + y^{2p} = 1$ с концами в точках $B(1, 0)$ и $A_0(0, 1)$, а $\Omega_1(\Omega_2)-$ область, ограниченная отрезком $x = 0$ $(-1 < y < 0)$ $[y = 0$ $(-1 \le x \le 0)]$ и характеристиками $BC : (-x)^p + y^p = 1$, $[DA_0 : x^p + (-y)^p = 1]$, при $x > 0, y < 0$ $[x < 0, y > 0]$.

Введем обозначения:

$$J_1 = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}, \quad J_2 = \{(x, y) : 0 < y < 1, x = 0\},$$

$$\Omega = \Omega_0 \cup J_1 \cup \Omega_1 \cup J_2 \cup \Omega_2, \Omega_{11} = \Omega_1 \cap \{(x, y) : x + y > 0\},$$

$$\Omega_{12} = \Omega_1 \cap \{(x, y) : x + y < 0\}, \quad \Omega_{21} = \Omega_2 \cap \{(x, y) : \ x + y > 0\},$$

$$\Omega_{22} = \Omega_2 \cap \{(x, y) : \ x + y < 0\}, \quad \Omega^* = \Omega_0 \cup \Omega_{11} \cup J_1, \quad \Omega^{**} = \Omega_0 \cup \Omega_{21} \cup J_2,$$

$$\Delta = \Omega_0 \cup \Omega_{11} \cup \Omega_{21}, \quad AC_0 : x^p - (-y)^p = 0, \quad AC_1 : y^p - (-x)^p = 0,$$

$$C_0\left(2^{-1/p}; -2^{-1/p}\right) = \overline{AC}_0 \cap \overline{BC}, \quad C_1\left(-2^{-1/p}; 2^{-1/p}\right) = \overline{AC_1} \cap \overline{A_0 D}.$$

Задача F. Найти в области Ω функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:
1)$u(x,y) \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^2\left(\Delta \cup \Omega_{12} \cup \Omega_{22}\right)$;
2) $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω_0, Ω_{11}, Ω_{12}, Ω_{21}, Ω_{22};
3) $u_x \in C\left(\Omega^*\right)$ и $u_y \in C\left(\Omega^{**}\right)$, причем они могут обращаться в бесконечность порядка меньше $1-2\alpha$ в точках A_0, B и ограничены в точке A;
4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_{\sigma} = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\sigma}, \tag{2}$$

$$u(x,y)|_{BC_0} = \psi_1(x), \ 2^{-1/\mathrm{p}} \leqslant x \leqslant 1, \tag{3}$$

$$u(x,y)|_{A_0C_1} = \psi_2(y), \ 2^{-1/\mathrm{p}} \leqslant y \leqslant 1, \tag{4}$$

$$u(+x,0) = \mu_1(x)u(-x,0) + \rho_1(x), \quad (x,0) \in \overline{J}_1, \tag{5}$$

$$u_x(0,+y) = \mu_2(y)u_x(0,-y) + \rho_2(y), \quad (0,y) \in J_2. \tag{6}$$

где $\psi_1(x)$, $\mu_1(x)$, $\rho_1(x)$, $\varphi(x,y)$, $\psi_2(y)$, $\mu_2(y)$, $\rho_2(y)$ — заданные функции.

В данной работе доказана теорема об однозначной разрешимости решения задачи F.

Ключевые слова: Краевая задача, смешанного типа, принцип экстремума, существование и единственность решения, вырождающееся уравнение, метод интегральных уравнений, интегрально-дифференциальные операторы.

2010 Mathematics Subject Classification: 34K37, 34L10, 35M10

Литература

[1] Салахитдинов М.С, Исламов Б.И. Уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения, *Mumtoz so'z*,(2009).

[2] Abdullaev O. Kh, Begimqulov F. Kh. About one non-local problem for the degenerating parabolic-hyperbolic type equation, *Konuralp Journal of Mathematics* , **№2**: (2014) c. 12-23.

[3] Исламов Б.И, Бегимкулов Ф. Х. Краевая задача с условием Франкля для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения, *Узбекский математический журнал*, **№2**, (2014) c. 78-91.

О разрешимости краевой задачи в широком смысле для системы дифференциальных уравнений в частных производных

А.У. БЕКБАУОВА[1,a], М.Ж. ТАЛИПОВА[2,b]

[1]*Актюбинский региональный университет им. К.Жубанова, Актобе, Казахстан*
[2]*Актюбинский региональный университет им. К.Жубанова, Актобе, Казахстан*
E-mail: [a]mirra478@mail.ru, [b]mira_talipova@mail.ru

Нелинейные уравнения моделируют различные прикладные задачи гидроаэромеханики, химической кинетики, теории каталитических реакций и т. д. В большинстве физических задач определение обобщенного решения диктуется постановкой задачи (например, в газовой динамике основными физическими законами являются законы сохранения массы, импульса, энергии, а обобщенное решение определяются как течение, удовлетворяющее этим основным законам) [1].

На $\Omega = [0,T] \times R^m \times R^k$ рассматривается краевая задача для систем уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{m} a_j\left(t,x,y\right)\frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{k} b_j\left(t,x,y\right)\frac{\partial u}{\partial y_j} = P\left(t,x,y\right)u + f\left(t,x,y\right) \tag{1}$$

$$B\left(x,y\right)u\left(0,x,y\right) + C\left(x,y\right)u\left(T,x,y\right) = d\left(x,y\right), \tag{2}$$

где $t \in [0,T]$, $x=(x_1,\ldots,x_m)\in R^m$, $y=(y_1,\ldots,y_k)\in R^k$, $a(t,x,y)$, $b(t,x,y)$ — непрерывные вектор-функции размерности соответственно m,k, обладающими свойствами периодичности, гладкости

$$a\left(t,x+q\omega,y\right)=a\left(t,x,y\right)\in C_{t,x,y}^{(0,1,1)}\left([0,T]\times R^m\times R^k\right),$$

$$b\left(t,x+q\omega,y\right)=b\left(t,x,y\right)\in C_{t,x,y}^{(0,1,1)}\left([0,T]\times R^m\times R^k\right), \tag{3}$$

и ограниченности с нормой, максимизирующей евклидовую метрику вектор-функции

$$||a||\le\alpha_0, \left|\left|\frac{\partial}{\partial x}a\right|\right|\le\alpha_1, \left|\left|\frac{\partial}{\partial y}a\right|\right|\le\alpha_2,$$

$$||b||\le\beta_0, \left|\left|\frac{\partial}{\partial x}b\right|\right|\le\beta_1, \left|\left|\frac{\partial}{\partial y}b\right|\right|\le\beta_2, \tag{4}$$

для всех $q=(q_1,\ldots,q_m)\in Z^m, Z$ — множество целых чисел. Периоды $\omega_1,\ldots,\omega_m$ — положительные несоизмеримые постоянные, $q\omega=(q_1\omega_1,q_2\omega_2,\ldots,q_m\omega_m)$ — вектор кратных периодов, $\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_m),\alpha_0,\beta_0,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ — некоторые положительные постоянные.

$P\left(t,x,y\right)$ — $n_1\times n_1$-матрица, обладающая свойствами периодичности по части переменных и ограниченности:

$$||P(t,x,y)||\le k_0=const>0,$$

$$P\left(t,x+q\omega,y\right)=P\left(t,x,y\right)\in C\left([0,T]\times R^m\times R^k\right), q\in Z^m \tag{5}$$

$f\left(t,x,y\right)$ — n_1-вектор-функция, обладающая свойствами периодичности

$$f\left(t,x+q\omega,y\right)=f\left(t,x,y\right)\in C\left([0,T]\times R^m\times R^k\right), q\in Z^m \tag{6}$$

и ограниченности

$$||f(t,x,y)||\le K=const>0. \tag{7}$$

B,C — $n_1\times n_1$ — матрицы, обладающие свойствами периодичности по части переменных и ограниченности, $d\ \in(R^m\times R^k)$.

$$B\left(x+q\omega,y\right)=B\left(x,y\right)$$

$$C\left(x+q\omega,y\right)=C\left(x,y\right)$$

$$||B||\le B_0=const>0,\ ||C||\le C_0=const>0 \tag{8}$$

$$d\left(x+q\omega,y\right)=d\left(x,y\right)\in\left(R^m\times R^k\right) \tag{9}$$

$u=(u_1,\ldots,u_{n_1})$ — искомая вектор-функция, обладающая свойствами периодичности

$$u\left(t,x+q\omega,y\right)=u\left(t,x,y\right)$$

и удовлетворяющая начальному условию

$$u\left(0,x,y\right)=\mu\left(x,y\right) \tag{10}$$

Постановка задачи. Найти периодические по части переменных решения в широком смысле краевой задачи (1)-(2).

Определение. Непрерывная в $[0,T]\times R^m\times R^k$ функция $u(t,x,y)$ называется периодической по части переменных решением в широком смысле задачи (1)-(2), если она удовлетворяет краевому условию (2), а также периодична по x с вектор-периодом (ω), ограничена по всем переменным и вдоль характеристики $\{\lambda(t,0,x_0,y_0),\xi(t,0,x_0,y_0)\}$, удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\widetilde{u}}{dt}=\widetilde{P}\left(t,\lambda,\xi\right)\widetilde{u}+\widetilde{f} \tag{11}$$

где

$$\widetilde{u}=u\left(t,\lambda\left(t,0,x_0,y_0\right),\xi\left(t,0,x_0,y_0\right)\right),\widetilde{P}=P\left(t,\lambda\left(t,0,x_0,y_0\right),\xi\left(t,0,x_0,y_0\right)\right)$$
$$\widetilde{f}=f\left(t,\lambda\left(t,0,x_0,y_0\right),\xi\left(t,0,x_0,y_0\right)\right).$$

Решения многоточечных краевых задач для дифференциальных уравнений высокого порядка методом параметризации рассмотрены в работах Джумабаева Д.С., Асановой А.Т и др. [2-6].

Для решения рассматриваемой задачи применяется метод параметризации, предложенный профессором Д.Джумабаевым. Краевая задача для систем уравнений в частных производных первого порядка путем введения функционального параметра $\widetilde{\mu}\left(\lambda,\xi\right)=\widetilde{u}\left(0,\lambda,\xi\right)$ сводится к эквивалентной краевой задаче для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с однородным начальным условием и функциональным соотношением.

Funding: Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (ИРН AP19675358).

Ключевые слова: системы уравнения в частных производных, краевая задача, решения в широком смысле, периодические решения, фундаментальное решение.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Литература

[1] Rozhdestvensky B.L., Yanenko N.N. *Quasi-linear systems equations and their applications to gas dynamics.*, Nauka, M., 1978, 687 p.

[2] Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, *Журнал вычислительной математики и математической физики.*, **1**:1989. - Т.29, -№1. - С.50–66.

[3] Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. Корректная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений, *Дифференциальные уравнения.*, **1**:2005. - Т.41, -№3. - С.337-346.

[4] Джумабаев Д.С. Об одном методе решения линейной краевой задачи для интегродифференциального уравнения, *Журнал вычислительной математики и математической физики.*, **1**:2010. - Т.50, - №7. - С.1209-1221.

[5] Assanova A.T., Imanchiev A.E. On conditions of the solvability of nonlocal multi-point boundary value problems for quasilinear systems of hyperbolic equations, *Eurasian Mathematical Journal.*, **1**:2015. Vol. 6. No. 4. P. 19-28.

[6] Assanova A.T., Bekbauova A.U., Talipova M.Zh. On a non-local problem for system of partial differential equations of hyperbolic type in a specific domain, *International Journal of Mathematics and Physics.*, **1**:14, №2 (2023).

О продолжении обобщенных решений в пространстве бесконечного порядка

А.М. БЕРДИМУРАТОВ

НИУ КЭУ им. М.Рыскулбекова, Бишкек, Кыргызстан
E-mail: aman2460@mail.ru

Пусть π — параллелепипед в $\mathbb{R}^n$, n граней которого лежат в координатных подпространствах $\xi=0$, $i=\overline{1,n}$. Обозначим через π_i его $(n-1)$-мерную грань, лежащую в подпространстве $\xi=0$, $i=\overline{1,n}$. Рассмотрим однородную систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$P\left(D\right)u=0, \tag{1}$$

где $P_{ij}\left(D\right)$, $i=\overline{1,t}$, $j=\overline{1,s}$ —произвольные линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, а числа t и s произвольны, где $u=(u_1,...,u_s)$ — неизвестная вектор функция. Построим для произвольного линейного слабо гиперболического оператора $P(D)$ продолжения обобщенных решений уравнения (1), определенных в окрестности n граней параллелепипеда в окрестность параллелепипеда π в классе обобщенных функций бесконечного порядка.

Теорема. Пусть$N' \subset \bigcup_{k=1}^{n}\{z_k \in \mathbb{C}^n, z_k = 0\}$, тогда существует число $h < 1$, зависящее лишь от оператора P, что для любого $B > 0$ и для любой окрестности L компакта $\bigcup_{k=1}^{n}\pi_k$ существует окрестность L' параллелепипеда π такая, что всякую функцию $u \in [\mathcal{U}_L^{\beta}]^s$, являющуюся решением уравнения (1) на L, можно продолжить функцией $\upsilon \in [\mathcal{U}_{L'}^{\beta}]$, являющуюся решением уравнения (1) на L', то

$$\|\upsilon\|_{L'}^{\beta,B'} \leqslant c\,\|u\|_{L}^{\beta,B},$$

где константы B'и c не зависят от u.

Согласно теореме Паламодова см.[1](гл.IV,§4,теор.2) функционал u имеет n представлений:

$$(\overline{u,\varphi}) = \sum_{\lambda=0}^{l}\int\limits_{N^\lambda} d^\lambda(z, D_z)\widetilde{\varphi}^*\mu^{\lambda,i},\ \forall\varphi \in \left[\mathcal{D}^{\beta,B_1}_{\pi_i^{\alpha-1}}\right]^s,\ i = \overline{1,n},$$

причем векторные меры $\mu^{\lambda,i} = \left(\mu_1^{\lambda,i}, ..., \mu_{e_\lambda}^{\lambda,i}\right)$ таковы, что

$$\sum_{\lambda=0}^{l}\int\limits_{N^\lambda}\exp\left(-\frac{\beta}{e}\left(\frac{|z|}{B_1}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)\mathcal{J}_{\pi_i^{\alpha-1}}(y)\left|\mu^{\lambda,i}\right| \le c_1\,\|u\|_{\pi_i^{\alpha}}^{\beta,B},\ i = \overline{1,n}.$$

Поэтому $\forall\varphi \in \left[\mathcal{D}^{\beta}_{\left(\bigcup_{k=1}^{n}\pi_k\right)^{\alpha-6}}\right]^s$ имеем

$$(\overline{\upsilon,\varphi}) = \sum_{i=1}^{n}(\overline{\upsilon,\varphi_i}) = \sum_{i=1}^{n}(\overline{u,\varphi_i}) = (\overline{u,\varphi}).$$

Ключевые слова: алгебраическая многообразия, комплексная прямая, несобственные точки, гиперплоскость, выпуклый компакт, характеристическое множество

Литература

[1] Паламодов В.П *Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами*, Наука, Москва (1967).

[2] Бердимуратов А.М. Об аналоге задачи Дарбу-Гурса-Бодо в классах обобщенных функций для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, *Кандидатская диссертация*, **Бишкек** (1992), 110стр.

[3] Бердимуратов А.М. О единственности обобщенных решений систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами., *Вестник Бурятского государственного университета. математика, информатика*, (2021), №1. С. 24-33. DOI: 10.18101/2304-5728-2021-1-24-3.

Начально-краевые задачи для двумерного волнового уравнения с нелокальными краевыми условиями типа задачи Самарского-Ионкина

Мырзагали БИМЕНОВ[1,2,a], Махмуд САДЫБЕКОВ[1,b]

[1]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2]*ЧУ "Шымкентский университет" , Шымкент, Казахстан*
E-mail: [a]bimenov@mail.ru, [b]sadybekov@math.kz

В докладе рассматривается постановка новых начально-краевых задач для двумерного волнового уравнения с нелокальными условиями по пространственным переменным, являющимися многомерными обобщениями задачи Самарского-Ионкина. Областью рассмотрения задачи является круговой цилиндр Q с осью вдоль оси t. Ставятся классические начальные условия на основании цилиндра и новые нелокальные краевые условия на пространственных (боковых) границах цилиндра.

Пусть $\Omega = \{(r,\varphi) : 0 \le r < 1, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ — единичный круг, $Q = \{(r,\varphi,t) : 0 \le r < 1, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 < t < T\}$ — прямой круговой цилиндр.

Будем рассматривать новую нелокальную краевую задачу для двумерного волнового уравнения:

$$u_{tt}(r,\varphi,t) - \Delta u(r,\varphi,t) = f(r,\varphi,t),\ (r,\varphi,t) \in Q, \tag{1}$$

где Δ — оператор Лапласа в полярных координатах (r,φ).

Будем использовать классические начальные условия

$$u|_{t=0} = \tau(r,\varphi),\ u_t|_{t=0} = \nu(r,\varphi),\ (r,\varphi) \in \Omega, \tag{2}$$

и нелокальные краевые условия на боковой границе кругового цилиндра

$$u(1,\varphi,t) - u(1,2\pi-\varphi,t) = 0,\ 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1,\varphi,t) - \beta\frac{\partial u}{\partial r}(1,2\pi-\varphi,t) = 0,\ 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le t \le T. \tag{4}$$

Здесь $\beta \ne 1$ — фиксированное действительное число.

Правую часть уравнения и начальные условия мы берем из следующего «стандартного» класса гладкости для гиперболических задач: $f(r,\varphi,t) \in C^{1+\epsilon}(\bar{Q})$; $\tau(r,\varphi) \in C^{2+\epsilon}(\bar{\Omega})$; $\nu(r,\varphi) \in C^{1+\epsilon}(\bar{\Omega})$. Дополнительно от $\tau(r,\varphi)$ и $\nu(r,\varphi)$ потребуем удовлетворение краевым условиям (3), (4).

Для решения начально-краевой задачи (1)-(4) мы применяем методику сведения к последовательному решению двух начально-краевых задач с самосопряженными краевыми условиями по пространственной переменной, предложенную в [1] для случая одномерных параболических начально-краевых задач с неусиленно регулярными краевыми условиями.

Основным результатом работы является доказательство корректности сформулированной задачи в классическом смысле.

Funding: Авторы поддержаны грантом №AP14869063 МНВО РК.

Keywords: многомерное волновое уравнение, нелокальное краевое условие, условие Самарского-Ионкина, классическое решение.

2010 Mathematics Subject Classification: 35L05, 35L20

References

[1] Sadybekov M.A. Initial-Boundary Value Problem for a Heat Equation with not Strongly Regular Boundary Conditions, *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, **216** (2017), 330–348.

О начально-граничной задаче для вырождающегося гиперболического уравнения

Мади Габиденович ЕРГАЛИЕВ[1,a], Канжарбек Балтабаевич ИМАНБЕРДИЕВ[2,b], Арнай Сарсембековна КАСЫМБЕКОВА[2,c]

[1]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2]*КазНУ имени ал-Фараби, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*ergaliev@math.kz*, [b]*kanzharbek75ikb@gmail.com*,[c]*kasar08@mail.ru*

Пусть $0 < T < \infty$ и $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$, $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Sigma = \partial\Omega \times (0,T)$. Рассмотрим следующую начально-граничную задачу для вырождающегося гиперболического уравнения

$$\partial_t \left(t^{12/7} \partial_t u(x,t)\right) - \Delta u(x,t) = f(x,t) \text{ в } Q, \tag{1}$$

$$u(x,t) = 0 \text{ на } \Sigma, \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0, \ \lim_{t\to+0} t^{12/7} \partial_t u(x,t) = 0 \text{ в } \Omega. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$f(x,t) \in L^2(Q),\ \frac{f(x,t)}{t^\alpha} \in L^2(Q),\ \frac{\Delta f(x,t)}{t^\alpha} \in L^2(Q),\ \alpha > 3/7.$$

Тогда задача (1)–(3) однозначно разрешима, и имеет место априорная оценка

$$\|u(x,t)\|^2_{W(Q;t^{12/7})} \equiv \|u(x,t)\|^2_{L^2(Q)} + \|t^{12/7}\partial_t u(x,t)\|^2_{W_2^1(0,T;L^2(Q))} + \|\Delta u(x,t)\|^2_{L^2(Q)}$$

$$\leq C \left[\|f(x,t)\|^2_{L^2(Q)} + \left\| \frac{f(x,t)}{t^\alpha} \right\|^2_{L^2(Q)} + \left\| \frac{\Delta f(x,t)}{t^\alpha} \right\|^2_{L^2(Q)} \right].$$

Funding: Первый автор был поддержан грантом BR20281002 КН МНВО РК.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, вырождающееся уравнение, априорная оценка.

2010 Mathematics Subject Classification: 35L20, 35L80, 35B45

Литература

[1] Кахарман Н. *Азғындалған гиперболалық теңдеулер үшін жалпы регулярлы шеттік есептер*, Алматы (2023).

[2] Hussein M.S., Lesnic D., Kamynin V.L., Kostin A.B. Direct and inverse source problems for degenerate parabolic equations, *J. of Inverse and Ill-Posed Problems*, **28**:3 (2020), 425–448.

[3] Cannarsa P., Martinez P., Vancostenoble J. The cost of controlling strongly degenerate parabolic equations, *ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations*, **26**:2 (2020), 1–50.

О численной реализации метода параметризации решения краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнения с запаздыванием

Н.Б. ИСКАКОВА[a], А. ОРАЛ[b]

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: [a]n.iskakova@math.kz, [b]aruzhanoral@gmail.com

Исследуется линейная краевая залача для нагруженного дифференциального уравнения с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_0(t)x(t) + A_1(t)x(t-\tau) +$$

$$+\sum_{i=1}^{N} K_i(t)x(\theta_i) + f(t), \quad x \in R^n, \quad t \in (0,T), \quad \tau > 0, \tag{1}$$

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \tag{2}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in R^n, \tag{3}$$

где матрицы $A_0(t)$, $A_1(t)$, $K_i(t) \in R^{n,n}$ $(i = \overline{1,N})$ и функция $f(t) \in R^n$ непрерывны на $[0,T]$, $\phi(t) \in R^n$ непрерывно дифференцируемая функция $[-\tau, 0]$, B, $C \in R^{n,n}$, d — постоянны, τ — запаздывание, $\theta_i\,(i = \overline{1,N})$ точки нагрузки такие, что $0 = \theta_1 < \tau < \theta_2 < 2\tau < \ldots < \theta_N < T$.

На основе идей метода параметризации [1] для краевой задачи (1)-(3) получены условия разрешимости и построен алгоритм нахождения ее приближенного решения.

Финансирование: Авторы были поддержаны грантом BR20281002 МНВО РК.

Ключевые слова: нагруженное дифференциальное уравнение, запаздывание, метод параметризации, алгоритм

2010 Mathematics Subject Classification: 34B37, 65L06

Литература

[1] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **29**:1 (1989), 34–46.

[2] Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A., Mynbayeva S.T. A method of solving a nonlinear boundary value problem with a parameter for a loaded differential equation, *Mathematical Method in Applied Science*, **43** (2020), 1788–1802.

[3] Narkesh Iskakova, Svetlana Temesheva, Roza Uteshova On a problem for a delay differential equation, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **46**:9 (2023), 11283–11297.

О системе корневых векторов нагруженного регулярного дифференциального оператора второго порядка, не обладающего свойством базисности

Н.С. ИМАНБАЕВ[1,2], М.А. САДЫБЕКОВ[1]

[1]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2]*Южно-Казахстанский педагогический университет им. У. Жанибекова, Шымкент, Казахстан*
E-mail: imanbaevnur@mail.ru

Рассматривается спектральная задача для нагруженного дифференциального оператора второго порядка

$$L_1 v \equiv \breve{\ } v''(x) - p(x)v'(0) = \lambda v(x), \quad 0 < x < 1 \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$v'(1) + \lambda v(0) = 0, \quad v(0) + v(1) = 0, \quad \text{при } \alpha > 0. \tag{2}$$

Теорема 1. *Характеристический определитель нагруженного дифференциального оператора L_1 представим в виде*

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda)\left[1 + \alpha\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{C_k^{(2)}}{\lambda - (2\beta_k)^2} + \frac{C_k^{(1)}}{\lambda - (\pi + 2\pi k)^2}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k \cdot 2\delta_k \frac{C_k^{(2)}}{\lambda - (2\beta_k)^2}\right)\right], \tag{3}$$

где $\Delta_0(\lambda) = \alpha \sin\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}\left(1 + \cos\sqrt{\lambda}\right)$ *— характеристический определитель невозмущенного оператора* $L_0 v = -v''(x) = \lambda v(x)$ *с краевыми условиями (2), а* α_k *— коэффициенты Фурье разложения* $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k v_k(x)$ *по биортогональной системе* $\{v_k(x)\}$*, составленной из собственных функций сопряженного невозмущенного оператора.*

Теорема 2. *Множество функций* $p(x)$*, для которых система собственных функций нагруженного дифференциального уравнения оператора* L_1 *в пространстве* $L_2(0,1)$ *не образует безусловного базиса, является плотным в* $L_2(0,1)$*.*

Вывод: сопряженные операторы одновременно не обладают свойством базисности.

Ключевые слова: оператор дифференцирования, собственные функции, собственные значения, сопряженная задача, нагруженный оператор.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B05, 34B09, 34L10, 34L15

Литература

[1] Шкаликов А.А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями, *Вестник МГУ.* , **6** (1982), 12–21.

[2] Lang P., Locker J. Spectral theory of two-point differential operators determined by $-D^2$, *Journal Math. Anal.Appl.* , **146**:1 (1990), 148–191.

[3] Sadybekov M.A., Imanbaev N.S. On system of root vectors of perturbed regular second-order differential operator not possessing basis property, *Mathematics.* , **11**:20 (2023), 43–64.

Об обобщенной спектральной задаче для возмущенного би-Лапласиана в квадратной области

М.Т. ДЖЕНАЛИЕВ[a], М.Г. ЕРГАЛИЕВ[b] Б.К. ОРЫНБАСАР[c]

ИМММ, Алматы, Казахстан

E-mail: [a]*muvasharkhan@gmail.com*, [b]*ergaliev.madi.g@gmail.com*, [c]*qairatulybekzat@gmail.com*

Спектральные задачи для дифференциальных операторов никогда не теряли своей исключительной важности и прикладной необходимости: (а) при исследовании вопросов совместности математических моделей, (б) при приближенном решении граничных и начально-граничных задач, (в) при обосновании вычислительных алгоритмов, (г) для развития собственно спектральной теории и т.д.

В работе найдены собственные значения и собственные функции для одного возмущенного бигармонического оператора (би-Лапласиана) $(\partial_x^4 + \partial_y^4)u \equiv [(-\Delta)^2 - 2\partial_x^2\partial_y^2]u = \lambda^2(-\Delta)u$ в квадратной области $\Omega = \{0 < x, y < l\}$ с условиями Дирихле $u = \partial_{\vec{n}}u = 0$ на границе квадрата $\partial\Omega$. Установлено сравнение найденных собственных значений с собственными значениями спектральной задачи для бигармонического оператора $(-\Delta)^2 u = \lambda^2(-\Delta)u$ с условиями Дирихле на границе. Заметим, что последняя задача возникает при изучении колебаний изгиба зажатой квадратной пластины и имеет приложения в двумерных граничных задачах Стокса, описывающих движение жидкости, строительной механике, судостроении и т.д.

Таким образом, проблема о нахождении собственных значений для би-Лапласиана, или найти их верхние и, в особенности, определить нижние оценки является одной из фундаментальных проблем математики и физики, и имеет многочисленные приложения. В этой связи, можно также упомянуть работы [1–6], посвященные различным спектральным вопросам, в том числе, построения эффективных численных методов нахождения приближенных собственных значений для бигармонического оператора.

Ряд спектральных задач, несмотря на внешнюю простоту постановки, не могут быть решены через элементарные или протабулированные специальные функции ([7], Chapter VII, Point 2, p. 118). Это — спектральные задачи, возникающие при моделировании процессов колебаний плоских зажатых фигур, не являющихся кругом.

Доклад построен следующим образом. Вначале мы даем постановку изучаемой задачи. Формулируем утверждение, взятое из работы [3], которое касается теории обобщенных спектральных задач. По терминологии [3] наша спектральная задача также является обобщенной. Мы показываем, что операторы нашей задачи удовлетворяют условиям работы [3] и являются самосопряженными. Тем самым, мы получаем, что в нашей спектральной задаче собственные значения расположены на действительной положительной полуоси.

Далее, мы даем решение спектральной задачи: $(\partial_x^4+\partial_y^4)u \equiv [(-\Delta)^2-2\partial_x^2\partial_y^2]u = \lambda^2(-\Delta)u$ в квадратной области $\Omega = \{0 < x, y < l\}$ с условиями Дирихле $u = \partial_{\vec{n}}u = 0$ на границе квадрата $\partial\Omega$ (основной результат доклада). Сравниваются собственные значения двух спектральных задач для возмущенного и невозмущенного бигармонического операторов с использованием максиминимального принципа Куранта [7]. И, наконец, проводится сравнение трех спектральных задач для установления нижней оценки собственных значений для невозмущенного бигармонического оператора. Используется результат, принадлежащий Вейлю [8]. Здесь же приводятся некоторые численные результаты по нижней оценке собственных значений. Сообщение завершается кратким заключением.

Таким образом, в работе решена обобщенная спектральная задача для (специальным образом) возмущенного бигармонического оператора, собственные значения которой дали нижние оценки для обобщенной спектральной задачи для невозмущенного (т. е. бигармонического) оператора. Указанные задачи изучены для квадратной области. Однако, нетрудно заметить, что полученные результаты легко развиваются и для произвольной ограниченной прямоугольной области.

Funding: Авторы были поддержаны грантом BR20281002 КН МНВО РК.

Ключевые слова: би-Лапласиан, возмущенный би-Лапласиан, обобщенная спектральная задача, сравнение собственных значений, нижняя оценка собственных значений.

2010 Mathematics Subject Classification: 35J30, 35P05, 35P15, 35Q30

Литература

[1] Feng J., Wang S., Bi H., Yang Y. An hp-mixed discontinuous Galerkin method for the biharmonic eigenvalue problem, *Applied Mathematics and Computation (APMC)*, **450**:C (2023), https://doi.org/10.1016/j.amc.2023.127969.

[2] Wang L., Xiong C., Wu H., Luo F. A priori and a posteriori analysis for discontinuous Galerkin finite element approximations of biharmonic eigenvalue problems, *Advances in Computational Mathematics*, **45**:5 (2019), 2623–2646.

[3] Kato T. *Variational Perturbation Theory for Linear Operators, 2nd ed.*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1980).

[4] Jenaliyev M.T., Bektemesov M.A., Yergaliyev M.G. On an inverse problem for a linearized system of Navier-Stokes equations with a final overdetermination condition, *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, **31**:4 (2023), 611–624.

[5] Amangaliyeva M.M., Jenaliyev M.T., Iskakov S.A., Ramazanov M.I. On a boundary value problem for the heat equation and a singular equation associated with it, *Applied Mathematics and Computation (APMC)*, **399** (2021), 126009.

[6] Liu X. A framework of verified eigenvalue bounds for self-adjoint differential operators, *Applied Mathematics and Computation (APMC)*, **267**:C (2015), 341–355.

[7] Gould S.H. *Variational Methods for Eigenvalue Problems. An Introduction to the Weinstein Method of Intermediate Problems, 2nd ed.*, Oxford University Press, London (1966).

[8] Weinstein A., Stenger W. *Methods of Intermediate Problems for Eigenvalues. Theory and Ramifications*, Academic Press, New York-London (1972).

Об одном неклассическом уравнении третьего порядка

С.С. КАБДРАХОВА[1,2,a], Ж.Ж. АСАН[2,b]

[1]*Институт математики и математического моделирования МНВО РК, Алматы , Казахстан*
[2]*КазНУ имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*symbat2909.sks@gmail.com*, [b]*zh.assanova98@gmail.com*

В области $\overline{\Omega} = [0,\omega][0,T]$ рассматривается полупериодическая краевая задача для одного неклассического уравнения третьего порядка

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} = a_0(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + a_1(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a_3(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} +$$

$$+a_4(x,t)u + f(x,t),\ (x,t) \in \overline{\Omega}, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \psi(t),\ t \in [0,T] \tag{2}$$

$$u(x,o) = u(x,T),\ x \in [0,\omega], \tag{3}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,T)}{\partial x},\ x \in [0,\omega]. \tag{4}$$

где $f(x,t), a_i(x,t)$, $(i = 0,4)$ — непрерывные на $\overline{\Omega}$ функции, $\psi(t)$ — дважды непрерывно дифференцируемая на $[0,T]$ функция, удовлетворяющая условиям $\psi(0) = \psi(T)$, $\psi(0) = \psi(T)$.

Продольные колебания составных стержней, состоящих из упругих и упруго-вязких участков описываются уравнением третьего порядка. Вопросы посвященные корректной разрешимости краевых задач для уравнений третьего порядка и методы их исследования рассмотрены в работах [1,2]. В настоящей статье модификация метода ломаных Эйлера [3] применяется к нелокальной задаче для одного неклассического уравнения третьего порядка. На основе специального преобразования неизвестной функции уравнение третьего порядка сводится к системе двух гиперболических уравнений со смешанными производными. Получены условия оценки сходимости метода ломаных Эйлера к решению рассматриваемой краевой задачи.

Funding: Авторы были поддержаны грантом BR20281002 МНВО РК.

Ключевые слова: линейное уравнение, неклассическое уравнение третьего порядка, полупериодические краевые условия, модификация метода ломаных Эйлера.

2010 Mathematics Subject Classification: 35L20,35L70, 35B10

Литература

[1] Джураев Т.Д. *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанного-составного типов*, Фан, Ташкент (1972), 240 с.

[2] Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. *Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа*, Фан, Ташкент (1986), 220с.

[3] Джумабаев Д.С., Кабдрахова С.С. Метод ломаных Эйлера применительно к полу- периодической краевой задаче для нелинейного гиперболического уравнения *Тез. межд.конф. "Проблемы современной матем. и мех."Институт матем. МОН РК.*, Алматы, (2015), 76–77.

Свойства плотности потенциала Ньютона простого слоя

Т.Ш. КАЛЬМЕНОВ

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: kalmenov.t@mail.ru

Пусть $\Omega \subset R^n$, $n \geq 2$ — конечная область с гладкой границей $\partial\Omega$.

В математической физике часто встречается потенциал Ньютона простого слоя

$$u_\mu(x) = \int_{\partial\Omega} \varepsilon(x,\xi)\mu(\xi)d\xi, \tag{1}$$

где

$$\varepsilon(x,y) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\ln|x-y|, & n=2, \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}, & n>2 \end{cases} \tag{2}$$

— главное фундаментальное решение уравнения Лапласа

$$-\Delta_x \varepsilon(x,y) = \delta(x-y). \tag{3}$$

В случае Ньютонового потенциала

$$u_N(x) = \int_\Omega \varepsilon(x-y)f(y)dy, \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

для u_N известна двусторонняя априорная оценка [1]:

$$C^{-1}\|f\|_0 \leq \|u_N\|_{W_2^2(\Omega)} \leq C\|f\|_0. \tag{5}$$

В настоящей работе для плотности потенциала простого слоя $\mu(x)$ получены следующие неравенства

$$C^{-1}\|\mu\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)} \leq \|u_\mu\|_{W_2^2(\Omega)} \leq C\|\mu\|_{W_2^{1/2}(\Omega)}. \tag{6}$$

Пользуясь неравенством (6), для $u \in Ker\,(-\Delta_0)^* \cap W_2^2(\Omega)$ найдено представление

$$u(x) = u_\mu(x) + C, \quad \mu(x) \in W_2^{1/2}(\partial\Omega), \quad C - const. \tag{7}$$

Здесь $Ker\,(-\Delta_0)^* = \{u \in W_2^2(\Omega) - \Delta u = 0\}$.

Funding: Автор был поддержан грантом BR20281002 КН МНВО РК.

Keywords: потенциал простого слоя, потенциал Ньютона, фундаментальное решение, уравнение Лапласа, априорная оценка.

2010 Mathematics Subject Classification: 35C15, 35J05, 35J08

Литература

[1] Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, Москва (1975).

Критерии единственности решения дифференциально-операторного уравнения с невырожденными условиями

Б.Е. КАНГУЖИН[1,a], Б.Д. КОШАНОВ[2,b]

[1,2]Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
[1,2]Казахский национальный университет им. Аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: [a]kanguzhin53@gmail.com, [b]koshanov@math.kz

В данной работе рассмотрено дифференциально-операторное уравнение вида

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q(t)u = Au + f(t), \quad 0 < t < T < \infty \tag{1}$$

с невырожденными граничными условиями по времени

$$\Gamma_i(u) = a_{i1}u(0) + a_{i2}u'(0) + a_{i3}u'(T) + a_{i4}u'(T) = 0, \quad i = 1, 2. \tag{2}$$

При этом предполагается, что оператор A не зависит от t и является замкнутым линейным оператором в сепарабельном гильбертовом пространстве H. В настоящей работе других ограничений на оператор A не предполагается. Напомним, что граничные условия (2) называются невырожденными, если выполняется одно из следующих трех требований:

1) $\begin{vmatrix} a_{14} & a_{12} \\ a_{24} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$

2) $\begin{vmatrix} a_{14} & a_{12} \\ a_{24} & a_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$

3) $\begin{vmatrix} a_{14} & a_{12} \\ a_{24} & a_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \neq 0.$

В остальном коэффициенты a_{ij} граничных условий произвольны и могут быть комплексными числами. Коэффициент $q(t)$ дифференциального выражения левой части (1) считаем суммируемой комплекснозначной функцией на $[0, T]$.

Главной целью данной статьи является установление критерия единственности решения задачи (1)–(2).
Операторная запись вышеприведенной задачи (1)–(2) имеет вид

$$Bu(t) = Au(t) + f(t), \quad t \in (0, T). \tag{3}$$

Здесь оператор B действует по переменной t и его некоторые спектральные свойства приведены в работе [1]. Оператор A является замкнутым линейным оператором в сепарабельном гильбертовом пространстве H и не зависит от t.

Теорема 1. *Пусть матрица граничных коэффициентов*

$$J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

ранга 2 подчинена требованию: хотя бы одно из чисел J_{42}, $J_{14} + J_{32}$ и J_{13} отлично от нуля, где $J_{kj} = a_{1k}a_{2j} - a_{2k}a_{1j}$ и считаем, что оператор A является замкнутым линейным в сепарабельном гильбертовом пространстве H и не зависит от t. Тогда однородное операторное уравнение

$$Bu = Au$$

имеет только тривиальное решение $u \in D(B) \cap D(A)$ тогда и только тогда, когда

$$\sigma(B) \cap \sigma(A) = \varnothing,$$

где $\sigma(B)$ и $\sigma(A)$ — спектры операторов B и A соответственно.

Приведем следующие примеры применительно к теореме 1 для некоторых операторов A в уравнений (1).

Пример 1 [3]. Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ — некоторая ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. В работе [3] оператор A определяется $A(x,D) = \sum\limits_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D^\alpha$ — произвольным формально самосопряженным эллиптическим дифференциальным оператором порядка $m = 2l$ с достаточно гладкими коэффициентами $a_\alpha(x)$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ — мультииндекс и $D = (D_1, \dots, D_N)$, $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Область определения оператора A задается следующими краевыми условиями по x:

$$B_j u(x,t) = \sum_{|\alpha|\leqslant m_j} b_{\alpha,j}(x) D^\alpha u(x,t) = 0, \quad 0 \le m_j \le m-1, \quad j = 1,2,\dots,l, \quad x \in \partial\Omega. \tag{4}$$

где коэффициенты $b_{\alpha,j}(x)$ — достаточно гладкие заданные функции. Из теоремы 1 вытекает следующий вывод.

Вывод 1. *Пусть оператор B удовлетворяет требованиям теоремы 1. Тогда однородное операторное уравнение*

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q(t)u = Au, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T) \tag{5}$$

с начально-краевыми условиями (2),(4) имеет только тривиальное решение $u \in D(B) \cap D(A)$ тогда и только тогда, когда $\sigma(B) \cap \sigma(A) = \varnothing$, где $\sigma(B)$ и $\sigma(A)$ — спектры операторов B и A соответственно.

Тем самым усилен основной результат работы [3], так как вывод 1 справедлив для оператора B с невырожденными граничными условиями. В то же время в работе [3] от оператора B требовалось, чтобы краевые условия были усиленно регулярными по Биркгофу [2]. Класс невырожденных краевых условий шире класса усиленно регулярных по Биркгофу краевых условий.

Пример 2 [4]. Оператор A порождается стандартным волновым уравнением $Av(\cdot) = v_{xx}(\cdot) - v_{yy}(\cdot)$ в двумерной области Ω, ограниченной отрезком $OB : 0 \le x \le 1$ оси $y = 0$ и характеристиками $OC : x + y = 0$, $BC : x - y = 1$.

Область определения оператора A задается следующими краевыми условиями со смещением по (x,y):

$$\begin{gathered} u(\theta, 0; t) = 0, \quad 0 \le \theta \le 1, \\ u\left(\frac{\theta}{2}, -\frac{\theta}{2}; t\right) = a\, u\left(\frac{\theta+1}{2}, \frac{\theta-1}{2}; t\right), \quad 0 \le \theta \le \frac{1}{2}, \quad 0 < t < T. \end{gathered} \tag{6}$$

Из теоремы 1 вытекает следующий вывод.

Вывод 2. *Пусть для оператора B выполнены условия теоремы 1. Тогда следующее однородное операторное уравнение*

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q(t)u = u_{xx}(x,y;t) - u_{yy}(x,y;t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T) \tag{7}$$

с начально-краевыми условиями (2),(6) имеет только тривиальное решение $u \in D(B) \cap D(A)$ тогда и только тогда, когда спектры этих операторов B и A не пересекаются.

Тем самым усилен основной результат работы [4].

Funding: Авторы были поддержаны грантом BR20281002 МНВО РК.

Ключевые слова: уравнение Штурма — Лиувилля, невырожденные граничные условия, единственность решения, собственные значения оператора, полные ортонормированные системы, спектр оператора.

2010 Mathematics Subject Classification: 35G05, 35G10, 35P05

Литература

[1] Марченко В.А. *Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения*, Наукова дума, Киев (1977).

[2] Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, Москва (1969).

[3] Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д. Критерии единственности решения нелокальной по времени задачи для дифференциально-операторного уравнения высокого порядка $l(\cdot) - A$ с волновым оператором A со смещением, *Сиб. Мат. Жур.*, **63**:6 (2022).

[4] Kanguzhin B.E., Koshanov B.D. Uniqueness Criteria for Solving a Time Nonlocal Problem for a High-Order Differential Operator Equation $l(\cdot) - A$ with a Wave Operator with Displacement, *Simmetry*, **14**:6 (2022), 1239.

Задача сопряжения для уравнения теплопроводности с граничными условиями типа Штурма в случае двух точек разрыва

У.К. КОЙЛЫШОВ[a], М.А. САДЫБЕКОВ[b]

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: [a]koylyshov@math.kz, [b]sadybekov@math.kz

Рассматривается начально-краевая задача для уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = k_i^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}$$

в области $\Omega = \cup \Omega_i$, $\Omega_i = \{(x,t) : l_{i-1} < x < l_i, 0 < t < T\}$, где $(i = 1,\ 2,\ 3)$,
с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), l_0 \leqslant x \leqslant l_3$$

краевыми условиями вида

$$\alpha_1 \frac{\partial u_1(l_0,t)}{\partial x} + \beta_1\ u_1(l_0,t) = 0, \alpha_2 \frac{\partial u_3(l_3,t)}{\partial x} + \beta_2\ u_3(l_3,t) = 0,$$

и условиями вида

$$u_i(l_i - 0, t) =\ u_{i+1}(l_i + 0, t), k_i \frac{\partial u_i(l_i - 0, t)}{\partial x} =\ k_{i+1} \frac{\partial u_{i+1}(l_i + 0, t)}{\partial x},$$

Коэффициенты α_i, β_i — действительные, $k_i > 0$, $(i = 1, 2)$, кроме того, $|\alpha_i| + |\beta_i| > 0$, $(i = 1, 2)$.

В случае без разрыва спектральная теория этих задач построена практически полностью. В работе [1], рассмотрена уравнение теплопроводности с разрывным коэффициентом при краевых условиях Штурма, в случае одной точки разрыва. Найдены собственные значения и собственные функции и исследованы всевозможные частные случаи. В данной работе исследованы спектральные вопросы задачи (1)-(4). Найдены собственные значения и собственные функции, и доказана теорема существования и единственности классического решения.

Авторы были поддержаны проектом финансирования BR20281002 КН МНВО РК.

Ключевые слова: уравнения теплопроводности, разрывные коэффициенты, собственные значения, собственные функции, спектральная теория.

2010 Mathematics Subject Classification: 35 Partial differential equations

Литература

[1] M.A.Sadybekov, U.K.Koilyshov. Two-phase tasks thermal conductivity with boundary conditions of the Sturm type. *Sixth International Conference on Analysis and Applied Mathematics. Abstract book of the conference ICAAM*, 31.10.2022-06.11.2022, Antalya, Turkey.

Интегральное представление аналитических функций по Дуглису

Б.Д. КОШАНОВ[1,2,a], А.П. СОЛДАТОВ[1,3,b]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2] *Казахский национальный университет им. Аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
[3] *Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление"РАН, Москва, Россия*
E-mail: [a]*koshanov@math.kz*, [b]*soldatov48@gmail.com*

Пусть область D ограничена простым гладким контуром Γ, ориентированным положительно по отношению к этой области. Рассмотрим аналитическую в D функцию ϕ, которая непрерывна по Гельдеру в замыкании этой области и (в случае бесконечной области), исчезает на бесконечности. Исходя из непрерывной по Гельдеру функции $G(t)$, $t \in \Gamma$, рассмотрим вопрос о представлении ϕ интегралом типа Коши вида

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{G(t)} \frac{\varphi(t)dt}{t-z}, \quad z \in D, \tag{1}$$

с вещественной плотностью φ. Этот вопрос тесно связан с задачей Римана-Гильберта

$$\mathrm{Re} G\phi^+ = f, \tag{2}$$

играет важную роль при исследовании эллиптических краевых задач и подробно изучен в монографии Н.И. Мусхелишвили [1]. Строго говоря, он изложен только для случая, когда индекс Коши функции G имеет определенный знак, однако приведенные рассмотрения можно легко распространить на общий случай.

В данной работе будет рассмотрен вопрос о представлении для функции, аналитических по Дуглису. Последние представляют собой вектор-функции $\phi = (\phi_1, ..., \phi_l)$, удовлетворяющие системе первого порядка

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad J \in \mathbb{C}^{l\times l}, \tag{3}$$

где все собственные значения постоянной матрицы J лежат в верхней полуплоскости. Данная система эллиптична и в случае скалярной матрицы $J = i$ ее решениями служат обычные аналитические функции. Для ганкелевой матрицы J в рамках так называемых гиперкомплексных чисел эта система впервые была изучена в [2]. Интерес к ней вызван главным образом тем, что решения эллиптических систем второго порядка выражаются через вектор-функции ϕ. Как отмечено в [3], все основные факты теории аналитических функций, основанные на интеграле Коши, распространяются и на функции, аналитических по Дуглису. Роль интеграла типа Коши для этих функций играет интеграл

$$I_J\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma dt_J (t-z)_J^{-1} \phi(t), \quad z \in D, \tag{4}$$

где для $z = x + iy \in \mathbb{C}$ принято матричное обозначение

$$z_J = x1 + yJ, \quad dz_J = dx1 + dyJ$$

с единичной $l \times l$-матрицей 1. Соответственно ϕ является l-вектором $\phi = (\phi_1, ..., \phi_l)$ и матричное выражение под интегралом, действующее на этот вектор, стоит впереди него.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP 19678182.

Ключевые слова: эллиптические системы первого порядка, аналитические функции, аналитические функции по Дуглису, задача Римана-Гильберта, интеграл типа Коши.

2010 Mathematics Subject Classification: 35J30, 35J40

Литература

[1] Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения*, Наука, Москва (1968).

[2] Douglis A.A. A function-theoretic approach to elliptic systems of eqations in two variables, *Comm. Pure Appl. Math.*, **6** (1953), P. 253-289.

[3] Солдатов А.П. Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай, *Изв. АН СССР (сер. Матем.)*, **55**:5 (1991), С. 1070-1100.

Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности при краевых условиях Самарского-Ионкина в случае отсутствия согласования начальных и граничных данных

А.К. МЫРЗАХМЕТОВА[a], М.А. САДЫБЕКОВ[b]

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: [a]*myrzakhmetova@math.kz*, [b]*sadybekov@math.kz*

В докладе рассматривается начально-краевая задача для уравнения теплопроводности при краевых условиях Самарского-Ионкина в случае отсутствия согласования начальных и граничных данных.

Задача S-I. Найти в области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ решение $u(x,t)$ уравнения теплопроводности

$$u_t - k^2 u_x x = f(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq l, \tag{2}$$

и нелокальным краевым условиям

$$\begin{cases} u_x(0,t) - u_x(l,t) = 0, \\ \qquad\qquad u(0,t) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Хорошо известно, что для существования классического решения необходимо выполнение условий согласования. Например, условиями согласования нулевого и первого порядков являются

$$A_0 \equiv \varphi(0) = 0,\ A_1 \equiv \varphi'(0) - \varphi'(l) = 0. \tag{4}$$

Условие согласования второго порядка возникают, когда мы рассматриваем решения задачи из класса $u \in C^{2,1}_{x,t}(\bar{\Omega})$. Для функций из такого класса мы можем перейти к пределу в уравнении (1) при $t \to 0$ при $x = 0$ и $x = l$. Тогда получаем

$$A_2 \equiv -k^2[\varphi''(0)] - f(0,0) = 0. \tag{4}$$

Для задачи с краевыми условиями Дирихле вопрос о решениях при рассогласовании граничных и начальных данных исследован в [1]. Нами рассматривается задача с нескольными краевыми условиями.

Теорема 1. Для любых $\varphi \in C^{2+\alpha}[0,l], f \in C^{\alpha,\alpha/2}_{x,t}(\bar{\Omega})$, не удовлетворяющих условиям согласования нулевого и первого порядков, задача (1)-(3) имеет единственное решение

$$u(x,t) = V_0(x,t) + V_1(x,t) + \upsilon(x,t),$$

где функции $V_0(x,t)$ и $V_1(x,t)$ – нерегулярные части решения, определяемые формулами

$$V_0(x,t) = -\frac{1}{2}A_0\left(\operatorname{erfc}\frac{x}{2k\sqrt{t}}\right), \tag{5}$$

$$V_1(x,t) = A_1 k\sqrt{t}\left(i\mathrm{erfc}\frac{x}{2k\sqrt{t}} + i\mathrm{erfc}\frac{l-x}{2k\sqrt{t}}\right), \tag{6}$$

а $v(x,t)$ принадлежит классу $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x,t}(\bar{\Omega})$ и для неё справедлива оценка

$$\|v\|^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\Omega} \leq C\left\{\|\varphi\|^{2+\alpha}_{[0,l]} + \|f\|^{(\alpha,\alpha/2)}_{\Omega}\right\}. \tag{7}$$

Теорема 2. Для любых $\varphi \in C^{2+\alpha}[0,l], f \in C^{\alpha,\alpha/2}_{x,t}(\bar{\Omega})$, не удовлетворяющих условиям согласования первого и второго порядков, задача (1)-(3) имеет единственное решение

$$u(x,t) = V_0(x,t) + V_1(x,t) + V_2(x,t) + v(x,t),$$

где функции $V_0(x,t)$, $V_1(x,t)$ и $V_2(x,t)$– нерегулярные части решения, определяемые формулами (5), (6) и

$$V_2(x,t) = A_2\frac{t}{i^2\mathrm{erfc}0}\left(i^2\mathrm{erfc}\frac{x}{2k\sqrt{t}}\right). \tag{8}$$

а $v(x,t)$ принадлежит классу $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x,t}(\bar{\Omega})$ и для неё справедлива оценка (7).

Funding: Авторы поддержаны грантом №AP14869063 МНВО РК.

Keywords: уравнение теплопроводности, условие Самарского, сильное решение, нелокальное краевое условие, математическая модель, базис Рисса.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K05, 335K15

Литература

[1] Bizhanova G.I. Solutions in Holder spaces of boundary-value problems for parabolic equations with nonconjugate initial and boundary data, в: *Journal of Mathematical Sciences*, 2010, Vol.171, No.1, 9–321.

О разрешимости одной задачи для уравнения смешанного типа

Ф.М. Муминов[a], О.И. Сайфидинов, М.А. Абдукодирова, Э.А. Махмудов[b]

Алмалыкский филиал ТГТУ, Алмалык, Узбекистан
E-mail: [a]farxod.muminov.58@inbox.ru, [b]m.abduqodirova@mail.ru

Нахождению и исследованию одной корректной краевой задачи для уравнения второго порядка в случае, когда $a_i \equiv 0$

$$\sum a_{i,j}(x,t)\xi_i\xi_j \geq 0, \forall \xi \in R^n, \quad (x,t) \in D$$

посвящена работа [1], [2].

Пусть G — область в пространстве R^n с гладкой границей. $D = (O,T) \times G$ — цилиндрическая область в пространстве $R^{n+1}(x,t) = (x_1, x_2, ..., x_n, t)$ с боковой поверхностью $\Gamma = (O,T) \times j$, и S_0, S_T соответственно, нижнее и верхнее основания силиндра.

В области D рассмотрим дифференциальное уравнении второго порядка:

$$Lu = k(x,t)u_{tt} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)u_{xit} + \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\delta}{\delta x_i}(a_{ij}(x,t)u_{xj}) + bu_t + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{xi} + Cu = f, \tag{1}$$

В настоящей работе предлагается одна корректная постановка краевой задачи для уравнения (1), которая включает в себя и часть линейных постановок обратных задач, но уже без положений знакоопределенности квадратичной формы $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j$

Введем обозначения:

$$S_0^+ = \{(x,0) : k(x,0) > 0\},$$

$$S_T^- = \{(x,T) : k(x,T) < 0\}$$

$$P_0^+ = \left\{(x,0) : \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,0)\xi_i\xi_j > 0, \forall\xi \in R^n\right\}$$

$$P_T^- = \left\{(x,T) : \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,T)\xi_i\xi_j < 0, \forall\xi \in R^n\right\}$$

$$\Gamma_0 = \left\{(x,T) \in \Gamma : \sum_{i=1}^{n} a_i\nu_j \le 0, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\nu_j = 0, j = 1..n\right\}$$

где $\nu = (\nu_1, \nu_2, ...\nu_n)$ — вектор внутренней нормали на Γ как известно [1], постановка корректных краевых задач зависит от младших коэффициентов и, вообще говоря, от правой части уравнения. Поэтому положим на коэффициенты уравнения (1) некоторые условия, а именно:

$$2b - k_t - \sum_{i=1}^{n} a_{ix_i} \ge \delta > 0, c_t(x,t) \le 0, c(x,t) < 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \ge \delta_2 |\xi|^2, \forall\xi \in R^n, \delta_1 \cdot \delta_2 \ge nb_i^2, i = 1,2,..,n, (x,t) \in D, \tag{2}$$

и будем предполагать, что всюду ниже они выполнены.

Краевая задача: требуется найти вектор функцию $u(x,t), \rho(x)$ такую, что

$$u|_{S_0 \setminus \overline{P}_0^+} = 0; u|_{S_T \setminus \overline{P}_T^-} = 0; u|_{\Gamma \setminus \overline{\Gamma}_0} = 0; u_t|_{\overline{S}_0^+} = 0; u_t|_{\overline{S}_T^-} = 0, \tag{3}$$

и удолетворяюшую уравнению

$$Lu = f + g(x), \tag{4}$$

Обозначим через C_4 класс функций из пространства Соболева $W_2^2(D)$, удовлетворяющих граничным условиям (3)

Лемма 1. *Пусть выполнены условия (2). Тогда для любой функции $u(x,t)$ из* класса C_4 выполняются неравенства:

$$\int_D u_t Lu dD = (u_t, L_4) \ge m\,\|u\|_1^2, \quad m > 0,\ \forall u \in C_4$$

$$\|Lu\|_0 \ge m\,\|u\|_1^2, \tag{5}$$

где $\|\cdot\|_k$ — норма в пространстве Соболева $W_2^k(D)$

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, пространства Соболева.

2010 Mathematics Subject Classification: 35M10, 35M12

Литература

[1] Врагов В.Н. *К теории краевых задач для уравнений смешанного типа в пространстве*, Дифференциальные уравнения , Т13, №6 с 1098-1105 (1977).

[2] Муминов Ф.М., Бекмуратов У.Н. Mixed boundary value problems for composite type equation, *International Engineering Journal for Research and Development*, **5**:6 (2020), 623–629.

Краевая задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения дробного порядка

Н.К. ОЧИЛОВА

Международный университет Кимё в Ташкенте, Ташкент, Узбекистан
E-mail: nargiz.ochilova@gmail.com

Известно, что особый интерес представляет теория краевых задач для вырождающихся уравнений смешанного типа с дифференцированием дробного порядка. Это связано с необходимостью применения свойств специальных функций. В этом легко убедиться, изучив недавно опубликованные работы многих авторов в этом направлении. Отметим работы А.Килбаса., О.А. Репина [1], Н.К. Очиловой и Т.К.Юлдашева [2] (и ссылки в этих работах) и др.

В данной работе доказывается существование и единственность решения локальной задачи для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с дробной производной Капуто и со спектральным параметром λ (в гиперболическом уравнение).

Рассмотрим уравнение

$$= \begin{cases} u_{xx} -_C D_{0t}^{\alpha} u, \text{ при } 0 < x < l, \ \ y > 0, \\ (-y)^m u_{xx} - u_{yy} + \lambda^2 (-y)^m u, \text{ при } 0 < x < l, \ \ y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $m = const > 0$, λ — заданное действительное или чисто мнимое число, $0 < \alpha < 1$ ($\alpha \in R$),

$${}_C D_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha} u_s(x,s) ds,$$

дифференциальный оператор Капуто дробного порядка α, $u(x,t)$ — неизвестная функция которая требуется определить.

Пусть Ω — конечная область, ограниченная отрезками $B_1B_2 = \{(x,\, y) :\, x = l,\, 0 \le y \le h\}$, $A_1A_2 = \{(x,\, y) :\, x = 0,\, 0 \le y \le h\}$, $B_2A_2 = \{(x,\, y) :\, y = h,\, 0 \le x \le l\}$ при $y > 0$, и характеристиками $B_1C :\, x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = l$, $A_1C :\, x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0$ уравнения (1) при $y < 0$, где $B_1 = (l;\, 0)$, $B_2 = (l;\, h)$, $A_1 = (0;\, 0)$, $A_2 = (0;\, h)$ и $C = \left(\frac{l}{2};\, -\frac{m+2}{4}^{\frac{2}{m+2}}\right)$.

Введем обозначения: $\Omega^+ = \Omega \cap \{t > 0\}$, $\Omega^- = \Omega \cap \{y < 0\}$ и $I = \{(x,y) : 0 < x < l, y = 0\}$.

Постановка задачи. В области Ω для уравнения (1) исследуется следующая задача.

Задача Требуется найти решение $u(x,y)$ уравнения (1), со следующими свойствами:
1) $u(x,y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega^-)$, $u_{xx},\ {}_C D_{0t}^{\alpha} u \in C(\Omega^+)$,
2) $u_y \in C(\Omega^- \cup I)$, причем $u_y(x,0)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше $1 - 2\beta$ на концах интервала $(0,l)$,
3) $u(x,t)$ удовлетворяет следующим краевым условиям

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \ \ u(l,y) = \varphi_2(y), \ \ 0 \le y \le h,$$

$$u(x,y)|_{A_1C} = \psi(x), \ \ 0 \le x \le \frac{l}{2},$$

и условию склеивания:

$$\lim_{y \to +0} y^{1-\alpha} u_y(x,\, y) = \lambda_1(x)\, u_y(x,\, -0) + \lambda_2(x),\, 0 < x < l,$$

где $\beta = \frac{m}{2(m+2)}$, $\varphi_j(y), \lambda_j(x), \psi(x),\ \ (j = \overline{1,2})$ — заданные функции, причем $\varphi_1(0) = \psi(0)$, При определенных условиях на заданные функции и параметр β, с помощью принципа экстремума и интегралов энергии доказывается единственность решения поставленной задачи. А существование доказывается применяя метод интегральных уравнений, при этом широко применяется свойства гипергеометрических функций и интегро-дифференциальных операторов Римана-Лиувилля.

Ключевые слова: вырождающиеся уравнения, дифференциальный оператор дробного порядка, гипергеометрическая функция Гаусса, однозначная разрешимость.

2010 Mathematics Subject Classification: 35M10, 35K05, 35K20

Литература

[1] A. A. Kilbas., O. A. Repin. An analog of the Tricomi problem for a mixed type equation with a partial fractional derivative, *Fractional Calculus and Applied Analysis.* **13**.1. 69-84.(2010)

[2] N.K. Ochilova .,T. K. Yuldashev. On a Nonlocal Boundary Value Problem for a Degenerate Parabolic-Hyperbolic Equation with Fractional Derivative, *Lobachevskii Journal of Mathematics*,,**43**.1. 229–236.(2022).

Устойчивые разностные схемы для многослойной периодической задачи теплопроводности

И.Н. ПАНКРАТОВА

Институт математики и математического моделирования,
Алматы, Казахстан
E-mail: pankratova@math.kz

Рассматривается начально-краевая задача для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом теплопроводности $k(x)$

$$u_t(x,t) - k_1 u_{xx}(x,t) = f(x,t), \;\; 0 < x < x_0,\, 0 < t < T, \tag{1}$$

$$u_t(x,t) - k_2 u_{xx}(x,t) = f(x,t), \;\; x_0 < x < 1,\, 0 < t < T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \;\; 0 \le x \le 1, \tag{3}$$

условиями сопряжения

$$u(x_0-0,t) = u(x_0+0,t), \;\; k_1 u_x(x_0-0,t) = k_2 u_x(x_0+0,t) \tag{4}$$

и периодическими краевыми условиями

$$u(0,t) = u(1,t), \;\; k_1 u_x(0,t) = k_2 u_x(1,t). \tag{5}$$

Здесь k_1, k_2 — константы, $\varphi(x)$, $f(x,t)$ — заданные вещественные функции.

Для численного решения задачи (1)-(5) построен ее дискретный аналог — семейство разностных схем с весами, зависящих от вещественного параметра σ. Обычно на практике $0 \le \sigma \le 1$, что не обязательно. Обозначим через A разностный оператор, аппроксимирующий пространственный дифференциальный оператор уравнений, условий сопряжения и граничных условий, $\sigma_0 = 0.5 - \frac{1}{\tau\|A\|}$, где $\|A\|$ — сеточная L_2^h-норма оператора A.

Теорема. *Пусть $k(x)$ — кусочно-постоянная функция с одной точкой разрыва. Тогда разностная схема с весами устойчива при $\sigma \ge 0$, $\sigma \ge \sigma_0$ и ее решение сходится к точному решению задачи (1)-(5) в L_2^h-норме со скоростью $O\left(h^2 + \tau^{m_\sigma}\right)$, где $m_\sigma = 2$ при $\sigma = 0.5$; $m_\sigma = 1$ при $\sigma \neq 0.5$.*

Замечание. Теорема остается справедливой в случае, когда коэффициент $k(x)$ имеет два и более разрывов в промежутке $0 < x < 1$.

Funding: Автор был поддержан грантом N AP19679487 КН МОН РК.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, нелокальные краевые условия, периодические решения разностных уравнений, теория устойчивости разностных уравнений.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K05, 35K20, 39A23, 39A30

Об обращении операторов дробного интегрирования и дифференцирования распределенного порядка

А.В. ПСХУ

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия
E-mail: pskhu@list.ru,

Рассмотрим оператор

$$D_{0x}^{[\mu]} f(x) = \int_{\mathbb{R}} D_{0x}^{t} f(x)\, \mu\,(dt)\,, \tag{1}$$

где D_{0x}^{t} — дробная производная Римана–Лиувилля порядка t по переменной x с началом в точке $x = 0$; μ — борелевская (вообще говоря, знакопеременная) мера на $\mathbb{R}$. Предполагается, что $\beta := \sup \operatorname{supp} \mu < \infty$.

Оператор (1) является оператором интегро-дифференцирования распределенного порядка [1, 2]. В случае, когда $\beta \leq 0$, это интегральный оператор, и дифференциальный (интегро-дифференциальный), если $\beta > 0$. Он может быть записан в виде

$$D_{0x}^{[\mu]} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left(f * \Phi_{\mu,n}\right)(x), \tag{2}$$

где

$$n = \min\{k : \, k \geq \beta, \, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}, \qquad \Phi_{\mu,n}(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^{n-t-1}}{\Gamma(n-t)}\, \mu\,(dt)\,,$$

В докладе обсуждаются вопросы обращения оператора (1). Метод обращения основан на обобщенном преобразовании Станковича [3], связывающего (1) с оператором дифференцирования первого порядка. В частности, для ядра в представлении (2) найдена пара Сонина [4, 5].

Ключевые слова: дробная производная, оператор дифференцирования распределенного порядка, формула обращения, преобразование Станковича, пара Сонина.

2010 Mathematics Subject Classification: 26A33, 35A22, 34A08, 47A05

Литература

[1] Нахушев А.М. О непрерывных дифференциальных уравнениях и их разностных аналогах, *Докл. АН СССР*, **300**:4 (1988), 796–799.

[2] Нахушев А.М. К теории дробного исчисления, *Дифференц. уравнения*, **24**:2 (1988), 313–324.

[3] Pskhu A. Transmutation operators intertwining first-order and distributed-order derivatives, *Bol. Soc. Mat. Mex.*, **29**:93 (2023), 1–17.

[4] Сонин Н.Я. *Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах*, ГИТТЛ, Москва (1954).

[5] Рубин Б.С. Теорема вложения для образов операторов свертки на конечном отрезке и операторы типа потенциала, I, *Изв. вузов. Матем.*, 1(236) (1982), 53-63.

Нелокальная задача для вырождающегося уравнения эллиптического типа с сингулярным коэффициентом

Менглибай Холтожибаевич РУЗИЕВ[1,a], Каллигул Бахтияр кизи КАЗАКБАЕВА[1,b]

[1]*Институт Математики им. В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан*
E-mail: [a]ruzievmkh@gmail.com, [b]qalligul96@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$y^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y - \lambda^2 y^m u = 0 \tag{1}$$

где $m > 0$, $-\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ в вертикальной полуполосе D=$\{(x, y) : 0 < x < 1,\ \ y > 0\ \}$.

Пусть $\overline{D} = D \cup \bar{J}_0 \cup \overline{OB} \cup \bar{J}_1$, где $O(0,0)$, $B(1,0)$, $J_0 = \{(x,y) : x = 0,\ y > 0\}$, $J_1 = \{(x,y) : x = 1,\ y > 0\}$.

Задача F. *Найти функцию $u = u(x,y)$ со свойствами:*

1) $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup J_0 \cup J_1) \cap C^2(D)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области D,

2)
$$\lim_{y\to+\infty} u(x,y) = 0, \quad x \in [0,1], \tag{2}$$

3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(0,y) - u(1,y) = \varphi_1(y), \quad y \geq 0, \tag{3}$$

$$u_x(0,y) - u_x(1,y) = \varphi_2(y), \quad y > 0, \tag{4}$$

$$\lim_{y\to+0} y^{\beta_0} u_y = \nu(x), \quad x \in [0,1], \tag{5}$$

где $\varphi_1 = \varphi_1(y)$, $\varphi_2 = \varphi_2(y)$, $\nu = \nu(x)$ — заданные функции.

Теорема 1. *Пусть $\varphi_1(y) \equiv 0$, $\varphi_2(y) \equiv 0$, $\nu(x) \equiv 0$. Тогда задача F не может иметь более одного решения.*

Доказательство теоремы 1 проводится с помощью принципа экстремума.

Теорема 2. *Пусть $\varphi_i(y) \in C^1[0,\infty)$, $\int\limits_0^\infty |\varphi_i(y)| y^{\frac{3m+2\beta_0}{4}} dy$ сходятся, функции $\varphi_i(y)$ обращаются в нуль при $y \to +\infty$, $i = 1, 2$, $\nu(x) \in C^2[0,1]$ и на $[0,1]$ имеет кусочно-непрерывную производную третьего порядка, $\nu(0) = \nu(1)$, $\nu''(0) = \nu''(1)$. Тогда решение задачи F существует.*

Доказательство теоремы 2 проводится методом разделения переменных.

Отметим, что краевая задача F для уравнения (1) в случае, когда $\beta_0 = 0$, $\lambda = 0$ изучена в работе [1].

Ключевые слова: полуполоса, уравнение с сингулярным коэффициентом, функция Бесселя, преобразование Ханкеля, ряд, единственность решения, существование решения, метод Фурье.

2010 Mathematics Subject Classification: 35J15, 35J25, 35J70, 35J75

Литература

[1] Лернер М. Е., Репин О. А. Об одной задаче с двумя нелокальными краевыми условиями для уравнения смешанного типа, *Докл. РАН.*, **365**:5 (1999), 593–595.

Оптимальное управление непрерывным продолжением по параметру для системы линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

О.Ж. САЙИДОВ[a], М.У. ЯХШИБОЕВ[b]

Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада аль-Хоразми, г. Самарканд, Узбекистан

E-mail: [a]oltiboysaidov@gmail.com, [b] m.yakhshiboev@gmail.com,

В данной работе рассматриваются управляемые системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом на основе минимизации квадратичного функционала и синтезируется оптимальное управление дающее требуемые свойства системы. Синтез оптимального управления для системы дифференциальных уравнений изучался в работах [1-2] и др., с запаздывающим аргументом изучался частично, в общем случае такие системы рассматривалось в работах [3-5] и др. В данной работе предложен подход к синтезу оптимального управления, непрерывным продолжением по параметру и при помощи использования интегрального многообразия. Рассмотрим управляемую систему дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом на интервале $[0\,;T]$

$$\dot{X}(t) \;=\; \sum_{k=0}^{N} A_k\, X(t-\tau_k) \,+\, \sum_{r=0}^{M} B_r\, U(t-\nu_r)\,, \quad X \in R^m,\;\; U \in R^m\;, \tag{1}$$

где $\tau_k \geq 0$ $(k = 0, 1\,, \,...\,, N)$ и $\nu_r \geq 0$ $(r = 0\,,\; 1, \,...\,, M)$ — постоянные запаздывания, $A_k \geq 0$ $(k = 0, 1\,, \,...\,, N)$ и $B_r \geq 0$ $(r = 0\,,\; 1, \,...\,, M)$ — соответственно квадратные матрицы, $X(t)$ — вектор состояния, $U(t)$ — вектор управления и при $t > 0$ управление $U(t)$ такое, что квадратичный функционал

$$J \;=\; \frac{1}{2}\int_0^T (X^*(t)\,CX(t) \,+\, U^*(t)DU(t))dt\;\;, \tag{2}$$

принимает наименьшее значение, $C^* = C > 0,\;\; D^* = D > 0,\;\; T >> 0$ и знак * означает операцию транспонирования вектора или матрицы. Будем решать задачу синтеза оптимального управления для системы (1) с функционалом (2). Известно, что для минимума функционала Лагранжа

$$H \;=\; \int_0^T (\frac{1}{2}X^*(t)CX(t) + \frac{1}{2}U^*(t)DU(t) +$$

$$+\Psi^*(t)\left(\sum_{k=0}^{N} A_k X(t-\tau_k) \,+\, \sum_{r=0}^{M} B_r U(t-\nu_r) \,-\, \dot{X}(t)\right))\,dt$$

необходимо, чтобы, выполнялось условие $\delta H \,=\, 0$, где $\Psi^*(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), ..., \psi_m(t))$. Отсюда находим систему дифференциальных уравнений

$$\left\{\begin{array}{c} \dot{X}(t) = \sum_{k=0}^{N} A_k X\,(t-\tau_k) - \sum_{l,r=0}^{M} B_l D^{-1} B_r^*\, \Psi\,(t-\nu_r+\nu_l)\,, \\ \dot{\Psi}(t) = -CX\,(t) - \sum_{k=0}^{N} A_k^*\;\Psi\,(t+\tau_k)\,, \end{array}\right. \tag{3}$$

где $\dot{X}(t)$ и $\dot{\Psi}(t)$ — производные векторы и имеем следующие теоремы.

Теорема 1. *Система дифференциальных уравнений (3), имеет частное решение в виде* $X(t) \;=\; Z_1\,Q(t)\,Y$ *и* $\Psi(t) \;=\; Z_2\;Q(t)Y$*, где* $Z_1 \;=\; (W_1(1)\,, W_2(1), \;...\;, W_m(1))$ *и* $Z_2 \;=\; (V_1(1)\,, V_2(1), \;...\;, V_m(1))$ *квадратные матрицы столбцами которых является соответственно векторы* $W_n(1)$ *и* $V_n(1)$ $(n \,=\, 1,\, 2, \,...\,, m)$*, а* $Q(t)$ *также квадратные матрицы и* Y *столбцовые постоянные т.е.*

$$Q(t) \;=\; \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1 t) \;\; .... \; 0 \\ .... \\ 0 \;\;\; .... \;\; \exp(\lambda_m t) \end{pmatrix},\; Y \;=\; \begin{pmatrix} y_1 \\ ..... \\ y_m \end{pmatrix}\;,$$

и y_n $(\,n \,=\, 1\,,\; 2\,,\; ...\; m\,)$ *— произвольные постоянные,* λ_n $(n \,=\, 1,\; 2,\; ...\,, m)$ *— собственные числа.*

Теорема 2. *Если существует оптимальное управление для управляемых систем (1), то оно находится по формуле* $U_{on}(t) \;=\; K\,X(t), K \;=\; -\sum_{l=0}^{M} D^{-1}B_l^* Z_2\,Q(\nu_l)\,Z_1^{-1} \;=\; -\sum_{l=0}^{M} D^{-1}B_l^* P$ *и при этом оптимизированная система (1) принимает вид* $\dot{X}(t) \;=\; \left(\sum_{k=0}^{N} A_k\,\exp(-\lambda\tau_k) \,+\, \sum_{r=0}^{M} B_r\,K\,\exp(-\lambda\nu_r)\right)\,X(t), X \,\in\, R^m$*, а нулевое решение будет асимптотически устойчиво при* $t \,\to\, +\infty$*.*

Литература

[1] Квакернаак Х., Сиван Р. *Линейные оптимальные управления*, Мир, Москва (1973).
[2] Валеев К.Г., Жаутыков О.А. *Бесконечные системы дифференциальных уравнений*, Наука, Алма-Ата (1974).

[3] Александров В.М. Метод вычисления в реальном времени оптимального управления линейной системой с запаздывающим управлением , *Сиб. Журн. Вычисл. Математики, РАН Сибирские отделение,Новосибирск,* **17**:1 (2014),17–30.

[4] Рустамбекова У.Р. *Синтез оптимального управления систем с запаздыванием,* "Вестник", Таджикского национального университета, Душанбе, №2,(2019), 108-114.

[5] Сайидов О.Ж. *Оптимального управления основанного на построении интегрального многообразия,* «Научный вестник», СамГУ, Точные и естественные науки, №5, 1-серия, (2023), 12-22.

Исследование линейных многопериодических D-систем методом периодических характеристик

Ж.А. САРТАБАНОВ[1,a],
Г.А. АБДИКАЛИКОВА[2], Б.Ж. ОМАРОВА[3], А.А. КУЛЬЖУМИЕВА[4],
Г.М. АЙТЕНОВА[5], А.Х. ЖУМАГАЗИЕВ[6], Г.К. САКТАПБЕРГЕНОВА[7]

[1,2,3,6,7]*K.Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan*
[4,5]*M.Utemisov West Kazakhstan University, Uralsk, Kazakhstan*
E-mail: [a]*sartabanov42@mail.ru*

1. Рассмотрим относительно $x = (x_1, ..., x_n)$ линейную многопериодическую систему с D оператором [1]

$$Dx = P(\tau,t)x, D = \partial/\partial\tau + \langle e, \partial/\partial t\rangle,$$
$$P(\tau+\theta, t+\omega) = P(\tau,t) \in C^{(0,e)}_{\tau,t}(R\times R^m), \tag{1}$$

где $t = (t_1, ...t_m) \in R^m$, $\tau \in R$, $\omega = (\omega_1, ..., \omega_m)$ — вектор, $\omega_0 = \theta, \omega_1, ..., \omega_m$ — рационально несоизмеримые числа, $e = (1, ...1)$ — m-вектор, $C^{(0,e)}_{\tau,t}(R \times R^m)$ — класс гладких функций порядка $(0, e)$ по (τ, t) , $\partial/\partial t = (\partial/\partial t_1, ..., \partial/\partial t_m)$, $\langle,\rangle$ — скалярное произведение.

Общие вопросы систем вида (1) с переменными (τ, t) в пространстве прямолинейных координат $R \times R^m$ исследованы на основе метода δ-характеристик [1]. В данной работе исследование проведено на основе метода периодических β-характеристик.

Рассматривая в [2,3] характеристическое уравнение

$$dt/d\tau = e, \tag{2}$$

оператора D на цилиндрической Ц^m поверхности имели β-характеристики со свойствами

$$t = \beta(\tau, \xi, \eta), \beta(\xi, \xi, \eta) = \eta, \beta(\tau+\theta, \xi, \eta) = \beta(\tau, \xi+\theta, \eta) = \beta(\tau, \xi, \eta), \tag{3}$$

которые введены в обиход теории многопериодических систем с оператором D.

2. Из сказанного в пункте 1 следует, что подлежат исследованию вопросы, касающиеся многопериодичности решений систем (1) с оператором дифференцирования вдоль β-характеристик (3) уравнения (2). В этом направлении получены некоторые результаты а)-д):

а) Из условия многопериодичности решений [2,3] для решения системы (1)

$$x(\tau, t, u(\beta(\xi, \tau, t))) = X(\xi, \tau, t)u(\beta(\xi, \tau, t)), \quad u(t+\omega) = u(t) \in C^{(e)}_t(R^m), \tag{4}$$

необходимое и достаточное условие (θ, ω)-периодичности имеет вид

$$[X(\xi, \xi+\theta, t) - E]u(t) = u(t). \tag{5}$$

б) Если система (1) имеет k линейно независимых (θ, ω)-периодических решений, то тогда сопряжённая система

$$Dz = -P^*(\tau, t)z, \tag{1*}$$

также имеет k линейно независимых (θ,ω)-периодических решений, где $k \le n$, $P^*(\tau,t)$-транспонированная матрица $P(\tau,t)$.

в) Если система (1) не имеет (θ,ω)-периодических решений кроме нулевого, то неоднородная система

$$Dx = f(\tau,t), f(\tau+\theta,t+\omega) \in C^{(0,e)}_{\tau,t}(R \times R^m), \tag{6}$$

допускает единственное (θ,ω)-периодическое решение.

г) Если $z(\tau,t)$ — (θ,ω)-периодическое решение системы (1^*), соответствующее $x(\tau,t)$ — (θ,ω)-периодическому решению системы (1), то система (6) имеет (θ,ω)-периодическое решение тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\int_0^\theta \langle z(\xi,\beta(\xi,\tau,t)), f(\xi,\beta(\xi,\tau,t))\rangle ds = 0. \tag{7}$$

д) Существенные результаты получены по исследованию линейных колебаний, когда $P(\tau,t)$ является матрицей, постоянной вдоль периодических характеристик

$$P(\tau,t) = A(\beta(\xi,\tau,t)), A(t+\omega) = A(t) \in C^{(e)}_t(R^m). \tag{8}$$

Фактически исследования, связанные с (4)-(8) являются дальнейшим развитием вопросов теории периодических колебаний [4] на многочастотные случаи.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP19676629 МНВО РК

Ключевые слова: многопериодическая система, оператор дифференцирования, периодическая характеристика, матрицант, сопрежённая система, постоянная вдоль характеристики.

2010 Mathematics Subject Classification: 34C25, 35B10, 58D20

Литература

[1] Харасахал В.Х. *Почти-периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений*, Алма-Ата: Наука, (1970), -200с.

[2] Сартабанов Ж.А. Implementation of small parameter method for the study of multiperiodic solutions of systems with a diagonal differentiation operator, *VII Congress TWMS*, (2023), P.133..

[3] Сартабанов Ж.А. Интегрирование многопериодических функций вдоль периодических характеристик оператора дифференцирования по диагонали, Международная научно-практическая конференция, Университет имени Шакарима г. Семей (27.10.2023).

[4] Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости*, М: Наука, (1967), -470с.

Об одной обратной задаче для уравнения вязкоупругости

Ж.Ш. САФАРОВ[1,2,a], У.Н. КАЛАНДАРОВ[2,b] М.Ж. САФАРОВА[3,c]

[1] *Институт Математики АН РУз, Ташкент, Узбекистан*

[2] *ТУИТ имени Мухаммада ал-Хоразмий, Ташкент, Узбекистан*

[3] *Ташкентский университет прикладных наук, Ташкент, Узбекистан*

E-mail: [a]*j.safarov65@mail.ru*, [b]ukalandarovmath@gmail.com, [c]maftunasafarova94@mail.ru

Задачи определения ядра интегрального оператора интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа является бурно развивающимся в настоящее время направлением современной математической физики. Обратные задачи такого рода возникают во многих областях прикладной науки, таких как электродинамика, акустика, квантовая теория рассеяния, геофизика астрономия и др.

В работах [24]-[25] исследуются обратные задачи для двумерного неоднородного интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа, в случаях, когда пространственную область представляют, соответственно квадрат и круг.

В данной работе исследуется обратная задача, заключающаяся в нахождении одномерного ядра свертки интегрального члена неоднородного интегро – дифференциального уравнения с гиперболическим оператором общего типа в главной части. Основными результатами данной работы являются теоремы однозначной разрешимости как прямой, так и обратной задачи.

В области $Q = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t \leq T\}$, рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} = \int_0^t k(t-\theta)u_{xx}(x,\theta)\,d\theta + g(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

с начальными

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 < x < l, \tag{2}$$

и граничными условиями:

$$u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0, \quad t > 0, \tag{3}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(x,t)$ — заданные функции.

Определение 1. Классическим решением смешанной задачи (1)–(3) назовем функцию $u(x,t)$, которая дважды непрерывно дифференцируема в замкнутом множестве Q и удовлетворяет всем условиям смешанной задачи (1) в обычном классическом смысле.

В обратной задаче требуется найти функцию $k(t)$, если относительно решения прямой задачи (1)–(3) имеется дополнительная информация:

$$u(x_0,t) = h(t), \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{4}$$

где $h(t)$ — заданная функция, $x_0 \in (0,l)$ — некоторое число.

Определение 2. Решением обратной задачи (1)–(4) назовем функцию $k(t)$ из класса $C^2\big(Q\big) \cap C^1\big(\overline{Q}\big)$, если соответствующее ей решение прямой задачи $u(x,t)$ удовлетворяет уравнениям (1)–(3).

Сначала исследуется прямая задача(1)–(3). Решение этой задачи будем искать в виде ряда Фурье

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t)v_m(x).$$

Теорема 1. *Пусть $k(t) \in C[0,T]$, $\varphi(x) \in C^4[0,l]$, $\psi(x) \in C^3[0,l]$ и $g(x,t) \in C^{3,0}_{x,t}(\overline{Q})$, кроме того выполнены условия $\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$,*

$$\psi(0) = \psi(l) = \psi''(0) = \psi''(l) = 0,\ g(0,t) = g(l,t) = g_{xx}(0,t) = g_{xx}(l,t) = 0.$$

Тогда существует единственное решение задачи (1)–(3).

Для разрешимости обратной задачи требуется выполнение следующих условий: $\varphi(x) \in C^5[0,l]$, $\psi(x) \in C^4[0,l]$ и $g(x,t) \in C^{4,0}_{x,t}(\overline{Q})$,

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = \varphi''''(0) = \varphi''''(l) = 0, \tag{5}$$

$$\psi(0) = \psi(l) = \psi''(0) = \psi''(l) = 0,\ g(0,t) = g(l,t) = g_{xx}(0,t) = g_{xx}(l,t) = 0,$$

Теорема 2. *Если выполнены условия (5), кроме того*

$$h(t) \in C^3[0,T],\ \ h(0) = \varphi(x_0),\ \ h'(0) = \psi(x_0),$$

$$h''(0) = g(0) - \lambda^2\varphi''(x_0) \neq 0.$$

Тогда для любого фиксированного $T > 0$ существует единственное решение обратной задачи (1)–(4) $k(t)$ из класса $C^2[0,T]$.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, обратная задача, ядро, спектральная задача, теорема Банаха, неравенство Гронуолла.

2010 Mathematics Subject Classification: 35R30, 35L10

Литература

[1] Safarov J.Sh., Durdiev D.K. Inverse Problem for an Integro-Differential Wave Equation in a Cylindrical Domain, *Lobachevskii journal of mathematics*, **43**:11 (2022), 239–249. DOI:10.1134/S199508022214030X

[2] Durdiev D.K., Safarov J.Sh. Inverse Problem for an Integrodifferential Equation of the Hyperbolic Type in a Rectangular Domain, *Mathematical Notes*, **114**:1-2 (2023), 199–211. DOI https://doi.org/10.1134/S0001434623070210

Неразрешимая задача оптимального управления с бесконечным множеством решений условий оптимальности, образующим минимизирующую последовательность

С.Я. СЕРОВАЙСКИЙ

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: serovajskys@mail.ru

Задачи оптимального управления отличаются фантастическим многообразием свойств. Поразительно то, что удивительные результаты подчас наблюдаются даже для чрезвычайно простых задач, казалось бы, не предвещающих ничего неожиданного. Приведем один подобный пример.

Рассматривается система, описываемая простейшим уравнением $x' = u$ на единичном интервале времени. Требуется найти такое управления $u = u(t)$, удовлетворяющее изопериметрическому условию

$$\int_0^1 u^2 dt \;=\; 1,$$

которое переводит систему из нулевого начального состояния в нулевое же конечное состояние и минимизирует функционал

$$I(u) \;=\; \int_0^1 x^2 dt.$$

Система условий оптимальности в форме принципа максимума в данном случае имеет бесконечное множество решений, характеризуемых равенствами

$$u_k^+(t) = \sqrt{2}\cos k\pi t,\; u_k^-(t) = -\sqrt{2}\cos k\pi t,\; k = 1, 2, \dots .$$

Им соответствуют значения критерия оптимальности

$$I(u_k^+) \;=\; I(u_k^-)\,\frac{2}{k^2\pi^2},\; k = 1, 2, \dots .$$

Очевидно, последовательности $\{I(u_k^+)\}$ и $\{I(u_k^+)\}$ стремятся к нулю. Поскольку минимизируемый функционал является неотрицательным, последовательности решений условий оптимальности оказываются минимизирующими. Однако критерий оптимальности может обратиться в нуль исключительно при $x = 0$, что соответствует управлению $u = 0$. Поскольку последнее не удовлетворяет изопериметрическому условию, заключаем, что минимум функционала на всем множестве допустимых управлений не достигается.

Итак, рассматриваемая задача обладает следующими свойствами: она неразрешима, условия оптимальности для нее не являются достаточными и имеют бесконечное множество решений, и, что самое удивительное, они образуют минимизирующую последовательность, а значит, могут быть использованы для практического нахождения обобщенного решения задачи.

Ключевые слова: оптимальное управление, неразрешимость, недостаточность условий оптимальности, минимизирующая последовательность, обобщенное решение.

2010 Mathematics Subject Classification: 49J20, 49K15

О краевой задаче с импульсным воздействием для дифференциального уравнения

С.М. ТЕМЕШЕВА[1,2,a], А.Б. ТЛЕУЛЕСОВА[2,3,b], А.С. ОРАЗБЕКОВА[3,c]

[1]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2]*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
[3]*Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан*
E-mail: [a]*temeshevasvetlana@gmail.com*, [b]*agila_72@mail.ru*, [c]*mt-513@mail.ru*

Рассматривается нелинейная краевая задача с импульсными воздействиями для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad t \in (0,T) \setminus \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m\}, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$x(\theta_i) - x(\theta_i - 0) = p_i, \quad p_i \in \mathbb{R}^n, \quad i = \overline{1,m},$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in \mathbb{R}^n,$$

где $0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_m < \theta_{m+1} = T$, вектор-функция $f : ([0,T] \setminus \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m\}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывна, B, C — заданные постоянные $(n \times n)$ матрицы, p_1, p_2, …, p_m, d — заданные постоянные n-векторы.

Данная работа была посвящена получению достаточных условий существования изолированного в некотором шаре решения задачи (2)-(2). Идеи метода параметризации были использованы для определения разрывной траектории и разработки алгоритма поиска изолированного решения данной задачи.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP19675193 Комитета науки МНВО РК.

Ключевые слова: метод параметризации, нелинейное дифференциальное уравнение, краевая задача с импульсным воздействием, достаточные условия разрешимости, алгоритм.

2010 Mathematics Subject Classification:34A37, 34B37

Литература

[1] Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M. Criteria for the Existence of an Isolated Solution of a Nonlinear Boundary-Value Problem, *Ukrainian Mathematical Journal.* **70**:3(2018), 410–421.

[2] Tleulessova A.B., Orazbekova A.S., Kalpakov Y.N. On the solvability of a linear boundary value problem with impulse effects for differential system. *Lobachevskii J. Math.*, **44**:2(2023), 653-660.

О задаче восстановления с вырождающейся диффузией

М.И. ТЛЕУБЕРГЕНОВ[1,2,a], Г.К. ВАСИЛИНА[1,3,b], А.Т. САРЫПБЕК[1,c], Н.Д. ЕРІМБЕТ[1,2,d]

[1]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2]*КазНУ имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
[3]*АУЭС имени Г. Даукеева*
E-mail: [a]*marat207@mail.ru*, [b]*v_gulmira@mail.ru*, [c]*alua.sarypbek@mail.ru*, [d]*erimbetnuraly@gmail.com*

Пусть задана система стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка с вырождающейся диффузией

$$\begin{cases} \dot{x} = g_1(x,y,t), \quad x \in R^{n_1}, y \in R^{n_2},\ n_1+n_2=n,\ n_1 \geq 0,\ n_2 \geq 0, \\ \dot{y} = g_2(x,y,t) + D(x,y,t)u + \sigma(x,y,t)\dot{\xi}, \quad u \in R^r,\ \xi \in R^k. \end{cases} \tag{1}$$

Требуется определить входящее в коэффициент сноса множество вектор-функций $\{u = u(x,y,t) \in R^r\}$ так, чтобы заданное множество

$$\Lambda(t) : \lambda(x,y,t) = 0, \quad \text{где } \lambda = \lambda(x,\dot{x},t) \in C^{221}_{x\dot{x}t},\ \lambda \in R^m, \tag{2}$$

было интегральным многообразием системы стохастических дифференциальных уравнений (1). Здесь $\{\xi_1(t,\omega),...,\xi_k(t,\omega)\}$ — система независимых винеровских процессов [1], заданная на некотором вероятностном пространстве (Ω,U,P). Предполагается, что вектор-функции $g_1(x,y,t)$, $g_2(x,y,t)$ и матрицы $D(x,y,t)$, $\sigma(x,y,t)$ — непрерывны по t и липшицевы по x и y в области $R^n \ni z = (x^T,y^T)^T$; а также существует постоянная $L>0$ такая, что $\|g_1(z,t)\|^2 + \|g_2(z,t)\|^2 + \|D(z,t)\|^2 + \|\sigma(z,t)\|^2 \leq L(1+\|z\|^2)$, что обеспечивает в рассматриваемой области существование и единственность до стохастической эквивалентности решения $(x(t)^T, y(t)^T)^T$ уравнения (1) с начальным условием $(x(t_0)^T, y(t_0)^T)^T = (x_0^T, y_0^T)^T$, являющегося непрерывным с вероятностью 1 строго марковским процессом [2]. Указанная задача в случае отсутствия случайных возмущений ($\sigma \equiv 0$) достаточно полно исследована в работах [3,4 и др.]. А различные частные случаи рассматриваемой стохастической задачи восстановления исследовались в [5-7]. Для решения стохастической задачи восстановления используется метод квазиобращения [8].

По правилу стохастического дифференцирования Ито [9] составляется уравнение возмущенного движения

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\lambda}{\partial x}g_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial y}g_2 + \frac{\partial\lambda}{\partial y}Du + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial y} : \sigma\sigma^T\right] + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\sigma\dot{\xi}, \tag{3}$$

где под $\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial y} : D$, следуя [9], понимается вектор, элементами которого служат следы произведений матриц вторых производных соответствующих элементов $\lambda_\mu(x,y,t)$ вектора $\lambda(x,y,t)$ по компонентам y на матрицу D. Далее, введем произвольные функции Н.П. Еругина [3]: m-мерную вектор-функцию A и $(m \times k)$ матрицу B, обладающие свойством $A(0,x,y,t) \equiv 0,\ B(0,x,y,t) \equiv 0$, такие, что имеет место

$$\dot{\lambda} = A(\lambda,x,y,t) + B(\lambda,x,y,t)\dot{\xi}. \tag{4}$$

На основе уравнений (3) и (4) приходим к следующим соотношениям, из которых нужно определить вектор-функцию управления u и матрицу σ

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}Du = A - \frac{\partial\lambda}{\partial t} - \frac{\partial\lambda}{\partial x}g_1 - \frac{\partial\lambda}{\partial y}g_2 - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial y} : \sigma\sigma^T\right], \quad \frac{\partial\lambda}{\partial y}\sigma = B. \tag{5}$$

Для разрешения задачи потребуется следующая лемма.

Лемма 1. [8, с.12-13]. *Совокупность всех решений линейной системы*

$$H\vartheta = g, \quad H = (h_{\mu l})\,, \quad \vartheta = (\vartheta_l), \quad g = (g_\mu), \quad \mu = \overline{1,m}, \quad l = \overline{1,n}, \quad m \le n,$$

где матрица H имеет ранг равный m, определяется выражением

$$\vartheta = s\,[H\,C] + H^{+}g. \tag{6}$$

Здесь s-произвольная скалярная величина, $[H\,C] = [h_1 \dots h_m\, c_{m+1} \dots c_{n-1}]$ есть векторное произведение векторов $h_\mu = (h_{\mu l})$ и произвольных векторов $c_\rho = (c_{\rho l})$, $\rho = \overline{m+1,\, n-1}$; $H^{+} = H^{T}\left(HH^{T}\right)^{-1}$, H^{T} — матрица, транспонированная к H.

Обозначив через $\tilde{D} = \dfrac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}D$, по формуле (6) леммы 1 из соотношений (5) определим искомые вектор-функцию u и столбцы σ_i, $i = \overline{1,k}$; матрицы σ в виде

$$u = s_1\left[\tilde{D}C\right] + \left(\tilde{D}\right)^{+} b_1, \quad \sigma_i = s_{2i}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}C\right] + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{x}}\right)^{+} B_i, \; i = \overline{1,k}; \tag{7}$$

где $b_1 = A - \dfrac{\partial\lambda}{\partial t} - \dfrac{\partial\lambda}{\partial x}g_1 - \dfrac{\partial\lambda}{\partial y}g_2 - \dfrac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\partial y} : \sigma\sigma^{T}\right]$, $\sigma_i = (\sigma_{1i}, \sigma_{2i}, \dots, \sigma_{ni})^{T}$ – i-ый столбец матрицы $\sigma = (\sigma_{\nu j})$, $(\nu = \overline{1,n},\; j = \overline{1,k})$; $B_i = (B_{1i}, B_{2i}, \dots, B_{ri})^{T}$ – i-ый столбец матрицы $B = (B_{\mu j})$, $(\mu = \overline{1,m},\; j = \overline{1,k})$. Следовательно, справедлива теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы система стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка с вырождающейся диффузией (1) имело заданное интегральное многообразие (2) необходимо и достаточно, чтобы управляющая вектор-функция u и столбцы σ_i, $i = \overline{1,k}$ матрицы диффузий σ имели вид (7).*

В представленной работе также отдельно исследованы линейный и скалярный нелинейный случаи рассматриваемой стохастической задачи восстановления.

Funding: Авторы были поддержаны грантом АР № 19677693 МНВО РК.

Ключевые слова: обратная задача, уравнение Ито, вырождающаяся диффузия.

2010 Mathematics Subject Classification: 34Cxx, 60G07, 60H10

Литература

[1] Ватанабэ С., Икэда Н. *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы*, М. (1986).

[2] Гихман И.И., Скороход А.В. *Стохастические дифференциальные уравнения*, Киев (1968).

[3] Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую, *ПММ*, **16**:6 (1952), 659–670.

[4] Галиуллин А.С. *Методы решения обратных задач динамики*, М. (1986).

[5] Tleubergenov M.I. An inverse problem for stochastic differential systems *Differential Equations*, **37**:10 (2001), 1387-1391.

[6] Tleubergenov M.I., Ibraeva G.T. On the restoration problem with degerated diffusion, *TWMS J. Pure Appl. Math., Baku*, **6**:1 (2015), 93–99.

[7] Tleubergenov M.I. On the inverse stochastic reconstruction problem *Differential Equations*, **53**:2 (2017), 274–278.

[8] Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г. *Уравнения программных движений*, М. (1986).

[9] Пугачев В.С., Синицын И.Н. *Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация*, М. (1990).

О задаче Гельмгольца с вырождающейся диффузией в классе дифференциальных уравнений эквивалентных почти наверное

М.И. ТЛЕУБЕРГЕНОВ[1,a], М.М. МЕДЕТБЕКОВ[2,b],

[1]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2]*Шымкентский университет, Шымкент, Казахстан*
E-mail: [a]*marat207@mail.ru,* [b]*ms.rashim@gmail.com,*

По заданной системе стохастических уравнений первого порядка с вырождающейся диффузией

$$\begin{cases} \dot{x}_i = X_i(x,y,t), \;\; i=\overline{1,n_1}, \\ \dot{y}_k = Y_k(x,y,t) + \sigma_{kj}(x,y,t)\dot{\xi}^j, \;\; k=\overline{1,n_2}, \; n_1 \geq 0, \; n_2 \geq 0, \; n_1+n_2=n. \end{cases} \tag{1}$$

требуется построить эквивалентные заданным стохастическим уравнениям уравнения гамильтоновой структуры.

Предполагается, что вектор-функции $X_i(x,y,t), Y_k(x,y,t)$ и матрица $\sigma(x,y,t)$ непрерывны по t и липшицевы по x, y во всем пространстве $R^n \ni z=(x^T,y^T)^T$ и удовлетворяют условию линейного роста, что обеспечивает в R^n существование и единственность до стохастической эквивалентности решения $z(t)$ уравнения (1) с начальным условием $z(t_0)=z_0$, являющегося непрерывным с вероятностью 1 строго марковским.

Для решения поставленной задачи вводятся, следуя методу Лиувилля, дополнительные переменные $\kappa_i, \; i=\overline{1,n_1}$ и $z_k, \; k=\overline{1,n_2}$, а также функция Гамильтона расширенной системы в виде

$$H = -(X_i(x,y,t)\kappa_i + Y_k(x,y,t)z_k). \tag{2}$$

Тогда $X_i = -\dfrac{\partial H}{\partial \kappa_i}$, $Y_k = -\dfrac{\partial H}{\partial z_k}$ и соответствующие уравнения расширенной системы запишутся в виде

$$\dot{\kappa}_i = \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (i=\overline{1,n_1}), \; n_1 \geq 0, \tag{3a}$$

$$\dot{x}_i = -\frac{\partial H}{\partial \kappa_i}, \tag{3b}$$

$$\dot{z}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad k=\overline{1,n_2}, \; n_2 \geq 0, \tag{3c}$$

$$\dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial z_k} + \sigma_{kj}\dot{\xi}^j, \; n_1+n_2=n, \tag{3d}$$

где уравнения (3b) и (3d) совпадают с исходными уравнениями (1), а уравнения (3a) и (3c) служат для определения вспомогательных переменных $\kappa_i, \; i=\overline{1,n}$ и $z_k, \; k=\overline{1,n_2}$.

Теорема. *Необходимым и достаточным условием представления уравнения Ито первого порядка с вырождающейся диффузией (1) в виде уравнений канонической структуры (3a)-(3d) является представление функции Гамильтона в виде (2) с помощью дополнительных переменных $\kappa_i, \; i=\overline{1,n_1}$ и $z_k, \; k=\overline{1,n_2}$, которые определяются из уравнений (3a) и (3c).*

Таким образом, методом дополнительных переменных решена задача Гельмгольца в классе дифференциальных уравнений с вырождающейся диффузией (1) эквивалентных почти наверное.

Funding: Авторы были поддержаны грантом BR20281002 КН МНВО РК.

Ключевые слова: уравнение Ито, задача Гельмгольца, функция Гамильтона.

2010 Mathematics Subject Classification: 34Cxx, 60G07, 60H10

О ЯВНОМ РЕШЕНИИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО СИНГУЛЯРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ГИПЕРОКТАНТЕ ШАРА

З.Р. ТУЛАКОВА

Ферганский филиал Ташкентского университета информационных технологий, Фергана, Узбекистан
E-mail: ziyodacoders@gmail.com

Пусть $\mathbb{R}_m$ — m-мерное евклидово пространство $(m \geq 2)$, $x := (x_1, ..., x_m)$ — произвольная точка в нём и n — натуральное число, причем $n \leq m$. Первую 2^{-n}-ую часть m-мерного шара радиуса R с центром в начале координат определим следующим образом:

$$\Omega := \left\{ x : \; x_1^2 + ... + x_m^2 < R^2, \; x_1 > 0, \, ..., x_n > 0, \right\}$$

Рассмотрим обобщенное сингулярное эллиптическое уравнение

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2\alpha_k}{x_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0 \tag{1}$$

в Ω, где $\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, α_k — действительные числа, причем $0 < 2\alpha_k < 1$.

Введем обозначения:

$$\tilde{x}_p = (x_1, ..., x_{p-1}, x_{p+1}, ..., x_m) \in \mathbb{R}_{m-1}; \quad \mathbf{0} = (0, ..., 0) \in \mathbb{R}_{m-1},$$

$$S := \left\{ x : \; x_1^2 + ... + x_m^2 = R^2, \; x_1 > 0, \, ..., x_n > 0 \right\},$$

$$D_p := \left\{ \begin{matrix} x : \; x_1^2 + ... + x_{p-1}^2 + x_{p+1}^2 + ... + x_m^2 < R^2, \\ x_1 > 0, ..., x_{p-1} > 0, x_{p+1} > 0, ..., x_n > 0 \end{matrix} \right\};$$

$$S_p := \left\{ \begin{matrix} x : \; x_1^2 + ... + x_{p-1}^2 + x_{p+1}^2 + ... + x_m^2 = R^2, \\ x_1 > 0, ..., x_{p-1} > 0, x_{p+1} > 0, ..., x_n > 0 \end{matrix} \right\}; \;\; p = \overline{1, n}.$$

Смешанная задача $\mathbf{D^n M}$. Найти регулярное решение $u\,(x)$ уравнения (1) из класса функций $C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^2\,(\Omega)$, удовлетворяющее условиям:

$$u|_{x_p=0} = \tau_p\,(\tilde{x}_p)\,, \; \tilde{x}_p \in \overline{D}_p, \; p = \overline{1, n}, \; \left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{N}}\right|_S = \varphi\,(x)\,, \; x \in S,$$

где $\tau_p \in C\left(\overline{D}_p\right)$ и $\varphi \in C\,(S)$ — заданные функции, причем функции $\tau_p\,(\tilde{x}_p)$ удовлетворяют условиям согласования:

$$\tau_p\,(\mathbf{0}) = \tau_k\,(\mathbf{0})\,, \quad \tau_k\,(\tilde{x}_k)|_{x_p=0} = \tau_p\,(\tilde{x}_p)|_{x_k=0}\,, \; k \neq p \; (k, p = \overline{1, n}).$$

Здесь $\mathbf{N}$ — внешняя нормаль к S.

Повторяя рассуждения проведенные в [1], получим решение смешанной задачи в явном виде

$$u\,(\xi) = \gamma_n \xi^{(1-2\alpha)} \sum_{k=1}^{n} (1 - 2\alpha_k) \int_{S_k} \tilde{x}_k^{(1)} \tau_k\,(\tilde{x}_k) \left[\frac{F_A^{(n-1)}\,(\sigma_{k0})}{X_k^{2\beta_n}} - \frac{F_A^{(n-1)}\,(\bar{\sigma}_{k0})}{Y_k^{2\beta_n}} \right] dS_k +$$

$$+ \int_S x^{(2\alpha)} G_n(x;\xi) \varphi\,(x)\, dS,$$

где

$$\xi^{(1-2\alpha)} = \prod_{j=1}^{n} \xi_j^{1-2\alpha_j}, \quad \tilde{x}_k^{(1)} = \prod_{j=1, j\neq k}^{n} x_j, \quad x^{(2\alpha)} = \prod_{j=1}^{n} x_j^{2\alpha_j},$$

$$F_A^{(n-1)}(z) = F_A^{(n-1)}\left[\begin{array}{l} \beta_n, 1-\alpha_1, ..., 1-\alpha_{k-1}, 1-\alpha_{k+1}, ..., 1-\alpha_n; \\ 2-2\alpha_1, ..., 2-2\alpha_{k-1}, 2-2\alpha_{k+1}, ..., 2-2\alpha_n; \end{array} z\right],$$

$$X_k^2 = \xi_k^2 + \sum_{i=1, i\neq k}^{m} (\xi_i - x_i)^2, \sigma_p^0 = -\frac{4x_p\xi_p}{X_k^2}, \quad \bar{\sigma}_p^0 = -\frac{R^2}{\rho^2}\frac{4x_p\xi_p}{Y_k^2},$$

$$Y_k^2 = \sum_{i=1, i\neq k}^{m}\left(R - \frac{x_i\xi_i}{R}\right)^2 + \frac{1}{R^2}\sum_{i=1, i\neq k}^{m}\sum_{j=1, j\neq i}^{m} x_i^2\xi_j^2 - (m-2)\,R^2,$$

$$\sigma_{k0} := \left(\sigma_1^0, ..., \sigma_{k-1}^0, \sigma_{k+1}^0, ..., \sigma_n^0\right), \quad \bar{\sigma}_{k0} := \left(\bar{\sigma}_1^0, ..., \bar{\sigma}_{k-1}^0, \bar{\sigma}_{k+1}^0, ..., \bar{\sigma}_n^0\right).$$

Здесь

$$F_A^{(n)}(a, b_1, ..., b_n; c_1, ..., c_n; \mathbf{x}) = \sum_{k_1, ..., k_n = 0}^{\infty} (a)_{k_1+...+k_n} \prod_{j=1}^{n} \frac{(b_j)_{k_j}}{(c_j)_{k_j}} \frac{x_j^{k_j}}{k_j!}, \sum_{j=1}^{n} |x_j| < 1$$

— гипергеометрическая функция Лауричелла от n переменных.

Отметим, что явное решение смешанной задачи для уравнения (1) при $m = 2$ и $n = 1$ получено в [2].

Ключевые слова: смешанная задача, многомерное эллиптическое уравнение с несколькими сингулярными коэффициентами, фундаментальное решение, гипергеометрическая функция Лауричелла многих переменных. .

2010 Mathematics Subject Classification: 35A08, 35J25, 35J70, 35J75

Литература

[1] Ergashev T.G. The Dirichlet problem for elliptic equation with several singular coefficients. *e-Journal of Analysis and Applied Mathematics*, **1** (2018), 81 – 99.

[2] Смирнов М.М. Смешанная краевая задача для уравнения $y^m u_{xx} + u_{yy} = 0$. *Сибирский математический журнал*, **4**:5 (1963), 1150 –1161.

Об условии разрешимости краевой задачи типа Дирихле для интегро-дифференциальных уравнений с инволюцией

К.И. УСМАНОВ[a], К.Ж. НАЗАРОВА[b]

Международный Казахско-Турецкий университет им. А.Ясави, Туркестан, Казахстан
E-mail: [a]kairat.usmanov@ayu.edu.kz, [b]kulzina.nazarova@ayu.edu.kz

Известно, что дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами играют важную роль при исследовании задач медицины, биологии, экономики и т.д. Некоторые из таких отклонений обладают свойствами $\alpha : [0, T] \to [0, T]$ и $\alpha^2(t) = \alpha(\alpha(t)) = t$. В дифференциальных уравнениях, в которых вместе с искомой функцией $x(t)$ имеются значения $x(\alpha(t))$ и $\dot{x}(\alpha(t))$ называют уравнениями со сдвигами Карлемана [1] или уравнениями с инволютивными преобразованиями. На отрезке $[0, 1]$ в качестве такого преобразования можно рассмотреть преобразование вида $\alpha(t) = 1 - t$.

Многие вопросы разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений с инволютивными преобразованиями исследованы достаточно хорошо. Однако, некоторые вопросы разрешимости краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений с инволютивными преобразованиями остаются открытыми. В данной работе с помощью метода параметризации исследованы условия разрешимости таких задач.

На отрезке $[0,1]$ исследуется краевая задача для неоднородного интегро-дифференциального уравнения с инволюцией

$$y''(1-x)+\lambda y(x)=\nu\int_0^1\phi(x)\psi(s)y(s)\,ds+f(x)\,,\ 0\le x\le 1, \tag{1}$$

$$y(0)=a, \quad y(1)=b \tag{2}$$

где функция $f(x)$, $\phi(x)$, $\psi(x)$ непрерывны на $[0,1]$. В краевой задаче (1), (2) $\lambda,\ \nu\neq 0$.

Разрешимость краевой задачи (1), (2) будем исследовать методом параметризации, предложенным профессором Д. Джумабаевым [2]. Метод параметризации изначально был применен для исследования однозначной разрешимости краевой задачи для систем дифференциальных уравнений. Позже методом параметризации были исследованы разрешимости различных краевых задач [3,4].

Введя обозначения $\mu_1=y\left(\frac{1}{2}\right)$, $\mu_2=y'\left(\frac{1}{2}\right)$ и используя замену $y(x)=u(x)+\mu_1+\mu_2\left(x-\frac{1}{2}\right)$ исходную краевую задачу (1), (2) формально разбиваем на две части, т.е. на задачу Коши для исходного уравнения и на систему уравнении второго порядка, для определения параметров $\lambda,\ \nu$.

Funding: Авторы были поддержаны грантом № AP23488086 Комитета науки Министерство науки и высшего образования РК.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с отклоняющими аргументами, инволютивными преобразования, метод параметризации, сдвиги Карлемана, краевые задачи.

2010 Mathematics Subject Classification: 45J05, 45J99, 34K28

Литература

[1] Carleman T. *La theՐorie des eՐquations inteՐgrales singulieՐres et ses applications.*, Annales de l'institut Henri PoincareՐ., – 1932. – 1. – P. 401–430.

[2] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation., *Comput Maths Math Phys.*, **29** (1989.), 34–46.

[3] Assanova A. T., Bakirova E. A., Kadirbayeva Z. M. Numerical Solution to a Control Problem for Integro-Differential Equations, *Comput. Math. and Math. Phys.* **60**:2 (2020)– 203–221.

[4] Dzhumabaev D.S. An algorithm for solving a linear two-point boundary value problem for an integrodifferential equation *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* **53**:6 (2013.)– 736-758.

Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа с оператором дробного порядка

Окилжон ЭРГАШЕВ

Национальный исследовательский университет «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства», Ташкент, Узбекистан
E-mail: okiljonergashev@gmail.com

Нелокальная краевая задача нового типа для эллиптического уравнения, возникающая в теории плазмы, была сформулирована А.В.Бицадзе и А.А.Самарским в работе [1] и в научной литературе получило название задачи (типа) Бицадзе-Самарского.

В нашей работе для смешанного параболо-гиперболического уравнения дробного порядка изучена нелокальная краевая задача, где в качестве граничных условий по пространственной переменной задаётся нелокальное условие типа Бицадзе-Самарского, тем самым, соответствующий дифференциальный оператор является несамосопряженным и поэтому, возникают проблемы изучения полноты и базисности корневых функций таких операторов. При этом решение построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи.

Ключевые слова: задачи типа Бицадзе-Самарского, собственные функции, полнота, базис Рисса.

2010 Mathematics Subject Classification: 34K37, 34L10, 35M10

Литература

[1] Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач, *Докл. АН СССР.*, **185**:4 (1969), 739–740.

Initial-boundary value problem for partial differential equations with discrete impulse memory

Anar ASSANOVA[1,a], Altynai MOLYBAIKYZY[2,b]

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2]*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*assanova@math.kz,* [b]*Altynai_bm@mail.ru*

In the communication on the domain $\Omega = [0, T] \times [0, \omega]$ we consider the initial-boundary value problem for partial differential equations with discrete impulse memory

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + C(t,x)u(t,x) + f(t,x) +$$
$$+A_0(t,x)\frac{\partial u(\gamma(t),x)}{\partial x} + B_0(t,x)\frac{\partial u(\gamma(t),x)}{\partial t} + C_0(t,x)u(\gamma(t),x), \tag{1}$$
$$t \neq \theta_j, \qquad j = \overline{1, N-1},$$

$$P_2(x)\frac{\partial u(0,x)}{\partial x} + S_2(x)\frac{\partial u(T,x)}{\partial x} + P_1(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=0} + S_1(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=T} +$$
$$+P_0(x)u(0,x) + S_0(x)u(T,x) = \varphi(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{2}$$

$$\lim_{t \to \theta_p + 0} \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} - \lim_{t \to \theta_p - 0} \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = \varphi_p(x), \quad x \in [0,\omega], \quad p = \overline{1, N-1}, \tag{3}$$

$$u(t,0) = \psi(t), \qquad t \in [0,T], \tag{4}$$

where $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ is unknown vector function, the $n \times n$ matrices $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $A_0(t,x)$, $B_0(t,x)$, $C_0(t,x)$ and n vector function $f(t,x)$ are piecewise continuous on Ω; $0 = \theta_0 < \theta_1 < ... < \theta_{N-1} < \theta_N = T$;

$\gamma(t) = \zeta_j$ if $t \in [\theta_j, \theta_{j+1})$, $\theta_j \le \zeta_j \le \theta_{j+1}$ for all $j = 0, 1, ..., N-1$;

the $(n \times n)$ matrices $P_i(x)$, $S_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, and n vector function $\varphi(x)$ are continuous on $[0, \omega]$, the n vector functions $\varphi_p(x)$ are continuous on $[0, \omega]$, $p = \overline{1, N-1}$ the n vector function $\psi(t)$ is continuously differentiable on $[0, T]$.

Mathematical modeling of processes with discontinuity effects has necessitated the need to develop the theory of partial differential equations with discontinuities. An important class of such equations is comprised of partial differential equations with discrete memory [1-7].

Partial differential equations with discrete impulse memory (or generalized piecewise constant argument) are more suitable for modeling and solving various application problems, including areas of neural networks, discontinuous dynamical systems, biological and medical models, etc. [3, 4, 9, 10]

In the present communication, we study questions of solvability to the initial-boundary value problem for the partial differential equations second order with discrete impulse memory (1)–(4).

Recently, we propose a new approach for solving nonlocal problem for system of hyperbolic equations second order with discrete impulse memory [10] based on Dzhumabaev's parametrization method [11, 12].

We develop this approach to a new class initial-boundary value problems for partial differential equations with discrete impulse memory (1)–(4). Conditions for the existence and uniqueness of the initial-boundary value problem for the partial differential equations with discrete impulse memory (1)–(4) are established. An algorithm for finding approximate solution this problem is offered.

Funding: This research has been/was/is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR20281002).

Keywords: partial differential equations, initial-boundary value problem, discrete impulse memory, parametrization method, solvability conditions.

2010 Mathematics Subject Classification: 35R12; 35L53; 34K06; 34K10

References

[1] Wiener J. *Generalized Solutions of Functional Differential Equations*, World Scientific, Singapore (1993).

[2] Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. *Impulsive Differential Equations*, World Scientific, Singapore (1995).

[3] Akhmet M.U. *Principles of Discontinuous Dynamical Systems*, Springer, New-York (2010).

[4] Akhmet M.U. *Nonlinear hybrid continuous/discrete-time models*, Atlantis Press, Paris (2011).

[5] Assanova A.T. Well-posed solvability of a nonlocal boundary-value problem for the systems of hyperbolic equations with impulsive effects, *Ukrainian Math. J.*, **67**:3 (2015), 333–346.

[6] Assanova A.T. On the solvability of nonlocal boundary value problem for the systems of impulsive hyperbolic equations with mixed derivatives, *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*, **5**:2 (2016), 153–165.

[7] Assanova A.T., Kadirbayeva Z.M. On the numerical algorithms of parametrization method for solving a two-point boundary-value problem for impulsive systems of loaded differential equations, *Comput. and Appl. Math.*, **37**:4 (2018), 4966–4976.

[8] Assanova A.T. Hyperbolic equation with piecewise-constant argument of generalized type and solving boundary value problems for it, *Lobachevskii J. Math.*, **42**:15 (2021), 3584–3593.

[9] Assanova A.T., Uteshova R.E. Solution of a nonlocal problem for hyperbolic equations with piecewise constant argument of generalized type, *Chaos Solitons and Fractals*, **165-2**:12 (2022), art. no. 112816.

[10] Imanchiyev A.E., Assanova A.T., Molybaikyzy A. Properties of a nonlocal problem for hyperbolic equations with impulse discrete memory, *Lobachevskii J. Math.*, **44**:10 (2023), 4299–4309.

[11] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, *U.S.S.R. Comp. Math. Math. Phys.*, **29**:1 (1989), 34–46.

[12] Assanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations, *J. Math. Anal. Appl.*, **402**:1 (2013), 167–178.

On a boundary value problem for linear differential-algebraic equations with constant coefficients

Anar ASSANOVA[a], Roza UTESHOVA[b]

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: [a]assanova@math.kz, [b]r.uteshova@math.kz

We consider the linear differential-algebraic equation with constant coefficients of the form

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \in (0, T), \tag{1}$$

subject to the boundary condition

$$Bx(0) + Cx(T) = d. \tag{2}$$

Here $E, A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $d \in \mathbb{R}^n$, $T > 0$. We suppose that the matrix pair (E, A) is regular, i.e. $\det(\lambda E - A) \neq 0$ for some $\lambda \in \mathbb{C}$.

By a solution of the boundary value problem (1), (2) we mean a function $x \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ satisfying equation (1) and the boundary condition (2).

Differential-algebraic equations have become widespread over the last decades, being a tool for modeling and simulation of dynamical systems with constraints in numerous applications [1]. The theory of boundary value problems for differential-algebraic equations started to develop by applying modified versions of the shooting and collocation methods designed for ordinary differential equations. However, there is still a need for the development of new methods or modification of known methods of the theory of differential equations, which would be applicable to differential-algebraic equations and would be of constructive nature. We use the method of parameterization proposed by Dzhumabaev [2]. This method was originally proposed for solving the linear boundary value problem (1), (2) provided $\det E \neq 0$. We apply the method of parameterization to the boundary value problem (1), (2) in the case when the matrix E is not necessarily non-singular.

We introduce the parameter $\mu \in \mathbb{R}^n$ defined as $\mu := x(0)$. By substituting $u(t) := x(t) - \mu$, problem (1), (2) is transformed into the problem with parameter

$$E\dot{u}(t) = A(u(t) + \mu) + f(t), \quad t \in (0, T), \quad u(0) = 0, \tag{3}$$

$$B\mu + C(\mu + u(T)) = d. \tag{4}$$

Let P and Q be non-singular matrices which transform (3) to Weierstrass canonical form [1], i.e.,

$$PEQ = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \quad PAQ = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}, \quad Pf = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

where J is an $n_1 \times n_1$ matrix in Jordan canonical form and N is an $n_2 \times n_2$ nilpotent matrix also in Jordan canonical form; $n_1 + n_2 = n$. Let ν denote the index of nilpotency of N. According to the space decomposition given by (5), we have the function $\tilde{u}(t) = (\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t))^T := Q^{-1}u(t)$ and the vector $\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2)^T := Q^{-1}\mu$. We then can rewrite problem (3), (4) in the following form:

$$\dot{\tilde{u}}_1(t) = J(\tilde{u}_1(t) + \tilde{\mu}_1) + \tilde{f}_1(t), \quad \tilde{u}_1(0) = 0, \tag{6}$$

$$N\dot{\tilde{u}}_2(t) = \tilde{u}_2(t) + \tilde{\mu}_2 + \tilde{f}_2(t), \quad \tilde{u}_2(0) = 0, \tag{7}$$

$$BQ\widetilde{\mu} + CQ(\tilde{\mu} + \widetilde{u}(T)) = d. \tag{8}$$

Suppose that $\widetilde{B} := BQ, \widetilde{C} := CQ$ and d in (8) are of the form

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 & \tilde{B}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

where $\tilde{B}_1, \tilde{C}_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $\tilde{B}_2, \tilde{C}_2 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, $d_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$.

Theorem 1. *Let $f \in C^\nu([0,T], \mathbb{R}^n)$. Then problem (6) - (8), where $B = \tilde{B}Q^{-1}$, $C = \tilde{C}Q^{-1}$, and $d = (d_1, 0)^T$, has a unique solution if and only if:*

(i) the matrix $\tilde{D} = \tilde{B}_1 + \tilde{C}_1 + \tilde{C}_1 J \int\limits_0^T e^{(T-s)J} ds$ is non-singular;

(ii) $\widetilde{\mu}_2 = -\sum\limits_{i=0}^{\nu-1} N^i \widetilde{f}_2^{(i)}(0)$.

The components of the solution $(\tilde{\mu}, \tilde{u}(t)$ of problem (6) - (8) are uniquely determined:

$$(\tilde{\mu}_1, \tilde{u}_1(t)) = \Big(\tilde{D}^{-1}\tilde{d}, \quad \int\limits_0^t e^{(t-s)J} ds J \tilde{D}^{-1}\tilde{d} + \int\limits_0^t e^{(t-s)J} \tilde{f}_1(s) ds\Big),$$

$$(\tilde{\mu}_2, \tilde{u}_2(t)) = \Big(-\sum_{i=0}^{\nu-1} N^i \tilde{f}_2^{(i)}(0), \quad -\sum_{i=0}^{\nu-1} N^i [\tilde{f}_2^{(i)}(t) - \tilde{f}_2^{(i)}(0)]\Big).$$

Theorem 2. *Under the assumptions of Theorem 1 problem (1), (2) with $B = \tilde{B}Q^{-1}$, $C = \tilde{C}Q^{-1}$, and $d = (d_1, 0)^T$ has a unique solution $x(t) = Q(\tilde{\mu} + \tilde{u}(t))$.*

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (grant No. AP19675193).

Keywords: differential-algebraic equation, boundary value problem, Weierstrass canonical form, method of parameterization.

2010 Mathematics Subject Classification: 34A09, 34B05

References

[1] Kunkel P., Mehrmann V. *Differential-Algebraic Equations: Analysis and Numerical Solution*, European Mathematical Society, 2006.

[2] Dzhumabaev D. S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary value problem for an ordinary differential equation, *USSR Comp. Math. Math. Phys.*, **29**:1 (1989), 34–46.

Determination of coefficients of fractional differential equations with the Generalized Riemann-Liouville Time Derivative

D.K. DURDIEV[1,2,a], H.H. TURDIEV[1,2,b]

[1]*Bukhara branch of the institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy at the Academy of sciences of the Republic of Uzbekistan, Bukhara, Uzbekistan*
[2]*Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan*
E-mail: [a]*d.durdiev@mathinst.uz*, [b]*h.h.turdiev@buxdu.uz*

Let $T > 0$, $l > 0$ be fixed numbers and $\Omega_{lT} := \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$. Consider the time-fractional diffusion equation

$$D^{\alpha,\beta}_{0+,t}u(x,t) - u_{xx} + q(t)u(x,t) = p(t)f(x,t), \quad x \in (0,l),\ t \in (0,T], \tag{1}$$

the initial conditions of Cauchy type

$$I^{(2-\alpha)(1-\beta)}_{0+,t}u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi_1(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(I^{(2-\alpha)(1-\beta)}_{0+,t}u\right)(x,t)\big|_{t=0} = \varphi_2(x),\ x \in [0,l], \tag{2}$$

the boundary conditions

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

and the nonlocal additional condition

$$\int_0^l w_i(x)u(x,t)dx = h_i(t),\ i = 1,2,\ t \in [0,T]. \tag{4}$$

Here the generalized Riemann-Liouville (Hilfer) fractional differential operator $D^{\alpha,\beta}_{0+,t}$ of the order $1 < \alpha < 2$ and type $0 \leq \beta \leq 1$ (see, [1], pp. 112-118, [2], pp. 62-65).

Assume that throughout this article, given functions φ_1, φ_2, f, w and h satisfy the following assumptions:

A1) $\varphi_i \in C^3[0,l]$, $\varphi_i^{(4)} \in L_2[0,l]$, $\varphi_i(0) = \varphi_i(l) = 0$, $\varphi''_i(0) = \varphi''_i(l) = 0$, $i = 1,2$;

A2) $f(x,\cdot) \in C[0,T]$ *and for* $t \in [0,T]$, $f(\cdot,t) \in C^3[0,l]$, $f(\cdot,t)^{(4)} \in L_2[0,l]$, $f(0,t) = f(l,t) = 0$, $f_{xx}(0,t) = f_{xx}(l,t) = 0$;

A3) $w(x) \in C^2[0,l]$ *and* $w(0) = w(l) = 0$ *and* $w''(0) = w''(l) = 0$;

A4) $\left(D^{\alpha,\beta}_{0+,t}h\right)(t) \in C[0,T]$, $|h(t)| \geq h_0 > 0$, h_0 *is a given number,*

$$\int_0^l w_i(x)\varphi_1(x)dx = I^{(2-\alpha)(1-\beta)}_{0+,t}h_i(t)\big|_{t=0+},$$

$$\int_0^l w_i(x)\varphi_2(x)dx = \frac{\partial}{\partial t}\left(I_{0+,t}^{(2-\alpha)(1-\beta)}h_i(t)\right)(t)\Big|_{t=0+},\ i=1,2.$$

We consider the weighted spaces of continuous functions [[3], pp. 4-5, 162-163].

$$C_\gamma^{2,\alpha,\beta}(\Omega) = \Big\{u(x,t):\ u(\cdot,t)\in C^2(0,1);\ t\in[0,T] \text{ and}$$

$$D_{0+,t}^{\alpha,\beta}u(x,\cdot)\in C_\gamma(0,T];\ x\in[0,1],\ 1<\alpha\le 2,\ 0\le\beta\le 1\Big\},$$

where $\overline{\Omega}_{lT} := \{(x,t): 0\le x\le l,\ 0\le t\le T\}$.

The papers [3] and [4] study inverse problems of finding time-dependent source terms, respectively, in time-fractional diffusion equation by using eigenfunction expansion of the non-self adjoint spectral problem along the generalized Fourier method. The main results of these studies comprise the existence and uniqueness theorems, as well as a stability estimate for the solution of the problem of determining the coefficient in a time-fractional diffusion and wave equation.

Using the above results, we obtain the following assertion.

Lemma. Let $p(t)$, $q(t)\in C[0,T]$, A1)-A2) are satisfied, then there exists a unique solution of the direct problem (1)-(3) $u(x,t)\in C_\gamma^{2,\alpha,\beta}(\overline{\Omega}_{lT})$.

Theorem Let A1)-A4) are satisfied. Then there exists a number $T^*\in(0,T)$, such that there exists a unique solution $p(t),\ q(t)\in C[0,T^*]$ of the inverse problem (1)-(4).

Keywords: Hilfer fractional differential equation, Riemann-Liouville fractional derivative, inverse problem, initial conditions, boundary conditions.

2010 Mathematics Subject Classification: 34A08, 34K10, 34K29, 34K37, 34M50, 35R11.

References

[1] Hilfer R. *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore (2000).

[2] Podlubny I. *Fractional Differential Equations, of Mathematics in Science and Engineering, vol. 198*, Academic Press, New York, NY, USA (1999).

[3] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and application of fractional differetial equations Mathematical Studies*, Elsevier , Amsterdam (2006).

[4] Turdiev H.H. Inverse coefficient problems for a time-fractional wave equation with the generalized Riemann-Liouville time derivative, *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, **10** (2023), 46–59.

[5] Durdiev D.K., Turdiev H.H. Inverse coefficient problem for fractional wave equation with the generalized Riemann–Liouville time derivative, *Indian J. Pure Appl. Math.*, https://doi.org/10.1007/s13226-023-00517-9 (2023)

Self-similar solutions for the membrane transverse vibration equation

A. HASANOV[a], S.G. RASHIDOV[b]

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;

E-mail: [a]anvarhasanov@yahoo.com, [b]sardorrashidov1995@mail.ru

In our modern life, many problems of modern mathematics and theoretical physics lead to the investigation of hypergeometric functions of one and several variables, (for example) partial differential equations are obtainable with the help of such hypergeometric functions [1].In particular, the energy absorbed by some nonferromagnetic conductor sphere included in an internal magnetic field can be calculated with the help of such functions [2]. Hypergeometric functions of several variables are used in physical and quantum chemical applications as well [3]. Especially, many problems in gas dynamics lead to solutions of degenerate second-order partial differential equations which are then solvable in terms of multiple hypergeometric functions [5-6].

We consider and establish the solutions of the degenerating model equation in terms of the hypergeometric function ${}_2F_1\left(a,b;c;z\right)$.

When solving vibration problems, the model is obtained by calculating the transverse displacement $u\left(r,t\right)$ of a symmetrically deformed membrane. To process inhomogeneous waves $u\left(r,t\right)$ representing the frequency, the following equation is modeled and considered by J.Kastillo, C.Jiménez and R.Meléndez [4].

$$a^{-2}u_{tt}\left(r,t\right)=r^{2-2c}u_{rr}\left(r,t\right)+\left(1-2l\right)r^{1-2c}u_{r}\left(r,t\right)+\left(l^2-c^2\nu^2\right)r^{-2c}u\left(r,t\right) \tag{8}$$
$$\left(\nu,l,c=const>0\right),$$

where $a^2=\frac{T}{D}$, T membrana tension and D mass per unit area of the membrane.

We obtain the following special solutions of equation (8):

$$u_1\left(r,t\right)=r^{l-\nu c}t^{\nu}{}_2F_1\left(-\frac{\nu}{2},\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2},1-\nu,\frac{r^{2c}}{a^2c^2t^2}\right), \tag{9}$$

$$u_2\left(r,t\right)=r^{l+c\nu}(\frac{1}{a^2c^2t})^{\nu}\delta_2F_1\left(-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2},-\frac{\nu}{2},1+\nu,\frac{r^{2c}}{a^2c^2t^2}\right), \tag{10}$$

where ${}_2F_1\left(a,b;c;z\right)$ is Gaussian hypergeometric function with two numerator parameters and one denominator parameter.

Keywords: Parabolic PDE of degenerate type; Self-made solution; Linearly independent solution, Generalized hypergeometric function, Integral representation.

2010 Mathematics Subject Classification: 35L80, 33C05, 35C06.

References

[1] H. M. Srivastava., P. W. Karlsson *Multiple Gaussian Hypergeometric Series* Halsted, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, 1985

[2] A. Erdelyi., W. Magnus., F. Oberhettinger., F. G. Tricomi *Higher Transcendental Functions*, McGrawHill, New York, Toronto, London, Vol.1. (1953).

[3] A. W. Niukkanen Generalized hypergeometric series $N\ F\left(x_1,...,x_N\right)$ arising in physical and quantum chemical applications, *J. Phys. A: Math. Gen*, **16**:2 (1983), 1813–1825.

[4] J. Kastillo., C.Jiménez., R.Meléndez Una transformada finita de Hankel generalizada *Matematicas: Ensenanza Universitaria Escuela Regional de Matematicas Universidad del Valle – Colombia* **17**:1 (2009), 13-21.

[5] A. Hasanov., E. T. Karimov Fundamental solutions for a class of three-dimensional elliptic equations with singular coefficients *Appl. Math. Lett.* **22**,(2009) 1828–1832.

[6] M. S. Salakhitdinov.,A. Hasanov The fundamental solution for one class of degenerate elliptic equations, *More Progresses in Analysis, Proceedings of the 5th International ISAAC Congress* (World Scientific, Singapore, 2009), 521–531.

Solvability of an inverse coefficient problem for a time-fractional diffusion equation with periodic boundary and integral overdetermination conditions

Jonibek JUMAEV

Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy, Bukhara, Uzbekistan
Bukhara state university, Bukhara, Uzbekistan
E-mail: jonibekjj@mail.ru

We consider the initial-periodic boundary problem for the fractional diffusion equation

$$\partial_t^{\alpha}u-u_{xx}+a(t)u=f(x,t)g(t),\quad (x,t)\in D_T, \tag{1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),x\in[0,1], \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(1,t), \quad u_x(0,t) = u_x(1,t), \varphi(0) = \varphi(1), \quad \varphi'(0) = \varphi'(1), t \in [0,T], \tag{3}$$

where ∂_t^α is the Caputo fractional derivative of order $0 < \alpha \le 1$ in the time variable (see [1, pp. 90-94]), $a(t), g(t), t > 0$ are the source control terms, $f(x,t)$ is known source term, $\varphi(x)$ is the initial temperature, T is arbitrary positive number and $D_T := \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t \le T\})$.
.

The problem of determining a function $u(x,t), (x,t) \in D_T$, that satisfies (1)-(3) with known functions $a(t), g(t), f(x,t)$ and $\varphi(x)$ will be called the direct problem.

In the inverse problem, it is required to determine the coefficients $a(t), g(t), t > 0$, in (1) using over-determination conditions about the solution of the direct problem (1)-(3):

$$\int_0^1 \omega_i(x) u(x,t) dx = h_i(t), \; i = 1, 2, \quad x \in [0,1], \tag{4}$$

where $\omega_i(x), h_i(t), i = 1, 2$ are given functions.

By $C^{2,\alpha}(D_T)$ we denote the class of 2 times continuously differentiable with respect to x and α times continuously differentiable with respect to t in the domain D_T functions.

Definition 1. *The triple of functions $\{u(x,t), a(t), g(t)\}$ from the class $C^{2,\alpha}(D_T) \cap C^{1,0}(\overline{D}_T) \times C[0,T] \times C[0,T]$ is said to be a classical solution of problem (1)-(4), if the functions $u(x,t), a(t)$ and $g(t)$ satisfy the following conditions:*

(1) The function $u(x,t)$ and its derivatives $\partial_t^\alpha u(x,t), u_{xx}(x,t)$ are continuous in the domain D_T ;

(2) the function $a(t), g(t)$ is continuous on the interval $[0,T]$;

(3) equation (3) and conditions (2)-(4) are satisfied in the classical sense.

Throughout this article the functions $\varphi, \; f, \; \omega_i$ and $h_i \; (i := 1, 2)$ are assumed to satisfy the following conditions:

$(A1)$ $\varphi(x) \in C^2(0,1)$; $\varphi^{(3)}(x) \in L_2(0,1)$; $\varphi(0) = \varphi(1)$; $\varphi'(0) = \varphi'(1)$; $\varphi''(0) = \varphi''(1)$; $\varphi^{(3)}(0) = \varphi^{(3)}(1)$;

$(A2)$ $f(x,t) \in C(\overline{D}_T) \cap C^{2,1}(D_T)$; $f^{(3)}(x,t) \in L_2(D_T)$; $f(0,t) = f(1,t)$; $f'(0,t) = f'(1,t)$; $f''(0,t) = f''(1,t)$;

$(A3)$ $h_i(t) \in AC[0,T]$; $\omega_i(x) \in C^2[0,1]$; $\omega_i^{(3)}(x,t) \in L_2[0,l]$; $\int_0^1 \omega_i(x)\varphi(x)dx = h_i(0)$; $\omega_i(0) = \omega_i(1)$; $\omega_i'(0) = \omega_i'(1)$; $\omega_i''(0) = \omega_i''(1), i = 1, 2$.

Lemma 1. *Let $\{g(t), a(t)\} \in C[0,T], (A1), (A2)$ are satisfied, then there exists a unique solution of the direct problem (1)-(3) $u(x,t) \in C^{2,\alpha}(D_T) \cap C^{1,0}(\overline{D}_T)$.*

The main result of this work is presented as follows:

Theorem 1. *Let (A1)-(A4) are satisfied. Then there exists a number $T^* \in (0,T)$, such that there exists a unique solution $a(t), \; g(t) \in C[0,T^*]$ of the inverse problem (1)-(4).*

For proving this theorem, inverse problem (1)-(4) reduces to the equivalent integral equations with respect unknown functions $u(x,t), a(t), g(t)$. For solving this equation the contracted mapping principle is applied. The local existence and uniqueness results are proven.

Funding: No funds, grants, or other support was received.

Keywords: time-fractional diffusion equation, periodic boundary conditions, inverse problem, integral equation.

2010 Mathematics Subject Classification: 35A01; 35A02; 35L02; 35L03; 35R03.

References

[1] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Elsevier, Amsterdam, (2006).

[2] Kolmogorov A., Fomin S., *Elements of function theory and functional analysis,* Moscow: Nauka, (1972).(In Russian)

[3] Durdiev D.K., Jumaev J.J., Inverse Coefficient Problem for a Time-Fractional Diffusion Equation in the Bounded Domain, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **2**:44 (2023), 548-557.

A numerical method for solving a boundary value problem for impulsive differential equations with loadings

Zhazira KADIRBAYEVA

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan
E-mail: zhkadirbayeva@gmail.com

We consider the following boundary value problem for impulsive differential equations with loadings

$$\frac{dx}{dt} = K_0(t)x + \sum_{i=1}^{m+1} K_i(t) \lim_{t\to\theta_i+0} \dot{x}(t) + f(t), \quad x \in R^n, \quad t \in (0,T), \tag{1}$$

$$B_i \lim_{t\to\theta_i-0} x(t) - C_i \lim_{t\to\theta_i+0} x(t) =$$

$$= \varphi_i + \sum_{k=1}^{i-1} D_k \lim_{t\to\theta_k-0} x(t) + \sum_{k=1}^{i-1} E_k \lim_{t\to\theta_k+0} x(t), \quad \varphi_i \in R^n, \quad i = \overline{1,m}, \tag{2}$$

$$B_0 x(0) + C_0 x(T) = d, \quad d \in R^n, \tag{3}$$

where $(n\times n)$-matrices $K_i(t)$ $(i = \overline{0,m+1})$ and n-vector-function $f(t)$ are piecewise continuous on $[0,T]$ with possible discontinuities of the first kind at the points $t = \theta_i$ $(i = \overline{1,m})$. B_j and C_j $(j = \overline{0,m})$, D_k and E_k, $(k = \overline{1,m-1})$ are constant $(n \times n)$-matrices, and φ_i, $(i = \overline{1,m})$ and d are constant n vectors, $0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_m < \theta_{m+1} = T$.

A solution to problem (1)–(3) is a piecewise continuously differentiable vector function $x(t)$ on $[0,T]$, which satisfies the system of differential equations with loadings (1) on $[0,T]$ except the points $t = \theta_i$ $(i = \overline{1,m})$, conditions of impulse effects at the fixed time points (2) and the boundary condition (3).

Several problems in mathematical physics and mathematical biology involve addressing boundary-value problems associated with loaded equations [1]. The study of problems related to essentially loaded differential equations, incorporating impulse effects, and the exploration of techniques for solving them are discussed in [2, 3]. These problems emerge in the modeling of diverse processes of natural science.

In the present paper, a linear boundary value problem for impulsive differential equations with loadings is investigated. The Dzhumabaev parameterization method [4] is used for solving the problem (1)-(3). A numerical method is offered for solving the considering problem (1)-(3).

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant no. AP19174331).

Keywords: essentially loaded differential equation, impulse effect, parametrization method, algorithm

2010 Mathematics Subject Classification: 34B37, 65L06

References

[1] Nakhushev A.M. *Loaded equations and their applications*, Nauka, Moscow (2012).

[2] Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M. On the numerical algorithms of parametrization method for solving a two-point boundary-value problem for impulsive systems of loaded differential equations, *Computational and Applied Mathematics*, **37**:4 (2018), 4966–4976.

[3] Kadirbayeva Zh.M. Numeric-analytic solution to a boundary value problem for impulsive differential equations with loadings , *Lobachevskii J. of Math.*, **44**:12 (2023), 5269–5277.

[4] Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro- differential equations, *J. of Comp. and Applied Math.*, **294** (2016), 342–357.

On spectral problem to logarithmic potential on annulus

Tynysbek KALMENOV[a], Ayan KADIRBEK[b]

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: [a]kalmenov.t@mail.ru, [b]royale.ayan@gmail.com

In [1] T.Sh. Kalmenov and D. Suragan found that the BVP

$$-\Delta u = f, \quad x \in \Omega,$$

$$N[u] = -\frac{u(x)}{2} + \int\limits_{\partial\Omega} \left(\varepsilon_n(x-\xi) \frac{\partial u(\xi)}{\partial n_\xi} - \frac{\partial \varepsilon_n(x-\xi)}{\partial n_\xi} u(\xi) \right) dS_\xi = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

has a unique solution given by Newtonian potential

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} \varepsilon_n(x-\xi) f(\xi) d\xi,$$

where $\Omega \subset R^n$ is a simply-connected domain, $\vec{n}$ is an outer unit normal to $\partial\Omega$, and

$$\varepsilon_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln|x|, & n = 2, \\ -\frac{1}{(n-2)\sigma_n}|x|^{2-n}, & n \geq 3, \end{cases}$$

σ_n is the surface area of the sphere in R^n. In addition, the authors solved the spectral problem for Newtonian potential on a 2D circle and 3D ball, i.e. the following problem:

$$\int\limits_{\Omega} \varepsilon_k(x-\xi) e_m(\xi) d\xi = \frac{e_m(x)}{\lambda_m}, \qquad k = 2, 3.$$

The main aim of this work is to study a boundary value problem with non-local conditions in a multi-connected domain in R^n, and show the existence and uniqueness of the solution to this problem, and applied it to solve spectral problem for integral operator, namely the Newton potential.

Theorem 1. *For any $f \in L^2(\Omega)$ the Newtonian potential in a $m+1$-connected domain Ω is the unique solution of the Poisson equation*

$$-\Delta u = f,$$

with following non-local boundary conditions

$$N_i[u] = -\frac{u(x)}{2} + \sum_{k=0}^{m} \int\limits_{\partial\Omega_k} \left(\frac{\partial \varepsilon_n(x-\xi)}{\partial n_\xi} u(\xi) - \varepsilon_n(x-\xi) \frac{\partial u(\xi)}{\partial n_\xi} \right) dS_\xi = 0, \quad x \in \partial\Omega_i$$

$$i = \overline{0, m}.$$

Theorem 2. *The eigenvalues of the logarithmic potential are the roots of the transcendental equations*

$$J_0\left(\sqrt{\lambda} r_0\right) - r_0 \ln\frac{r_1}{r_0} \left.\frac{dJ_0\left(\sqrt{\lambda}\rho\right)}{d\rho}\right|_{\rho=r_0} = 0 \quad \text{for } k = 0,$$

and for $k \neq 0$

$$-J_k\left(\sqrt{\lambda} r_0\right) + \frac{r_0}{k} \left.\frac{dJ_k\left(\sqrt{\lambda}\rho\right)}{d\rho}\right|_{\rho=r_0} - \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^k J_k\left(\sqrt{\lambda} r_1\right) + \frac{r_1}{k}\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^k \left.\frac{dJ_k\left(\sqrt{\lambda}\rho\right)}{d\rho}\right|_{\rho=r_1} = 0,$$

$$-J_k\left(\sqrt{\lambda}r_1\right)+\frac{r_1}{k}\left.\frac{dJ_k\left(\sqrt{\lambda}\rho\right)}{d\rho}\right|_{\rho=r_1}+\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^k J_k\left(\sqrt{\lambda}r_0\right)+\frac{r_0}{k}\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^k\left.\frac{dJ_k\left(\sqrt{\lambda}\rho\right)}{d\rho}\right|_{\rho=r_0}=0.$$

Funding: The authors were supported by the grant no. AP14871460 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: multy-connected domain, Logarithmic potential, Laplace equation.

2010 Mathematics Subject Classification: 35C05 , 47A13, 31A10.

References

[1] Kal'menov T.Sh, Suragan D. To spectral problems for the volume potential, *Doklady Mathematics*, **80**:2 (2009), 646–649.

[2] Kalmenov T. S., Rogovoy A. V., Kabanikhin S. I. Hadamard's example and solvability of the mixed Cauchy problem for the multidimensional Gellerstedt equation, *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, **30**:6 (2022), 891–904.

[3] Kakharman N., Kal'menov T. Mixed Cauchy problem with lateral boundary condition for noncharacteristic degenerate hyperbolic equations, *Boundary Value Problems*, **35**:1 (2022).

On a singular boundary value problem for a loaded differential equation

Roza UTESHOVA[1,a], Yelena KOKOTOVA[2,b]

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2]*K.Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan*
E-mail: [a]*r.uteshova@math.kz,* [b]*kokotovae@mail.ru*

We consider the system of loaded differential equations

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+\sum_{j=1}^{m}K_j(t)x(\theta_j)+f(t),\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t\in(0,T),\tag{1}$$

where $0<\theta_1<\ldots<\theta_m<T$; $A(t)$, $K_j(t)$, $j=1,\ldots,m$, and $f(t)$ are continuous on $(0,T)$. We assume that the matrix norms of $A(t)$ and $K_j(t)$ are bounded by a function $\alpha(t)$, which is continuous on $(0,T)$ and satisfies the following relations:

$$\lim_{a\to 0+0}\int_a^{T/2}\alpha(t)dt=\infty,\qquad \lim_{b\to T-0}\int_{T/2}^{b}\alpha(t)dt=\infty,$$

so that equation (1) has singularities at the endpoints of the interval $(0,T)$. Moreover, let us note that the presence of loaded terms in (1) affects the solvability properties of this equation.

In this talk, we present necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of a bounded solution of equation (1). By using the method of parameterization [1, 2], we derive the solvability criteria in terms of bilaterally infinite matrices of a special structure. Then the problem of finding an approximate solution of the singular problem under consideration is solved by constructing regular approximating two-point boundary value problems.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (grant No. BR20281002).

Keywords: singular boundary value problem, loaded differential equation, bounded solution, unique solvability.

References

[1] Dzhumabaev D. S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary value problem for an ordinary differential equation, *USSR Comp. Math. Math. Phys.*, **29**:1 (1989), 34–46.

[2] Dzhumabaev D. S. Approximation of a bounded solution of an ordinary linear differential equation by solutions of two-point boundary value problems, *USSR Comp. Math. Math. Phys.*, **30**:2 (1990), 34–45.

Averaging in boundary value problems for differential equations with impulse action at non-fixed times

Meirambek MUKASH

K. Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan
E-mail: mukashma1983@gmail.com

Impulsive systems of differential equations serve as mathematical models of objects that, in the course of their evolution, are exposed to the action of short-term forces. A fairly complete theory of such systems is presented in the monograph [1]. Much research has been done on non-fixed impulsive initial value problems. However, in regard to boundary value problems for equations with impulse action, the majority of results concern jumps only at fixed times. This is due to the fact that non-fixed impulses significantly change properties of boundary value problems. In the present paper, we use the averaging method [2,3] to solve the following boundary value problem for a system of differential equations with impulse action at non-fixed moments of time and a small parameter:

$$\begin{aligned} \dot{x} = \varepsilon X(t,x), \quad t \neq t_i(x), \\ \Delta x|_{t=t_i(x)} = \varepsilon I_i(x), \\ F(x(0), x(T/\varepsilon)) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Here $\varepsilon > 0$ is a small parameter, $T > 0$ is fixed, $t_i(x) < t_{i+1}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ are the moments of impulse action, X, I_i, and F are d-dimensional vector functions.
Under the assumption that there exist the limits

$$X_0(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t,x)dt, I_0(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{0<t_i(x)<T} I_i(x),$$

we put problem (11) in correspondence with the averaged boundary value problem

$$\begin{aligned} \dot{y} = \varepsilon[X_0(y) + I_0(y)], \\ F(y(0), y(T/\varepsilon)) = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

or, on the slow time scale $\tau = \varepsilon t$,

$$\frac{dy}{d\tau} = X_0(y) + I_0(y), \qquad F(y(0), y(T)) = 0.$$

The main result of our paper is a proof of the following statement: if the averaged boundary value problem (2) has a solution, then, for small values of the parameter ε, the original boundary value problem (1) also has a solution that belongs to a small neighborhood of the solution of the averaged problem.

Keywords: small parameter, averaging method, fixed point, impulse action, boundary value problem.

2010 Mathematics Subject Classification: : 34A37,34B37

References

[1] Samoilenko A. M.,Perestyuk M.O. *Impulsive Differential equations*, World Scientific, Singapore (1995).

[2] Samoilenko A. M.,Petrishin R.I Averaging method in some boundary value problems, *Diff. Equat*, **25**:6 (1989), 956–964.

[3] Samoilenko A. M. Averaging method in systems with tremors. *Math. Phys.,* 9 (1971), 101–117.

A method for solving a quasilinear boundary value problem for impulsive Fredholm integro-differential equation

Sandugash MYNBAYEVA[1,2,a], Aigerim TANKEYEVA[1,b]

[1]*K.Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan*
[2]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*mynbaevast80@gmail.com*, [b]*aigerimtankeyeva@gmail.com*

We consider the following quasilinear boundary value problem for Fredholm integro-differential equation with impulse effect:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{l=1}^{k} \varphi_l(t) \int_0^T \psi_l(\tau)x(\tau)d\tau +$$

$$+f_0(t) + \varepsilon f(t,x), \quad t \in (0,T) \setminus \{\theta_j\}, \quad j = \overline{1,m}, \quad x \in R^n, \quad (1)$$

$$\big(\theta_0 = 0 < \theta_1 < \ldots < \theta_m < \theta_{m+1} = T\big),$$

$$B_0 x(0) + C_0 x(T) = d_0, \quad d_0 \in R^n, \quad (2)$$

$$B_j x(\theta_j - 0) - C_j x(\theta_j) = d_j, \quad j = \overline{1,m}, \quad d_j \in R^n, \quad (3)$$

where the $n \times n$ matrices $A(t)$, $\varphi_l(t)$, $\psi_l(t)$, and n vector $f(t,x$ are continuous on $[0,T]$, the n vector function $f_0(t)$ is piecewise continuous on $[0,T]$ with possible discontinuities at the points $t = \theta_j$, $j = \overline{1,m}$.

We will denote by $PC([0,T], R^n, \{\theta_j\}_{j=1}^m)$ the space of functions $x : [0,T] \to R^n$ that are continuous on $[\theta_{p-1}, \theta_p)$, $p = \overline{1,m+1}$, and have finite limits $\lim\limits_{t \to \theta_p - 0} x(t)$ for all $p = \overline{1,m+1}$, and $x(T) = \lim\limits_{t \to T-0} x(t)$. This space is equipped with the norm $\|x\|_1 = \sup\limits_{t \in [0,T]} \|x(t)\|$.

By a solution to problem (1)-(3) we understand a function $x(t) \in PC\big([0,T], R^n, \{\theta_j\}_{j=1}^m\big)$ which has the piecewise continuous derivative on $(0,T)$ and satisfies equation (1), boundary condition (2), and the impulsive input conditions (3).

Quasilinear boundary value problem (1)-(3) is solved by a simple iteration method, and the mapping contraction principle is used to ensure the convergence of the iterative process. The solution of the corresponding linear problem([1]) in the case of $\varepsilon = 0$ was chosen as an initial approximation. For the linear Fredholm integro-differential equation, the regular partition([2]) chosen by the parameterization method can be used for the quasilinear boundary value problem (1)-(3). Sufficient conditions for the existence of a unique solution to the intermediate quasilinear special Cauchy problem([3]) are established.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP13268824).

Keywords: quasilinear boundary value problem, impulsive integro-differential equation, parametrization method, mapping contraction principle.

2010 Mathematics Subject Classification: 34A37, 34B37, 45J05

References

[1] Mynbayeva S.T., Assanova A.T., Uteshova R.E. A Solution to a Linear Boundary Value Problem for an Impulsive Integro-Differential Equation, *Differential Equations and Dynamical Systems*, (2023).

[2] Dzhumabaev D.S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems, *J. Comput. Appl. Math.*, **327** (2018), 79–108.

[3] Dzhumabaev D.S., Mynbayeva S.T. A method of solving a nonlinear boundary value problem for the Fredholm integro-differential equation, *Journal of Integral Equations and Applications*, **33**:1 (2021), 53–75.

Initial-boundary value problems for the wave equation with non-strongly regular boundary conditions

Arailym OMARBAEVA[1,2,a], Makhmud SADYBEKOV[1,b]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]arai-79@mail.ru, [b]sadybekov@math.kz

Initial-boundary value problems for linear hyperbolic equations constitute a well-developed part of the theory of partial differential equations (see, for example, [1-3]). One of the most extensively studied methods for solving them is the Fourier method, also known as the method of separation of variables or the method of expansion in eigenfunctions. This method has been well developed for the case of self-adjoint boundary conditions with respect to the spatial variable. However, for the case of non-self-adjoint boundary conditions, the problem still remains open.

The paper considers initial-boundary value problems for the one-dimensional wave equation

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + q(x)u(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

in the domain $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$, with nonlocal boundary conditions of general form

$$U_j(u) = a_{j1}u_x(0,t) + a_{j2}u_x(1,t) + a_{j3}u(0,t) + a_{j4}u(1,t) = 0, \quad j = 1,2. \tag{2}$$

Additionally, standard initial conditions are specified:

$$u(x,0) = \tau(x), u_t(x,0) = \nu(x),\ 0 \le x \le 1. \tag{3}$$

The application of the Fourier method (method of separation of variables) leads to the following spectral problem:

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x),\ 0 < x < 1, \tag{4}$$

$$U_j(y) = a_{j1}y'(0) + a_{j2}y'(1) + a_{j3}y(0) + a_{j4}y(1) = 0, \quad j = 1,2. \tag{5}$$

It is well known that if the conditions (5) are strongly regular, then the system of root vectors of problem (4)-(5) forms a Riesz basis in $L_2(0,1)$. The Fourier method can be implemented to solve problem (1)-(3) in this case. However, when the boundary conditions (5) are non-strongly regular, the system of root vectors of problem (4)-(5) may not form an unconditional basis. This prevents the use of the Fourier method. In the case where the boundary conditions (5) are irregular, the system of root vectors of problem (4)-(5) does not form an unconditional basis. Thus, the application of the Fourier method remains unjustified in the case where the boundary conditions (5) are non-strongly regular.

The present study precisely addresses such a scenario. An algorithm is developed to prove the correctness (in classical and generalized senses) of the initial-boundary value problem (1)-(3) in the case where the boundary conditions (5) are non-strongly regular. This method can be applied regardless of whether the system of root vectors of problem (4)-(5) forms an unconditional basis in $L_2(0,1)$ or not.

The methodology is based on the method for solving heat conduction problems with non-strongly regular boundary conditions [4].

Funding: The authors are supported by grant No. AP14869063 from the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan.

Keywords: wave equation, nonlocal boundary condition, generalized solution, classical solution, unconditional basis, Riesz basis.

2010 Mathematics Subject Classification: 35L05, 35L20

References

[1] Bateman H. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Cambridge University Press, Cambridge (1959).

[2] Brown J.W. and Churchill R.V. *Fourier Series and Boundary Value Problems* (Fifth Edition), McGraw-Hill, New York (1993).

[3] Courant R. and Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics*, Volume 1 (1953), Volume 2 (1962), Interscience, New York.

[4] Sadybekov M.A. Initial-Boundary Value Problem for a Heat Equation with not Strongly Regular Boundary Conditions, *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, **216** (2017), 330–348.

About one research method for a first order differential equation in a non-cylindrical domain

M.N. OSPANOV[a], A. MERZETKHAN[b]

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan
E-mail: [a]myrzan66@mail.ru, [b]akerkemerzetkhan@gmail.com

In a domain $\Omega = [0, \varphi(x)] \times [0, \omega]$ we consider the next problem:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = A(t,x)V + \Phi(t,x),\ t \in [0, \varphi(x)],\ x \in [0, \omega] \tag{1}$$

$$V(0,x) = V(\varphi(x), x) \tag{2}$$

where the matrix $A(t,x) = [a_{i,j}(t,x)]_{i,j=1}^{n}$ and n-vector function $\Phi(t,x)$ are continuous in $\Omega = [0, \varphi(x)] \times [0, \omega]$ and satisfies condition

$$\mid a_{ij}(t,x) \mid \geq \sum_{i \neq j}^{n} \mid a_{i,j}(t,x) \mid + \theta(t,x),\ i = \overline{1,n} \tag{3}$$

where $\theta(t,x) \geq \theta_0 > 0$ are continuous function in θ_0- constant.

Various problems for equation (1) in bounded and unbounded domains have been considered by many authors. In this paper, equation (1) is considered in a non-cylindrical domain. Using D.S. Dzhumabaev's parameterization method [1] it is proved

Theorem. *Let the matrix $A(t,x)$ is satisfied condition (3) and the function $\phi(x)$ is continuous in Ω. Then the problem (1), (2) has a unique solution and implemented next evaluation*

$$\|V(t,x)\| \leq \| \frac{F(t,x)}{\theta(t,x)} \|,\ x \in [0, \omega.$$

Where

$$\|V(t,x)\| = \max_{(t,x)\in\Omega} \mid V(t,x) \mid .$$

Funding: The authors were supported by the grant AP14871523 of the Ministry of Science and Higher Education of Kazakhstan.

Keywords: parameterization method, differential equation, non-cylindrical domain, diagonal dominience.

References

[1] Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1989. Т. 29, № 1., С. 50–66.

Well-posedness of weakly hyperbolic equations

Bolys SABITBEK

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: b.sabitbek@math.kz

In this work, we study higher order hyperbolic pseudo-differential equations with variable multiplicities. We work in arbitrary space dimension and we assume that the principal part is time-dependent only. We identify under which hypotheses on the roots and the lower order terms (Levi conditions) the corresponding Cauchy problem is C^∞ well-posed. This is achieved via transformation into a first order system, reduction into upper-triangular form and application of suitable Fourier integral operator methods previously developed for hyperbolic non-diagonalisable systems. We also discuss how our result compare with the literature on second and third order hyperbolic equations.

Funding: The author was supported by the grant no. AP19676817 of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan.

Keywords: hyperbolic equation, hyperbolic system, Levi condition, Fourier Integral Operators.

2010 Mathematics Subject Classification: 35L25, 35L30

References

[1] Garetto C., Jäh C., Ruzhansky M. Hyperbolic systems with non-diagonalisable principal part and variable multiplicities, I: well-posedness, *Math. Ann*, **372**:3-4 (2018), 1597–1629.

[2] Oleinik O.A. On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **23** (1970), 569–586.

Multiperiodicity of solution the initial value problem for a system of integro-differential equations with finite hereditarity

Zhaishylyk SARTABANOV[1,a], Galiya ABDIKALIKOVA[2,b], Gulsezim AITENOVA[1,c], Amire ZHUMAGAZIYEV[1,d]

[1]*K.Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan*
[3]*M. Utemisov West Kazakhstan University, Uralsk, Kazakhstan*
E-mail: [a]*sartabanov42@mail.ru,* [b]*agalliya@mail.ru,*
[c]*gulsezim-88@mail.ru,* [d]*charmeda@mail.ru*

There is considered linear integro-differential equation

$$D_c u(\tau,t) = A(\tau,t)u(\tau,t) + \int\limits_{\tau}^{\tau+\theta} K(\xi,\tau,t,h(\xi,\tau,t))u(\xi,h(\xi,\tau,t))d\xi + f(\tau,t). \tag{1}$$

Here $D_c = \partial/\partial\tau + <c, \partial/\partial t>$ is differential operator in (τ, t) in the direction of the constant vector $c = (c_1, ..., c_m)$; $<,>$ is the sign of the scalar product; $\partial/\partial t = (\partial/\partial t_1, ..., \partial/\partial t_m)$; $\tau \in R = (-\infty, +\infty)$, $t = (t_1, ..., t_m) \in R^m$.

Integro-differential equations with finite period heriditarity are relatively rare in the scientific literature than other types of such equations. According to their oscillatory solutions, questions of periodic solutions are often investigated, less often almost periodic solutions, and they are studied on the basis of asymptotic methods.

The research of multi-frequency oscillatory solutions of systems of partial differential equations of the first order by the method proposed in [1-3] is extended to integro-differential systems that take into account finite hereditary.

In [4-6], a method of periodic characteristics is proposed for integrating many periodic solutions of a system with a diagonal differentiation operator by research a characteristic system on a cylindrical surface of the space of time variables.

The purpose of this thesis is to establish sufficient conditions for the existence of a single (θ, ω)-periodic solution $u(\tau, t)$ of equation (1) satisfying the condition

$$u(\tau,t)|_{\tau=\tau^0} = \Psi(t), \Psi(t+\omega) = \Psi(t) \in C_t^{(e)}(R^m), \tag{2}$$

where $e = (1, ..., 1)$ - m-vector.

Suppose the conditions of multiperiodicity and smoothness are fulfilled:

$$A(\tau+\theta, t+\omega) = A(\tau, t) \in C_{\tau,t}^{(0,e)}(R \times R^m); \tag{3}$$

$$K(\xi+\theta, \tau, t, h(\xi+\theta, \tau, t)) = K(\xi, \tau, t, h(\xi, \tau, t)), \xi \in R, (\tau, t) \in R \times S^m,$$
$$K(\xi, \tau+\theta, t+\omega, h(\xi, \tau+\theta, t+\omega)) = K(\xi, \tau, t, h(\xi, \tau, t)) + \omega; \tag{4}$$

$$f(\tau+\theta, t+\omega) = f(\tau, t) \in C_{\tau,t}^{(0,e)}(R \times R^m), \tag{5}$$

here θ, $\omega = (\omega_1, ..., \omega_m)$ are periods and rationally incommensurable.

Theorem 1. *If conditions (3)-(5) are fulfilled, then the multiperiodicity of solution the problem (1), (2) on integrals of smooth (θ, ω)-periodic functions is uniquely solvable by the integral equation*

$$u(\tau,t) = U(\xi,\tau,t)\Psi(h(\tau^0,\tau,t)) +$$
$$+ \int_{\tau_0}^{\tau} U(\xi,\tau,t)U^{-1}(\xi,\tau,h(\xi,\tau,t))f(\xi,h(\xi,\tau,t))d\xi, (\tau,t) \in R \times S^m$$

along β-periodic characteristics and its solution in Euclidean space along δ-characteristics is represented by the relation

$$u(\tau,t) = U(\xi,\tau,t)\Psi(s(\tau^0,\tau,t)) +$$
$$+ \int_{\tau_0}^{\tau} U(\xi,\tau,t)U^{-1}(\xi,\tau,\delta(\xi,\tau,t+\sigma))f(\xi,\delta(\xi,\tau,t+\sigma))d\xi,$$

$\tau^0 \in R, (\tau, t) \in R \times R, \sigma = \sigma(\tau - \xi).$

Funding: The authors were supported by the grant no. AP19676629 of the Ministry of Science and Higher Education of Republic of Kazakhstan.

Keywords: multiperiodicity, differentiation operator, integro-differential equation, heriditarity, periodic characteristics.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 47F05, 45M15

References

[1] Kharasakhal V.H. *Almost-periodic solutions of ordinary differential equations*, Nauka, Alma-Ata (1970).

[2] Umbetzhanov D.U. *Almost multiperiodic solutions of partial differential equations*, Nauka, Alma-Ata (1979).

[3] Umbetzhanov D.U. *Almost periodic solutions of evolutionary equations*, Nauka, Alma-Ata (1990).

[4] Sartabanov Zh.A. Implementation of small parameter method for the study of multiperiodic solutions of systems with a diagonal differentiation operator, *VII Congress TWMS*, (2023), 133.

[5] Sartabanov Zh.A. The periodic of characteristics of the diagonal differentiation operator, *Bulletin of Abai KazNPU*, **2**:82 (2023), 40–53.

[6] Sartabanov Zh.,Omarova, B., Aitenova, G., Zhumagaziyev, A. Integrating multiperiodic functions along the periodic characteristics of the diagonal differentiation operator, *KazNU Bulletin. Mathematics, Mechanics, Computer Science Series*, **4**:120 (2023), 52–68.

Inverse problem for a fourth-order hyperbolic equation with a complex-valued coefficient

B. SEILBEKOV, A.A. SARSENBI, Z.M. ZHANIBEK

South Kazakhstan University of the Name of M. Auezov
E-mail: bolat.seilbekov@auezov.edu.kz, abdisalam.sarsenbi@auezov.edu.kz, zhanibekzeinep@mail.ru

The present paper is devoted to the study of the existence and uniqueness of the solution of inverse problems for a fourth-order hyperbolic equation with a complex-valued coefficient

$$u_{tt}\left(x,t\right)+\frac{\partial^4}{\partial x^4}u\left(x,t\right)+q\left(x\right)u\left(x,t\right)=f\left(x\right), \tag{1}$$

where $q\left(x\right)=q_1\left(x\right)+iq_2\left(x\right)$. We use $\Omega=\{-1<x<1,\ 0<t<T\}$ to denote the open region, and the symbol $\bar{\Omega}=\{-1\le x\le 1,\ 0\le t\le T\}$ to denote the closed region. The space $C_{x,t}^{k,l}\left(\Omega\right)$ consists of all functions $u\left(x,t\right)$ that have continuous derivatives with respect to x and t of the order of k, l, respectively, in the domain Ω. Equation (1) will be considered together with the Dirichlet boundary conditions

$$u\left(-1,t\right)=0,\ u\left(1,t\right)=0,\ u_{xx}\left(-1,t\right)=0,\ u_{xx}\left(1,t\right)=0,\ t\in\left[0,T\right], \tag{2}$$

and conditions

$$u\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right),\ u\left(x,T\right)=\psi\left(x\right),\ u_t\left(x,0\right)=0,\ x\in\left[-1,1\right], \tag{3}$$

where $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ are known sufficiently smooth functions.

Theorem. *Let the following conditions be satisfied:*
1) $q\left(x\right)\in C^4\left[-1,1\right]$, $\varphi,\ \psi\in D\left(L_q\right)$, $L_q\varphi,\ L_q\psi\in D\left(L_q\right)$;
2) there is a positive number δ_0 *such that* $\left|1-\cos\sqrt{\lambda_k}T\right|\ge\delta_0$.
Then there is a unique solution to the inverse problem that can be written as follows

$$u(x,t)=\varphi\left(x\right)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_k-\psi_k}{1-\cos\sqrt{\lambda_k}T}\left[\cos\sqrt{\lambda_k}t-1\right]X_k\left(x\right),$$

$$f\left(x\right)=L_q\varphi\left(x\right)-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_k-\psi_k}{1-\cos\sqrt{\lambda_k}T}\lambda_k\cdot X_k\left(x\right).$$

Funding: This research was funded by the Committee of Science of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP13068539).

Keywords: fourth-order hyperbolic equations; inverse problem; eigenfunction; the Riesz basis; the Fourier method.

References

[1] Imanbetova A.B, Sarsenbi A.A, Seilbekov B. Inverse Problem for a Fourth-Order Hyperbolic Equation with a Complex-Valued Coefficient, *MDPI Mathematics.*, **11(15): 3432**, 2023.
https://doi.org/10.3390/math11153432

Decay estimates for Cauchy-Dirichlet problems

Asselya SMADIYEVA

Institute Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
E-mail: smadiyeva@math.kz.

The main purpose of this work is to study the following time-fractional differential equation

$$\partial^{\alpha}_{0+,t}u(x,t) - a(t)\mathcal{A}(u(x,t)) = 0,\ (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ := \Omega_+, \tag{1}$$

with Cauchy data

$$u(x,0) = \phi(x),\ x \in \Omega, \tag{2}$$

and with Dirichlet boundary condition

$$u(x,t) = 0,\ \ x \in \partial\Omega,\ t \geq 0, \tag{3}$$

where $0 < \alpha \leq 1$, $a(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$, and $\partial^{\alpha}_{0+,t}$ is the Caputo time-fractional derivative [1, P. 97] of order α :

$$\partial^{\alpha}_{0+,t}u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha}\, \partial_s u\,(x,s)ds, & \text{if } \ \alpha \in (0,1), \\ \partial_t u(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t), & \text{if } \ \alpha = 1, \end{cases}$$

and $\mathcal{A}(u)$ is one of the next linear or non-linear operators: Laplace operator, p-Laplace operator, porous medium operator, degenerate elliptic operator, mean curvature operator, Kirchhoff operator.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19175678).

Keywords: time-fractional differential equation, Cauchy-Dirichlet problems, linear operator, non-linear operators, the Caputo time-fractional derivative.

2010 Mathematics Subject Classification: 35R11.

References [1] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and applications of fractional differential equations*, North-Holland Mathematics Studies, (2006).

Boundary value problem for the non-linear parabolic-hyperbolic equation of fractional order

A. SOBIRJONOV[1,2,a], M.KHOLMIRZAYEV[1,b]

[1]*Alfraganus University, Tashkent.Uzbekistan*
[2]*V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics. Tashkent.Uzbekistan*
E-mail: [a]*avazbeksobirjonov1998@gmail.com,* [b]*mamurjonxolmirzayev@gmail.com*

Well known that the theory of boundary value problems for non-linear partial differential equations of fractional order has been developing at a rapid pace. This can be seen in the published works of many authors in this direction, for instance A. D. Polyanin (see [1], [2], [3]), considered typical examples of nonlinear equations and delay systems containing reaction terms.

As far as we know, boundary value problems for mixed parabolic-hyperbolic type equations with non-linear terms have not been investigated yet. The present work devoted to investigation of solvability of a problem for equation

$$0 = \begin{cases} \beta u_{xx} - {}_C D^{\alpha}_{0t} u + \gamma u^2, & \text{when } 0 < x < l,\ \ t > 0, \\ u_{xx} - u_{tt} - \lambda^2 u, & \text{when } 0 < x < l,\ \ t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

where λ is complex constant and $\beta, \gamma = const > 0$, $0 < \alpha < 1$,

$$_C D_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha} u_s(x,s) ds,$$

differential operator fractional order.

Let Ω be a simple connected domain, bounded with the segments $B_1B_2 = \{(x,\, t) :\, x = l,\, 0 \le t \le h\}$, $A_1A_2 = \{(x,\, t) :\, x = 0,\, 0 \le t \le h\}$, $B_2A_2 = \{(x,\, t) :\, t = h,\, 0 \le x \le l\}$ at $t > 0$, and with characteristics $B_1C :\, x - t = l$, $A_1C :\, x + t = 0$ of equation (1) at $t < 0$, where $B_1 = (l;\, 0)$, $B_2 = (l;\, h)$, $A_1 = (0;\, 0)$, $A_2 = (0;\, h)$ and $C = \left(\frac{l}{2};\, \frac{-l}{2}\right)$.

Introduce notations: $\Omega^+ = \Omega \cap \{t > 0\}$, $\Omega^- = \Omega \cap \{t < 0\}$ and $I = \{(x,t) : 0 < x < l, t = 0\}$.

Problem. Find a solution $u(x,t)$ of equation (1) from the class of functions:

$$V = \left\{u(x,t) :\, u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega^-),\, u_{xx} \in C\left(\Omega^+\right),\, {}_C D_{ot}^{\alpha} u \in C\left(\Omega^+ \cup I\right),\, u_t \in C\left(\Omega^- \cup I\right)\right\}$$

and satisfying boundary conditions:

$$u(0,t) = \varphi_1(t),\;\; 0 \le t \le h,$$

$$u(l,t) = \varphi_2(t),\;\; 0 \le t < h,$$

$$u(x,-x) = \varphi(x),\;\; 0 \le x \le \frac{l}{2},$$

and gluing condition

$$\lim_{t \to +0} t^{1-\alpha} u_t(x,\, t) = \lambda_1(x)\, u_t(x,\, -0) + \lambda_2(x),\, 0 < x < l,$$

where $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi(x),\, \lambda_j(x)\, (j = 1, 2)$ are given functions, and that

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in C\left[0, h\right],\, \varphi(x) \in C^1\left[0, \frac{l}{2}\right] \cap C^2\left(0, \frac{l}{2}\right),$$

$$\lambda_1(x) \in C^1\left(\overline{I}\right),\, \lambda_2(x) \in C\left(\overline{I}\right) \cap C^1\left(I\right).$$

Using successive approximations method, under certain conditions to given functions and parameters β, γ, l, h unique solvability of the posed problem was proven

Keywords: reaction-diffusion equation, Caputo derivatives, existence and uniqueness of solution, non-linear integral equations, successive approximation method

2010 Mathematics Subject Classification: 35M10, 35K05, 35K20

References

[1] Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Zhurov A.I. *Metody reshenija nelinejnykh uravnenij matematicheskoj fiziki i mekhaniki [Solution methods for nonlinear equations of mathematical physics and mechanics]*, Fizmatlit.Moscow (2005).

[2] Polyanin, A.D., Zaitsev, V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations.* Chapman and Hall/CRC. A CRC Press Company.Boca Raton London New York Washington, D.C. 2nd ed.(2012)

[3] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact solutions of linear and nonlinear differential difference heat and diffusion equations with finite relaxation time. *Int. J. Non Linear Mechanics,* **54**.(2013), 115–126.

Inverse problems of identifying the time-dependent source coefficient for subelliptic heat equations

Durvudkhan SURAGAN

Department of Mathematics, Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: durvudkhan.suragan@nu.edu.kz

We discuss inverse problems of determining the time-dependent source coefficient for a general class of subelliptic heat equations. We show that a single data at an observation point guarantees the existence of a (smooth) solution pair for the inverse problem. Moreover, additional data at the observation point implies an explicit formula for the time-dependent source coefficient. We also discuss the case with nonlocal data. Our proofs are based on subelliptic spectral theory arguments and elements of the subelliptic potential theory. This talk is based on our recent work [1] with Mansur Ismailov (Gebze Technical University) and Tohru Ozawa (Waseda University).

Funding: The author was supported by the grant no. BR21882172 of the Ministry of Science and Higher Education of Kazakhstan.

Keywords: Inverse problem, spectral problem, control parameter, subelliptic heat equation, Hörmander vector field.

2010 Mathematics Subject Classification: 35R30, 35K20, 65M22

References

[1] Ismailov I., Ozawa T. and Suragan D. Inverse problems of identifying the time-dependent source coefficient for subelliptic heat equations, *Inverse Problems and Imaging*, **1**:2 (2023), 1–11.

On some inverse problems regarding time-fractional mixed equations

Niyaz TOKMAGAMBETOV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: tokmagambetov@math.kz

The main focus of this brief report is on a time-fractional mixed equation, which combines elements of sub-diffusion and fractional wave equations. Various inverse problems related to this mixed equation, such as inverse source, inverse initial conditions, and inverse terminal conditions, have been addressed to ensure its unique solvability.

Funding: This research was funded by the Committee of Science of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR20281002).

Keywords: sub-diffusion equation; fractional wave equation; mixed equation; Caputo fractional derivative; inverse problem.

2010 Mathematics Subject Classification: 35M10, 35R11

Global behavior of solutions to the integro-differential reaction-diffusion equations

Berikbol T. TOREBEK

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty
E-mail: torebek@math.kz

This work addresses the Cauchy-Dirichlet problem in the context of time-nonlocal reaction-diffusion equations, specifically focusing on the equation

$$\partial_t(k*(u-u_0))+\mathcal{L}_x[u]=f(u), \quad x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n, t>0,$$

where $k\in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, f is a locally Lipschitz function, and $\mathcal{L}_x$ is a linear operator. This model is particularly relevant for studying anomalous and ultraslow diffusion processes.

Our research contributes to the understanding of this equation by presenting results on local and global existence, decay estimates, and conditions leading to the blow-up of solutions. These findings partially address open questions previously posed by Gal and Varma [1], as well as Luchko and Yamamoto [2]. Additionally, the paper explores potential quasi-linear extensions of these results and outlines several open questions for future research.

More details about the results of this work can be found in [3].

Funding: This research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR20281002).

Key words and phrases: Sonine kernel, reaction-diffusion equation, global existence, decay estimate.

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 35K55, 35R11; Secondary 35K57, 35A01.

References

[1] C. G. Gal, M. Warma, *Fractional-in-Time Semilinear Parabolic Equations and Applications*, Springer Nature, Switzerland AG., 2020.

[2] Y. Luchko, M. Yamamoto, General time-fractional diffusion equation: Some uniqueness and existence results for the initial-boundary-value problems. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 19:3 (2016), 676–695

[3] B. T. Torebek, Global behavior of solutions to the nonlocal in time reaction-diffusion equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, (2024), accepted.

Solvability of a mixed problem for partial differential equation with a fractional analogue of the Barenblatt–Zheltov–Kochina operator

T.K. YULDASHEV[1,a], B.J. KADIRKULOV[2,b], A.A. MATCHANOVA[3,c]

[1]*Tashkent State University of Economics, Tashkent, Uzbekistan*
[2]*Tashkent State University of Oriental Studies, Tashkent, Uzbekistan*
[3]*V. I. Romanovskii Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan*
E-mail: [a]*tursun.k.yuldashev@gmail.com,* [b]*kadirkulovbj@gmail.com,* [c]*oygul87-87@mail.ru*

In our work, a classical solvability and construction of a solution to a mixed problem for a linear partial differential equation containing a Hilfer type fractional analogue of the Barenblatt–Zheltov–Kochina operator are studied. The Fourier series method was used, based on the separation of variables. A countable system is obtained using Mittag–Leffler function. Sufficient coefficient conditions for unique classical solvability of a mixed problem are established. The absolute and uniform convergence of the obtained series is shown. So, in the domain $\Omega\equiv(0,T)\times(0,1)$ we consider the equation

$$\left(D^{\alpha,\gamma}-D^{\alpha,\gamma}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)U(t,x)=a(t)\,U(t,x)+f(t,x) \qquad (1)$$

with mixed conditions

$$\lim_{t\to+0} J_{0t}^{1-\gamma} U(t,x) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

$$U(t,0) = 0, \quad U_x(t,1) = U_x(t,x_0), \quad 0 \le t \le T, \quad 0 < x_0 < 1, \tag{3}$$

where $f(t,x) \in C(\Omega)$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi_x(1) = \varphi_x(x_0)$, $a(t) \in C[0,T]$, $D^{\alpha,\gamma}$ is Hilfer integro-differential operator, $0 < \alpha \le \gamma \le 1$, $0 < T < \infty$.

Problem. It is required to find a unknown function $U(t,x)$, that satisfies the integro-differential equation (1), the initial value condition (2), the boundary value conditions (3) and belongs to the class of functions

$$t^{1-\gamma} U \in C(\overline{\Omega}), \quad D^{\alpha,\gamma} U \in C(\Omega), \quad D^{\alpha,\gamma} U_{xx} \in C(\Omega), \quad U_{xx} \in C(\Omega), \tag{4}$$

where $\overline{\Omega} \equiv [0,T] \times [0,1]$.

We look for a solution

$$U(t,x) = U_0(t,x) + U_1(t,x) + U_2(t,x) + \tilde{U}_2(t,x)$$

to the problem (1)–(4) in the following Fourier series:

$$U(t,x) = u_0(t)\,\vartheta_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} u_{1,n}(t)\,\vartheta_{1,n}(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(u_{2,m}(t)\,\vartheta_{2,m}(x) + \tilde{u}_{2,m}(t)\,\tilde{\vartheta}_{2,m}(x) \right),$$

$$\vartheta_0(x) = x, \quad \vartheta_{1,n}(x) = \sin\sqrt{\lambda_{1,n}}x, \quad \vartheta_{2,m}(x) = \sin\sqrt{\lambda_{2,m}}x, \quad \tilde{\vartheta}_{2,m}(x) = x\cos\sqrt{\lambda_{2,m}}x,$$

$$u_0(t) = \int_0^1 U_0(t,y)\omega_0(y)dy, \qquad u_{1,n}(t) = \int_0^1 U_1(t,y)\omega_{1,n}(y)dy,$$

$$u_{2,m}(t) = \int_0^1 U_2(t,y)\tilde{\omega}_{2,m}(y)dy, \quad \tilde{u}_{2,m}(t) = \int_0^1 \tilde{U}_2(t,y)\omega_{2,m}(y)dy,$$

$$\omega_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,x_0), \\ \frac{2}{1-x_0^2}, & x \in (x_0,1], \end{cases} \quad \omega_{1,n}(x) = \begin{cases} \frac{4\sin\sqrt{\lambda_{1,n}}x}{1+x_0}, & x \in [0,x_0), \\ \frac{2\cos\sqrt{\lambda_{1,n}}(1-x)}{(1+x_0)\sin\sqrt{\lambda_{1,n}}}, & x \in (x_0,1], \end{cases}$$

$$\omega_{2,n}(x) = \begin{cases} 0, \quad x \in [0,x_0), \\ \frac{2\cos\sqrt{\lambda_{2,n}}(1-x)}{(1-x_0)\sin\sqrt{\lambda_{2,n}}}, \quad x \in (x_0,1], \end{cases} \quad \tilde{\omega}_{2,n}(x) = \begin{cases} \frac{4\sin\sqrt{\lambda_{2,n}}x}{1+x_0}, & x \in [0,x_0), \\ \frac{4(1-x)\sin\sqrt{\lambda_{2,n}}x}{1-x_0^2}, & x \in (x_0,1], \end{cases}$$

$$\lambda_{1,n} = \left(\frac{2qn\pi}{p+q}\right)^2, \quad \lambda_{2,m} = (2qn\pi)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

We note that

$$(\vartheta_0(x),\,\omega_0(x)) = 1, \;\; (\vartheta_0(x),\,\omega_{i,1}(x)) = (\vartheta_0(x),\,\tilde{\omega}_{2,n}(x)) = 0, \quad i = 1,2,$$

$$(\vartheta_{1,n}(x),\,\omega_{1,m}(x)) = \begin{cases} 1, n = m \\ 0, n \ne m \end{cases}, \; (\vartheta_{1,n}(x),\,\omega_0(x)) = (\vartheta_{1,n}(x),\,\omega_{2,m}(x)) = (\vartheta_{1,n}(x),\,\tilde{\omega}_{2,m}(x)) = 0,$$

$$(\vartheta_{2,n}(x),\,\tilde{\omega}_{2,m}(x)) = \begin{cases} 1, n = m \\ 0, n \ne m \end{cases}, \; (\vartheta_{2,n}(x),\,\omega_0(x)) = (\vartheta_{2,n}(x),\,\omega_{i,m}(x)) = 0, \; i = 1,2,$$

$$\left(\tilde{\vartheta}_{2,n}(x),\,\omega_{2,m}(x)\right) = \begin{cases} 1, n = m \\ 0, n \ne m \end{cases}, \; \left(\tilde{\vartheta}_{2,n}(x),\,\omega_0(x)\right) = \left(\tilde{\vartheta}_{2,n}(x),\,\tilde{\omega}_{2,m}(x)\right) = 0,$$

where $(\cdot,\cdot)$ is the inner product in $L_2[0,1]$.

Theorem. Let the smoothness condition $\varphi(x) \in C^4[0,1]$ be satisfied. Then the obtained Fourier series converge absolutely and uniform in the domain Ω. Moreover, the solution of the mixed problem (1)–(3) belongs to the class of functions (4).

Keywords: Mixed problem, fractional analog of the Barenblatt–Zheltov–Kochina operator, regular solvability.

2010 Mathematics Subject Classification: 34K06, 34K10, 35G05, 35J08, 35J25.

Integral representations for hypergeometric function of the Mittag-Leffler type $\bar{F}_D^{(3)}$

Hilola YULDASHOVA

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: hilolayuldashova77@gmail.com

The Mittag-Leffler function has gained importance and popularity through its applications. When solving differential equations of fractional order and integral equations of fractional order. Also, the Mittag-Leffler function plays an important role in various fields of applied mathematics and engineering sciences, such as chemistry, biology, statistics, thermodynamics, mechanics, quantum physics, computer science, signal processing [1-5].

Consider the following three variable hypergeometric function and theorem.

$$\bar{F}_D^{(3)} = \bar{F}_D^{(3)} \left(\begin{array}{l} a, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; b_1, \alpha_2; b_2, \beta_2; b_3, \gamma_2; \\ c, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3; c_1, \alpha_4; c_2, \beta_4; c_3, \gamma_4; \end{array} |x, y, z \right)$$

$$= \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a)_{\alpha_1 m+\beta_1 n+\gamma_1 p} (b_1)_{\alpha_2 m} (b_2)_{\beta_2 n} (b_3)_{\gamma_2 p}}{(c)_{\alpha_3 m+\beta_3 n+\gamma_3 p}}$$

$$\cdot \frac{x^m}{\Gamma(c_1+\alpha_4 m)} \frac{y^n}{\Gamma(c_2+\beta_4 n)} \frac{z^p}{\Gamma(c_3+\gamma_4 p)} \tag{1}$$

$$(a, c, b_i, c_i, x, y, z \in \mathrm{C}; \quad \alpha_k, \beta_k, \gamma_k \in \mathrm{R}; \ \ \min\{\alpha_k, \beta_k, \gamma_k\} > 0$$
$$(i = \{1, 2, 3\} \quad k = \{1, \cdots, 4\}))$$

The Euler-type integral representations for the three-variable Mittag-Leffler-type function $\bar{F}_D^{(3)}$ are presented as Theorem 1 below.

Theorem 1. *If* $a, c, b_i, c_i, x, y, z \in \mathrm{C}$ $(i = \{1, 2, 3\})$, $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k \in \mathrm{R}$ *and* $\min\{\alpha_k, \beta_k, \gamma_k\} > 0$ $(\ k = \{1, \cdots, 4\})$, *then the following integral representations holds true:*

$$\bar{F}_D^{(3)} \left(\begin{array}{l} a, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; b_1, \alpha_2; b_2, \beta_2; b_3, \gamma_2; \\ c, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3; c_1, \alpha_4; c_2\beta_4; c_3, \gamma_4; \end{array} |x, y, z \right) = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(b_1)\Gamma(\mu-b_1)}$$

$$\cdot \int_0^1 \xi^{b_1-1} (1-\xi)^{\mu-b_1-1} \bar{F}_D^{(3)} \left(\begin{array}{l} a, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \mu, \alpha_2; b_2, \beta_2; b_3, \gamma_2; \\ c, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3; c_1, \alpha_4; c_2\beta_4; c_3, \gamma_4; \end{array} |x\xi^{\alpha_2}, y, z \right) d\xi \tag{2}$$

$$(\Re(\mu) > \Re(b_1) > 0),$$

$$\bar{F}_D^{(3)} \left(\begin{array}{l} a, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; b_1, \alpha_2; b_2, \beta_2; b_3, \gamma_2; \\ c, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3; c_1, \alpha_4; c_2\beta_4; c_3, \gamma_4; \end{array} |x, y, z \right) = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(b_2)\Gamma(\mu-b_2)}$$

$$\cdot \int_0^1 \xi^{b_2-1} (1-\xi)^{\mu-b_2-1} \bar{F}_D^{(3)} \left(\begin{array}{l} a, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; b_1, \alpha_2; \mu, \beta_2; b_3, \gamma_2; \\ c, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3; c_1, \alpha_4; c_2\beta_4; c_3, \gamma_4; \end{array} |x, y\xi^{\beta_2}, z \right) d\xi \tag{3}$$

$$\left(\Re\left(\mu\right)>\Re\left(b_2\right)>0\right),$$

$$\bar{F}_D^{(3)}\left(\begin{array}{c} a,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1;b_1,\alpha_2;b_2,\beta_2;b_3,\gamma_2;\\ c,\alpha_3,\beta_3,\gamma_3;c_1,\alpha_4;c_2\beta_4;c_3,\gamma_4;\end{array}\left|x,y,z\right.\right)=\frac{\Gamma\left(\mu\right)}{\Gamma\left(b_3\right)\Gamma\left(\mu-b_3\right)}$$

$$\cdot\int_0^1\xi^{b_3-1}\left(1-\xi\right)^{\mu-b_3-1}\bar{F}_D^{(3)}\left(\begin{array}{c} a,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1;b_1,\alpha_2;b_2,\beta_2;\mu,\gamma_2;\\ c,\alpha_3,\beta_3,\gamma_3;c_1,\alpha_4;c_2\beta_4;c_3,\gamma_4;\end{array}\left|x,y,z\xi^{\gamma_2}\right.\right)d\xi \tag{4}$$

$$\left(\Re\left(\mu\right)>\Re\left(b_3\right)>0\right),$$

$$\bar{F}_D^{(3)}\left(\begin{array}{c} a,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1;b_1,\alpha_2;b_2,\beta_2;b_3,\gamma_2;\\ c,\alpha_3,\beta_3,\gamma_3;c_1,\alpha_4;c_2\beta_4;c_3,\gamma_4;\end{array}\left|x,y,z\right.\right)=\frac{\Gamma\left(\mu\right)}{\Gamma\left(a\right)\Gamma\left(\mu-a\right)}$$

$$\cdot\int_0^1\xi^{a-1}\left(1-\xi\right)^{\mu-a-1}\bar{F}_D^{(3)}\left(\begin{array}{c} \mu,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1;\mu,\alpha_2;b_2,\beta_2;b_3,\gamma_2;\\ c,\alpha_3,\beta_3,\gamma_3;c_1,\alpha_4;c_2\beta_4;c_3,\gamma_4;\end{array}\left|x\xi^{\alpha_1},y\xi^{\beta_1},z\xi^{\gamma_1}\right.\right)d\xi \tag{5}$$

$$\left(\Re\left(\mu\right)>\Re\left(a\right)>0\right).$$

For proving the Euler-type integral representations (2) to (5), which are asserted by Theorem 1, we express $\bar{F}_D^{(3)}$ as a triple series, justifiably invert the order of the series and integrals involved, and then evaluate the resulting integrals by means of the well-known integral representing the classical Beta function $\mathrm{B}\left(\alpha,\beta\right)$.

Keywords: Extended Mittag-Leffler type function, hypergeometric function,special (or higher transcendental) function, integral representation.

2010 Mathematics Subject Classification: 26A33, 33B15, 33D05, 33E12, 33C65.

References

[1] Mittag–Leffler G.M Sur la nouvelle function , *C R Acad Sci Paris*, **1**:137 (1903), 554–558.

[2] Appell P., Kampé de, Fériet *Fonctions Hypergéométriques et Hypersphériques: Polynômes d'Hermite*, GauthiersVillars, Paris (1926).

[3] Salim T.O. Some properties relating to the generalized Mittage–Leffler function , *Adv Appl Math Anal.*, **4**:21 (2009), 21–30.

[4] Srivastava H.M., Daoust Martha C On Eulerian integrals associated with Kampe de Feriet's function , *Publications de L'institut Mathematique, Nouvelle serie*, **23**:9 (1969), 199-202.

[5] Maged G. Bin-Saad, Anvar Hasanov, Michael Ruzhansky Some properties relating to the Mittag–Leffler function of two variables , *Integral Transforms and Special Functions.*, **5**:33 (2022), 400–418.

Multiperiodicity of solution the initial value problem for a system of equations with two various differentiation operators

Amire ZHUMAGAZIYEV[a], Zhaishylyk SARTABANOV[b], Galiya ABDIKALIKOVA[c]

K.Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan
E-mail: [a]charmeda@mail.ru, [b]sartabanov42@mail.ru, [c]agalliya@mail.ru

There is considered linear system

$$Dx(\tau,t)=Bx(\tau,t)+f(\tau,t), \tag{1}$$

where $x=(x_1,x_2)$ is required vector-function, x_i is n_i-vector, $i=\overline{1,2}$, $n_1+n_2=n$; $D=(D_1,D_2)$ is differentiation operator with various components

$$D_1=\frac{\partial}{\partial\tau}+\left\langle v_1,\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle, \tag{2}$$

$$D_2 = \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle v_2, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle, \tag{3}$$

$<,>$ is the sign of the scalar product; $v_1 \neq v_2$ are constant m-vectors; $\frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, ..., \frac{\partial}{\partial t_m}\right)$; B is constant block $n \times n$-matrix with blocks B_{ij} of dimension $n_i \times n_j$, which can be written as

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}; \tag{4}$$

$f(\tau, t) = (f_1(\tau, t), f_2(\tau, t))$ is given n-vector function with vector components $f_i(\tau, t)$ of dimension n_i, $i = \overline{1,2}$, (τ, t) are independent variables, $\tau \in R$, $t = (t_1, ..., t_m) \in R^m$.

Multi-frequency oscillations in systems of the type (1) were investigated in [1-3], when the system splits into independent subsystems. In this thesis, the system (1)-(4) represented by blocks of matrix and vector functions of input data is considered and its multiperiodic solution by the method of periodic characteristics proposed in [4-6] is investigated.

From the characteristic system

$$\frac{dt}{d\tau} = v_i, \quad i = \overline{1,2}$$

we have solution

$$t = t^0 + v_i(\tau - \tau^0) \equiv \beta_i(\tau, \tau^0, t^0), \quad i = \overline{1,2}$$

with arbitrary initial data $(\tau^0, t^0) \in R \times R$.

The problem is to formulate the conditions for the existence of periodic solutions of system (1) with initial condition $x|_{\tau=\tau^0} = \varphi(t)$ and their integral representations.

Using the projector method [7], projectors P_i are introduced that act on a vector function $\varphi(t)$ defined on one of the two characteristics $t = \beta_i(\tau, \tau^0, t^0)$ as follows

$$P_i \varphi(\beta(\tau, \tau^0, t^0)) = \varphi(\beta_i(\tau, \tau^0, t^0)), \quad i = \overline{1,2}.$$

Theorem 1. *Under the condition $f(\tau, t) \in C^{(0,e)}_{\tau,t}(R \times R^m)$, the unique solution x of linear inhomogeneous system (1) is determined by the ratio*

$$x(\tau, t) = X(\tau - \tau^0)P\varphi(\beta(\tau^0, \tau, t)) + \int_{\tau^0}^{\tau} X(\tau - \xi)Pf(\xi, \beta(\xi, \tau, t))d\xi, \quad (\tau, t) \in R \times S^m.$$

Let the condition be fulfilled

$$f(\tau + \theta, t + \omega) = f(\tau, t) \in C^{(0,e)}_{\tau,t}(R \times R^m), \tag{5}$$

where $(\theta, \omega) = (\theta, \omega_1, ..., \omega_m)$ is a period with rationally incommensurable coordinates θ, $\omega_1, ..., \omega_m$.

Theorem 2. *Under conditions (5) and $Re\lambda(B) < 0$, the linear system (1) with various differentiation operators (2) and (3) has a unique (θ, ω)-periodic solution $x^*(\tau, t)$.*

Funding: The authors were supported by the grant no. AP19676629 of the Ministry of Science and Higher Education of Republic of Kazakhstan.

Keywords: multiperiodicity, various differentiation operator, block matrix, periodic characteristics, projector.

2010 Mathematics Subject Classification: 35F40, 35A30, 35B10

References

[1] Kharasakhal V.H. *Almost-periodic solutions of ordinary differential equations*, Nauka, Alma-Ata (1970).
[2] Umbetzhanov D.U. *Almost multiperiodic solutions of partial differential equations*, Nauka, Alma-Ata (1979).
[3] Umbetzhanov D.U. *Almost periodic solutions of evolutionary equations*, Nauka, Alma-Ata (1990).

[4] Sartabanov Zh.A. Implementation of small parameter method for the study of multiperiodic solutions of systems with a diagonal differentiation operator, *VII Congress TWMS*, (2023), 133.

[5] Sartabanov Zh.A. The periodic of characteristics of the diagonal differentiation operator, *Bulletin of Abai KazNPU*, **2**:82 (2023), 40–53.

[6] Sartabanov Zh.,Omarova, B., Aitenova, G., Zhumagaziyev, A. Integrating multiperiodic functions along the periodic characteristics of the diagonal differentiation operator, *KazNU Bulletin. Mathematics, Mechanics, Computer Science Series*, **4**:120 (2023), 52–68.

[7] Zhumagaziyev A.Kh., Sartabanov Zh., Sultanaev Y.T. On a New Method for Investigation of Multiperiodic Solutions of Quasilinear Strictly Hyperbolic System, *Azerbaijan Journal of Mathematics*, **1**:12 (2022), 32–48.

Stability of a program manifold of indirect control systems with mixed feedback

Sailaubay ZHUMATOV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakstan
E-mail: sailau.math@mail.ru

Consider the problem of construction of the control systems with mixed feedback, i.e. Popov type system, by given $(n-s)$-dimensional program manifold $\Omega\left(t\right) \equiv \omega(t,x) = 0$, in the following form [1]:

$$\begin{array}{l} \dot{x} = f\left(t,x\right) - d_1\varphi(\sigma), \quad t \in I = \left[0,\ \infty\right), \\ \dot{\xi} = \varphi\left(\sigma\right), \quad \sigma = p^T\omega - q\xi, \end{array} \tag{1}$$

where $x \in R^n$ is a state vector of the object, $f \in R^n$ is a vector-function, satisfying to conditions of existence of a solution $x(t) = 0$, and $d_1 \in R^n,\ p \in R^s$ are constant vectors,q is constant coefficients of rigid feedback, ξ is function differentiable with respect to σ, satisfies the following conditions

$$\begin{array}{c} \varphi(0) = 0 \wedge 0 < \varphi(\sigma)\sigma < k\sigma^2 \quad \forall \sigma \neq 0, \\ \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=0} < \chi > 0, \end{array} \tag{2}$$

For the manifold $\Omega(t)$ to be integral and for the system (1) - (2) on the manifold $\omega = 0$ it is necessary a condition $\xi = 0$. This condition is satisfied for $q \neq 0$.

This problem reduce to investigation of quality properties of the following system with respect to vector-function ω [2, 3]:

$$\begin{array}{l} \dot{\omega} = -A\omega - b\xi, \quad t \in I = \left[0,\ \infty\right), \\ \dot{\xi} = \varphi\left(\sigma\right), \quad \sigma = p^T\omega - q\xi, \end{array} \tag{3}$$

Here nonlinearity satisfies also to generalized conditions (2), and $F(t,x,\omega) = -A\omega,\ A \in R^{s\times s},\ H = \dfrac{\partial\omega}{\partial x},\ d = Hd_1$.

Statement of the Problem. To get the condition of absolute stability of a program manifold $\Omega(t)$ of the indirect control systems with mixed feedback in relation to the given vector-function ω.

By constructing a Lyapunov function of the form

$$V = \omega^T L\omega + \alpha\xi^2 + \beta\int\limits_0^\sigma \varphi(\sigma)d\sigma, \tag{4}$$

where $L = L^T > 0$ is symmetric matrix, $\alpha > 0, \beta > 0$ are positive numbers,sufficient conditions for the absolute stability of the program manifold of Popov-type systems with respect to the vector function ω are obtained.

The reviews of the works devoted to the construction various of autonomous and non-autonomous basic and inedirectautomatic control systems on the given program manifold possessing of quality properties and to solving of different inverse problems of dynamics were shown (see [3]-[12]).

Funding: This results are supported by grant of the Ministry of Science and Higher Education of Republic Kazakhstan No. AP 19677693 for 2023-2025 years.

Keywords: absolute stability, program manifold, automatic control systems, Lyapunov function, Popov type system

2010 Mathematics Subject Classification: 34K20, 93C19, 34K29

References

[1] Maygarin B.G. *Stability and quality of process of nonlinear automatic control system*, Nauka, Alma-Ata (1981).

[2] Erugin N.P. Construction of the entire set of systems of differential equations that have a given integral manifold, *Prikladnaya Matematika i Mecanika*, **10**:6 (1952), 659–670.

[3] Zhumatov S.S., Krementulo B.B., Maygarin B.G. *Lyapunov's second method in the problems of stability and control by motion*, Gylym, Almaty (1999).

[4] Galiullin A.S., Mukhametzyanov I.A., Mukharlyamov R.G. Review of researches on the analytical construction of the systems programmatic motions, *Vestnik RUDN*, **1** (1994), 5–21.

[5] Llibre J., Ramirez R. *Inverse Problems in Ordinary Differential Equations and Applications.* Springer International Publishing Switzerland(2016).

[6] Zhumatov S.S. Frequently conditions of convergence of control systems in the neighborhoods of program manifold, *Nelineinye kolebania.* **28**: 3 (2016), 367–375.

[7] Zhumatov S.S. Absolute stability of a program manifold of non-autonomous basic control systems, *News NAS RK. Series physico-mathematical.* **322**: 6 (2018), 37-43.

[8] Zhumatov S.S.On the stability of a program manifold of control systems with variable coefficients,*Ukrainian Mathematical Journal.* **71**: 8 (2020), 1202-1213.

[9] Zhumatov S.S.On the absolute stability of a program manifold of non-autonomous control systems with non-stationary nonlinearities,*Kazakh Mathematical Journal.***19**: 4 (2020), 35-46.

[10]*Zhumatov S.S.* Stability of the program manifold of different automatic indirect control systems, *News Of the Khoja Akhmet Yassawi Kazakh-Turkish International University. Mathematics, physics, computer science series.*-2021. **16**: 1 (2021), 69-82.

[11] *Zhumatov S.S., Vasilina G., K.* The Absolute Stability of Program Manifold of Control Systems with Rigid and Tachometric Feedbacks, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, -2022, **43**: 11 (2022), 3344–3351. Pleiades Publishing, Ltd., 2022.

[12] *Zhumatov S.S. Mynbayeva S.T.* Stability of the program manifold of automatic indirect control systems taking into account the external loads, *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Applications*, -2023, **7**: 2, (2023), 405-412.

Absolute stability of automatic control systems in the vicinity of program manifold

Sailaubay ZHUMATOV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakstan
E-mail: sailau.math@mail.ru

We consider the problem for constructing of the entire set of ordinary differential equation's systems in the plane[1]

$$\dot{x}_1 = P(x_1, x_2), \dot{x}_2 = Q(x_1, x_2), \tag{1}$$

for which the curve $\Omega(x_1, x_2)$ defined by the equation

$$\omega(x_1, x_2) = 0, \tag{2}$$

is program.

This problem is solved by finding the entire set of right-hand sides of the desired systems (1) satisfying equality [1]

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_1} P(x_1, x_2) + \frac{\partial \omega}{\partial x_2} Q(x_1, x_2) = F(x_1, x_2, \omega). \tag{3}$$

A function with this property $F(x_1, x_2, 0) \equiv 0$ we will call the Yerugin function.

Note that equality (3) is a linear algebraic equation with respect to P and Q, the solution of which contains one arbitrary function and depends on the function F. Choosing $P = P(x_1, x_2)$ as an arbitrary function we find the desired function $Q = Q(x_1, x_2)$.

Thus, the entire set of differential equation's systems that we have constructed has the following form

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = P(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = \dfrac{F(x_1, x_2, \omega) - \frac{\partial \omega}{\partial x_1} P(x_1, x_2)}{\dfrac{\partial \omega}{\partial x_2}}. \end{cases} \tag{4}$$

Now let's consider the problem of constructing automatic control systems based on a given $(n-s)$-dimensional program manifold $\Omega(t) \equiv \omega(t, x) = 0$, in the following form [2]:

$$\dot{x}(t) = f(t, x) - B_1 \xi, \quad \xi = \varphi(\sigma), \quad \sigma = P^T \omega, \quad t \in I = [0, \infty), \tag{5}$$

where $x \in R^n$ is the vector of the object's state, $f \in R^n$ is a vector function satisfying the conditions for the existence of a solution $x(t) = 0$, and $B_1 \in R^{n \times r}, P \in R^{n \times r}$ are matrices, $\omega \in R^s (s \leq n)$ is a vector, $\xi \in R^r$ is a vector function differentiable by σ satisfying a local quadratic connection

$$\varphi(0) = 0 \wedge 0 < \varphi^T \theta (\sigma - K^{-1} \varphi), \quad \forall \sigma \neq 0. \tag{6}$$

Differentiating ω in time t by virtue of (5), we get

$$\dot{\omega} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + Hf(t, x) - HB_1 \xi, \quad \xi = \varphi(\sigma), \quad \sigma = P^T \omega, \quad t \in I = [0, \infty), \tag{7}$$

Choosing the function $F(t, x, \omega)$ linear with respect to ω, we get the following system

$$\dot{\omega}(t) = A\omega - B\xi, \quad \xi = \varphi(\sigma), \quad \sigma = P^T \omega, \quad t \in I = [0, \infty). \tag{8}$$

Here the nonlinearity satisfies the conditions (6), and

$$F(t, x, \omega) = -A\omega, \tag{9}$$

where $-A \in R^{s \times s}$ is Hurwits matrix, $H = \dfrac{\partial \omega}{\partial x}, B = HB_1$.

Definition. The program manifold $\Omega(t)$ of an automatic control systems is called absolutely stable if it is globally stable on the solutions of the system (5) for any $\omega(t_0, x_0)$ and $\varphi(\sigma)$ satisfying the conditions (6).

Statement of the problem. To get the sufficient conditions of absolute stability for the automatic control systems with respect to vector-function ω in vicinity of program manifold.

For the system (8) we construct a Lyapunov function of the following form

$$V(\omega, \sigma) = \omega^T L \omega + \int_0^\sigma \varphi^T \beta d\sigma, \tag{10}$$

where $L = L^T > 0, \beta = diag(\beta_1, ..., \beta_m) > 0$. In order for there to be $-\dot{V} > 0$, provided $D^{(1)} > 0$, it is enough to performing of matrix inequalities

$$\left\| \begin{matrix} C & D \\ D^T & D^{(1)} \end{matrix} \right\| > 0 \vee (D^{(1)} - D^T C D > 0 \wedge C > 0) \tag{11}$$

The transfer matrix of the linear part of the system (8) from the input σ to the output $-\varphi$ has the form

$$W(i\varpi) = P^T(A + i\varpi E)^{-1}B. \tag{12}$$

Let K be a diagonal matrix, then by virtue of Theorem 3.4 [3] it is valid

Theorem 1. For the existence of a solution $L = L^T > 0$ of the inequality (11), it is necessary and sufficient that for all ϖ of the interval $]-\infty, +\infty[$ the inequality is satisfied

$$D^{(1)} + 2ReP^T(A + i\varpi E)^{-1}B > 0. \tag{13}$$

Theorem 2. If, under the condition $D^{(1)} > 0$, the nonlinearity $\varphi(\sigma)$ satisfy conditions (6), the Erugin function $F(t, x, \omega)$ have the form (9), there exist diagonal matrices $\beta > 0, \theta > 0,$, then for absolute stability of the automatic control systems (8) with respect to vector-function ω in vicinity of program manifold $\Omega(t)$, it is sufficient to performing of inequalities (13).

Funding: This results are supported by the Ministry of Science and Higher Education of Republic Kazakhstan Project No. BR 20281002 for 2023-2025 years.

Keywords: absolute stability, program manifold, automatic control systems, Lyapunov function, local quadratic connection

2010 Mathematics Subject Classification: 34K20, 93C19, 34K29

References

[1] Erugin N.P. Construction of the entire set of systems of differential equations that have a given integral manifold, *Prikladnaya Matematika i Mecanika*, **10**:6 (1952), 659–670.

[2] Maygarin B.G. *Stability and quality of process of nonlinear automatic control system*, Nauka, Alma-Ata (1981).

[3] Gantmacher F.R., Yakubovich V.A. Absolute stability of nonlinear regulated systems, *Proceedings of the Second All-Union Congress on Theoretical and Applied Mechanics.* M. Nauka, 1 (1965), 30-63.

3 Математическое моделирование, уравнения математической физики и геометрия

Руководители: профессор Алексеева Л.А.
д.ф.-м.н. Даирбеков Н.С.
академик НАН РК Харин С.Н.

Секретарь: д.ф.-м.н., доцент Бекетаева А.О.

Динамика нормализованного потока Риччи относительно множества метрик положительной секционной кривизны

Н.А. АБИЕВ

Институт математики НАН КР, Бишкек, Кыргызстан
E-mail: abievn@mail.ru

В [3] было начато изучение нормализованного потока Риччи (НПР) $\dot{\mathbf{g}}(t) = -2\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}} + 2n^{-1}\mathbf{g}(t)S_{\mathbf{g}}$ на обобщенных пространствах Уоллаха (ОПУ), где $\mathbf{g}(t)$ означает 1-параметрическое семейство римановых метрик, $\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}}$ — тензор Риччи и $S_{\mathbf{g}}$ — скалярная кривизна метрики $\mathbf{g}$ (см. [3,7] для деталей). Согласно [8] на ОПУ множество S римановых метрик положительной секционной кривизны описывается системой из трех неравенств $(x_j-x_k)^2+2x_i(x_j+x_k)-3x_i^2>0$, где положительные x_i — параметры римановой метрики, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$ и $\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$. В [4] мы изучали эволюцию римановых метрик на ОПУ, зависящих от одного параметра $a \in (0,1/2)$, под влиянием НПР и получили обобщения некоторых результатов работ [5,6], касающихся случаев $a=1/6$, $a=1/8$ и $a=1/9$ пространств Уоллаха $\mathrm{SU}(3)/T_{\max}$, $\mathrm{Sp}(3)\,/\,\mathrm{Sp}(1)\times\mathrm{Sp}(1)\times\mathrm{Sp}(1)$ и $F_4/\,\mathrm{Spin}(8)$. В [2] получены аналогичные ответы для всех ОПУ с $a=1/4$. В [1] мы предлагаем полное описание поведения НПР относительно множества S в более общем случае $a \in (0,1/2)$, тем самым покрывая часть результатов [4], касающуюся эволюции римановых метрик положительной секционной кривизны.

Ключевые слова: обобщенное пространство Уоллаха, риманова метрика, нормализованный поток Риччи, кривизна Риччи, секционная кривизна.

2010 Mathematics Subject Classification: 53C30, 53C44, 34C05, 37C10

Литература

[1] Abiev N.A. On the dynamics of a three-dimensional differential system related to the normalized Ricci flow on generalized Wallach spaces, *arXiv*: 2312.09706 (Preprint).

[2] Abiev N.A. On the evolution of invariant Riemannian metrics on one class of generalized Wallach spaces under the influence of the normalized Ricci flow, *Sib. Adv. Math.*, **27**: 4 (2017), 227–238.

[3] Abiev N.A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu.G., Siasos P. The dynamics of the Ricci flow on generalized Wallach spaces, *Differ. Geom. Appl.*, **35**: Suppl. (2014), 26–43.

[4] Abiev N.A., Nikonorov Yu.G. The evolution of positively curved invariant Riemannian metrics on the Wallach spaces under the Ricci flow, *Ann. Glob. Anal. Geom.*, **50**: 1 (2016), 65–84.

[5] Böhm C., Wilking B. Nonnegatively curved manifolds with finite fundamental groups admit metrics with positive Ricci curvature, *GAFA Geom. Func. Anal.*, **17** (2007), 665–681.

[6] Cheung M.-W., Wallach, N.R. Ricci flow and curvature on the variety of flags on the two dimensional projective space over the complexes, quaternions and octonions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **143**:1 (2015), 369–378.

[7] Nikonorov Yu.G. Classification of generalized Wallach spaces, *Geom. Dedicata*, **181**: 1 (2016), 193–212; correction: *Geom. Dedicata*, **214**: 1 (2021), 849–851.

[8] Valiev F.M. Precise estimates for the sectional curvature of homogeneous Riemannian metrics on Wallach spaces, *Sib. Math. J.*, **20**: (1979), 176–187.

Обобщенные транспортные решения бикватернионного волнового уравнения и их свойства

Л.А. АЛЕКСЕЕВА[a], Г.Н. АЗИЗ[b]

Институт математики и математического моделирования МНВО РК, Алматы, Казахстан
E-mail: [a]alexeeva47@mail.ru, [b]azizgulfariza@gmail.com

Дифференциальная алгебра кватернионов и бикватернионов очень удобна для исследования электромагнитных полей излучателей самого разного вида, и в последние десятилетия стала активно развиваться в работах небольшого числа исследователей. Здесь упомянем некоторые из них [1-5]. В основном они связаны с исследованием бикватернионных представлений уравнений Максвелла и Дирака и свойств их решений. Эти уравнения являются частным случаем бикватернионных волновых уравнений, общие решения которых построены ранее в работах [5-7]. Здесь рассматриваются и исследуются транспортные решения бикватернионного волнового уравнения, которое является бикватернионным обобщением уравнений Максвелла, которые описывают электромагнитные поля излучателей электромагнитных (ЭМ) и электро-гравимагнитных волн, движущихся в определенном направлении с постоянной скоростью V. Здесь рассмотрены досветовые транспортные решения и исследованы их особенности. Построена бикватернионная функция (бифункция) Грина и обобщенные транспортные решения в подвижной системе координат, которые описывают ЭМ поля движущихся обьектов при скоростях движения меньше, чем скорость распространения ЭМ в среде (световой скорости).

Транспортное уравнение Максвелла (МТУ) имеет вид:

$$\mathbf{M}_v^{\pm}(\partial_1, \partial_2, \partial_z)B = F(x, z),\ x = (x_1, x_2),\ z = x_3 - Vt \tag{1}$$

Здесь взаимные бикватернионные дифференциальные операторы имеют вид:

$$\mathbf{M}_v^{\pm} = -M\partial_z \pm igrad,$$

$M = V/c$ — число Маха, бикватернион $\mathbf{F}$=f(x,z)+F(x,z) описывает движение излучателя в направлении оси $X3$ со скоростью $V = Mc$, — скорость света. Возможны три случая: $M < 1$ — досветовой, $M = 1$ — световой и $M > 1$ — сверхсветовой, которые меняют тип уравнения (1) и вид его решения.

Доказаны следующие теоремы и лемма, с использованием которой построено общее решение (1).

Лемма. Композиция взаимных транспортных операторов Максвелла коммутативна и равна скалярному оператору

$$\mathbf{M}_v^{\pm}\mathbf{M}_v^{\mp} \triangleq -\{\Delta_2 + (1 - M^2)\partial_{zz}\},$$

где $\Delta_2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$ двумерный лапласиян.

Теорема 2. Решение транспортного биволнового уравнения Максвелла, удовлетворяющее условиям затухания на бесконечности:

$$\mathbf{B}(x, z) \to 0, ||(x, z)|| \to \infty$$

при досветовых скоростях движения имеет вид бикватернионной свертки:

$$\mathbf{B}(x, z) = \mathbf{U}(x, z) * \mathbf{F}(x, z),$$

где бифункция Грина $\mathbf{U}$(x,z)- фундаментальное решение (1) при $\mathbf{F}(x, z) = \delta(x)\delta(z)$,

$$\mathbf{U}(x, z) = -\frac{1}{4\pi\sqrt{(z^2 + (r\mu)^2)^3}}(Mz \pm\ i(\mu^2 r_{,1}, \mu^2 r_{,2}, z)),\ r_{,j} = \frac{x_{,j}}{r}$$

Решение (1) существует при любых $\mathbf{F}$(x,z), допускающих такую свертку.

Приведены расчеты плотности скалярного потенциала, плотности энергии и вектора Пойнтинга бифункции Грина в зависимости от скорости движения излучателя. Представлены расчетные формулы ЭМ полей, порождаемые движущимися излучателями, как распределенными в пространстве, так и сосредоточенными на поверхностях и на кривых линиях (нитях), которые моделируются сингулярными обобщенными функциями – простыми слоями на поверхности или кривой [8].

Funding: Авторы были поддержаны грантом КН МНВО РК AP19674789, 2023-2025 гг..

Литература

[1] Rodrigues, W. A., Jr., Capelas de Oliviera E. *Dirac and Maxwell equations in the Clifford and spinClifford bundles*, Int. Journal of Theoretical Physics, 29(1990),397–412.

[2] Adler S. L. Quaternionic quantum mechanics and quantum fields- New York, *Oxford University Press*, (1995).

[3] Ефремов А.П. Кватернионы: алгебра, геометрия и физические теории, в: *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (2004), №1, 111-127.

[4] Acevedo M., Lopez-Bonilla J. , Sanchez-Meraz M. *Quaternions, Maxwell Equations and Lorentz Transformations*, Apeiron, 12 (2005), No. 4 , 371.

[5] Alexeyeva L.A. Biquaternions algebra and its applications by solving of some theoretical physics equations, *Clifford Analysis, Clifford Algebras and their Applications*, 7,No1 (2010), 19-39.

[6] Alexeyeva L.A. Differential algebra of biquaternions. Dirac equations and its generalized solutions: *Progress in analysis*, Proccedings of the 8th Congress of ISAAC, Moscow (2013), 153-161.

[7] Biquaternionic Wave Equations and Properties of Their Generalized Solutions, *Differential Equations*, Vol.57, no5 (2021), 594-604.

[8] Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике:- *М: «Наука»*, Moscow (1979), 318с.

Двухфазные задачи теплопроводности с нелокальными граничными условиями

Әнуар АЙШУАК

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан
E-mail: aanuarqyzy@gmail.com

Краевые задачи для уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами досточно хорошо изучены [1-2]. В данной работе обосновано решение поставленной нелокальной задачи для уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом методом Фурье.

В области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ требуется найти функцию $u(x,t)$ удовлетворяющий уравнению теплопроводности

$$\begin{array}{ll} U_t = k_1^2 U_{xx} & \Omega_1 = \{(x,t) : 0 < x < x_0, 0 < t < T\} \\ U_t = k_2^2 U_{xx} & \Omega_2 = \{(x,t) : x_0 < x < x, 0 < t < T\} \end{array} \tag{1}$$

начальному условию

$$U(x,0) = f(x), \quad (0 < x < l) \tag{2}$$

нелокальным граничным условием

$$\begin{cases} U(0,t) + U(l,t) = 0 \\ k_1 U_x(0,t) + k_2 U_x(l,t) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

и условиям сопряжения

$$\begin{cases} U(x_0 - 0, t) = U(x_0 + 0, t) \\ k_1 U_x(x_0 - 0, t) = k_2 U_x(x_0 + 0, t). \end{cases} \tag{4}$$

Для данной задачи (1)-(2) были получены следующие результаты:

- найдены собственные значения и собственные функции спектральной задачи,
- было показано, что спектральная задача не является самосопряженной,
- построена сопряженная спектральная задача к данной задаче,

- показано, что собственные функции спектральной задачи и связанной с ней задачи биортогональны,
- построена самосопряженная спектральная задача,
- найдены собственные значения и собственные функции самосопряженной задачи,
- доказано, что собственные функции данной задачи образуют базиса Рисса,
- доказано, что решение данной задачи существует и является единственным.

Литература

[1] Koilyshov U.K., M.A.Sadybekov . *wo-phase tasks thermal conductivity with boundary conditions of the Sturm type.// Sixth International Conference on Analysis and Applied Mathematics. Abstract book of the conference ICAAM*, Oktober 31 – November 6, 2022, Antalya, Turkey.

[2] Koilyshov U.K., K.A. Beisenbaeva *Solution of initial-boundary value problems for the heat equation with discontinuous coefficients. // VVVII World Congress of the Turkic World Mathematicians (TWMS Congress – 2023), 20-23 September, 2023.*

Геодезические потоки на псевдоримановых многообразиях

Динмухаммед АКПАН

МГУ имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия
ИМММ, Алматы, Казахстан
E-mail: dinmukhammed.akpan@math.msu.ru

Пусть (M, g) двумерное (псевдо-)риманово многообразие. Геодезической данной метрики называются кривые

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)),$$

являющиеся решениями дифференциальных уравнений

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0,$$

где $\dot\gamma = \frac{d\gamma}{dt}$ — вектор скорости кривой, ∇ — оператор ковариантного дифференцирования, отвечающий симметрической связонасти, согласованной метрикой $g = (g_{ij})$.

Рассмотрим функцию $H := \frac{1}{2}g^{ij}p_ip_j : T^*M \to \mathbb{R}$ — гамильтониан геодезического потока метрики g. Геодезический поток называется интегрируемым, если существует гладкая функция $F : T^*M \to \mathbb{R}$ такая, что dF, dH линейно независимы и они коммутируют относительно скобки Пуассона, то есть $\{H, F\} = 0$.

В докладе рассмотрим известные результаты в римановом и псевдоримановом случае, обсудим топологические препятствие интегрируемости геодезического потока, а также новые результаты в псевдоримановом случае: особенности квадратичного интеграла в псевдоримановом случае, нормальные формы и новые примеры.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP23483476 МНВО РК.

Ключевые слова: интегрируемые системы, геодезический поток, особенности интегрируемых систем.

2010 Mathematics Subject Classification: 70H05, 37J35, 37K10, 53D25

Литература

[1] Bolsinov A.V., Fomenko A.T. Integrable Geodesic Flows on Two-Dimensional Surfaces, Monographs in Contemporary Mathematics, Germany, 1999

[2] Bolsinov A., Matveev V., Pucacco G. Normal forms for pseudo-Riemannian 2-dimensional metrics whose geodesic flows admit integrals quadratic in momenta, *Journal of Geometry and Physics*, **59**:7 (2009), 1048–1062.

Дозвуковые вибротранспортные решения волнового уравнения и их приложение в задачах математической физики

Л.А. АЛЕКСЕЕВА

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: alexeeva@math.kz

Исследование процессов распространения волн в сплошных средах и электромагнитных полях приводит к решению систем дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического и смешанного типов и определению их решений в виде векторных полей, которые описывают различные характеристики динамических процессов. Это могут быть, например, перемещения и скорости, как в упругих и многокомпонентных средах, или напряженности электромагнитных полей, изменение которых в пространстве и времени позволяет моделировать такие процессы и изучать их математическими методами.

Хорошо известно, что распространение возмущений в среде происходит с конечной скоростью, которая зависит от типа деформации среды и различается для волн, связанных с обьемными деформациями и сдвиговыми. При математическом моделировании волновых процессов в однородных изотропных средах они являются константами среды и входят в уравнения динамики этой среды как входные параметры.

Как известно, любое векторное поле $u(x,t)$ в трехмерном пространстве можно представить через скалярный и векторный потенциалы $\varphi(x,t), \vec{\psi}(x,t)$ в виде :

$$u(x,t) = \mathtt{grad}\varphi + \mathtt{rot}\tilde{\psi}, \tag{5}$$

которые описывают дилатационные и вихревые волны в среде. В изотропных средах, как правило, они удовлетворяют волновым уравнениям:

$$\Box_{c_1}\varphi = f(x,t), \qquad \Box_{c_2}\vec{\psi} = \vec{g}(x,t), \tag{6}$$

Процессы распространения звука в воздухе изучаются в акустике. При этом давление воздуха является решением волнового уравнения $(2)_1$, где в качестве c_1 стоит скорость звука. В упругой среде две скорости звука, разные для скалярного и векторного потенциала. В этом случае решения вида (1) являются решениями уравнений Ламе динамики упругой среды, если потенциалы удовлетворяют этими волновым уравнениям соответственно. Сдвиговые волны, которые описываются векторным потенциалом, распространяются медленнее дилатационных ($c_2 < c_1$).

А в изотропной электромагнитной среде, описываемой уравнениями Максвелла, скорость распространения ЭМ волна одна c, ее называют *скоростью света.* И представления напряженности электрического поля в виде (1) и магнитного поля через ротор векторного потенциала, удовлетворяющего (2) (при $c_2 = c$) дает решение уравнений Максвелла.

Ключевую роль при разработке МОФ и МГИУ для решения краевых задач для уравнений математической физики играют фундаментальные решения, поскольку служат основой для построения ядер интегральных уравнений и интегральных представлений решений краевых задач [1-4].

В докладе будут представлены вибротранспортные решения волнового уравнения при дозвуковых скоростях движения источника возмущений. Построена функция Грина – фундаментальное решение, которое описывает динамику среды при движении сосредоточенного в точке виброисточника. На его основе представлены общие решения вибротранспортного уравнения при действии как распределенных в пространстве движущихся виброисточников, так и сосредоточенных на подвижных поверхностях и линиях, которые моделируются сингулярными обобщенными функциями - простыми слоями на поверхности или кривой.

Построенные вибротранспортные решения волнового уравнения позволяют исследовать волновые процессы в самых разных средах при воздействии подвижных виброисточников волн различной природы.

Funding: Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета Науки Министерства науки и высшего образования республики Казахстан (грант AP19674789, 2023-2025 гг.).

Литература

[1] Алексеева Л.А. Динамические аналоги формул Грина, Гаусса для решений волнового уравнения в $R^n \times t$. //Дифференциальные уравнения.-1995.- Т.31.-11.-С. 1951-1953.

[2] Алексеева Л.А. Метод обобщенных функций в нестационарных краевых задачах для волнового уравнения // Математический журнал.- 2006.- Т.6.-1(19).-С.16-32.

[3] Alexeyeva L.A. Boundary integral equations of nonstationary BVP for wave equations // Int. Congress of Mathematicians.-Madrid.-2006.- P.436.

[4] Алексеева Л.А. Обобщенные решения краевых задач для одного класса бегущих решений волнового уравнения // Математический журнал.-2008.- Т.8.-2(30).-С.1-19.

Транспортные решения волновых уравнений и их свойства. Ударные волны

Л.А. АЛЕКСЕЕВА

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: alexeeva@math.kz

Решение многих задач акустики, гидромеханики, теории упругости и других разделов физики связано с решением краевых задач для гиперболических уравнений и систем, описывающих процессы распространения волн в сплошных средах, поэтому весьма актуально построение эффективных способов их решения при действии источников возмущений различного типа для областей с произвольной геометрией границ и разнообразным видом граничных условий.

Среди действующих источников возмущений наиболее распространены транспортные, которые связаны с движущимися источниками (нагрузками), форма которых не меняется с течением времени, а скорость движения может быть *дозвуковой*, *звуковой*, *сверхзвуковой*, а в средах с несколькими звуковыми скоростями (в упругих и многокомпонентных, например) еще и трансзвуковой. Скорость движения существенно влияет на тип уравнений, параметрически зависящих от числа Маха (M) - отношения скорости движения V к звуковой скорости c ($M = V/c$). В подвижной системе координат, связанной с источником, тип уравнений меняется: эллиптический при дозвуковых скоростях, гиперболический при сверхзвуковых. А при наличии трансзвуковых скоростей имеем системы смешанного эллиптико-гиперболического типа. При световых скоростях системы могут эллиптико-параболическими и параболо-гиперболическими. Это существенно влияет на постановку модельных краевых задач и методы их решения [1-4].

Здесь мы мы покажем это на примере фундаментальных и обобщенных решений уравнений Максвелла, описывающих процессы распространения электромагнитных волн в средах со *световой* скоростью ($c = \sqrt{\varepsilon\mu}$). При досветовых скоростях движения источника ЭМ волн ($M < 1$) транспортные уравнения Максвелла в подвижной системе координат – эллиптические, при сверхсветовых скоростях система уравнений становится строго гиперболической, при световой скорости - система параболическая. При $M \geq 1$ ее решения описывают *ударные* электромагнитные волны, на фронтах которых вектора напряженностей электрического и магнитного поля $(E(x,t), H(x,t))$ разрывны.

С использованием метода обобщенных функций, получены условия на фронтах ударных волн, которые свидетельствуют известным свойствам поперечности ЭМ волн и ортогональности векторов электрической и магнитной напряженности поля на их фронтах и фазовых поверхностях.

Получены аналитические формулы расчета ЭМ полей излучателей различных форм: пространственно распределенных, сосредоточенных и распределенных на поверхностях или кривых. Эти результаты можно использовать для исследования электромагнитных полей различных световых излучателей и излучателей радиоволн, расположенных на подвижных объектах (поездах, машинах, кораблях, спутниках и т.п.), а также в физике элементарных частиц.

Funding: Работа выполнена по программе BR20281002 «Фундаментальные исследования по математике и математическому моделированию» КН МНВО РК.

Литература

[1] Алексеева Л.А. Сингулярные граничные интегральные уравнения краевых задач эластодинамики в случае дозвуковых бегущих нагрузок// Дифференциальные уравнения, 2010, Т. 46, 4, с.512-519.

[2] Alexeyeva L.A. Singular Boundary Integral Equations of Boundary Value Problems of the Elasticity Theory under Supersonic Transport Loads // Differential equations, 2017, Vol. 53, 3, pp. 317-332.

[3] Алексеева Л.А., Кайшибаева Г.К. Транспортные решения уравнений Ламе. Ударные упругие волны// Журнал вычислительной математики и математической физики, 2016, Т.16, 7, с.1351-1362.

[4] Alexeyeva L.A. General Functions Method in Transport Boundary Value Problems of Elasticity Theory - Chapter 8 in the Book "Differential equations. Theory and current researches". IntechOpen, 2018, 129-161.

Решения стационарных краевых задач связанной термоупругости для полуплоскости

Б.Н. АЛИПОВА

Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан;
University of Kentucky, Lexington KY, USA
E-mail: alipova.bakhyt@gmail.com

Краевые задачи динамики термоупругого полупространства решаются в теории связанной термоупругости, в условиях плоской деформации при периодических поверхностных силовых и тепловых воздействиях, связанных с искомыми граничными функциями линейными алгебраическими соотношениями. Для поставленных краевых задач построены тензоры Грина. Используя свойства тензора Грина, получены аналитические решения этих задач. Для их решения использовался метод неполного разделения переменных, преобразование Фурье и свойства фундаментальных решений. Представленный алгоритм дает решение классических четырех краевых задач термоупругости, а также неклассических со связанными тепловыми и силовыми характеристиками на границе полуплоскости.

Ключевые слова: связанная термоупругость, термонапряженное состояние, периодические краевые задачи, линейно-связанные краевые условия, аналитическое решение

2010 Mathematics Subject Classification: 74B10, 74H10, 74H20, 74J20

Литература

[1] Новацкий В. *Динамические задачи термоупругости*, Мир, Москва (1970).

[2] Alexeyeva L. A., Alipova B. N. Fundamental and Generalized Solutions of the Equations of Motion of a Thermoelastic Half-Plane with a Free Boundary, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **1**:59, (2019), 59–5.

[3] Владимиров В.С. *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, Москва (1978).

[4] Владимиров В.С. *Уравнения математической физики*, Наука, Москва (1988).

[5] Alexeyeva L.A., Alipova B.N., Dadayeva A.N. Shock waves as generalized solutions of thermo- elastodynamics equations. On the uniqueness of boundary value problems solutions, в: *American Institute of Physics Conference Proceeding*, (2017), V. 1798, 020003-1-020003-8; doi: 10.1063/1.4972595.

Автомодельные решения четырехмерного вырождающегося дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка

З.О. АРЗИКУЛОВ

Ферганский политехнический институт, Фергана, Узбекистан
E-mail: zafarbekarzikulov1984@gmail.com

При построении автомодельных решений вырождающихся дифференциальных уравнений с частными производными гипергеометрические функции многих переменных высокого порядка имеют огромное значение.

Введем в рассмотрение гипергеометрическую функцию третьего порядка

$$F^{1:0}_{0:2}\left(a;b_1,b_2;c_1,c_2;d_1,d_2;x,y,z\right)=$$
$$=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n+p}}{\left(b_1\right)_m\left(b_2\right)_m\left(c_1\right)_n\left(c_2\right)_n\left(d_1\right)_p\left(d_2\right)_p}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}. \quad (1)$$

Нетрудно установить, что функция $\omega=F^{1:0}_{0:2}$, определенная равенством (1) удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} x^2\omega_{xxx}+\left(b_1+b_2+1\right)x\omega_{xx}+\left(b_1b_2-x\right)\omega_x-y\omega_y-z\omega_z-a\omega=0,\\ y^2\omega_{yyy}+\left(c_1+c_2+1\right)x\omega_{yy}+\left(c_1c_2-y\right)\omega_y-x\omega_x-z\omega_z-a\omega=0,\\ z^2\omega_{zzz}+\left(d_1+d_2+1\right)z\omega_{zz}+\left(d_1d_2-z\right)\omega_z-x\omega_x-y\omega_y-a\omega=0.\end{cases} \quad (2)$$

Линейно независимые решения системы (2) в окрестности начала координат будем искать в виде
$$u=x^{\lambda}y^{\mu}z^{\nu}\omega(x,y,z),$$
где λ, μ и ν — произвольные числа, подлежащие к определению, $\omega(x,y,z)$ — произвольная функция.

Вычислив необходимые производные от функции и подставив их систему (2), получим определяющую систему (indicate system)

$$\begin{cases}\lambda\left(\lambda-1+b_1\right)\left(\lambda-1+b_2\right)=0,\\ \mu\left(\mu-1+c_1\right)\left(\mu-1+c_2\right)=0,\\ \nu\left(\nu-1+d_1\right)\left(\nu-1+d_2\right)=0,\end{cases}$$

имеющую 27 решений.

Теперь рассмотрим уравнение

$$x^ny^mz^pu_t-t^ky^mz^pu_{xxx}-t^kx^nz^pu_{yyy}-t^kx^ny^mu_{zzz}=0,\ m,n,k,p>0 \quad (3)$$

в области $\Omega=\{(x,y,z,t):\ x>0,\ y>0,\ z>0,\ t>0\}$.

Решение уравнения (3) будем искать в виде

$$u(x,y,z,t)=\frac{k+1}{3t^{k+1}}\omega(\xi,\eta,\zeta), \quad (4)$$

где ω — неизвестная функция, подлежащая определению, а

$$\xi=-\frac{k+1}{3(n+3)^3t^{k+1}}x^{n+3},\ \eta=-\frac{k+1}{3(m+3)^3t^{k+1}}y^{m+3},\zeta=-\frac{k+1}{3(p+3)^3t^{k+1}}z^{p+3}.$$

Подставляя (4) в уравнение (3), получим систему дифференциальных уравнений в частных производных гипергеометрического типа

$$\begin{cases} \xi^2\omega_{\xi\xi\xi} + (\alpha+2)\,\xi\omega_{\xi\xi} + \left(\dfrac{1+2\alpha}{3}\dfrac{2+\alpha}{3} - \xi\right)\omega_\xi - \eta\omega_\eta - \zeta\omega_\zeta - \omega = 0, \\ \eta^2\omega_{\eta\eta\eta} + (\beta+2)\,\eta\omega_{\eta\eta} + \left(\dfrac{1+2\beta}{3}\dfrac{2+\beta}{3} - \eta\right)\omega_\eta - \xi\omega_\xi - \zeta\omega_\zeta - \omega = 0, \\ \zeta^2\omega_{\zeta\zeta\zeta} + (\gamma+2)\,\zeta\omega_{\zeta\zeta} + \left(\dfrac{1+2\gamma}{3}\dfrac{2+\gamma}{3} - \zeta\right)\omega_\zeta - \xi\omega_\xi - \eta\omega_\eta - \omega = 0, \end{cases}$$

где

$$\alpha = \frac{n}{n+3},\ \beta = \frac{m}{m+3},\ \gamma = \frac{p}{p+3}.$$

Сравнивая теперь последнюю систему дифференциальных уравнений с системой (2), легко выписать все 27 автомодельные решения вырождающегося дифференциального уравнения в частных производных (3). Здесь мы ограничимся указанием одного (первого) из них:

$$u_1 = \lambda_1\, t^{-k-1} F^{1:0}_{0:2}\left(1; \frac{2+\alpha}{3}, \frac{1+2\alpha}{3};\ \frac{2+\beta}{3}, \frac{1+2\beta}{3};\ \frac{2+\gamma}{3}, \frac{1+2\gamma}{3}; \xi, \eta, \zeta\right).$$

Отметим, что автомодельные решения одного трехмерного вырождающегося дифференциального уравнения третьего порядка построены в [1].

Ключевые слова: автомодельное решение, гипергеометрическая функция от трех переменных, вырождающееся дифференциальное уравнение.

2010 Mathematics Subject Classification: 33C20,34A30, 35L25, 35L80

Литература

[1] Ruzhansky M., Hasanov A. Self-similar solutions of the model degenerate partial differential equations of the second, third, and fourth order. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **41**:6 (2020), 1103 – 1114.

Нелокальная по времени задача для уравнения гиперболического типа

Р. Ашуров[a], Н. Нуралиева[b]

Институт математики имени В.И.Романовского, Ташкент, Узбекистан
E-mail: [a]ashurovr@gmail.com, [b]n.navbahor2197@gmail.com

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для уравнения гиперболического типа

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T; \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le T; \\ u(x,\xi) = \alpha u(x,0) + \varphi(x), \quad 0 < \xi \le T; \\ u_t(x,\xi) = \beta u_t(x,0) + \psi(x), \end{cases} \tag{1}$$

здесь $\varphi(x), \psi(x) \in C[0,1],\ f(x,t) \in C([0,1]\times[0,T])$, α, β — постоянные числа, $\xi \in (0,T]$ — фиксированная точка.

Теорема 1. *Если существует решение задачи (1), то оно единственно тогда и только тогда когда* $1 + \alpha\beta - (\alpha+\beta)\cos k\pi\xi \neq 0$ *при всех* $k \in \mathbb{N}$.

При доказательстве этой теоремы использованы некоторые оригинальные идеи из работы [1].

Теорема 2. *Пусть функция $f(x,t)$ непрерывна на $[0,1]\times[0,T]$, дважды непрерывно дифференцируема по переменной x и удовлетворяет условию $f(0,t)=f(1,t)=0$ на всем отрезке $[0,T]$ и функции $\varphi(x)\in C^3[0,1]$, $\psi(x)\in C^2[0,1]$ удовлетворяют условиям $\varphi(0)=\varphi(1)=0$, $\varphi''(0)=\varphi''(1)=0$, $\psi(0)=\psi(1)=0$. Тогда, если для чисел α и β имеет место оценка $\left|\frac{1+\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right|>1$, то задача (1) имеет единственное решение и оно имеет вид:*

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg[T_k(t)+(\varphi_k-T_k(\xi))\frac{(cos\pi k(\xi-t)-\beta cos\pi kt)}{1+\alpha\beta-(\alpha+\beta)cos\pi k\xi}- \tag{2}$$

$$-(\psi_k-T_k'(\xi))\frac{1}{\pi k}\frac{(sin\pi k(\xi-t)+\alpha sin\pi kt)}{1+\alpha\beta-(\alpha+\beta)cos\pi k\xi}\Bigg]sin\pi kx,$$

где

$$T_k(t)=\frac{1}{\pi k}\int_0^t f_k(\eta)sin\pi k(t-\eta)\,d\eta.$$

Отметим, что аналогичная задача с (1), для уравнений субдиффузии изучена в работе [2].

Funding: Авторы были поддержаны грантом № F-FA-2021-424.

Ключевые слова:уравнение гиперболического типа, нелокальная по времени задача, еденственность и существование решения, метод Фурье.

2020 Mathematics Subject Classification: 35A09

Литература

[1] Сабитов К.Б. *Уравнения математической физики*, ФИЗМАТЛИТ — ISBN 978-5-9221-1483-7,Издательство, Москва (2013).

[2] Ашуров. Р, Файзиев. Ю. On the Nonlocal Problems in Time for Time-Fractional Subdiffusion Equations, *Fractal Fract. 2022. 6, 41. https://doi.org/10.3390/ fractalfract6010041*, (2022)

Прямые и обратные задачи для кинетического уравнения переноса в P_n-приближении

К.С. БОБОЕВ

Сибирский университет потребительской кооперации, Новосибирск, Россия.
E-mail: boboev@mail.ru

Настоящая работа посвящена исследованию прямой и обратной задачам для уравнения переноса излучения в P_n-приближении метода сферических гармоник.

Пусть процесс излучения описывается обобщенным решением следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma(x)u=Su+\delta(x,t)\delta(\mu^2-\mu_*^2),\qquad x\in R,\quad t\in R_+, \tag{1}$$

$$u\,|_{t<0}\equiv 0. \tag{2}$$

Здесь

$$\mu_*,\ \mu\in(-1,1),\quad R_+=|t\in R:t>0|,$$

R — множество вещественных чисел, δ — дельта-функция Дирака,

$$Su=\frac{\sigma_s(x)}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}g(x,\mu_0)u(x,t,\mu')d\mu'd\varphi,$$

$$\mu_0=\mu\mu'+\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\varphi),$$

$u(x,t,\mu)$ — плотность потока нейтронов, $\sigma(x)$, $\sigma_s(x)$ — полное сечение и сечение рассеяния, $g(x,\mu_0)$ — индикатрисса рассеяния.

В соответствии с методом сферических гармоник [1] предположим, что процесс распространения нейтронов достаточно точно описывается конечным рядом

$$u(x,t,\mu) \approx \sum_{j=0}^{n} \left(j+\frac{1}{2}\right) u_{n+1}(x,t) P_j(\mu), \tag{3}$$

где $P_j(\mu)$ — полиномы Лежандра.

Тогда подставляя (3) в (1), и получившуюся симметрическую гиперболическую систему приведя к каноническому виду [1, 2], получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + M\frac{\partial}{\partial z} + A\right) v = \Phi\delta(z,t); \quad z \in R, \quad t \in R_+, \tag{4}$$

$$\mathrm{v}\mid_{t<0} \equiv 0. \tag{5}$$

Обратная задача состоит из определения коэффицииентов $\sigma(x)$ $\sigma_s(x)$ по дополнительной информации о решении прямой задачи (4)–(5)

$$\mathrm{v}_j\mid_{z=0} = f_j(t), \quad t \in R_+. \tag{6}$$

Используя методику работ [2, 3], можно доказать теорему существования обратной задачи “в малом” и теорему единственности “в целом”.

Предложен конечно-разностный метод решения обратной задачи определения коэффициентов кинетического уравнения, доказана сходимость предложенного метода.

Литература

[1] Султангазин У.М. Метод сферических гармоник и дискретных ординат в задачах кинетической теории переноса. — Алма-Ата: Наука, 1979.

[2] Романов В.Г., Кабанихин С.И., Бобоев К.С. Обратная задача для P_n-приближения кинетического уравнения переноса.— ДАН СССР, 1984, т. 276, N 2, с. 296-299.

[3] Бобоев К.С. Обоснование сходимости для конечно-разностного решения одной обратной задачи для P_n-приближения кинетического уравнения переноса. // Труды Междунар. конференции “Вычислительная математика и математическая геофизика”. — Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2018, с. 68-71.

Неравенство Соболева на стратифицированном множестве

Н.С. ДАИРБЕКОВ[1,4,a], О.М. ПЕНКИН[2,4,b] Л.О. САРЫБЕКОВА[3,4,c]

[1] *Университет имени Сулеймана Демиреля, Алматы, Казахстан*

[2] *Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*

[3] *Казахстанско-Британский технический университет, Алматы, Казахстан*

[4] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

E-mail: [a]*nurlan.dairbekov@gmail.com*, [b]*o.m.penkin@gmail.com*, [c]*lsarybekova@yandex.kz*

Стратифицированное множество определяется как связное подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^d$, являющееся объединением конечного семейства S непересекающихся связных подмногообразий σ_k (без края), называемых далее стратами:

$$\Omega = \bigcup_{\sigma_k \in S} \sigma_k.$$

Каждая страта σ_k имеет компактное замыкание в $\mathbb{R}^d$. Предполагается, что страты примыкают друг к другу по типу клеточного комплекса, т.е. граница каждой страты состоит из некоторых страт семейства S и каждое пересечение $\overline{\sigma}_k \cap \overline{\sigma}_m$ замыканий страт в $\mathbb{R}^d$ либо пусто, либо является объединением некоторых страт из S. Далее соотношение $\sigma_k \succ \sigma_m$ между двумя стратами означает, что $\sigma_m \subset \partial\sigma_k$; в этом случае мы говорим, что данные страты примыкают друг к другу.

Пусть $d(\sigma_k)$ обозначает размерность страты σ_k. Мы определяем меру μ на Ω следующим образом. Скажем, что подмножество ω в Ω является μ-измеримым, если каждое пересечение $\omega \cap \sigma_k$ измеримо относительно $d(\sigma_k)$-мерной лебеговой меры на σ_k. Очевидно, что такие подмножества образуют σ-алгебру в Ω, а функция μ, определяемая формулой

$$\mu(\omega) = \sum_{\sigma_k \in S} \mu_{d(\sigma_k)}(\sigma_k \cap \omega),$$

в которой $\mu_{d(\sigma_k)}$, обычная $d(\sigma_k)$-мерная мера Лебега на σ_k, обладает всеми свойствами меры. Интеграл Лебега μ-измеримых функций f, определяемых стандартным образом, сводится к сумме

$$\int_\omega f\, d\mu = \sum_{\sigma_k \in S} \int_{\sigma_k \cap \omega} f\, d\mu_{d(\sigma_k)}.$$

Множество Ω предполагается представленным в виде объединения $\Omega^\circ \cup \partial\Omega$ (*„внутренности“* и *„границы“*), в котором Ω° — связное относительно открытое подмножество Ω, состоящее из некоторых страт из Σ и удовлетворяющее равенству $\overline{\Omega^\circ} = \Omega$, а оставшаяся часть $\partial\Omega = \Omega \setminus \Omega^\circ$ оказывается тогда топологической границей множества Ω°.

Пусть $\widetilde{S} \subset S$ — некоторое семейство страт, лежащих в Ω°. Рассматривается справедливость неравенства Соболева в следующем виде:

$$\left(\int_\Omega |u|^q\, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{\sigma_i \in \widetilde{S}} \int_{\sigma_i} |\nabla u|^p\, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1}$$

Показатели суммируемости в этом неравенстве определяются двумя числами, $d(\Omega)$ и $D(\widetilde{S}, \Omega^\circ)$. Первое из них, $d(\Omega)$, равно максимальной размерности страт в Ω. Перейдем к определению второго.

Пусть $\sigma_k \subset \Omega^\circ$. Рассмотрим цепочку страт

$$C = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\},$$

удовлетворяющую следующим требованиям:

1) $\sigma_1 = \sigma_k$;

2) все страты, кроме последней, являются подмножествами Ω°, в то время как $\sigma_n \subset \partial\Omega^\circ$;

3) для каждого индекса $i < n$ либо $\sigma_i \succ \sigma_{i+1}$, либо $\sigma_{i+1} \succ \sigma_i$;

4) для любых двух соседних страт в этой цепочке страта максимальной размерности принадлежит $\widetilde{S}$.

Назовем

$$dg(C) = \max_{1 \leq i < n} |d(\sigma_i) - d(\sigma_{i+1})|$$

числом „связности“ цепочки C.

Определим

$$dg(\sigma_k) = \min_C dg(C),$$

где минимум берется по всем цепочкам, удлвлетворяющим условиям 1)–4).

Окончательно, положим

$$D(\widetilde{S}, \Omega^\circ) = \max_{\sigma_k} dg(\sigma_k),$$

где максимум берется по всем стратам $\sigma_k \subset \Omega^\circ$.

Теорема. *Если* $D(\widetilde{S}, \Omega^\circ) < p < d(\Omega)$ *и* $1 \leq q \leq \frac{pd(\Omega)}{d(\Omega)-p}$, *или* $p \geq d(\Omega)$ *и* $1 \leq q < \infty$, *то неравенство* (1) *выполняется для всех* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{\mu}(\Omega)$ *с независящей от* u *константой* C.

Funding: Авторы были поддержаны грантом BR20281002 МНВО РК.

Ключевые слова: стратифицированное множество, неравенство Соболева.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Параболическая задача в области, вырождающейся в точку по закону $x = t^\alpha$, $\alpha > \frac{1}{2}$

Н.К. ГУЛЬМАНОВ[a], С.С. КОПБАЛИНА[b] М.И. РАМАЗАНОВ[c]

Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова, г. Караганда, Казахстан
E-mail: [a]gulmanov.nurtay@gmail.com, [b]kopbalina@mail.ru, [c]ramamur@mail.ru

В работе исследуется граничная задача для двумерного уравнения теплопроводности в неканонической области, граница которой изменяется по степенному закону $x = t^\alpha$, $\alpha > \frac{1}{2}$. Область решения задачи в начальный момент времени отсутствует, то есть вырождается в точку. Методом обобщенных тепловых потенциалов задача редуцируется к псевдо-Вольтерровому интегральному уравнению второго рода. Полученное интегральное уравнение принципиально отличается от классических интегральных уравнений Вольтерра тем, что норма соответствующего интегрального оператора равна единице и к нему неприменим классический метод последовательных приближений, а также соответствующее однородное интегральное уравнение имеет ненулевое решение ([1-4]).

В области $Q = \left\{(r,t) |\ 0 < r < t^\alpha,\ 0 < t < T,\ \alpha > \frac{1}{2}\right\}$ рассматривается следующая граничная задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{1-2\beta}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \tag{1}$$

$$u(r,t)|_{r=0} = g_1(t), \quad t > 0, \tag{2}$$

$$u(r,t)|_{r=t^\alpha} = g_2(t), \quad t > 0, \tag{3}$$

где $0 < \beta < 1$.

Доказана следующая

Теорема. *Пусть выполнены условия* $g_1(t) \in M(0,+\infty)$, $t^{\alpha(1-\beta)} g_2(t) \in M(0,+\infty)$, $M(0,+\infty) = L_\infty(0,+\infty) \cap C(0,+\infty)$ *то граничная задача (1)-(3) имеет решение*

$$u(r,t) = \int_0^t \left.\frac{\partial G(r,\xi,t-\tau)}{\partial \xi}\right|_{\xi=\tau^\alpha} \mu(\tau) d\tau + \int_0^t \left.\frac{\partial G(r,\xi,t-\tau)}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} \nu(\tau) d\tau,$$

где

$$G(r,\xi,t-\tau) = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{r^\beta \cdot \xi^{1-\beta}}{t-\tau} \cdot \exp\left[-\frac{r^2+\xi^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \cdot I_\beta\left(\frac{r\xi}{2a^2(t-\tau)}\right),$$

$$\nu(t) = 2a^2 \cdot \beta \cdot g_1(t),$$

а $\mu(t)$ *определяется из следующего псевдо-Вольтеррового интегрального уравнения:*

$$\mu(t) - \int_0^t N(t,\tau)\mu(\tau) d\tau = f(t),$$

где

$$N(t,\tau)=\frac{t^{\alpha\beta}\tau^{\alpha(1-\beta)}(t^{\alpha}-\tau^{\alpha})}{2a^2(t-\tau)^2}\cdot\exp\left[-\frac{(t^{\alpha}-\tau^{\alpha})^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\cdot\exp\left[-\frac{t^{\alpha}\tau^{\alpha}}{2a^2(t-\tau)}\right]\cdot I_{\beta}\left(\frac{t^{\alpha}\tau^{\alpha}}{2a^2(t-\tau)}\right)+$$

$$+\frac{t^{\alpha(\beta+1)}\tau^{\alpha(1-\beta)}}{2a^2(t-\tau)^2}\cdot\exp\left[-\frac{(t^{\alpha}-\tau^{\alpha})^2}{4a^2\,(t-\tau)}\right]\cdot\exp\left[-\frac{t^{\alpha}\tau^{\alpha}}{2a^2(t-\tau)}\right]\cdot I_{\beta-1,\beta}\left(\frac{t^{\alpha}\tau^{\omega}}{2a^2(t-\tau)}\right)+$$

$$+\frac{t^{\alpha\beta}(1-2\beta)}{(t-\tau)\tau^{\alpha\beta}}\cdot\exp\left[-\frac{(t^{\alpha}-\tau^{\alpha})^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\cdot\exp\left[-\frac{t^{\alpha}\tau^{\alpha}}{2a^2(t-\tau)}\right]\cdot I_{\beta}\left(\frac{t^{\alpha}\tau^{\alpha}}{2a^2(t-\tau)}\right),$$

$$I_{\beta-1,\beta}(z)=I_{\beta-1}(z)-I_{\beta}(z),$$

$$f(t)=-2a^2g_2(t)+2a^2\widetilde{g_1}(t^{\alpha},t),$$

$$\widetilde{g_1}(r,t)=\frac{1}{(2a^2)^{\beta}}\cdot\frac{1}{2^{\beta}}\cdot\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t\frac{r^{2\beta}}{(t-\tau)^{\beta+1}}\cdot\exp\left[-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\cdot g_1(t)d\tau,$$

здесь $I_{\nu}(z)$ — *модифицированная функция Бесселя порядка* ν.

Ключевые слова: двумерное уравнение теплопроводности, граничная задача, подвижная граница, область, вырождающаяся в точку, псевдо-Вольтерровое интегральное уравнение, регуляризация

2010 Mathematics Subject Classification: 35K05, 45D99

Литература

[1] M.I. Ramazanov, N.K. Gulmanov, S.S. Kopbalina Solution of a two-dimensional parabolic model problem in a degenerate angular domain, *Bulletin of the Karaganda university-Mathematics*, **111**:3 (2023), 91–108.

[2] M.I. Ramazanov, M.T. Jenaliyev, N.K. Gulmanov Solution of the boundary value problem of heat conduction in a cone, *Opuscula Mathematica*, **42** (2022), 75–91.

[3] M.I. Ramazanov, N.K. Gulmanov Solution of a two-dimensional boundary value problem of heat conduction in a degenerating domain, *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science*, **111** (2021), 65-78.

[4] M.I. Ramazanov, N.K. Gulmanov On the singular Volterra integral equation of the boundary value problem for heat conduction in a degenerating domain, *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Kompiuternye nauki*, **31** (2020), 241–252.

Транспортные решения уравнения Клейна-Гордона

Г.К. ЗАКИРЬЯНОВА[1,2,a], А.С. БАЕГИЗОВА[3,2,b]

[1]Институт механики и машиноведения им. акад. У.А. Джолдасбекова, Алматы
[2]Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
[3]Евразийский Национальный университет им.Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан
E-mail: [a]gulmzak@mail.ru, [b]baegiz_a@mail.ru

Исследование волновых процессов в физических полях и средах методами математического моделирования приводит к решению дифференциальных уравнений и краевых задач для них. Особый класс задач составляют транспортные задачи, в которых действующие нагрузки движутся с определенными скоростями. При этом их форма не меняется с течением времени. Такие нагрузки называют транспортными. Отметим, скорость движения источника существенно влияет на тип дифференциальных уравнений, параметрически зависящих от отношения скорости движения нагрузки к звуковой скорости. Последнее, в свою очередь, влияет на постановку модельных краевых задач и методы их решения [1].

Работа посвящена построению транспортных решений уравнения Клейна–Гордона — уравнения квантовой механики, являющегося обобщением волнового уравнения. Это уравнение имеет вид:

$$\triangle u(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + q(x)u(x,t) = G(x,t), x \in R^N, t \in R^1 \quad (1)$$

и используется для описания быстро движущихся частиц, имеющих массу [2,3]. Для записи уравнения (1) при действии транспортных нагрузок рассматривается класс решений уравнения в предположении, что нагрузка движется с постоянной скоростью v вдоль оси x_3 и в подвижной системе координат не зависит от времени, т.е. $G = G(x_1, x_2, x_3 - vt)$. В новой системе координат уравнение (1) перепишется в виде:

$$\triangle u(x_1,x_2,z) - M^2\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,z)}{\partial z^2} + qu(x_1,x_2,z) = G(x_1,x_2,z), \quad (2)$$

где $z = x_3 - vt$, $M = v/c$. Возможны следующие случаи: $M < 1$ — дозвуковой, $M = 1$ — звуковой, $M > 1$ — сверхзвуковой.

Здесь построены функция Грина и обобщенные решения уравнения Клейна - Гордона в пространствах размерности $N = 1, 2, 3$ во всем диапазоне скоростей и исследованы их свойства при дозвуковых, звуковых и сверхзвуковых скоростях движения источника. Тип транспортных уравнений (2) зависит от скорости движения, что влияет на способы построения решений уравнения в каждом из них и их особенности. Для построения решений использовались обобщенное преобразование Фурье по пространственным координатам, фундаментальные решения эллиптических, гиперболических и параболических уравнений математической физики [4,5]. Получены условия на скачки на фронтах ударных волн решений при сверхзвуковых и звуковых скоростях.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP19674789 МНВО РК.

2010 Mathematics Subject Classification:35E05, 35Q40

Литература

[1] Alexeyeva L.A., Kayshibayeva G.K. *Transport Solutions of the Lame Equations. Shock Elastic Waves*, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **56**:7 (2016), 1343–1354.

[2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля*, Наука, Москва (1973).

[3] Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. *Введение в теорию квантовых полей*, Наука, Москва (1973).

[4] Владимиров В.С. *Уравнения математической физики*, Наука, Москва (1981).

[5] Владимиров В.С. *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, Москва (1979).

Оценка низкочастотной части спектра трехмерных сгущающихся сеток из струн

Р.Н. ЗИМИН

Satbayev university, Алматы, Казахстан

E-mail: r.zimin@satbayev.university

В докладе рассматривается новый подход к оценке низкочастотной части спектра полунепрерывных трехмерных сред (сеток из струн).

Пусть сетка из струн заполняет единичный куб Ω. Сетка из струн представляет из себя периодическое повторение сжатой в h элементарной ячейки, представляющей из себя три струны соединенные в общем узле и рассматривается последовательное сгущение таких сеток в единичном кубе.

Задача о спектре собственных колебаний сетки из струн имеет вид:

$$T_k u'' + \lambda \rho_k u = 0, \quad (1)$$

$$\sum_{\gamma \in \Re(A)} T_k u_k' + \lambda m_k u_k = 0, \quad (2)$$

$$u|_{\partial\Gamma_k} = 0, \tag{3}$$

где коэффициент T_k — натяжение струны, ρ_k — плотность струны, m_k — наличие сосредоточенной массы в вершинах. Все эти величины предполагаются постоянными. Индекс k — означает порядок «сгущения» сеток.

Отметим, что мы ограничимся рассмотрением низкочастной части спектра.

В той же области Ω рассмотрим задачу о собственных колебаниях куба

$$\sigma\Delta u + \lambda\rho u = 0, \tag{4}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{5}$$

где Δ — трехмерный оператор Лапласа, σ — напряжение, а ρ — плотность.

Считая, что размер ячейки сетки равен h_k, выберем физические параметры сетки из струн так, чтобы масса выделенного участка сети и куба были равны, а натяжения струн выделенного участка сети были равны напряжениям куба (см. например [2]).

При условии «близости», в том смысле как описано выше, было доказано следующее утверждение.

Теорема

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ упорядоченные по возрастанию собственные значения задачи (4) — (5), а $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k, \ldots$ — собственные значения(упорядоченные аналогичным образом) задачи (1) — (3). Тогда для любого натурального N и $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $|\lambda_i - \lambda_i^k| < \varepsilon$ $(i \leq N)$ при достаточно малых h_k.

Доказательство теоремы идейно повторяет доказательство приденное в [3].

Funding: Автор был поддержан грантом AP14871251 МОН РК.

Ключевые слова: стратифицированное множество, собственные значения, квантовый граф, регулярные трехмерные сети.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B09, 35J15, 35P15, 35P20, 65N25

Литература

[1] Zavgorodnii M.G., Pokornyui Yu. V. On the spectrum of second–order boundary–value problems on spatial networks, *Usp. Mat. Nauk*, **44** (1989), 220–221/

[2] Komarov A.V., Penkin O.M. On spectra of nonperiodic woven membrane, *Jornal of Math. Sc.*, **133**:1, (2006), 883–902.

[3] Комаров А. В., Пенкин О. М., Покорный Ю. В. О спектре равномерной сетки из струн, *Изв. вузов. Матем.*, **4**, (2000) 23—27.

Математическое моделирование задачи нелинейной фильтрации структурированных флюидов в трехслойном изолированном пласте

Ш. КАЮМОВ[a], Ш.Э. БЕКЧАНОВ, Ш.С. ЗИЯДУЛЛАЕВА, Э.А. ХУСАНОВ[b]

Ташкентский государственный технический университет, Ташкент, Узбекистан
E-mail: [a]kayumovmatematic@mail.com,[b]elbekhusanov02@gmail.com

Изучение задачи фильтрации нелинейных флюидов в подземных пористых средах проводятся давно и продолжает привлекать внимания геологов, гидрогеологов, мелиораторов, механиков, физиков, химиков, математиков и других специалистов.

Подземные пористые среды рассматривается как целый единой, или как многослойный пласт. Исследование по математическому моделирование этих пластов посвящены различные работы [1-4] где разработан различные математические модели фильтрации отличающейся своими преимуществами и недостатками.

Рассмотрим трехслойный пласт изолированный между собой, следовательно величины коэффициента перетока между пластами равно нулю. Предположим что эти пласты (области D_1,D_2 и D_3), насыщены структурированными флюидами.

Математическая модель этой задачи ставится так: Необходимо найти функции $U(x,t)$,$V(x,t)$ и $W(x,t)$ а также неизвестные подвижные границы $G_i(x,t)$, $R_i(x,t)$,$S_i(x,t)$,$\left(i=\overline{1,2}\right)$ из следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\chi_i\left(|\nabla U|,\beta_i\right)\frac{\partial U}{\partial x}\right)=M_1\frac{\partial U}{\partial t}\quad x\in(x_0;\ L_1)\,,\quad t>0, i=\overline{1,3} \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi_i\left(|\nabla V|\,,\overline{\beta}_i\right)\frac{\partial V}{\partial x}\right)=M_2\frac{\partial V}{\partial t},\ \ x\in(x_0;\ L_2)\,,\ \ t>0\ \ i=\overline{1,3} \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A_i\left(|\nabla V|\,,\overline{\overline{\beta}}_i\right)\frac{\partial W}{\partial x}\right)=M_3\frac{\partial W}{\partial t},\ \ x\in(x_0;\,L_3)\,,\ \ t>0\ \ i=\overline{1,3} \tag{3}$$

с начальными

$$U(x,0)=V(x,0)=W(x,0)=U_0(x)\,G_i(0)=\overline{G}(0)\,,$$
$$R_i(0)=\overline{R}(0)\,,S_i(0)=\overline{S}(0)\,. \tag{4}$$

Кроме того задается условий на подвижных границах $G_i(x,t)\,,R_i(x,\ t)\,,S_i(x,t)$ которая выражает как непрерывности потока и функций [4,5].

А также условии на краях области имеет вид:

$$\left(a_1\chi_1\left(|\nabla U|\,,\beta_1\right)\frac{\partial U}{\partial x}+a_2\Phi_1\left(|\nabla U|\,,\overline{\beta}_1\right)\frac{\partial U}{\partial x}+a_3A_1\left(|\nabla W|\,,\overline{\overline{\beta}}_1\right)\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{x=x_0}=\varphi_0(t)\,, \tag{5}$$

$$b_1\chi_3\left(|\nabla U|\,,\ \beta_3\right)\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=L_1}=0,\ \ b_2\Phi_3\left(|\nabla V|\,,\ \overline{\beta}_3\right)\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=L_2}=0$$

,

$$b_3A_3\left(|\nabla W|\,,\overline{\overline{\beta}}_3\right)\left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_{x=L_3}=0 \tag{6}$$

Здесь $M_j,\beta_j,\overline{\beta}_j,\overline{\overline{\beta}}_j,b_j,a_j,\left(j=\overline{1,3}\right)$ — заданные величины и функции [1-4].

$\varphi_0(t)$ — суммарный дебит скважины расположенной в точке x_0 и она учитывается формулой (5) как величиной выходящей из первого пласта, из второго пласта и из третого пласта. Функции $\chi_i\left(|\nabla U|\,,\ \beta_i\right)$, $\Phi_i\left(|\nabla V|\,,\ \overline{\beta}_i\right)$ и $A_i\left(|\nabla W|\,,\ \overline{\overline{\beta}}_i\right)$ задается аналитическими выражениями [3,4] в соответствии с областями „малых“ подвижностей, „аномальных“ подвижностей и „нормальных“ подвижностей.

Задача (1)-(6) решается приближенными методами. Для этого вводится поток и полученная потоковая задача решается потоковым вариантом [5-6] разностной прогонки. Неизвестные границы раздела определяется по методу „челночных“ итераций [3].

Ключевые слова: фильтрации нелинейных флюидов, трехслойный пласт изолированный между собой.

Литература

[1] Аббасов М.,Кулиев А. *Методы гидродинамических расчетов разработки многопластовых месторождений нефти и газа.278 с.*, ЭЛМ, Баку (1976 г.).

[2] Гусейнзаде М.А., Колосовская А.К. *Упругий режим в однопластовых и многопластовых системах.454 с.* , Недра, (1972 г.).

[3] Каюмов Ш. *Математическое моделирование задачи теории фильтрации со свободными границами.274 с.* , ТГТУ,Ташкент, (2017 г.).

[4] Каюмов Ш., Бекчанов Ш.Э, Зиядуллаева Ш.С. Математическая модель задачи фильтрации структурированных флюидов в трехслойной пласте , *Проблемы вычислительной и прикладной математики.*, **1**:2 (2023),37-45.

[5] Qayumov Sh., Mardanov A.P., Xaitov T.O., Qayumov A.B. Multiparameter mathematical models of the problem of filtration of unstructured and structured fluids. , *E3S. webofconferences 26401030* , **1**:2 (2021).

[6] Самарский А., Гулин А. *Численные методы. 484 с.*, Наука, М. (1989 г.).

Численный алгоритм существенно дозвуковых течений

А.К. МАНАПОВА[1,2,a], А.О. БЕКЕТАЕВА[1,b], А.Ж. НАЙМАНОВА[1,c]

[1]*Институт математики и математического моделирования КН МНВО РК, Алматы, Казахстан*
[2]*Академия гражданской авиации, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*manapova.a.k.math@gmail.com*, [b]*azimaras10@gmail.com*, [c]*alt_naimanova@yahoo.com*

Методы решения уравнений сжимаемого газа, хорошо работающие при сверхзвуковых и умеренно дозвуковых скоростях потока, оказываются неэффективными, и даже непригодными для расчета течений с числами Маха ниже 0.1–0.3. Это проявляется в ухудшении точности получаемых при $M_\infty \ll 1$ стационарных решений. При стремлении числа Маха к нулю численное решение исходных уравнений для сжимаемого газа сопровождается определенными трудностями, появлением жесткости в уравнениях.

Предлагается новый алгоритм решения существенно дозвуковых течений на основе системы трехмерных уравнений Навье-Стокса, осуществляемого с помощью ENO (Essentially non-oscillatory) схемы третьего порядка точности. Алгоритм основывается на введении параметров обезразмеривания, которые позволяют избежать жесткости в уравнений и эффективно рассчитать аппроксиммированные ENO схемы 3 порядка уравнении Навье-Стокс для расчета течений с малыми числами Маха. В качестве определяющих принимаются параметры потока на входе u_∞, ρ_∞, T_∞. Скорость отнесена на скорость потока u_∞, давление и полная энергия отнесены к значению $\frac{\rho_\infty u_\infty^2}{M_\infty}$, плотность к $\frac{\rho_\infty}{M_\infty}$, температура к температуру потока T_∞: $\bar{u} = \frac{u}{u_\infty}$, $\bar{v} = \frac{v}{u_\infty}$, $\bar{w} = \frac{w}{u_\infty}$, $\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_\infty} M_\infty$, $\bar{T} = \frac{T}{T_\infty}$, $\bar{P} = \frac{P}{\rho_\infty u_\infty^2} M_\infty$, $\bar{E}_t = \frac{E_t}{\rho_\infty u_\infty^2} M_\infty$. Здесь M_∞ — число Маха потока, $Re = u_\infty L\rho/\mu$ — число Рейнольдса, Pr — число Прандтля.

ENO схема для одномерной модифицированной системы уравнения Навье-Стокса без диффузионных членов запишется в виде [1]:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\hat{A}^+ + \hat{A}^-\right) \frac{\partial \vec{E}^m}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

Аппроксимация (1) относительно вектора конвективного переменного будет выглядеть в следующем виде:

$$\left(\hat{A}^+ + \hat{A}^-\right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial x}\bigg|_{ij} = \frac{\hat{A}^-_{i+1j}(E_{i+1j} + E_{ij}) + \hat{A}^+_{i-1j}(E_{ij} + E_{i-1j})}{\Delta x} \tag{2}$$

Порядок погрешности аппроксимации данной схемы (2) с применением первого дифференциального приближения (ПДП) равен $\psi_n = \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$.

Используя порядки величин гидродинамических параметров и их 1-ых и 2-ых производных с учетом нового обезразмеривания, которые имеют вид $\rho \sim O(M)$, $\rho_x \sim O(M^2)$, $\rho_{xx} \sim O(M^2)$, $u \sim O(1)$, $u_x \sim O(1)$, $u_{xx} \sim O(1)$, $P \sim O(1)$, $P_x \sim O(M)$, $P_{xx} \sim O(M)$, $E_t \sim O(1)$, $E_{tx} \sim O(M)$, $E_{txx} \sim O(M)$ определяется порядки погрешности аппроксимации системы уравнении Навье-Стокса с новым обезразмериванием:

$$\psi_n = [O(\frac{\Delta x}{2} M), O(\frac{\Delta x}{2} M), O(0), O(0), O(\frac{\Delta x}{2})]^T. \tag{3}$$

В порядке погрешности аппроксимации со стандартным обезразмериванием при малых значениях Маха порядок одного из параметров составляет $O(\frac{\Delta x}{2M^2})$, что автоматически означает ухудшение аппроксимации при $M_\infty \to 0$ и как следствие ухудшения сходимости [2]. Из (3) видно, что применение предлагаемого нового обезразмеривания приводит к максимального значению погрешности $O(\frac{\Delta x}{2})$, что не вызывает жесткости системы уравнений.

Далее построенный алгоритм распространяется на систему трехмерных уравнении Навье-Стокса. Предложенный алгоритм успешно протестирован на задачах течения Пуазейля и каверны с различными параметрами потоков ($Re = 100$, 400, 1000 и $M = 0.005$, 0.05, 0.01, 0.1), результаты которых сравниваются с экспериментом и демонстрируют хорошое соответствие [3]-[4].

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP19674992 МНВО РК.

Ключевые слова: сжимаемый газ, уравнения Навье-Стокса, обезразмеривание, число Маха.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q30

Литература

[1] Бекетаева А.О. Численное сверхзвукового течения с поперечным вдувом струй, *Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук*, (2006), 90-94 сс.

[2] Чирков Д.В. Численный метод расчета течений сжимаемого вязкого газа в широком диапазоне чисел Маха, *Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук*, (2004), 69-81 сс.

[3] Poinsot T.J., Lele S.K. Boundary Conditions for Direct Simulations of Compressible Viscous Flows, *Journal of Computational Physics*, **101** (1992), 104–129.

[4] Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T. High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method, *Journal of Computational Physics*, **48**:3 (1982), 387–411.

Исследование математической модели неравновесной фильтрации

А.А. МУСИНА

Актюбинский региональный университет им. К. Жубанова, г.Актобе, Казахстан
E-mail: alla.mussina@mail.ru

Исследование посвящено изучению влияния адсорбции на процесс неравновесной фильтрации многофазной жидкости в пористых средах. В ходе исследования особое внимание было уделено взаимодействию между жидкостью и поверхностью грунта, а также влиянию адсорбции на распределение и скорость перемещения фаз. Этот аспект играет значительную роль в точности моделирования и предсказания процессов многофазной фильтрации в реальных пористых средах. В ходе исследования были применены приближенные методы, предназначенные для решения задач, связанных с фильтрацией многофазных жидкостей с использованием неравновесных физико-химических свойств с учетом массообменных процессов. Исследована математическая модель изотермической неравновесной фильтрации и разрешимость математической модели фазовых переходов в условиях неравновесной фильтрации. Рассмотрена корректность математической модели, качественные свойства решения, асимтотическое поведение решения. Рассмотрена изотермическая задача неравновесной фильтрации с кусочно-гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$ в заданной конечной области Ω. Граница Γ разбивается на несколько связных компонент Γ_i, т.е. Γ_0 - граница в окрестности нагнетательной скважины, Γ_1 — граница в области, где происходит сорбция (нефтяная фаза), Γ_2 — граница в окрестности эксплуатационной скважины, таким образом $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2$

$$m\frac{\partial s}{\partial t} = div(a_1 K_0 \nabla s - \overrightarrow{v} b + \overrightarrow{F}), \tag{1}$$

$$div(K\nabla P + \overrightarrow{f}) = 0, \ \ -\overrightarrow{v} = K\nabla P + \overrightarrow{f}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial(a+scm)}{\partial t}=div(\nabla cD-c\overrightarrow{v}), \tag{3}$$

$$\frac{\partial a}{\partial t}=-\frac{a(c)-\chi(c)}{\tau}, \tag{4}$$

начальные условия: $s|_{t=0}=s_0(x),\quad c|_{t=0}=c_0(x),\quad a|_{t=0}=a_0(x)$. Граничные условия:

$$\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{n}=\overrightarrow{v_1}\,\overrightarrow{n}=0,$$

$$c(x,t)=0\quad (x,t)\in s^0=\Gamma_0[0,T],$$

$$p=p_0(x,t),\ \ s=s_0(x,t),$$

$$-D\frac{\partial c}{\partial n}+\overrightarrow{v_{1n}}c=\overrightarrow{v_{1n}}\widetilde{c}\qquad (x,t)\in s^2=\Gamma_2[0,T]$$

Теорема 1. *Если коэффициенты в системе уравнений (1)–(4), имеют непрерывные производные вплоть до первого порядка и выполняется условие:*

$$(||p_0||_{\infty,Q_t});sup||p_0||_{W_2^1(\Omega};||s_{0_t}||_{1,Q_t};||\nabla s_0||_{2,Q_t};||\overrightarrow{c_t}||_{1,Q_t};||\nabla c_0||_{2,Q_t})\le M,$$

Тогда существует одно обобщенное решение задачи (1)–(4), и функции $s(x,t),c(x,t),a(x,t)$ *удовлетворяют почти всюду в области* Q_T *следующим неравенствам:*

$$0<\delta_0\le mins_0(x,t)\le s(x,t)\le maxs_0(x,t)\le (x,t)\le 1-\delta_1<1, \tag{5}$$

$$0\le c(x,t)\le 1,\ \ 0\le a(x,t)\ leq1,\ \ |a_t|\le 1, \tag{6}$$

Приближенные решения задачи (1)–(4) были построены на основе вариационного принципа, то есть разработаны алгоритмы для поиска приближенных решений. Применение принципов двойственности позволяет формировать двойственные функционалы, которые предоставляют возможность оценки снизу минимальных значений исходных функционалов. Проблема задач со свободными (неизвестными) границами в теории фильтрации связана с явлениями, где границы между различными фазами или состояниями вещества неизвестны и подлежат изменениям в процессе времени.

Ключевые слова: массообменные процессы, теория фильтрации, неравновесные эффекты, приближенные методы, адсорбция, задача типа Стефана, задача типа Веригина, модель Маскетта-Леверетта, капиллярное давление, свободные границы.

2010 Mathematics Subject Classification: 35J70, 65M06, 76S05

Начальная граничная задача для уравнения дробной диффузии в вырождающейся угловой области

М.Т. ОМАРОВ[1,a], А.В. ПСХУ[2,b], М.И. РАМАЗАНОВ[1,c]

[1]*Карагандинский университет им. академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан*
[2]*Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН, Нальчик, Россия*
E-mail: [a]*madiomarovt@gmail.com*, [b]*pskhu@list.ru*
[c]*ramamur@mail.ru*

В работе рассматривается уравнение следующего вида:

$$\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t)=f(x,t),\quad (0<\alpha<1) \tag{1}$$

где $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$ является дробной производной порядка α по переменной t, начиная с точки $t=0$.

Практически все исследования, связанные с уравнением (1), сосредотачивались на начальных и краевых задачах как в ограниченных, так и в неограниченных цилиндрических областях. В частности, первая краевая задача для уравнения дробного диффузии в прямоугольной области была исследована в [1], [2]. В публикации [3] была решена первая краевая задача для уравнения дробной диффузии-волны в нецилиндрической области. Однако, область, в которой ищется решение, не вырождается в точку в начальный момент времени.

Цель данного исследования — решить первую краевую задачу для уравнения (1) в области, которая не является цилиндрической, а скорее угловой, и вырождается в точку в начальный момент времени.

Постановка задачи: Найти функцию $u(x,t)$ удовлетворяющую уравнению:

$$\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t)=f(x,t),\quad (0<\alpha<1),$$

в области $D=(x,t):0<x<t, 0<t<\infty$, и удовлетворяющую граничным условиям:

$$u(0,t)=0,\quad u(t,t)=0,\quad 0<t<\infty. \tag{2}$$

Мы обозначаем $u(x,t)$ как регулярное решение уравнения (1) в области D такое, что: $t^{1-\gamma}u(x,t)\in C(\overline{D})$

Введем определения:

$$\beta=-\frac{\alpha}{2},\quad \omega_{\beta,\mu}(x,t)=t^{\mu-1}W\left(-\beta,\mu;-\frac{|x|}{t^\beta}\right),$$

$\omega(x,t)=\omega_{\beta,0}(x,t)$, в котором $W(-\beta,\mu;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!\Gamma(\mu-\beta k)}$ представляет собой функцию Райта [4].

Теорема. *Пусть $(t^{1-\gamma}g_i(t)\in C[0,T]), (i=1,2)$, для некоторого $(\gamma>0)$, и $(t^{1-\mu}f(x,t)\in C(\overline{D}), \mu\geq 0)$, и $(f(x,t)$ удовлетворяет условию Гёльдера по переменной x.*

Тогда решение задачи (1),(2) существует и может быть выражено как

$$u(x,t)=\int_0^t\psi_1(\tau)\omega(x,t-\tau)d\tau+\int_0^t\psi_2(\tau)\omega(T-x,t-\tau)d\tau+F(x,t), \tag{3}$$

здесь $F(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^\tau f(s,\tau)\omega_{-\beta,\mu}(x-s,t-\tau)dsd\tau$, и $\psi_1(t),\psi_2(t)$ из (4) являются решениями системы интегральных уравнений

$$\begin{cases}\psi_1(t)+\int_0^t\psi_2(\tau)\omega(\tau,t-\tau)d\tau=-F(0,t),\\ \psi_2(t)+\int_0^t\psi_1(\tau)\omega(t,t-\tau)d\tau+\int_0^t\psi_2(\tau)\omega(\tau-\mathrm{t},t-\tau)d\tau=-F(t,t).\end{cases}$$

В итоге, мы приходим к особому интегральному уравнению Вольтерра второго рода: $\psi_2(t)-\int_0^t\mathcal{K}_\beta(t,\tau)\psi_2(\tau)d\tau=\mathcal{F}(t)$, Ядро $\mathcal{K}_\beta(t,\tau)$ определяется следующим соотношением: $\mathcal{K}_\beta(t,\tau)=\omega_{\beta,0}(t+\tau,t-\tau)-\omega_{\beta,0}(\tau-t,t-\tau)$.

Лемма. Если $0<\beta\leq 1/2$, выполняется равенство $\lim_{t\to 0}\int_0^t\mathcal{K}_\beta(t,\tau)d\tau=1$.

Показано, что в нецилиндрической области, которая вырождается в начальный момент времени в точку, первая краевая задача для уравнения фракционной диффузии с оператором дробного дифференцирования Римана-Лиувилля по временной переменной является сингулярной, то есть может иметь не единственное решение.

Ключевые слова: уравнение в частных производных, дробное исчисление, угловая область.

2010 Mathematics Subject Classification: 34A08, 35Q79, 35K05, 35K20

Литература

[1] Псху А.В. Решение первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка, *Дифференц. уравнения*, **39**:9 (2003), 1286–1289.

[2] Псху А.В. Решение краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка методом функции Грина, *Дифференц. уравнения*, **39**:10 (2003), 1430—1433.

[3] Gevrey M. Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique, *J. Math. Pures Appl.*, **6**:9 (1913), 305–476.

[4] Псху А.В. Первая краевая задача для дробного диффузионно-волнового уравнения в нецилиндрической области, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **81**:6 (2017), 158–179.

Об одном решении нелокальной краевой задачи для дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка

Н.Т. ОРУМБАЕВА[1,a], З. БЕЙСЕНБЕКОВА[1,b] А. БЕКБОСЫН[1,c]

[1]*Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан*
E-mail: [a]*Orumbayevanurgul@gmail.com*, [b]*amina.bekbosyn@mail.ru*, [b]*beisenbekovazamira@mail.ru*

На $\Omega = [0,\omega] \times [0,T]$ рассматривается краевая задача

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} = \alpha_1(x,t)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \alpha_2(x,t)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} +$$

$$+\alpha_3(x,t)\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha_4(x,t)\frac{\partial v}{\partial t} + \alpha_5(x,t)v + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \quad v \in R^n, \tag{1}$$

$$v(0,t) = \varphi(t), \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$\frac{\partial v(0,t)}{\partial x} = \psi(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

$$\beta_1(x)\frac{\partial^2 v(x,0)}{\partial x^2} + \beta_2(x)\frac{\partial^2 v(x,T)}{\partial x^2} + \beta_3(x)\frac{\partial^2 v(x,0)}{\partial x \partial t} + \beta_4(x)\frac{\partial^2 v(x,T)}{\partial x \partial t} +$$

$$+b_\beta(x)\frac{\partial v(x,0)}{\partial x} + \beta_6(x)\frac{\partial v(x,T)}{\partial x} + \beta_7(x)\frac{\partial v(x,0)}{\partial t} + \beta_8(x)\frac{\partial v(x,T)}{\partial t} +$$

$$+\beta_9(x)v(x,0) + \beta_{10}(x)v(x,T) = \theta(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{4}$$

где функции $\alpha_i(x,t), i = \overline{1,5}$, $f(x,t)$ непрерывны на Ω, функции $\beta_j(x), j = \overline{1,10}$, $\theta(x)$ непрерывны на $[0,\omega]$, функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ непрерывны на $[0,T]$.

В сообщении исследуются вопросы существования и единственности решения нелокальной краевой задачи для дифференциального уравнения третьего порядка. Предложен алгоритм нахождения приближенного решения. Справедливо утверждение

Теорема 1. *Пусть при некоторых $h > 0 : Nh = T, N = 1,2,...,$ $(N \times N)$ матрица $Q(x,h)$ обратима при всех $x \in [0,\omega]$ и выполняются неравенства*

$$\|[Q(x,h)]^{-1}\| < \gamma(h);$$

$$q(h) = he^{h\alpha_1}\left[\alpha_1 + \alpha_3\omega + \alpha_5\frac{\omega^2}{2}\right]e^{h\gamma(h)\max\max\limits_{x\in[0,\omega]}\{M(x),N(x)\}\left(\omega+\frac{\omega^2}{2}\right)}h\gamma(h)\max\{h\beta_2,1\}\alpha_1 < 1,$$

где $\alpha_i = \max\limits_{x\in[0,\omega]}\|\alpha_i(x)\|$, $\alpha_i(x) = \max\limits_{t\in[0,T]}\|\alpha_i(x,t)\|$, $i = \overline{1,5}$, $\beta_j = \max\limits_{x\in[0,\omega]}\|\beta_j(x)\|$, $j = \overline{1,10}$,

$$M(x) = \|\beta_5(x)\| + \|\beta_6(x)\| + \max\{h\|\beta_2(x)\|,1\}\alpha_3(x),$$

$$N(x) = \|\beta_9(x)\| + \|\beta_{10}(x)\| + \max\{h\|\beta_2(x)\|,1\}\alpha_5(x),$$

тогда нелокальная задача (1)-(4) имеет единственное решение.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP23488729 МОН РК.

Ключевые слова: краевая задача, нелокальная задача, дифференциальное уравнение, метод последовательных приближений, задача Гурса.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Литература

[1] Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problem for a system of loaded hyperbolic equations and an algorithm for finding its solution, *Journal of Mathematical analysis and Applications*, **461** (2018), 817–836.

[2] Kozhanov A.I., Pinigina N.R. A mixed problem for some classes of nonlinear thirdorder equations, *Math. USSR-Sb.*, **4**:46 (1983), 507—525.

[3] Zikirov O.S. Local and nonlocal boundary value problems for hyperbolic equations of the third order, *Contemporary mathematics and its applicationser*, **68** (2011), 101–120.

Исследование данных социально-экономических опросов методами кластеризации и классификации

Г.С. РЫСМЕНДЕЕВА

Казахский национальный исследовательский технический университет имени К.И.Сатпаева, Казахстан, г. Алматы
E-mail: g.rysmendeyeva@satbayev.university

Для общества большой интерес и огромное практическое значение имеют молодежь, ее ценностные ориентации, тенденции и перспективы развития. Большое значение для стабильного развития общества имеет отношение молодежи к семье и браку, к семейным ценностям. Данная работа строит систему оценки индикаторов человеческого капитала путем проведения численных экспериментов с данными, полученными путем опроса студентов университета. Опрос строится таким образом, что студенты не выражают свое мнение по поводу причинно-следственных связей. Цель состоит в том, чтобы выявить эти связи между признаками с помощью методов машинного обучения. Выходные данные модели — ожидаемая заработная плата студента, которая определяет уровень человеческого капитала, входные данные — ответы на вопросы анкеты. Проводится поиск оптимального количества кластеров студентов при помощи алгоритма k-средних. Показано распределение студентов по кластерам, полученным с помощью методов иерархическая агломерации и kmeans кластеризации. Анализ парной корреляции между признаками позволяет выявить значимые признаки для целевого показателя. Изучается возможность снижения размерности входных данных с помощью linear PCA и kernel PCA методов для улучшения точности модели классификации. Рассматривается влияние снижения количества факторов в целях улучшения точности модели классификации. Проводится сравнительный анализ точности прогноза классификации с использованием алгоритмов логистической регрессии и случайного леса на базе исходных данных и на базе опорных компонент. Модели могут использоваться домохозяйствами, управляющими активами, чиновниками для выработки социальной политики, также могут быть встроены в банковскую, пенсионную и страховую системы.

Ключевые слова: методы машинного обучения, математическая модель, прогнозирование, паттерны поведения, проблемы молодежи.

2010 Mathematics Subject Classification: 62P25, 65D17, 62-07

О новой системе моментных уравнений, зависящей от скорости полета и температуры поверхности летательных аппаратов

А. Сакабеков[a], С. Мадалиева[b] Р. Ергазина[c] Ш. Акимжанова[d]

КазНИТУ им.К.И.Сатпаева, Алматы, Казахстан
E-mail: [a]auzhani@gmail.com, [b]madalieva_s@mail.ru, [c]ergazina.ryskul@gmail.com, [d]shinar_a@mail.ru

Прогнозирование аэродинамических характеристик летательных аппаратов при очень высоких скоростях и на больших высотах является важной проблемой аэрокосмической техники. Они могут быть определены методами теории разряженного газа [1]. Описание разряженного газа с помощью функции распределения частиц относится к переходной области между течениями сплошной среды и свободномолекулярным и оно представляет собой достаточно сложную задачу. При расчете аэродинамических характеристик летательного аппарата в высокоскоростном потоке разряженного газа в уравнение Больцмана надо внести слагаемое, зависящее от скорости движения летательного аппарата, а условие на подвижной границе должен содержать параметр, зависящий от температуры поверхности летательного аппарата. В работе приведена новая одномерная нестационарная нелинейная система моментных уравнений, зависящая от скорости движения и температуры поверхности летательного аппарата, а также аппроксимация микроскопического условия Максвелла на подвижной границе, когда часть молекул отражается от поверхности зеркально, а часть — диффузно с максвелловским распределением. Приведена постановка начально-краевой задачи для системы моментных уравнений во втором приближении при новых макроскопических граничных условиях. Доказана корректность начально-краевой задачи для системы моментных уравнений в третьем приближении при выведенных макроскопических граничных условиях в пространстве функций, непрерывных по времени и суммируемых в квадрате по пространственной переменной [2]. Для определения скорости полета и температуры поверхности летательных аппаратов решена обратная задача для системы моментных уравнений в третьем приближении при некоторых дополнительных условиях о решении прямой задачи.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP08856926 МНВО РК.

Ключевые слова: система моментных уравнений, макроскопические граничные условия Максвелла-Аужана, скорость полета и температура поверхности летательных аппаратов.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Литература

[1] Коган М.Н. *Динамика разряженного газа*, Наука, Москва (1967).

[2] Sakabekov Auzhan., Madaliyeva Saltanat., Yergazina Ryskul. Investigation of Aerodynamic Characteristics of Aircrafts in a Rarefied Gas Flow Using the Moment Method, *Hindawi International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, **1**:2 (2022), Article ID 6943602, 20 pages.

Особенности построения решений систем Бесселя состоящих из трёх уравнений

Ж.Н. Тасмамбетов

Западно Казахстанский университет им. М.Утемисова, Уральск, Казахстан
E-mail: tasmam@rambler.ru

В данной работе рассматриваются особенности построения двух систем типа Бесселя состоящих из трёх уравнений. Доказаны ряд теорем.

Теорема 1. *Вырожденная система типа Бесселя*

$$x_j\frac{\partial^2 W}{\partial x_j^2}+(2\alpha_j-x_j)\frac{\partial W}{\partial x_j}-\sum_{k\neq j}\frac{\partial W}{\partial x_k}-\lambda W=0,(j=1,2,3) \tag{1}$$

полученная из системы Горна [1] с помощью замены $\gamma_j=2\alpha_j,(j=1,2,3)$ *имеет* 2^3 *линейно-независимых частных решений, одно из которых выражается через вырожденную функцию Гумберта приводящихся к функцию Бесселя от трёх переменных*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Psi_2^{(3)}(\lambda,2\alpha_1,2\alpha_2,2\alpha_3;x_1,x_2,x_3)=J(2\alpha_1,2\alpha_2,2\alpha_3;x_1,x_2,x_3)=$$

$$=(\frac{x_1}{2})^{2\alpha_1}(\frac{x_2}{2})^{2\alpha_2}(\frac{x_3}{2})^{2\alpha_3}\times$$

$$\times\sum_{m_1,m_2,m_3}^{\infty}\frac{(-1)^{m_1+m_2+m_3}(\frac{x_1}{2})^{2m_1}(\frac{x_2}{2})^{2m_2}(\frac{x_3}{2})^{2m_3}}{m_1!m_2!m_3!\Gamma(2\alpha_1+m_1+1)\Gamma(2\alpha_2+m_2+1)\Gamma(2\alpha_3+m_3+1)}. \tag{2}$$

Случай $n=2$ был рассмотрен в работе [2]. (2) является функцией Бесселя от трёх переменных. Следующая теорема устанавливает количество нормально-регулярных решений системы (1).

Теорема 2. *Вспомогательная система полученная из системы типа Бесселя (1) с помощью преобразования*

$$Z(x_1,x_2,x_3)=exp(\alpha_{100}x_1+\alpha_{010}x_2+\alpha_{001}x_3)U(x_1,x_2,x_3), \tag{3}$$

при выполнении двух необходимых условий

$$\alpha_{100}^2-\alpha_{100}=0,\alpha_{010}^2-\alpha_{010}=0,\alpha_{001}^2-\alpha_{001}=0 \tag{4}$$

и

$$f_{000}^{(1)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)\equiv 0,f_{000}^{(2)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)\equiv 0,f_{000}^{(3)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)\equiv 0 \tag{5}$$

имеет 3 нормально-регулярные решения

$$Z_{9,j}(x_1,x_2,x_3)=exp(x_j)U_{9,j}(x_1,x_2,x_3) \tag{6}$$

где $U_{9,t},(t=1,2,3)$ *три вырожденные гипергеометрические ряды трёх переменных.*

Вторая система типа Бесселя также имеет аналогичные решения.

Теорема 3. *Система типа Бесселя*

$$x_j^2W_{x_jx_j}-x_j\sum_{r\neq j}x_jW_r+[-\frac{x_j^2}{4}-\frac{x_j}{2}\sum_{r\neq j}x_r+kx_j2\alpha_j(1-\alpha_j)]W=0, \tag{7}$$

где $k=\alpha+\beta-\lambda;\alpha_j(j=1,2,3),\lambda$ *— некоторый параметр,* $W(x_1,x_2,x_3)$ *— общая неизвестная, при выполнений двух необходимых условий (4) и (5) имеет три нормально-регулярных решений вида (6).*

И так, обе системы типа имеют решения вида

$$\Psi_2^{(3)}(\lambda,2\alpha_1,2\alpha_2,2\alpha_3;x_1,x_2,x_3)=\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_{m_1+m_2+m_3}x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{m_3}}{(2\alpha_1)!(2\alpha_2)!(2\alpha_3)!m_1!m_2!m_3!}.$$

Следует отметить, что обе системы (1) и (7) имеют одинаковые необходимые условия (4) и (5) и справедливо утверждение.

Лемма 1. *Для того, чтобы вспомогательные системы полученные с помощью преобразования $W(x_1, x_2, x_3) = exp(\alpha_{100}x_1 + \alpha_{010}x_2 + \alpha_{001}x_3)U(x_1, x_2, x_3)$ из системы (1) и (7) имели хотя бы одно решение вида (6) необходимо, чтобы имели место равенства (4).*

Ключевые слова: вырожденная система, функция Гумберта, функция Бесселя, нормально- регулярные, частные решения.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Литература

[1] Tasmambetov Z.N. Multidimensional normal-regular solutions of degenerate systems associated with Bessel functions of many variables, *VII World Congress of Turkic World Mathematicians*, (2023), 197–211.

[2] Тасмамбетов Ж.Н. Построение нормальных и нормально-регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, *ИП Жанадилова С.Т.*, (2015), 463.

О совместном решений вырожденных двух систем, полученных из системы Лауричелла

Ж.Н. ТАСМАМБЕТОВ, Ж.К. УБАЕВА

Западно Казахстанский университет им. М.Утемисова, Уральск, Казахстан
Актюбинский региональный университет им. К.Жубанова, Актобе, Казахстан
E-mail: tasmam@rambler.ru

Данная работа посвящена изучению совместного решения двух вырожденных систем

$$\sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial^2 W}{\partial z_j \partial z_i} + (\gamma - z_i)\frac{\partial W}{\partial z_i} - \alpha_{i_n} W = 0, (i = k+1, k+l)$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial^2 W}{\partial z_j \partial z_i} + \gamma \frac{\partial W}{\partial z_i} - W = 0, (i = k+l+1, n) \tag{1}$$

полученных из системы Лауричелла F_B.

При различных значениях j и i из (1) получим систему Горна (Φ_3):

$$z_1 W_{z_1 z_1} + (\gamma - z_1)W_{z_1} + z_2 W_{z_2 z_1} - \alpha_1 W = 0, z_2 W_{z_2 z_2} + z_1 W_{z_1 z_2} + \gamma W_{z_1} - W = 0 \tag{2}$$

полученную из системы (1) с решением важной функции Гумберта Φ_3:

$$\Phi_3(\alpha_1; \gamma; z_1, z_2) = \sum_{m_1, m_2 = 0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_{m_1} z_1^{m_1} z_2^{m_2}}{(\gamma)_{m_1+m_2} m_1! m_2!}.$$

Система (2) имеет 3 линейно-независимых частных решения, а также справедливо утверждение [1].

Теорема 1. *Система (2) имеет одно нормально-регулярное решение вида*

$$W_{4,1}(z_1, z_2) = exp(z_1)(1 - \frac{\gamma - \alpha_1}{\gamma} z_1 + \frac{1}{\gamma} z_2 \mp \frac{\gamma + 1 - \alpha_1}{\gamma(\gamma+1)} z_1, z_2 +$$

$$+ \frac{(\gamma - \alpha_1)(\gamma + 1 - \alpha_1)}{2!\gamma(\gamma+1)} z_1^2 + \frac{1}{\gamma(\gamma+1)} z_2^2 + ...), \tag{3}$$

при выполнений двух необходимых условий 1. $\alpha_{10}^2 - \alpha_{10} = 0, \alpha_{01}^2 = 0;$

$$2.\ f_{00}^{(1)}(\rho_1, \rho_2) = \rho_1(\rho_1 - 1 + \rho_2 + \gamma) = 0,$$

$$f_{00}^{(2)}(\rho_1, \rho_2) = \rho_2(\rho_2 - 1 + \rho_1 + \gamma) = 0,$$

где α_{10} *и* α_{01} *— неизвестные постоянные определяющего множителя в преобразовании*

$$z = exp(\alpha_{10}z_1 + \alpha_{01}z_2)W(z_1, z_2).$$

Свойства функций Гумберта [1] имеет соотношения:

$$\Phi_3(\alpha_1, \gamma; z_1, z_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_m}{(\gamma)_m m!} J(\gamma + m, z_2) z_1^m,$$

$$\Phi_3(\alpha_1, \gamma; z_1, z_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(\gamma)_n n!} G(\alpha_1; \gamma + n; z_1) z_2^n,$$

то есть, из функций можно выделить функции Бесселя и Куммера.

Теорема 2. *Имеют место соотношения:*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_m}{(\gamma)_m m!} J(\gamma + m, z_2) z_1^m = W_{4,1}(z_1, z_2),$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(\gamma)_n n!} G(\alpha_1; \gamma + n; z_1) z_2^n = W_{4,1}(z_1, z_2) \tag{4}$$

где $W_{4,1}(z_1, z_2)$ *— нормально-регулярные решения (3).*

Теорема 3. *Имеет место соотношение* $\Phi_3(\alpha_1, \gamma; z_1, z_2) = W_{4,1}(z_1, z_2)$. При доказательстве теоремы 2 используется результаты теоремы 3.

Эти результаты можно распространить на функции трёх и более переменных.

Ключевые слова: вырожденная система, система Лауричелла, функция Гумберта, нормально-регулярные, частные решения.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Литература

[1] Тасмамбетов Ж.Н., Убаева Ж.К. Нормально-регулярные решения одной неоднородной системы Гумберта, *Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры*, (2022), 82–88.

[2] Appell P.,Kampe de Feriet J. Fonctions hypergeometriques et hypersperiques, *geometriques et hypersperiques // Paris:Gauthier Villars*, (1926), 434.

Задача сопряжения с нормальными производными третьего порядка для уравнения теплопроводности в многомерном пространстве

Е.М. ХАЙРУЛЛИН[a], А.С. АЖИБЕКОВА[b]

Satbayev University, Алматы, Казахстан
E-mail: [a]*khairullin_42_42@mail.ru*, [b]*aliya_azhibek@mail.ru*

Рассматривается задача сопряжения для уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом в многомерном пространстве

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = a^2(x_n)\Delta U(x,t), \tag{1}$$

$$a^2(x_n) = \begin{cases} a_1^2 & \text{при } -\infty < x_n < 0, \\ a_2^2 & \text{при } 0 < x_n < +\infty, \end{cases}$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

в области $Q_T \equiv Q_T^{(1)} \cup Q_T^{(2)}$,

$$Q_T^{(1)} = \left\{(x,t) = (x', x_n, t) : x' \in R^{n-1},\ x_n \in R_-,\ t > 0\right\},$$

$$Q_T^{(2)} = \left\{(x,t) = (x', x_n, t) : x' \in R^{n-1},\ x_n \in R_+,\ t > 0\right\},$$

удовлетворяющая начальному условию

$$U(x,0) = f(x), \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2}$$

и условиям сопряжения

$$U(x', x_n, t)\big|_{x_n=-0} = U(x', x_n, t)\big|_{x_n=+0}, \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{3} b_k \frac{\partial^k U}{\partial x_n^k}\bigg|_{x_n=-0} = \sum_{k=1}^{3} c_k \frac{\partial^k U}{\partial x_n^k}\bigg|_{x_n=+0}, \tag{4}$$

где b_k и c_k — заданные положительные постоянные.

Решение задачи (1)-(4) ищется в виде тепловых потенциалов двойного слоя с двумя неизвестными плотностями [1]. Используя условия сопряжения (3)-(4), получена система интегро-дифференциальных уравнений (СИДУ) с различными операторами теплопроводности. Характеристическая часть СИДУ решена методом интегральных преобразований Фурье-Лапласа при выполнении условия разрешимости $\lambda = \frac{\lambda_1 a_1^2 - \lambda_2 a_2^2}{\lambda_1 - \lambda_2} > 0$ (λ_1, λ_2 — некоторые заданные постоянные). Методом регуляризации СИДУ сведена к системе интегральных уравнений Вольтерра-Фредгольма.

Теорема 1. *Если $f(x) \in C^2_{x_n}(Q_T)$ и $\lambda = \frac{\lambda_1 a_1^2 - \lambda_2 a_2^2}{\lambda_1 - \lambda_2} > 0$, то существует функция $U(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}(Q_T)$,* являющаяся решением задачи сопряжения (1)-(4).

Ключевые слова: задача сопряжения, нормальные производные, условия разрешимости, регуляризация.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K45, 58J35

Литература

[1] Khairullin E.M., Azhibekova A.S. A general boundary value problem for heat and mass transfer equations with high order normal derivatives in boundary conditions, *AIP Conference Proceedings* **2325**, 020011 (2021); https://doi.org/10.1063/5.0041111.

Задача Стефана для сферического слоя

С.Н. ХАРИН[1,a], Т. НАУРЫЗ[2,b]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2] *Казахстанско-Британский технический университет, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]staskharin@yahoo.com, [b]targyn.nauryz@gmail.com

Построена математическая модель, описывающая динамику нагрева и плавления замкнутых электрических контактов с учетом термоэлектрического эффекта Колера. В результате действия этого эффекта температурный максимум смещается вглубь анода, и плавление начинается не на контактной площадке, а внутри контактной зоны. Эта модель базируется на задаче Стефана для сферического слоя, которая описывается уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{q}{r^4} \tag{1}$$

$$r_m - \alpha_1(t) < r < r_m + \alpha_2(t), \quad 0 < t < t_m$$

где $r = r_m$ — сферическая изотерма, на которой начинается процесс плавления, определяемая из решения соответствующей задачи на этапе, предшествующем плавлению, а t_m — момент достижения изотермой плавления контактной площадки. Начальное условие имеет вид:

$$\theta(r_m, t) = \theta_m \tag{2}$$

θ_m — температура плавления анода. На границах сферического слоя расплава температура равна температуре плавления анода

$$\theta(r_m - \alpha_1(t), t) = \theta(r_m + \alpha_2(t), t) = \theta_m \tag{3}$$

Время t_m достижения температуры плавления в точке ее максимума очень мало. Для большинства контактных материалов критерий Фурье $Fo = \frac{a^2 t}{r_a^2} \approx 10^{-2} - 10^{-4}$, поэтому процесс нагрева контактов близок к адиабатическому и теплообменом зоны расплава с твердой зоной можно пренебречь, считая, что все выделяемое тепло расходуется только на фазовое превращение вещества. В этом случае мы имеем однофазную задачу, для которой условие Стефана имеет вид

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial r}\bigg|_{r = r_m - \alpha_1(t)} = L\gamma \frac{d\alpha_1}{dt} \quad (4) \qquad -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial r}\bigg|_{r = r_m + \alpha_2(t)} = L\gamma \frac{d\alpha_2}{dt} \quad (5)$$

Решение задачи (1) - (5) ищется в виде

$$\theta(r,t) = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(2a\sqrt{t}\right)^n \left[A_n i^n \mathrm{erfc} \frac{-r + r_m}{2a\sqrt{t}} + B_n i^n \mathrm{erfc} \frac{r - r_m}{2a\sqrt{t}} \right] - \frac{q}{2r^2} \tag{6}$$

$$\alpha_1(t) = r_m + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^{\frac{n}{2}}, \qquad \alpha_2(t) = r_m + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n t^{\frac{n}{2}} \tag{7}$$

Функция (6) удовлетворяет уравнению (1). Удовлетворяя начальному и граничным условиям, получим систему алгебраических уравнений для A_n, B_n, β_n, δ_n, которая аналогична системе, рассмотренной в работе [1]. Ее решение находится с помощью формулы Фаа-ди-Бруно.

Далее рассматривается аналогичная задача для уравнения теплопроводности с коэффициентами, зависящими от искомой температуры

$$c(\theta)\gamma(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\rho(\theta) I^2(t)}{4\pi r^4} \tag{8}$$

$$r_m - \alpha_1(t) < r < r_m - \alpha_2(t), \quad 0 < t < t_0, \quad I(t) = I_0\sqrt{t}$$

с теми же граничными условиями (2) – (5).

Для ее решения используется автомодельный метод, в котором решение ищется в виде

$$\theta(r,t) = u(\xi), \quad \xi = \frac{r - r_0}{2a\sqrt{t}} \tag{9}$$

$$\alpha_1(t) = \alpha_{10}\sqrt{(}t), \quad \alpha_2(t) = \alpha_{20}\sqrt{(}t), \tag{10}$$

При этом задача редуцируется к решению обыкновенного нелинейного уравнения второго порядка

$$u''(\xi) + \left[\frac{c(u)\gamma(u)}{\lambda(u)}\xi + \frac{2}{\xi}\right] u'(\xi) + \frac{\lambda'(u)}{\lambda(u)} u'(\xi)^2 + \frac{\rho(u)c(u)\gamma(u)I_0^2}{16\pi^2\lambda(u)\xi^4} = 0$$

Оно может быть сведено к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода, разрешимость которой при определенных условиях гладкости коэффициентов устанавливается методом неподвижной точки аналогично тому, как это было сделано в работе [2].

Funding: Авторы были поддержаны грантом BR20281002 МНВО РК.

Ключевые слова: математические модели электрических контактов, эффект Колера, задача Стефана, обобщенные функции ошибок.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K10, 35K55, 80A22

Литература

[1] Kharin S.N. The analitical solution of the two-face Stefan problem with boundary flux condition, *Математический журнал*, **1**, (2014), 55-75.

[2] Kharin S.N., Nauryz T.A. One-phase spherical Stefan problem with temperature dependent coefficients, *Eurasian Mathematical Journal*, **12**:1, (2021), 49-56.

Метод Ритца (ограниченные операторы)

А.А. ХУДОЙБЕРДИЕВ

Ташкентский государственный технический университет, Ташкент, Узбекистан
E-mail: abdusalomxudoyberdiev1995@mail.com, abdusalomxudoyorov@gmail.com

При решении задач в Гильбертовых пространствах подходить к решению с использованием спектральных разложений функций теперь гораздо удобнее с помощью компьютерных программ.

Было разработано множество математических моделей для поиска решения уравнений путем спектрального разложения, в том числе в [1-4].

Рассмотрим уравнение

$$Au = f$$

В этом тезисе $A : H \to H$ — самосопряженный оператор, для любого $x \in H$ удовлетворяющий условию $(Ax, x) \geq (x, x)$, $m > 0$.

Утверждение 1. Справедливо неравенство

$$\|x\| \leq \frac{1}{m}\|Ax\| \tag{1}$$

Доказательство очевидно.

Лемма 1. Имеет следующее равенство

$$ImA = H.$$

Введем следующее пространство H_A со скалярным произведением

$$(u, v)_A = (Au, v).$$

Пространство H_A является гильбертовым пространством и называется также энергетическим пространством. Это непосредственно следует из неравенств

$$\sqrt{m}\|x\| \leq \|x\|_A \leq \sqrt{\|A\|}\|x\|.$$

Рассмотрим последовательность вложенных подпространств H_n пространства H, плотную в H. Очевидно, в силу непрерывности оператора A эта последовательность плотна и в H_A. Пусть u_0 — точное решение уравнения (1). Введем функционал

$$\Phi(u) = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2.$$

Очевидно, $\Phi(u) = (Au, u) - 2 * (u, f)$. Пусть u_n — точка минимума $\Phi(u)$ на H_n , т.е $\Phi(u_n) = min_{u \in H_n} \Phi(u)$.

Теорема 1. Для любого элемента $f \in H$ последовательность Ритца корректно определена и сходится в энергетической норме к точному решению.

Доказательство. Из леммы 1 следует однозначная разрешимость уравнения (1) для любой правой части $f \in H$.

Пусть P_n^A — проектор на H_n в H_A. Тогда по теореме Беппо Леви об ортогональном разложении

$$u_n = P_n^A u - 0.$$

Сходимость этой последовательности следует из плотности последовательности H_n в энергетическом пространстве.

Замечание 1. Справедлива оценка

$$\|u_n - u_0\| \le const\|u_0 - P_n u\|.$$

Действительно,

$$\|u_n - u_0\| \le const\|u_n - u_0\|_A = const\|P_n^A u_0 - u_0\| \le\le const\|P_n u_0 - u_0\|_A \le \|P_n u_0 - u_0\|.$$

Замечание 2. Если u_n — точка минимума функционала $\Phi(u)$, то для любого $h \in H_n$ и любого $t \in R$ справедливо неравенство

$$\Phi(u_n + th) \ge \Phi(u_n).$$

Следовательно,

$$\|u_n - u_0 + th\|_A^2 \ge \|u_n - u_0\|_A^2$$

т.е.

$$t^2(Ah, h) + 2t(Au_n - f, h) \ge 0.$$

Отсюда $(Au_n - f, h) = 0$ и $Au_n - f \perp H_n$. Таким образом, u_n является решением в H_n уравнения $P_n(Au - f) = 0$.

Реализация метода Ритца.

Пусть даны n линейно независимых элементов $g_1, g_2, \dots, g_n$ и пусть

$$H_n = L\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$$

— линейная оболочка, натянутая на них. Если $u = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)} g_k$ то $Au = \sum_{k=1}^n \alpha_k A g_k$.

Очевидно, уравнение (1) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k - f \perp g_m, \quad m = 1, 2, ..., n.$$

Таким образом, искомые коэффициенты удовлетворяют следующей системе уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (A g_k, g_m) = (g_m, f).$$

Из теоремы 1 следует, что существует единственное решение данной системы, и соответствующее приближение Ритца имеет вид:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)} g_k$$

Ключевые слова: Реализация метода Ритца, спектральных разложений.

Литература

[1] Sh. A. Alimov *On the smoothness of mean values of functions with summable spectral expansion, Differential Equations 48 (4),506–516* (2012).

[2] Sh. A. Alimov and A. A. Rakhimov *On the localization of spectral expansions of distributions in a closed domain, Differential Equations 33 (1), 80–82* (1997 г.).

[3] Каюмов Ш. *Математическое моделирование задачи теории фильтрации со свободными границами.274 с.* , ТГТУ,Ташкент, (2017 г.).

[4] R. R. Ashurov *Localization conditions of spectral expansions, corresponding to elliptic operators with constant coefficients, Math. Notes 33 (6), 434–439.*, **1**:2 (1983)

[5] R. R. Ashurov and Yu. E. Fayziev, *On eigenfunction expansions associated with the Schrodinger operator with a singular potential, Differential Equations 254–263* , **1**:2 (2005).

Об одной задаче с локальными и нелокальными условиями на граничной характеристике для уравнения Геллерстедта

Н.Х. ХУРРАМОВ[a] Д.Э. МИРЗОЕВ[b]

Термезский государственный педагогический институт, Термез, Узбекистан
E-mail: [a]*nxurramov22@mail.ru*, [b]doniyormirzayev992@gmail.com

Пусть D — конечная односвязная область комплексной плоскости $z = x + iy$, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой $\sigma_0(y = \sigma_0(x)) : x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = 1$, с концами в точках $A(-1,0)$, $B(1,0)$, а при $y < 0$ — характеристиками AC и BC уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + (\beta_0/y)u_y = 0, \tag{1}$$

где m — положительная постоянная, $\beta_0 \in (-m/2, 1)$.

Обозначим через D^+ и D^- части области D, лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через C_0 и C_1 точка пересечения характеристик AC и BC с характеристиками уравнения (1), выходящих из точки $E(c, 0)$, где c — некоторое число, принадлежащее интервалу $I = (-1, 1)$ оси $y = 0$.

С. Геллерстедт [1,с.186, с.201] для обобщенного уравнения Ф.Трикоми исследовал задачи, при постановке которых в гиперболической части области D значения искомого решения задаются на двух кусках характеристик разного семейства EC_0 и EC_1 или AC_0 и BC_1. При этом в эллиптической части области D граничные значения задаются на произвольной кривой σ_0. Настоящая работа отличается от задачи Геллерстедта тем, что здесь в условиях задачи значения искомого решения задаются на характеристиках одного семейства т.е на граничной характеристике AC_0 и параллельной ей внутренной характеристике EC_1

Задача TG. Требуется найти в области D функцию $u(x,y) \in C\left(\overline{D}\right)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) функция $u(x,y)$ принадлежит $C^2\left(D^+\right)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области D^+;

2) функция $u(x,y)$ является в области D^- обобщенным решением класса $R_1[1, c.104]$;

3) на интервале вырождения AB имеет место условие сопряжения

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to+0} y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y},\ x \in I \setminus \{c\}, \tag{2}$$

причем эти пределы при $x \to \pm 1$, $x \to c$ могут иметь особенности порядка ниже $1-2\beta$, где $\beta = (m+2\beta_0)/2(m+2) \in (0, 1/2)$;

4) для любых $x \in \overline{I}$ выполняются равенства

$$u(x, \sigma_0(x)) = a(x)u(x,0) + \varphi(x), \quad x \in [-1,1], \tag{3}$$

$$u(x,y)\mid_{EC_0} = \psi_0(x), \quad x \in [(c-1)/2, c], \tag{4}$$

$$u(x,y)\mid_{BC_1} = \psi_1(x), \quad x \in [(c+1)/2, 1]. \tag{5}$$

Функции $a(x)$, $\varphi(x)$, $\psi_0(x), \psi_1(x)$ заданы и $\varphi(x) \in C[-1,1] \cap C^{0,\alpha_0}(-1,1)$, $\psi_0(x) \in C[-1,(c-1)/2] \cap C^{1,\alpha_0}(-1,(c-1)/2)$, $\psi_1(x) \in C[(c+1)/2, 1] \cap C^{1,\alpha_0}((c+1)/2, 1)$, $\alpha_0 \in (0,1)$, причем $\varphi(x) = (1-x^2)\widetilde{\varphi}(x)$, где $\widetilde{\varphi}(x) \in C^{0,\alpha_0}[-1,1] \cap C^{0,\alpha_0}(-1,1)$, $\psi_0(-1) = 0$, $\psi_1(c) = 0$.

Заметим, что условие (3) является условием Бицадзе–Самарского на σ_0 и на отрезке вырождения AB, а условия (4) и (5) есть соответственно условие Геллерстедта заданное на граничной характеристике AC_0 и на внутренней характеристике EC_1 . При $c = -1$ или $c = 1$ из задачи следует задача Трикоми [1,с.128].

Единственность решения задачи TG доказывается с помощью аналога принципа экстремума А.В. Бицадзе [2, с.301], а существования решения задачи TG доказывается методом теории регулярных и сингулярных интегральных уравнений [3, 4].

Ключевые слова: уравнения смешанного типа, краевая задача, нестандартные сингулярное интегральное уравнение, Трикоми, уравнение Винера–Хопфа, индекс.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Литература

[1] Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа., М.:Высшая школа.1985.-304 с.

[2] Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981. 448 с.

[3] Мирсабуров М., Бегалиев О., Хуррамов Н.Х. Об одном обобщении задачи Трикоми *Дифференциальные уравнения.*, (2019),том 55 №8, С.1117-1126.

[4] Хуррамов Н.Х. Об одном обобщении задачи Трикоми *Бюллетень Института математики.*, (2020), №3, С.183-198.

Задача с условием Бицадзе–Самарского на параллельных характеристиках и общими условиями сопряжения на линии вырождения для уравнения Геллерстедта

Н.Х. ХУРРАМОВ[a], Б.Ж. ОЛТИЕВ[b]

Термезский государственный педагогический институт, Термез, Узбекистан
E-mail: [a]nxurramov22@mail.ru, [b]oltiyevbaxriddin@gmail.com

Пусть Ω — конечная односвязная область комплексной плоскости $z = x + iy$, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой $\sigma_0 : x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = 1$, с концами в точках $A(-1,0)$, $B(1,0)$, а при $y < 0-$ характеристиками AC и BC уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{1}$$

где $m = const > 0$.

Обозначим через Ω^+ и Ω^- части области Ω, лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через C_0 и C_1- соответственно точки пересечения характеристик AC и BC с характеристиками исходящей из точки $E(c, 0)$, где $c \in I = AB = (-1,1)-$ интервал оси $y = 0$.

Задача S. В области Ω требуется найти функцию $u(x,y)$ удовлетворяющую следующим условиям:

1) $u(x,y)$ непрерывна в каждой из замкнутых областей $\overline{\Omega}^+$ и $\overline{\Omega}^-$;

2) $u(x,y)$ принадлежит классу $C^2(\Omega^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;
3) $u(x,y)$ является обобщенным решением класса R_1 в области Ω^-;
4) на интервале вырождения выполняется обшие условия сопряжения [1]

$$u(x,-0)=a_1(x)u(x,+0)+a_0(x),\quad x\in\overline{I}, \tag{2}$$

$$\lim_{y\to-0}\frac{\partial u}{\partial y}=b_1(x)\lim_{y\to+0}\frac{\partial u}{\partial y}+b_0(x),\ x\in I\setminus\{c\}, \tag{3}$$

причем эти пределы при $x\to\pm1$, $x\to c$ могут иметь особенности порядка ниже $1-2\beta$, где $\beta=m/2(m+2)\in(0,1/2)$;
5) выполнены условия

$$u(x,y)=\varphi(x),\quad (x,y)\in\overline{\sigma}_0, \tag{4}$$

$$u(x,y)\mid_{AC_0}=\psi(x),\quad x\in[-1,(c-1)/2], \tag{5}$$

$$u[\theta(x)]=\mu u[\theta^*(x)]+\rho(x),\quad x\in[c,1], \tag{6}$$

где $\theta(x_0)$, $\theta^*(x_0)$ — соответственно аффиксы точек пересечения характеристик $C_0C\subset AC$ и EC_1 с характеристикой исходяшей из точки $(x_0,0)$, где $x_0\in[c,1]$, $a_0(x)$, $a_1(x)$, $b_0(x)$, $b_1(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\rho(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, μ — некоторая постоянная причем $(x-c)^\beta-\mu(1+x)^\beta\neq0, \psi(-1)=0, \rho(c)=\rho(1)=0,\quad \varphi(-1)=\varphi(1)=0.$

Заметим, что условие (4) является условием Дирихле на σ_0, а условие (6) есть условие Бицадзе-Самарского [2] на параллельных характеристиках $C_0C\subset AC$ и EC_1.

Отметим, что задача S при $\mu=0$, $(\psi((c-1)/2)=\rho(c))$ переходит в задачу Трикоми.

Теорема. *Задача S при $\mu\le0,\ a_1(x)>0,\ b_1(x)>0,\ |c(x)|<1$ однозначно разрешима.*

Доказательство теоремы проводится методом работы [3,4].

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, разбиение граничной характеристики на две части, условие Бицадзе–Самарского на параллельных характеристиках.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Литература

[1] Мирсабуров М., Хуррамов Н.Х Задача с условием Бицадзе–Самарского на характеристиках одного семейства и общими условиями сопряжения на линии вырождения для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом, *Дифференцеальные уравнения*, **1**:2 (2020),том 56 №8, С.1073-1094.

[2] Хуррамов Н.Х Задача с условием Бицадзе–Самарского на параллельных характеристиках одного семейства и общими условиями сопряжения на линии вырождения для одного класса уравнений смешанного типа, *Бюллетень Института математики*, **1**:2 (2020), №4, стр.128-146.

[3] Khurramov N.Kh. On a problem with the Tricomi condi-tion on part of the boundary characteristic and the Gellerstedt condition on an internal characteristic parallel to it, *Uzbek Mathematical Journal*, 2020. №3, pp.98-106.

[4] Хуррамов Н.Х Задача с локальными и нело-кальными условиями на гра-ничной характеристике для уравнения Геллерстедта, *Бюллетень Института математики*, **1**:2 (2022), №4, стр.109-118.

Свойства решений дифференциального уравнения тепловых полиномов

Ю.Р. ШПАДИ

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: yu-shpadi@yandex.ru,

Изучены свойства дифференциального уравнения

$$y''+2zy'-2my=0, \tag{1}$$

которое порождает тепловые полиномы [1]

$$u_m(x,t)=\sum_{k=0}^{[m/2]}\frac{a^{2k}x^{m-2k}t^k}{k!(m-2k)!}, \tag{2}$$

являющиеся решениями уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{3}$$

Показано, что уравнение (1) эквивалентно уравнению функций параболического цилиндра [2], к которому приводится взаимно однозначно с помощью аналитических подстановок независимой переменной и неизвестной функции.

Построены с помощью преобразования Лапласа линейно-независимые решения уравнения (1), удовлетворяющие заданным начальным условиям при целых значениях параметра $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

$$y_1(0) = 1, \ y_1'(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \ y_2'(0) = 1. \tag{4}$$

Полученные решения расширяют множество тепловых полиномов, что позволяет построить новые представления решений уравнения теплопроводности и применить их к решению начально краевых задач, включая многофазные задачи, задачи с переменной областью определения и со свободными границами с разнообразными краевыми условиями, включая условие Стефана.

Для решений уравнения (1) установлены свойства:

1) все решения являются целыми функциями на комплексной плоскости переменной z,

2) свойства четности/нечетности,

3) рекурентные соотношения,

4) связь с функциями Эрмита и обобщенными функциями ошибок,

5) поведение в окрестности бесконечно удаленной точки, которое, в частности, определяет поведение решений уравнения теплопроводности в окрестности времени $t = 0$,

6) условие сходимости рядов из решений уравнения (1).

Funding: Автор был поддержан грантом BR20281002 МНВО РК

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, тепловые полиномы, обыкновенные дифференциальные уравнения, полиномы Эрмита, обобщенные функции ошибок.

2010 Mathematics Subject Classification: 34D20, 35K10, 35R35

Литература

[1] Rosenbloom P.C., Widder D.V. Expansions in terms of heat polynomials and associated functions, *Trans. Amer. Math. Soc., 92* (1959): pp. 220-336.

[2] Бейтмен, Эрдеи *Высшие трансцендентные функции*, Наука, Москва (1974).

Восстановление изотермы сорбции в модели поглощения газа с учётом его диффузии в потоке

Алексей Юрьевич ЩЕГЛОВ[1,2,a], Жуйхан ЛИ[2,b]

[1]*Университет MSU-BIT в Шэньчжэне, Шэньчжэнь, Китай*
[2]*МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*
E-mail: [a]shcheg@cs.msu.ru, [b]lirh@smbu.edu.cn

Модель процесса поглощения газа в сорбционной трубке, учитывающая диффузию в газовом потоке, имеет вид

$$u_t + a_t + \nu u_x = D u_{xx}, \qquad 0 < x < l, \qquad 0 < t \leqslant T, \tag{1}$$

$$a_t = \varphi(u) - a, \qquad 0 < x < l, \qquad 0 < t \leqslant T, \tag{2}$$

$$u(0,t) = \mu(t), \qquad u(l,t) + \lambda\, u_x(l,t) = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

$$a(x,0) = 0, \qquad u(x,0) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

где D — коэффициент диффузии газа в трубке; λ — коэффициент пропорциональности между интенсивностью потока газа в правом крайнем сечении трубки и разницей в концентрации газа в правом сечении трубки и снаружи за правым концом трубки; функция $u(x,t)$ определяет концентрацию газа в сечении x трубки в момент времени t; $a(x,t)$ определяет концентрацию газа внутри зёрен сорбента в сечении x в момент времени t; $\mu(t)$ задаёт концентрацию газа в сечении $x=0$ на входе в сорбционную трубку; $\varphi(s)$ — изотерма сорбции, позволяющая согласовать соотношение между плотностью газа в порах трубки между зёрнами сорбента и в зёрнах сорбента.

При решении прямой задачи (1)–(4) требуется определить функции $u(x,t)$, $a(x,t)$ по известным положительным значениям l, T, D, λ и функциям $\mu(t)$, $\varphi(s)$.

В обратной задаче по заданным значениям l, T, D, λ, функции $\mu(t)$ и дополнительно заданной функции $h(t)$, такой, что

$$h(t) = u_x(0,t) \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{5}$$

требуется определить изотерму сорбции $\varphi(s)$ и функции $u(x,t)$, $a(x,t)$.

Разрешимость задачи (1)–(4) исследовалась А. М. Денисовым, С. Р. Туйкиной и A. Lorenzi [1, 2] при следующих условиях на известные при решении функции:

$$\mu(t)\in C^1[0,T], \quad 0<\mu_o\leqslant \mu'(t)\leqslant \mu_1 \quad \forall\, t\in[0,T], \quad \mu(0)=\mu'(0)=0, \tag{6}$$

$$\varphi(s),\varphi'(s)\in C(-\infty,\infty), \quad 0\leqslant\varphi'(s)\leqslant\varphi_0 \quad \forall\, s\in(-\infty,\infty), \quad \varphi(0)=0. \tag{7}$$

При выполнении условий (6), (7) единственное решение задачи (1)–(4) существует в виде функций $u(x,t), a(x,t)\in C^{2,1}\big(\overline{Q}_{l,T}\big)$, удовлетворяющих условиям $u_t(x,t)>0$, $a_t(x,t)>0$ $\forall x\in[0,l]$ $\forall t\in[0,T]$; $0\leqslant u(x,t)\leqslant \mu(\tau)$, $0\leqslant a(x,t)\leqslant \varphi\big(\mu(\tau)\big)$ $\forall (x,t)\in \overline{Q}_{l,\tau}$ $\forall \tau\in[0,T]$, где $Q_{l,T}=\{(x,t):\, 0<x<l,\, 0<t\leqslant T\}$.

В докладе рассматривается возможность получения решения задачи (1)–(4) из интегрального уравнения

$$u(x,t) = \Big(1-\frac{x}{l+\lambda}\Big)\mu(t) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{l+\big(\cos\big(\sqrt{\omega_n^*}\,l\big)\big)^2\,\widehat{\lambda}}\int_0^t e^{-(D\omega_n^*+\beta)(t-\tau)}\times$$
$$\times\int_0^l e^{\frac{\nu}{2D}(x-s)}\Big[\frac{\nu}{l+\lambda}\mu(\tau)-\Big(1-\frac{s}{l+\lambda}\Big)\mu'(\tau)-\varphi\big(u(s,\tau)\big)+$$
$$+\int_0^\tau e^{-(\tau-\theta)}\varphi\big(u(s,\theta)\big)d\theta\Big]\sin\big(\sqrt{\omega_n^*}\,s\big)ds d\tau\,\sin\big(\sqrt{\omega_n^*}\,x\big),\ (x,t)\in\overline{Q}_{l,T}, \tag{8}$$

где значения ω_n^* являются корнями алгебраического уравнения

$$\sqrt{\omega} = -\frac{1}{\widehat{\lambda}}\,\mathrm{tg}\left(\sqrt{\omega}\,l\right). \tag{9}$$

После определения функции $u(x,t)$ из уравнения (8), значения функции $a(x,t)$ вычисляются по формуле

$$a(x,t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)}\varphi\big(u(x,\tau)\big)\,d\tau, \qquad (x,t)\in\overline{Q}_{l,T}. \tag{10}$$

Эта операция завершает получение решения прямой задачи (1)–(4).

Уравнения (8), (9) и формула (10) используются для исследования разрешимости обратной задачи (1)–(5) и её численного решения.

Funding: Work was supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 12171036) and Beijing Natural Science Foundation (Key Project No. Z210001).

Ключевые слова: обратная задача, модель динамики сорбции диффузия в потоке газа, изотерма сорбции.

2010 Mathematics Subject Classification: 35R30, 45Q05, 65N21

Литература

[1] Денисов А. М., Туйкина С. Р. О некоторых обратных задачах неравновесной динамики сорбции, *Доклады Академии наук*, **276**:1 (1984), 100–102.

[2] Denisov A. M., Lorenzi A. Recovering an unknown coefficient in an absorption model with diffusion, *J. of Inverse and Ill-Posed Problems*, **15**:6 (2007), 599–610.

Обратная коэффициентная задача для нелинейной модели развития популяции с интегральными особенностями

Алексей Юрьевич ЩЕГЛОВ[1,2,a], Цин ШЕНЬ[2,b]

[1] *Университет MSU-BIT в Шэньчжэне, Шэньчжэнь, Китай*
[2] *МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*
E-mail: [a]*shcheg@cs.msu.ru*, [b]*shengqing@smbu.edu.cn*

Рассматривается обратная задача восстановления коэффициента $\mu_0(x)$ в модели развития популяции (см. раздел 5.4 [1]) с возрастным структурированием индивидуумов. Некоторые параметры модели нелокальны и зависят от интегралов с решениями прямой задачи в составе подынтегральных функций. При этом прямая задача имеет вид начально-краевой постановки относительно функции $u(x,t)$:

$$u_x(x,t) + u_t(x,t) = -\mu_0(x)u(x,t) - \mu_1(x)\Psi(S(t))u(x,t), \quad x\in[0,l], \quad t\in[0,l],$$

$$u(0,t) = \Phi(S(t)) \int_0^l \beta(\xi)u(\xi,t)d\xi, \quad t \in [0,l],$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,l],$$

$$S(t) = \int_0^l \gamma(\xi)\, u(\xi,t)\, d\xi, \quad t \in [0,l].$$

Функция $u(x,t)$ определяет число индивидуумов (их плотность) возраста x в популяции в момент времени t; функции $\mu_0(x)$ и $\mu_1(x)$ характеризуют смертность особей возраста x, соответственно, естественной и проявляющейся в силу перенаселения; $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ - плотности репродуктивности и жизнедеятельности особей возраста x; функции $\Phi(s)$ и $\Psi(s)$ характеризуют интегральную зависимость рождаемости и смертности от общего объёма $S(t)$ жизнедеятельности популяции.

Для математического моделирования жизнедеятельности конкретной популяции однотипных организмов может быть выбрано математическое описание процесса различной сложности, демонстрирующее динамику развития популяции с различной детализацией. Серия таких, отличающихся по сложности и в деталях, моделей развития популяций с возрастной структурой организмов представлена в литературе [1] и достаточно хорошо изучена. Для восстановления отдельных параметров такой популяции в форме решения обратных задач могут быть использованы разные модели, для которых установлены условия, гарантирующие обратной задаче единственность решения. При этом из получаемых результатов решения схожих обратных задач, сформированных для различных однотипных моделей процесса, может быть выделена та модель, которая даёт наилучшее совпадение вычислительных результатов с экспериментальными данными на основе точных численных оценок. Для осуществления такого поиска значения восстанавливаемого параметра по группе однотипных моделей требуется получение условий, обеспечивающих единственность решения обратной задачи для каждой модели группы. Представленная выше задача может рассматриваться как одна их типовых математических моделей развития популяции, в которых может однозначно восстанавливаться коэффициент $\mu_0(x)$.

В рамках обратной задачи пусть требуется восстановить коэффициент $\mu_0(x)$ уравнения и затем функцию $u(x,t)$ по заданным значениям функций $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\varphi(x)$, $\mu_1(x)$, $\Psi(s)$, $\Phi(s)$, и по дополнительно известным значению $x_1 \in (0,l]$, и функции $g(t)$, где

$$g(t) = u(x_1,t), \quad t \in [0,l].$$

В работе сформулированы условия однозначной разрешимости прямой задачи. Доказана теорема единственности решения обратной задачи и предложен алгоритм её численного решения, представлены примеры. Аналогичные результаты для линейных моделей рассматривались в работах [2–5].

Funding: Work was supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 12171036) and Beijing Natural Science Foundation (Key Project No. Z210001).

Ключевые слова: обратная задача, нелинейная модель популяционной динамики, итерационный метод, нелокальная задача.

2010 Mathematics Subject Classification: 35R30, 45Q05, 65N21

Литература

[1] Iannelli M., Milner F. *The basic approach to age-structured population dynamics: Models, Methods and Numerics*, Springer Science + Bus. Media, Dordrecht (2017).

[2] Denisov A. M., Makeev A. S. Iterative methods for solving an inverse problem for a population model, *J. Comp. Math. Math Phys.*, **44**:8 (2004), 1404–1413.

[3] Denisov A. M., Makeev A. S. Numerical method for solving an inverse problem for a population model, *J. Comp. Math. Math Phys.*, **46**:3 (2006), 470–480.

[4] Shcheglov A. Yu. Uniqueness of the solution of the inverse problem for a model of the dynamics of an age-structured population, *Mathematical Notes*, **111**:1 (2022), 139–146.

[5] Shcheglov A. Yu., Netessov S. V. An inverse problem for an age-structured population dynamics model with migration flows, *Numerical Analysis and Applications*, **17**:1 (2024), 93–98.

Dirichlet problem on a stellar thermal graph

Nursaule AINAKEYEVA

Joldasbekov Institute of Mechanics and Engineering, Almaty, Kazakhstan
Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: nursaule_math@mail.ru

Boundary value problems of thermal conductivity on a star-shaped thermograph are considered, which can be used to study various mesh structures under conditions of thermal heating (cooling). Here, based on the generalized function method, a unified technique has been developed for solving boundary value problems of thermal conductivity, typical for engineering applications. Generalized solutions to nonstationary and stationary boundary value problems of heat conduction on an edge and on a stellar thermal graph are constructed under various boundary conditions at the ends of the graph and generalized Kirchhoff conditions at its node. Using the symmetry properties of the Fourier transformant of the fundamental solution, regular integral representations of solutions to boundary value problems are obtained in analytical form.

The solutions obtained make it possible to simulate heat sources of various types, including using singular generalized functions. The method of generalized functions presented here makes it possible to solve a wide class of boundary value problems with local and connected boundary conditions at the ends of the edges of the graph and different transmission conditions at its node.

1. Statement of a boundary value problem on a thermal star graph. Let consider an un oriented thermal star graph of N segments (edges) (A_0, A_j) of length L_j, $(j = 1, 2, ..., N)$ with a common node A_0. On each segment, $S_j = \{x \in R^1 : 0 \le x \le L_j\}$ there is own coordinate system (x_j, t) with the origin at point $A_0 :\ x = 0$, consequently at segment S_j. A temperature $\theta_j\,(x, t)$ satisfy the heat conduction equation [1]:

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial x^2} = F_j\,(x, t) \tag{1}$$

Here κ_j is the thermal diffusivity coefficient on the j-th segment, $F_j\,(x, t)$ describes is the action of heat source, $\theta_1^j\,(t)\,,\,\theta_2^j\,(t)$ are the temperature in the ends of the j-th segment (edge).

Initial conditions (Cauchy conditions): at $t = 0$ the temperature of the graph is known:

$$\theta_j\,(x, 0) = \theta_0^j\,(x)\,,\ 0 \le x \le L_j,\ \theta_j\,(0) = \theta_0,\ \theta_0^j\,(x) \in C^2\left(R^1\right) \tag{2}$$

Here we pose the following boundary value problem with local boundary conditions on the graph ends:

$$\gamma_j \theta_j\,(L_j, t) + \eta_j \Pi_j\,(L_j, t) = g_j\,(t)\,,\ j = 1, ..., N] \tag{3}$$

where heat flow $\Pi_j\,(L_j, t) = \kappa_j \left.\frac{\partial \theta_j}{\partial x}\right|_{x=L_j}$, γ_j, η_j are arbitrary constants. The choice of the value of the constants depends on the boundary value problem being solved. For example, if $\eta_j = 0$ for all $j = 1, ..., N$ we have *Dirichlet problem*:

$$\theta_j\,(L_j, t) = T_j\,(t)\,,\ t \ge 0,\ T_j(t) \in C\left(R_+^1\right) \tag{4}$$

Temperature values are known at the ends of the graph. If $\gamma_j = 0$ for all $j = 1, ..., N$ we have

Neumann problem:

$$\Pi_j\,(L_j, t) = Q(t),\ t \ge 0,\ Q(t) \in L_1\left(R_+^1\right) \tag{5}$$

Here the values of heat flows are known at the every end of the graph.

The next conditions are specified in the common node A_0 of the star graph:

$$\theta_1^1(t) = \theta_1^2(t) = ... = \theta_1^N(t),\ t \ge 0,\ \theta_1^j(0) = \theta_0 \tag{6}$$

$$\kappa_1 q_1^1(t) + \kappa_2 q_1^2(t) + ... + \kappa_N q_1^N(t) = \sum_{j=1}^{N} \kappa_j q_1^j(t) = G(t),\ G(t) \in L_1\left(R_+^1\right) \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{N} \kappa_j \left.\frac{\partial \theta_0^j}{\partial x}\right|_{x_j=0} = G(0).$$

Here $q_1^j(t) = \left.\frac{\partial \theta_j}{\partial x}\right|_{x=0}$, $q_2^j(t) = \left.\frac{\partial \theta_j}{\partial x}\right|_{x=L_j}$, θ_0 is initial temperature in the common node A_0. We construct solutions of BVPs for arbitrary constants γ_j, η_j, which gives possibility to solve problems with different types of boundary conditions at the ends of the star graph.

2. Generalized solution of boundary value problems on an segment. General function method. At first let constructed the solutions of BVPs on the segment of star graph. Fourier transform of generalized solution of heat equations on segment has the form of convolution [2]:

$$\begin{aligned} &\theta\,(x, \omega)\, H\,(L - x)\, H(x) H(\omega) = \\ = \quad & H(x) \int_0^L U\,(x - y, \omega)\, F_2\,(y, \omega)\, dy + \kappa H(x) \int_0^L U\,(x - y, \omega)\, \theta_0(y) dy + \\ & + \kappa \bar{q}_2(\omega) H(x) \bar{U}(L - x, \omega) - \kappa \bar{q}_1(\omega) H(L - x) \bar{U}(x, \omega) - \end{aligned}$$

$$-\kappa\bar{\theta}_2(\omega)H(x)\bar{U}_{,x}(L-x,\omega)-\kappa\bar{\theta}_1(\omega)H(L-x)\bar{U}_{,x}(x,\omega). \qquad (8)$$

where $\bar{U}(x)$ is Fourier transform of fundamental solutions of heat equation (1):

$$\bar{U}(x,\omega) = -\frac{sin(k\,|x|)}{2k\kappa}, \qquad (9)$$

$$\bar{U}(+0,\omega) = \bar{U}(-0,\omega),\ U_{,x}(\pm 0,\omega) = \mp\frac{1}{2\kappa}. \qquad (10)$$

here $k = \sqrt{i\omega\kappa^{-1}} = e^{i\pi/4}\sqrt{\omega\kappa^{-1}} = (1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}$. $\bar{U}_j(x,\omega)$ is Green's tensor transformants $\bar{U}_j(x,t)$ [3,4]. To find unknown boundary functions, let's introduce the following notation: $\bar{\theta}_1(\omega) = \bar{\theta}(0,\omega)$, $\bar{\theta}_2(\omega) = \bar{\theta}(L,\omega)$ and quote this theorem.

Theorem 1. *The Fourier time transformants boundary functions of boundary value problems on segment* $[0,L]$ *satisfy the system of linear algebraic equations of the form:*

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ k\bar{U}_{,x}(L,\omega) & k\bar{U}(L,\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1(\omega) \\ \bar{q}_1(\omega) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k\bar{U}_{,x}(L,\omega) & k\bar{U}(L,\omega) \\ 0,5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_2(\omega) \\ \bar{q}_2(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_1(0,\omega) \\ \bar{Q}_2(L,\omega) \end{bmatrix}, \qquad (11)$$

where

$$\begin{aligned} \bar{Q}_1(0,\omega) &= \bar{F}(x,\omega) \underset{x}{*} \bar{U}(x,\omega)\big|_{x=0} + \theta_0(x)H(L-x)H(x) \underset{x}{*} \bar{U}(x,\omega)\big|_{x=0}, \\ \bar{Q}_2(L,\omega) &= \bar{F}(x,\omega) \underset{x}{*} \bar{U}(x,\omega)\big|_{x=L} + \theta_0(x)H(L-x)H(x) \underset{x}{*} \bar{U}(x,\omega)\big|_{x=L}. \end{aligned}$$

To solve all temperature BVPs, it is convenient to consider the extended system of equations in the form of matrix equation:

$$A \cdot B = C, \qquad (12)$$

where

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & \kappa\bar{U}_{,x}(L,\omega) & -\kappa\bar{U}(L,\omega) \\ \kappa\bar{U}_{,x}(L,\omega) & \kappa\bar{U}(L,\omega) & 0,5 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},$$

$$B(\omega) = \left(\bar{\theta}_1(\omega), \bar{q}_1(\omega), \bar{\theta}_2(\omega), \bar{q}_2(\omega)\right),\ C = \left(\bar{Q}_1(0,\omega), \bar{Q}_2(L,\omega), \bar{b}_3(\omega)\bar{b}_4(\omega)\right).$$

The last two equations in (11) are determined by the boundary conditions at the ends of the segment $x \in [0,L]$. Their solution is equal to $B = A^{-1} \cdot C$.

3.Algebraic equations for determining unknown boundary functions on a star graph. Let's return to the consideration of the Dirichlet problem for the heat equation on a star graph.

Theorem 2. *Resolving system equations of Dirichlet boundary value problem on a star graph with N different segments has the form :*

$$A(\omega) \cdot B(\omega) = C(\omega), \qquad (13)$$

where

$$B(\omega) = \left(\bar{\theta}_1^1, \bar{q}_1^1, \bar{\theta}_2^1, \bar{q}_2^1, ..., ..., \bar{\theta}_1^N, \bar{q}_1^N, \bar{\theta}_2^N, \bar{q}_2^N\right),$$

$$C(\omega) = \left(\bar{Q}_1^1(0,\omega), \bar{Q}_2^1(L,\omega), ..., \bar{Q}_1^N(0,\omega), \bar{Q}_2^N(L,\omega), 0, 0, ..., 0, \bar{G}(\omega)\right).$$

$$A =$$

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & -cos(kL_1) & k^{-1}sin(kL_1) & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-cos(kL_1) & k^{-1}sin(kL_1) & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & -cos(kL_1) & k^{-1}sin(kL_1) \\
0 & 0 & 0 & 0 & ... & -cos(kL_1) & k^{-1}sin(kL_1) & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & ..., 0, & -1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
1 & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
0 & \kappa_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_N & 0
\end{bmatrix}$$

Here the matrices have the following dimensions $A(\omega) = \{a_{mn}(\omega)\}_{4N\times 4N}$, $B(\omega) = \{b_{mn}(\omega)\}_{4N\times 1}$. In matrix A in line $(2N + j)$ in column 1 stays 1, in column $(4j + 1)$ must stay the number $1, ..., 2N - 1$.

The first two N rows of matrix A contain the obtained relations (11) for each segment (edge) of this graph.

The graph has a total of N segments with one boundary condition at the end of the segment. Consequently, we have N boundary conditions at the vertex of the graph. The next N rows of matrix A contain the conditions of continuity (6) and Kirchhoff (7) for N segments whose ends lie at the vertex of the graph A_0. Finally, the last N lines contain the known temperature boundary conditions (5) on N the ends of each segment A_j of the graph.

Funding: The work was performed with the financial support of the Science Committee of the Ministry of Science and High Education and of the Republic of Kazakhstan under the Republican Program BR20280990 "Design, development fluid and gas mechanics, new deformable bodies, reliability, energy efficiency of machines, mechanisms, robotics fundamental problems solving methods" and Grant AP19674789.

Keywords: generalized functions, fundamental and generalized solution, Fourier transform, resolving boundary equations, thermal graph.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

References

[1] Novatsky V.S. *Dynamic Problems of Thermoelasticity* , M.: Mir, 1970, 256 p.

[2] Novatsky V.S. *Generalized functions in mathematical physics* , Moskow: Nauka (1978).

[3] Alexeyeva L.A., Dadayeva A.N., Ainakeyeva N.Zh Green tensor and regula solutions of equations of rods thermodynamics and their properties, *Journal of theoretical and applied mechanics*, **59**:2 (2021), 227–228.

[4] Alexeyeva L.A. Distributions Method in Nonstationary Boundary Value Problems for Wave Equations, *Mathematical Journal*, **6**:1(19) (2006), 16–32.

Construction of high-order essentially non-oscillatory (ENO) shock-capturing scheme on a non-uniform grid for a one-dimensional flux vector

Gulzana ASHIROVA[a], Asel BEKETAEVA Altynshash NAIMANOVA

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: [a]ashirova@math.kz,

Currently, there are three types of high-order accuracy shock-capturing numerical schemes used to solve hyperbolic systems that can effectively resolve complex flow features. These schemes are: discontinuous Galerkin finite element methods (DG) [1-2] and discontinuous multidomain spectral methods [3]; finite-volume and spectral-volume methods (SV) [4-5]; weighted essentially non-oscillatory (WENO) finite-difference methods [6-9] and multidomain spectral finite-difference (SD) methods [3,10]. A comprehensive review and analysis of these schemes has been presented in a research paper [7]. Although the DG and SV schemes have high-order accuracy, they require a large number of neighboring cells and calculation of surface or volume integrals due to their stencil on structured grids. These weak points make their implementation difficult, particularly for parallelization and solving industrial problems.

The finite-difference ENO scheme along with its variations [10] has several advantages over the DG and SV schemes. They are simpler and have lower processing unit costs. As a result, extensive attention has been paid to their development. However, these schemes have some disadvantages. They can only be applied to smooth structured curvilinear meshes. Some ENO and WENO schemes [11-12] have been developed for non-uniform meshes, but they are realized by the SV method. Therefore, implementing these schemes on a computer can be expensive. A finite-difference essentially non-oscillatory (ENO) shock-capturing scheme on a non-uniform grid is proposed in this regard.

A one-dimensional initial-boundary value problem of a scalar constant-coefficient hyperbolic system with imposed boundary and initial conditions is formulated. The exact solution of the one-dimensional problem in a small-time strip is obtained through the cell averaging of nodal values, which is approximated by a piecewise polynomial function on a non-uniform grid. The piecewise polynomial function is constructed via Lagrange's interpolation formula, considering the sign of the eigenvalues of the equation on a non-uniform grid. One-dimensional scalar flux approximations are then performed based on the constructed Lagrange interpolation formula. The numerical flux is transformed via the reconstruction of the primitive function (RP) on a non-uniform grid. Finally, a novel high-order ENO scheme on a non-uniform grid in the scalar constant case is developed. For that, various ways of choosing the smoothest non-uniform stencil among all candidates are included to provide the non-oscillatory behavior of a new high-order accuracy scheme.

The method for constructing a new scheme on a non-uniform grid is based on the methodology proposed by the authors for a uniform grid. However, the direct transition of a scheme with third-order accuracy on a uniform grid to a non-uniform grid revealed the loss of accuracy to the first order. It's crucial to point out that finite difference formulas typically lose one order and even two orders of accuracy on non-uniform grids. In order to achieve a high-order accuracy constructed scheme, it is necessary to take into account additional terms of high-order (second- and third-order) derivatives considering the grid step nonuniformity from both the right and left of the approximated point. Finite difference formulas obtained with Lagrange polynomials on a non-uniform grid are used to determine these terms.

Funding: This research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (≪Numerical simulation of two-way coupled solid particle laden high-speed mixing layer≫ Grant No. AP19674992).

Keywords: Essentially Nonoscillatory (ENO) scheme, non-uniform grids.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q30, 76J20

References

[1] Cockburn B., Shu C.W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws II, *Math. Comput.*, **52**: (1989), 411–435.

[2] Bassi F., Rebay S. A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations, *J. Comput. Phys.*, **131**: (1997), 267–279.

[3] Kopriva D.A., Kolias J. H. A conservative staggered-grid Chebyshev multidomain method for compressible flows, *J. Comput. Phys.*, **125**: (1996), 244–261.

[4] Sun Y., Wang Z.J., Liu Y. Spectral (finite) volume method for conservation laws on unstructured grids VI: Extension to viscous flow, *J. Comput. Phys.*, **215**: (2006), 41–58.

[5] Wang Z.J., Zhang L., Liu Y. Spectral (finite) volume method for conservation laws on unstructured grids IV: Extension to two-dimensional systems, *J. Comput. Phys.*, **194**: (2004), 716–741.

[6] Shu C.W. High-order finite difference and WENO schemes and discontinuous Gakerkin methods for CFD, *Int. J. Comput. Fluid Dyn.*, **17**: (2003), 107–118.

[7] Cheng J., Shu, C.W. High order schemes for CFD: a review, *Chinese J. Comput. Phys.*, **26**:5 (2009), 633-–655.

[8] Ekaterinaris J.A. High-order accurate low numerical diffusion methods for aerodynamics, *Progress in Aerospace Sciences*, **41**: (2005), 192–300.

[9] Shu C. W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, *J. Comp. Phys.*, **77**:2 (1988), 439–471.

[10] Wang Z.J. High-Order Methods for the Euler and Navier-Stokes Equations on Unstructured Grids, *Progress in Aerospace Sciences*, **43**: (2007), 1–41.

[11] Wang R., Feng H., Spiteri R. Spiteri R. Observations on the fifth-order WENO method with non-uniform meshes, *Applied Mathematics and Computation*, **196**:1 (2007), 433–447

[12] Crnjaric-Zic N., Macesic S., Crnkovic B. Efficient implementation of WENO schemes to nonuniform meshes, *Ann. Univ. Ferrara.*, **53**: (2007), 199–215.

On the non-local problems for Boussinesq type fractional equation

Ravshan ASHUROV[1,a], Yusuf FAYZIEV[2,b], Muattar KHUDOYKULOVA[2,c]

[1]*Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Science, Tashkent, Uzbekistan*
[2]*National University of Uzbekistan, 100174 Tashkent, Uzbekistan, Uzbekistan*
E-mail: [a]*ashurovr@gmail.com*, [b]*fayziev.yusuf@mail.ru*, [c]*muattarxudoyqulova2000@gmail.com*

Let H be a separabel Hilbert space and operator $A : H \to H$ be an arbitrary unbounded, positive self-adjoint operator and we assume that A has a compact inverse operator A^{-1}. Let λ_k and $\{v_k\}$ be the eigenvalues and corresponding eigenfunctions of operator A, that is $Av_k = \lambda_k v_k$, $k = 1, 2, \ldots$.

Let us introduce the fractional integral J_t^σ and the Caputo derivative D_t^α of orders $\sigma \in (0,1)$ and $\alpha \in (1,2)$ of the vector-valued function $h(t) \in H$ (see, for example [1])

$$J_t^\sigma h(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int\limits_0^t \frac{h(\xi)}{(t-\xi)^{1-\sigma}} d\xi, \quad D_t^\alpha h(t) = J^{2-\alpha} \frac{d^2}{dt^2} h(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

provided the right-hand side exists. Here $\Gamma(\sigma)$ is Euler's gamma function.

Let $1 < \alpha < 2$. Consider the following fractional differential equation

$$D_t^\alpha u(t) + A D_t^\alpha u(t) + \nu^2 A u(t) = 0, \quad 0 < t < T, \tag{2}$$

with non-local conditions

$$u(0) = u(T), \tag{3}$$

and

$$\int\limits_0^T u(t) dt = \varphi, \tag{4}$$

where $\varphi \in H$ a given vestor and $\nu > 0$ fixed number.

Theorem. Let $\varphi \in D(A)$. Then there is a unique solution of problem (2)-(4) and it has the form:

$$\begin{aligned} u(t) = \sum_{k=1}^\infty \Bigg(& \frac{\varphi_k E_{\alpha,2}(-\nu_k^2 T^\alpha) E_{\alpha,1}(-\nu_k^2 t^\alpha)}{T(E_{\alpha,2}^2(-\nu_k^2 T^\alpha) + E_{\alpha,3}(-\nu_k^2 T^\alpha)(1 - E_{\alpha,1}(-\nu_k^2 T^\alpha)))} \\ & + \frac{\varphi_k t(1 - E_{\alpha,1}(-\nu_k^2 T^\alpha)) E_{\alpha,2}(-\nu_k^2 t^\alpha)}{T^2(E_{\alpha,2}^2(-\nu_k^2 T^\alpha) + E_{\alpha,3}(-\nu_k^2 T^\alpha)(1 - E_{\alpha,1}(-\nu_k^2 T^\alpha)))} \Bigg) v_k, \end{aligned} \tag{5}$$

where $\nu_k = \nu \sqrt{\frac{\lambda_k}{1+\lambda_k}}$ and $\varphi_k = (\varphi, v_k)$ are the Fourier coefficients of function φ.

In the fundamental work [2], Alimov and Khalmukhamedov studied the following a non-local problem in the cylinder $\Omega \times (0,T)$:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u_{tt} - \nu^2 \Delta u = 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T, \\ u(x,0) = u(x,T), \quad x \in \Omega, \\ \int\limits_0^T u(x,t) dt = \varphi(x), \end{cases} \tag{6}$$

here φ is a given function. The authors discovered an interesting effect: it turns out that the well-posedness of this problem significantly depends on the length of the time interval and on the parameter ν. So if $\frac{\nu T}{2\pi} \in (0,1)$, then the solution exists and is unique for all $\varphi \in D(B)$ (where B is extension of Laplace operator and $D(B)$ is domain of operator B). Case $\frac{\nu T}{2\pi} \geq 1$ is more complected: if $\frac{\nu T}{2\pi} > 1$, and this number is not an natural, then for the existence of a solution it is necessary to require that function φ be orthogonal to some eigenfunctions of the Laplace operator, and in this case the solution is not unique. And if the number $\frac{\nu T}{2\pi}$ is an natural, then only orthogonality is not enough; it is necessary that the function φ be smoother: $\varphi \in D(B^2)$.

In this thesis, it was found that the solution for Boussinesq type fractional equation does not depend on T and ν.

Funding: The authors were supported by the grant no. F-FA-2021-424 of the Ministry of Innovative Development of the Republic of Uzbekistan.

Keywords: diffusion equation, homogeneous body, initial state, local inhomogeneity, transparent boundary conditions.

2010 Mathematics Subject Classification: 35R11, 35R30

References

[1] Lizama C. Abstract linear fractional evolution equations, in: *Handbook of Fractional Calculus with Applications*, DeGruyter, Berlin (2019), 465–497.

[2] Alimov Sh., Khalmukhamedov A. On a non-local problem for a Boussinesq type differential equation, *Lobachevskii J. Math.*, **43** (2022), 916—923.

Determining the order of time and spatial fractional derivatives

Ravshan ASHUROV[1,a], Ilyoskhuja SULAYMONOV[2,b]

[1]*Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Science, Tashkent, Uzbekistan*
[2]*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*
E-mail: [a]ashurovr@gmail.com, [b]ilyosxojasulaymonov@gmail.com

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ be an arbitrary bounded domain, with sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$, and $\rho \in (0,1)$, $\sigma > 0$. Consider the initial-boundary value problem for a space-time-fractional diffusion equation

$$\begin{cases} D_t^\rho u(x,t) + (-\Delta)^\sigma u(x,t) = 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

where Δ is the Laplace operator, the fractional power of this operator is determined using the von Neumann spectral theorem, $\varphi(x) \in L_2(\Omega)$, D_t^ρ is the Caputo fractional derivative of order $0 < \rho < 1$ is defined as formula (see, for example [1]):

$$D_t^\rho h(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\rho)} \int\limits_0^t \frac{h'(\xi)}{(t-\xi)^\rho} d\xi, \quad t > 0,$$

provided the right-hand side exists. Here $\Gamma(\sigma)$ is Euler's gamma function.

Recall that the Mittag-Leffler function $E_\rho(t)$ is defined as follows (see, for example [2]):

$$E_\rho(t) = \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{\Gamma(\rho k + 1)}.$$

We consider both parameters ρ and σ unknown and study the inverse problem of determining both parameters simultaneously. As additional conditions we take:

$$|(u(t_0), v_1)| = d_0. \tag{3}$$

$$|(u(t_1), v_1)| = d_1. \tag{4}$$

To solve the two parameter inverse problem fix the numbers $\rho_0, \rho_1 \in (0,1)$ $(\rho_0 < \rho_1)$ and consider the problem for $\rho \in [\rho_0, \rho_1]$ and $\sigma > 0$.

Theorem. Let λ_1 be the first eigenvalue of operator A and $\varphi \in L_2(\Omega)$. Then there are numbers $T_1 = T_1(\lambda_1, \rho_1) > 0$ and $c_0 = c_0(\rho_1) > 0$ such that for all $t_0 > T_1$ and $t_1 > T_1$ satisfying condition $t_0 > c_0 t_1$, there is a unique solution $\{u(t), \rho, \sigma\}$ of the inverse problem (1), (3), (4), if and only if d_0 and d_1 satisfies the following inequalities:

$$e^{-\lambda_1 t_0} \le \frac{d_0}{|\varphi_1|} < E_{\rho_0}(-t_0^{\rho_0}),$$

$$E_{\rho_1}(-\lambda_1 t_1^{\rho_1}) \le \frac{d_1}{|\varphi_1|} < E_{\rho_0}(-t_1^{\rho_0}).$$

In 2013, Tatar and Ulusoy [3] considered a similar two parameter inverse problem in an one-dimensional bounded domain $(-1,1)$ with $\rho \in (0,1)$ and $\sigma \in (1/4, 1)$. The main result of the work is the proof of the uniqueness of the solution of the inverse problem for the determination of two parameters ρ and σ with an additional condition $u(0,t) = h(t)$, $0 < t < T$. When proving the uniqueness theorem, the authors had to set the following rather stringent conditions on the initial function:

$$\varphi \in C^\infty(-1,1),\ \varphi_k > 0, \text{for all} \quad k \ge 1,$$

where φ_k are the Fourier coefficients of φ.

Later, in 2020, a similar two parameter inverse problem in an N-dimensional bounded domain Ω with smooth boundary $\partial\Omega$ was studied by M. Yamamoto [4] with the same additional condition and $\sigma \in (0,1)$. He proved a uniqueness theorem with a less stringent condition on the initial function: φ is equal to zero on $\partial\Omega$, $\varphi \in L_2^\tau(\Omega)$, $\tau > N/2$ and $\varphi(x) \ge 0$ for all $x \in \Omega$. Here $L_2^\tau(\Omega)$ denotes the classical Sobolev space.

Funding: The authors were supported by the grant no. F-FA-2021-424 of the Ministry of Innovative Development of the Republic of Uzbekistan.

Keywords: Fractional derivative in the sense of Caputo, fractional order of the Laplace operator, inverse problems.

2010 Mathematics Subject Classification: 35R11, 35R30

References

[1] Kilbas A., Srivastava H., Trujillo J. *Theory and applications of fractional differential equations*, Mathematics studies (2006).

[2] Gorenflo R. , Kilbas A. A. , Mainardi F., Rogozin S. V.*Mittag-Leffler functions, related topics and applications*, Springer (2014).

[3] Tatar S., Ulusoy S. A uniqueness result for an inverse problem in a space-time fractional diffusion equation,*Electronic Journal of Differential Equations*, 258 (2013), 1–9.

[4] Yamamoto M. Uniqueness determining the order of time and spatial fractional derivatives, *arXiv:2006, 15046v1 [math. AP]*, (2020), 1–10.

A correction of a non-equilibrium effect in the k-ω turbulence model for high-speed flows

Altynshash NAIMANOVA, Assel BEKETAEVA

Institute of Mathematics and Mathematical Modelling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: aziamaras10@gmail.com,

A transverse jet in a supersonic main flow is a complex spatial flow that can arise when controlling the thrust of a rocket engine using gas rudders and when injecting gaseous fuel into a supersonic flow. Also, this type of flow can be used to control a high-speed aircraft, especially under conditions of strong aerodynamic heating. Separation zones, turbulence, shock waves, and rarefaction waves pose serious challenges to the study of flow physics. Therefore, correct modeling of this flow is an important and unsolved problem in modeling turbulent high-speed flows. Properly obtaining such flow characteristics requires improved turbulence models that include both compressibility effects [1-2] and nonequilibrium turbulence effects [3].

A new modification of a non-equilibrium (generation/dissipation rate) effect in the two-equation turbulence model is presented as applied to solving complex high-speed flows. For that, the numerical simulations of the Favre averaged Navier-Stokes equations are carried out for supersonic spatial multispecies gas flow by the corrections of non-equilibrium terms in the k-ω turbulence model. For the specific dissipation rate equation, in the balance production/dissipation terms, the two local compressibility coefficients C_{ω_1}, C_{ω_2} are included allowing the specific dissipation rate to respond to the exchange of the local Mach number and non-linearly density variations:

Here, the local coefficients C_{ω_1} and C_{ω_2} are:

$$\frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u\omega)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v\omega)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v\omega)}{\partial z}=$$

$$=C_{\omega_1}\left(\frac{\gamma_t\rho Re}{\mu_t}P_k-\frac{2}{3}\gamma_t\rho\omega\ \frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\gamma_t\rho\omega\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\gamma_t\rho\omega\frac{\partial w}{\partial z}\right)-$$

$$-C_{\omega_2}\beta\rho\omega^2+\frac{\gamma_t\rho Re}{\mu_t}G-\frac{\rho Re}{\mu_t}\prod_d+\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{(\mu+\sigma_\omega\mu_t)}{Re}\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)+$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{(\mu+\sigma_\omega\mu_t)}{Re}\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)+\frac{\partial w}{\partial z}\left(\frac{(\mu+\sigma_\omega\mu_t)}{Re}\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)$$

Here, the local coefficients C_{ω_1} and C_{ω_2} are:

$$\begin{cases} C_{\omega_1}=\alpha_1+\beta_1\rho M, C_{\omega_2}=\dfrac{1}{(\alpha_2+\beta_2\rho M)}, if M>1 \\ C_{\omega_1}=\alpha_1+\beta_1\rho, C_{\omega_2}=\dfrac{1}{(\alpha_2+\beta_2\rho)}, if M\le 1 \end{cases}$$

with the additional terms ($\alpha_i, \beta_i, i=1,2; M$ - local Mach number). To determine the model constants experimental data of the supersonic turbulent crossflow of the [4] are used to find the allowable range of these constants. These numerical experiments allow finding the final model constants by matching the predictions to the measured data of the turbulent supersonic crossflow [4]. The numerical results have shown that the coefficients satisfying the expression $\alpha_1+\overline{\gamma}\cdot\beta_1\le 2.0$, $\alpha_2+\overline{\gamma}\cdot\beta_2\le 2.0$ and taking the following values $\alpha_1=1.25$, $\alpha_2=1.15$, $\beta_1=0.85$, $\beta_2=1.25$ and taking the following values give better agreement with the experiment on the depth of hydrogen penetration [4]. The proposed modification of a non-equilibrium effect will contribute to understanding the formulation of the turbulence model, as well as gaining new knowledge in the high compressibility flow pattern. It is necessary to note that along with the direct inclusion of density in production/dissipation terms in the two-equation turbulence model, its nonlinear change (gradients) should be taken into account.

Funding: This research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan by grant No. BR20281002 “Fundamental research in mathematics and mathematical modeling”.

Keywords: supersonic multispecies jet injection, k-ω turbulence model, non-equilibrium (generation/dissipation rate) effect, shock wave, Essentially Non-Oscillatory (ENO) scheme.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q30, 76J20

References

[1] Sarkar S. The pressure–dilatation correlation in compressible flows, Phys. Fluids A, *Fluid Dyn.*, (1992), 12.

[2] Wilcox D.C. Dilatation-dissipation corrections for advanced turbulence models, *AIAA J.*, (1992), 30.

[3] Chen Y.S., Kim S.W. Computation of Turbulent Flows using an Extended $k-\omega$ Turbulence Closure Model, *Washington, D.C.: National Aeronautics and Space Administration*, (1987), 26.

[4] Rogers R.C. A study of the mixing of hydrogen injected normally to a supersonic airstream, *NASA Report TN D-6114.*, (1971), 53.

Solutions of the nonregular boundary value problems for the parabolic equations with the variable coefficients

G.I. BIZHANOVA

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: galina_math@mail.ru

We study the second boundary value problem and the problem with the time derivative in the boundary condition for the parabolic equations with the variable coefficients and with the incompatible initial and boundary data. These problems for the heat equation with constant coefficients were considered in [1], [2]. There were found their singular solutions in the explicit forms, which are appeared due to the incompatibility of the initial and boundary data.

We prove that the solutions of the considered problems are the sums of the singular and regular functions, the singular solutions belong to the weighted Hölder spaces with the weight $t^{1/2}e^{\delta_0^2\frac{x^2}{t}}$, where δ_0^2 is the definite value, x in the distant between the interior point of the domain and boundary $x=0$, and regular solutions belong to the classical Hölder space.

Funding: The author is supported by the grant AP14871251 of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan.

Keywords: parabolic equation, incompatibility of the initial and boundary data, weighted Hölder space, existence, uniqueness, estimates of the solution.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K20, 35B65, 35A20, 35B25

References

[1] Bizhanova G. I. Solution in the Hölder space of the boundary value problems for the parabolic equations wirh incompatibility of the initial and boundary data, *Contamporary Mathematics. Fundamental Directions*, **36**, (2010), 12–23.

[2] Bizhanova G. I., Shaimardanova M. N. Solution of the nonregular problem for the heat equation with the time derivative in the boundary condition, *Mathematical Journal*, **16**, (2016), 35–57.

Singular solution of the two phase problem for the heat equations with incompatible initial and boundary data

G.I. BIZHANOVA

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: galina_math@mail.ru

The nonlinear free boundary problem with an unknown boundary of Stefan type is reduced after coordinate non degenerate mapping, substitution of the unknown functions and some transformations to the linearized problem, on the base of its solving there is the solution of the model conjugation two phase problem for the heat equations.

We consider this model problem. We apply the Laplace transform to obtain the solutions of the axillary problems and with the help of these solutions we find the solution of the model problem in the explicit form. The found solutions are singular in the vicinity of the boundary and initial time and they are expressed via the repeated integrals of probability [1].

Funding: The author is supported by the programm of the fundamental scientific investigations BR20281002 of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan.

Keywords: parabolic equation, incompatibility of the initial and boundary data, solution in the explicit form.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K20, 35B65, 35A20, 35B25

References

[1] Abramowitz M., Stegun I. *Handbook of mathematical functions*, "Nauka", Moscow (1979).

Control problem for a pseudo-parabolic equation with Neumann boundary condition

Farrukh DEKHKONOV, Raykhona UMAROVA

Namangan State University, Namangan, Uzbekistan
E-mail: f.n.dehqonov@mail.ru

Consider the pseudo-parabolic equation in the domain $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < l, \quad t > 0\}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

with boundary conditions

$$u_x(0,t) = -\mu(t), \quad u_x(l,t) = 0, \quad t > 0, \tag{2}$$

and initial condition

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l, \tag{3}$$

where $\mu(t)$ — is a control function.

The equation (1) was called the pseudo-parabolic equation by "R.E. Showalter and T.W. Ting" (see, [1]) from the following considerations: a) correctly posed initial boundary value problems for a parabolic equation are also correctly posed for equation (1), b) in some cases, the solution of the initial-boundary value problem can be obtained as the limit of the corresponding solution of the problem for pseudo-parabolic equations.

Definition 1. If function $\mu(t) \in W_2^1(\mathbb{R}_+)$ satisfies the conditions $\mu(0) = 0$ and $|\mu(t)| \le 1$, we say that this function is an *admissible control*.

Consider the function $\rho(x) \in W_2^2[0,l]$ satisfying the conditions

$$\rho'(x) \leq 0, \quad \rho''(x) \geq 0, \quad \frac{1}{l}\int\limits_0^l \rho(x)\,dx = 1.$$

Boundary Control Problem. For the given function $\theta(t)$ Problem A consists looking for the admissible control $\mu(t)$ such that the solution $u(x,t)$ of the initial-boundary problem (1)-(3) exists and for all $t \geq 0$ satisfies the equation

$$\int\limits_0^l \rho(x)\,u(x,t)\,dx = \theta(t). \tag{4}$$

The tasks of impulse control, i.e. the case of delta-like distribution for systems with distributed parameters was the subject of study in works [2, 3]. More control problems for parabolic type equation have been considered in works [4-6].

Denote by $W(M)$ the set of function $\theta \in W_2^2(-\infty,+\infty)$, $\theta(t) = 0$ for $t \leq 0$ which satisfies the condition $\|\theta\|_{W_2^2(R_+)} \leq M$.

Theorem 1. There exists $M > 0$ such that for any function $\theta \in W(M)$ the solution $\mu(t)$ of the equation (5) exists, and satisfies condition

$$|\mu(t)| \ \leq \ 1.$$

Keywords: pseudo-parabolic equation, boundary problem, control function, Laplace transform.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K70, 35K05

References

[1] Showalter R.E., Ting T.W. Pseudoparabolic partial differential equations, *SIAM J. Math. Anal.*, **1** (1970)

[2] Lyashko S.I. On the solvability of pseudo-parabolic equations, *Mat.* , **9** (1985), 71–72.

[3] White L.W. Point control approximations of parabolic problems and pseudo-parabolic problems, *Appl. Anal.*, **12** (1981), 251-263.

[4] Albeverio S., Alimov Sh.A. On a time-optimal control problem associated with the heat exchange process, *Applied Mathematics and Optimization*, **57**:1 (2008), 58–68.

[5] Alimov Sh.A. On a control problem associated with the heat transfer process, *Eurasian. Math. J.*, **1** (2010), 17–30.

[6] Dekhkonov F.N. On a boundary control problem for a pseudo-parabolic equation, *Communications in Analysis and Mechanics*, **15** (2023), 289-299.

[7] Tikhonov A.N., Samarsky A.A. *Equations of Mathematical Physics*, Nauka, Moscow, 1966.

Finite-Time Synchronization for Fuzzy Shunting Inhibitory Cellular Neural Networks

Zhangir NURIYEV[1,a], Alfarabi ISSAKHANOV[1,b], Jürgen KURTHS[2,c], Ardak KASHKYNBAYEV[1,3,d]

[1]*Department of Mathematics, Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan*
[2]*Potsdam Institute for Climate Impact Research, Potsdam 14473, Germany*
[3]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*zhangir.nuriyev@nu.edu.kz*, [b]*alfarabi.issakhanov@nu.edu.kz*, [c]*kurths@pik-potsdam.de*, [d]*ardak.kashkynbayev@nu.edu.kz*

Finite-time synchronization is a critical problem in the study of neural networks. The primary objective of this paper is to design controllers for various models based on Fuzzy Shunting Inhibitory Cellular Neural Networks (FSICNNs) and find out sufficient conditions for systems' solutions to reach synchronization in finite time. In particular, we prove the existence of finite-time synchronization for three basic FSICNN models that have not been studied before and suggest both controllers and Lyapunov functions that would yield the feasible convergence time between solutions. We explore models of delayed FSICNNs with and without inertial terms and FSICNNs with diffusion and without delays. Using criteria derived by means of the maximum-value approach, we give an upper bound to the time by which synchronization is guaranteed to occur in the three FSICNNs models. These results are supported by computer simulations showing the solutions' behaviour for different initial conditions of FSICNNs.

Funding: This research is funded by the Committee of Science of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR21882172) and in part by the Nazarbayev University, Kazakhstan under Collaborative Research Program Grant No. 11022021CRP1509.

Keywords: Finite-time synchronization, cellular neural networks,nonlinear partial differential equations, feedback controllers, Lyapunov function.

2010 Mathematics Subject Classification: 00A69, 92C42, 92B20, 34A07, 34D06

Mathematical model of the temperature of electrical contacts under the Kohler effect

S.N. KHARIN[1,4,a], A.A. KAVOKIN[2,4,b], S.A. KASSABEK[3,4,c]

[1]*Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan*
[2]*SDU University, Department of Mathematics, Almaty, Kazakhstan*
[3]*Nazarbayev University, Department of Mathematics, Astana, Kazakhstan*
[4]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a] *staskharin@yahoo.com*, [b]*kavokinalex@yahoo.com*, [c]*samat.kassabek@nu.edu.kz*

The problem that arose during the mathematical modeling of temperature changes in electrical contacts, when the current flow through the contact spot is determined by the tunnel effect (Kohler effect), is considered. The main feature in this case is the "nonclassical" boundary conditions in the contact plane. The mathematical formulation of the problem, [1], consists of equations that determine the temperature $T_i(r, z, t)$

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_i}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} \right) + q_i(r, z), \tag{1}$$

$$(0 < r < \infty, t > 0), i = 1 - \text{ anode }, -\infty < z < 0; i = 2 - \text{ cathode }, 0 < z < \infty;$$

With initial conditions $T_i(r, z, 0) = 0$ and boundary conditions:

$$\left.\frac{\partial T_i}{\partial r}\right|_{(r=0, r=\infty)} = 0; \quad \left.\frac{\partial T_i}{\partial z}\right|_{(z=\infty)} = 0; \tag{2}$$

On the surface $z = 0$, the conditions for matching temperatures $T_i(r, \pm 0, t)$ and heat flows are met

$$T_1(r, -0, t) - T_2(r, +0, t) = -k\frac{\partial T_2(r, +0, t)}{\partial z} \tag{3}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z}(r \le f, -0, t) - P_C = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z}(r \le f, +0, t) + P_A \equiv \mu(r, t) \tag{4a}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z}(r > f, -0, t) = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z}(r > f, +0, t) \equiv \mu(r, t) \tag{4b}$$

where: P_C, P_A are heat fluxes, in accordance with Kohler effect, λ_1, λ_2 are thermal conductivity coefficients of the cathode and anode material, respectively. $\mu(r,t)$-in general cases $\{\lambda_1 \neq \lambda_2)$ is an unknown function.

Thus, to determine the contacts temperature, it is necessary to solve equations (1) with initial and boundary conditions (2), and conditions (3), $(4a, 4b)$ describing the Kohler effect. The solution to this problem, which reduces to a system of dual integral equations for $\mu(r,t)$, was obtained using the Laplace, Fourier and Hankel integral transforms, [2]. Then, using Tauberian theorems, asymptotic representations of the solution were obtained for $t \to \infty$.

Funding: The authors were supported by the grant no. AP19675480 "Problems of heat conduction with a free boundary, arising in the simulation of switching processes in electrical devices" of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

2010 Mathematics Subject Classification: 80A20, 31A10

References

[1] S.N.Kharin *Mathematical models of phenomena in electrical contacts*, Ershov, Institute of Informatics systems of SB RAS, (2017).

[2] A.V. Manzhirov, A.D. Polyanin. *Handbook of Integral Equations. Solution methods. M. Factorial*, (2000).

Surface at a constant distance from the edge of regression on a transfer surface of type 1 in an isotropic space

Gulnoza KHOLMURODOVA

Tashkent State Transport University, Tashkent,Uzbekistan
E-mail: xolmurodovagulnoza3@gmail.com

It is known that the transfer surface of Type 1 is given by the following equation:

$$\bar{r}(u,v) = u\bar{i} + v\bar{j} + (f(u) + g(v))\bar{k}, \tag{1}$$

This surface is uniquely projected onto the Oxy plane. Transfer curves are $\alpha(u) = (u, 0, f(u))$ and $\beta(v) = (0, v, g(v))$. Suppose that expression (1) is a vector equation of the surface F.

Definition.Let F and F^h be two admissible surfaces in isotropic space. $\bar{n}_P$ be an isotropic unit normal vector at a point P of the surface F . Take a unit vector at a point P

$$\bar{m}_P = d_1\bar{r}_u + d_2\bar{r}_v + d_3\bar{n}_P, \tag{2}$$

where $\bar{r}_u$,$\bar{r}_v$ are tangent vectors at P and $d_1^2 + d_2^2 = 1$. If there is a function h defined by

$$h : F \to F^h, h(P) = P + l\bar{m}_P, \tag{3}$$

where l is constant, then the surface F^h is called the surface at a constant distance from the edge of regression on F. F and F^h are shown by the pair (F, F^h). If $d_1 = d_2 = 0$,then we have $\bar{m}_P = l\bar{n}_P$ and so F and F^h are parallel surfaces.

In this paper, we will assume that $d_1 \neq 0$,$d_2 \neq 0$. Let $\bar{r}(u,v)$ be a parametrization of the transfer surface F . In this case, $\{\bar{r}_u, \bar{r}_v\}$ is non-isotropic orthonormal bases the surface F. Let $\bar{n}_P$ be a isotropic unit normal vector at a point P and $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$ be constant numbers. Then we can write a vector equation of F^h is

$$\bar{r}^h(u,v) = \bar{r}(u,v) + l\bar{m}(u,v), \tag{4}$$

Thus we obtain

$$\bar{r}^h(u,v) = \bar{r}(u,v) + l(d_1\bar{r}_u + d_2\bar{r}_v + d_3\bar{n}(0,0,1)). \tag{5}$$

If we take $ld_1 = \eta$,$ld_2 = \mu$, $ld_3 = \gamma$ where $\eta^2 + \mu^2 = l^2$. Thus we get

$$\bar{r}^h(u,v) = \bar{r}(u,v) + \eta\bar{r}_u + \mu\bar{r}_v + \gamma\bar{n}(0,0,1), \tag{6}$$

From this, surfaces at a constant distance from the edge of regression on a transfer surface of Type 1 is given by the following formula:

$$\bar{r}^h(u,v) = (u+\eta, v+\mu, (f(u)+\eta f'(u)) + (g(v)+\mu g'(v)) + \gamma), \tag{7}$$

M.E.Aydin classified transfer surfaces in the 3-dimensional isotropic space [1]. Surfaces at a constant distance from the edge of regression on a transfer surface Type 1 satisfying $\Delta^J x_i^h = \lambda_i x_i^h$ is given in the work of M.K.Karacan, A.Cakmak, S.Kiziltug, H.Es.[2] Sh.Ismoilov solved the problem of recovering of transfer surfaces for the given total curvature $K(u,v) = \varphi(u)\psi(v)$.[3] In this paper, vector equation of the surfaces at a constant distance from the edge of regression on a transfer surface Type 1 is found for the given total curvature for the case $K(u,v) = \rho(u)\lambda(v)$.

Theorem 1. *If the surfaces at a constant distance from the edge of regression on a transfer surface Type 1 is given by the vector equation (7) and the total curvature of this surface is $K(u,v) = \rho(u)\lambda(v)$, then we get the following:*
$\bar{r}^h(u,v) = (u+\eta, v+\mu, \tau\int[\int\rho(u)du]du + \frac{1}{\tau}\int[\int\lambda(v)dv]dv + \eta(C_1u+C_2) + \mu(\tilde{C}_1v+\tilde{C}_2)+\gamma)$
where, $\tau, C_1, C_2, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2-$ constant numbers.

Keywords:transfer surface,total curvature,surface at a constant distance from the edge of regression on a transfer surface.

References

[1] Aydin M.E. Classification of translation surfaces in isotropic geometry with constant curvature, *Ukrainian Mathematical Journal*, **72**:3 (2020), 329–347.

[2] Karacan M.K., Cakmak A.,Kiziltug S., Es H. Surfaces generated by translation surfaces of Type 1 in I_3^1, *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics*, **16**:1 (2021), 123–135.

[3] Ismoilov Sh.Sh. Geometry of the Monge-Ampere equation in an isotropic space, *Uzbek Mathematical Journal*, **65**:2 (2022), 66–77.

Initial-boundary value problem for a time-fractional wave equation with the Prabhakar derivative on a star graph

Jonibek KHUJAKULOV[a], Shahnoza TURAPOVA[b]

Termez state university, Termez, Uzbekistan
E-mail: [a]jonibek.16@mail.ru, [b]shahnozaturapova02gmail.com

We consider a star graph $\Gamma = V \cup E$ consisting of a finite set of vertices (nodes) $V = \{\nu_k\}_{k=0}^{j}$ and a finite set of edges $E = \{B_k\}_{k=1}^{j}$ connecting these nodes.
Let us determine the coordinates x_k on the each edge B_k of the graph using isometric mapping of these edges onto the intervals $(0, l_k)$such that $0 < l_k < +\infty$, $k = 1, 2, ..., j$. One should notice that the points of a metric graph Γ are not only its vertices but all intermediate points $x_k$on the edges as well. Thus, when we speak about functions on the graph Γ we consider them as defined along the edges and vertices (rather than at the vertices only, as in discrete models). Hence, we define a coordinate system on each edge $B_k$of the star graph by taking ν_0 as the origin and $x \in (0, l_k)$ as the coordinate.
We consider the following fractional differential equations involving regularized Prabhakar derivative on the each edge of the above defined graph Γ:

$${}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} u^{(k)}(x,t) - u_{xx}^{(k)}(x,t) = f^{(k)}(x,t), \quad (x,t) \in (B_k \times (0,T)), k = \overline{1,j}, \tag{1}$$

where ${}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(\cdot)$ represents regularized Prabhakar fractional order derivative [1], $\alpha > 0$, $1 < \beta < 2$, $\gamma, \delta \in R$, $f^{(k)}(x,t)$ are given functions.
Problem To find a solution of (1) in the domain $B_k \times (0,T)$, satisfying the following conditions: vertex conditions

$$u^{(1)}(0,t) = u^{(2)}(0,t) = ... = u^{(j)}(0,t), \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$u_x^{(1)}(0,t) + u_x^{(2)}(0,t) + ... + u_x^{(j)}(0,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

boundary conditions

$$u^{(k)}(l_k, t) = 0, \;\; t \in [0,T], \; k = \overline{1,j}, \tag{4}$$

and initial condition

$$u^{(k)}(x,0) = \varphi^{(k)}(x), \;\; u_t^{(k)}(x,0) = \psi^{(k)}(x) x \in B_k, \; k = \overline{1,j}. \tag{5}$$

$\varphi^{(k)}(x)$ and $\psi^{(k)}(x)$ are sufficiently smooth given functions and satisfy conditions (2)- (4). The key tool for this investigation is a method of separation of variables for the equations (1) (see [2]). Using properties of special functions, namely bi-variate Mitag-Leffler function $E_2(x,y)$ [3], we prove the uniform convergence of the obtained Fourier series. The uniqueness of the solution of the problem is proved using a priori estimation (see [4]).

Keywords: Prabhakar derivative, bi-variate Mittag-Leffler function, a priori estimate, star metric graph, Initial-boundary value problem.

2010 Mathematics Subject Classification: 35R11

References

[1] Dovidio M., Polito F. Fractional diffusion telegraph equations and their associated stochastic solutions, *Theory of Probability and its Applications* , **62**:4 (2018), 552–574. [arXiv: 1307.1696 (2013)]

[2] Karimov E. T, Tokmagambetov N. and Toshpulatov M. On a Mixed Equation Involving Prabhakar Fractional Order Integral-Differential Operators, *Trends in Mathematics*, **2**: (2024), 221—230.

[3] Garg M., Manohar P. and Kalla S. L. A Mittag- Leffler type function of two variables, *Transforms and Special Functions*, **24**:11 (2013), 934–944.

[4] Khujakulov J. R. Initial-boundary value problem for a time fractional differential equation with the Prabhakar derivative on a star graph, *Bulletin of the Institute of Mathematics*, **6**:2 (2023), 20–30.

Boundary value problem with a load in the form of a fractional integral

Minzilya KOSMAKOVA[a], Danna AKHMANOVA[b], Kamila IZHANOVA[c]

Karaganda Buketov University, Karaganda, Kazakhstan
E-mail: [a]svetlanamir578@gmail.com, [b]danna.67@mail.ru, [c]kamila.izhanova@alumni.nu.edu.kz

In a domain $Q = \{(x,t) : x > 0, t > 0\}$ we consider a BVP

$$u_t - u_x x + \lambda I_{0x}^{\beta} u(x,t)\Big|_{x=\gamma(t)} = f(x,t), \tag{1}$$

$$u\,(x,0) = 0, \quad u\,(0,t) = 0, \tag{2}$$

where λ is a complex parameter,

$$I_{0x}^{\beta} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x \frac{u(\xi,t)}{(x-\xi)^{1-\beta}}\, d\xi$$

is a fractional Riemann-Liouville integral of an order β, $0 < \beta < 1$,
$\gamma(t)$ is a continuous increasing function, $\gamma(0) = 0$ or $\gamma(t)$ is a positive *const*.

So we assume that the solution $u(x,t)$ belongs to the class

$$u(x,t) \in L_1\,(x \geq 0)\,, \tag{3}$$

The right side of the BVP equation vanishes at $t < 0$ and belongs to the class

$$f(x,t) \in L_\infty\,(A) \cap C\,(B)\,, \tag{4}$$

where $A = \{(x,t)\,|\,x > 0,\ t \in [0,T]\}$, $B = \{(x,t)\,|\,x > 0,\ t \geq 0\}$, $T - const > 0$.

We also assume

$$f_1(x,t) = \int_0^t \int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)\, f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau \in L_1(x \geq 0)\,. \tag{5}$$

These classes are determined from the natural requirement for the existence and convergence of improper integrals arising in the study of the problem.

Lemma 1. *Boundary value problem (1)–(2) is equivalently reduced to a Volterra integral equation of the second kind.*

The solution of problem (1)–(2) can be represented by formula [1]:

$$u(x,t) = -\lambda \int_0^t \int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)\mu(\tau)d\xi d\tau + f_1(x,t), \tag{6}$$

where

$$\mu(t) = I^\beta_{0x} u(x,t)\Big|_{x=\gamma(t)},\ 0 < \beta < 1, \tag{7}$$

and the function

$$f_1(x,t) = \int_0^t \int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

exists and is bounded by condition (4) and belongs to class (5). By assumption, functions $f_1(x,t)$ and $u(x,t)$ satisfy inclusions (3) and (5). Now we apply fractional integral operator of an order β, $0 < \beta < 1$ on representation (6) with respect to the variable x. Then we put $x = \gamma(t)$ [2]. On the left side, we get the function $\mu(t)$ according to formula (7).

After calculating the integral we get the integral equation

$$\mu(t) + \lambda \int_0^t K_\beta(t,\tau)\mu(\tau)d\tau = f_2(t), \tag{8}$$

where

$$K_\beta(t,\tau) = \frac{(\gamma(t))^{\beta+1}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}\Gamma(\beta+2)}\, {}_2F_2\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{\beta+2}{2}, \frac{\beta+3}{2}; -\frac{(\gamma(t))^2}{4(t-\tau)}\right),$$

$$f_2(t) = I^\beta_{0x} f_1(x,t)\Big|_{x=\gamma(t)},$$

${}_2F_2(a_1, a_2; b_1, b_2; z)$ is a convergent generalized hypergeometric series for all finite z.

Lemma 2. *For BVP (1)–(2) there is continuity in the order β in the loaded term of Eq. (1).*

The lemma is proved by checking the limit cases of the fractional integral's order in the loaded term of Eq. (1).

Theorem. *Let the conditions (4) and (5) be satisfied for the function $f(x,t)$, the function $\mu(t) \in C([0;T])$ is the solution of integral equation (8) with the right hand side $f_2(t) \in C([0;T])$. Then BVP (1)–(2) has the only solution if $\gamma(t) \sim t^\omega$ (near the point $t = 0$), $\omega > 0$ and $0 < \beta < 1$.*

Keywords: fractional Riemann-Liouville integral, Volterra integral equation, solvability.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K05, 45D05

References

[1] Polyanin A.D. (2002). *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*, Chapman and Hall/CRC, New York-London (2002).

[2] Kosmakova M.T., Ramazanov M.I., Kasymova L.Zh. To Solving the Heat Equation with Fractional Load, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **42**:12 (2021), 2854-2866. DOI: 10.1134/ S1995080221120210.

Solution of a nonlocal boundary value problem for a nonlinear third-order partial differential equation

A.M. MANAT[a], N.T. ORUMBAYEVA[b]

Karaganda University of the name of academician E.A. Buketov, Karagandy, Kazakhstan
E-mail: [a]orumbayevanurgul@gmail.com , [b]aluamanat5@gmail.com

This paper proposes an algorithm [1-3] for finding a solution to a nonlocal boundary value problem for a nonlinear third-order partial differential equation. Conditions for the convergence of the algorithms are established that simultaneously ensure the existence and isolation of a solution to a nonlinear nonlocal boundary value problem.

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} - \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (x,y) \in \Omega = [0,X] \times [0,Y], \tag{1}$$

$$w(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,X], \tag{2}$$

$$w(0,y) = \gamma(y) w(X,y) + \psi(y), \quad y \in [0,Y], \tag{3}$$

$$\frac{\partial w(0,y)}{\partial x} = \theta(y), \quad y \in [0,Y], \tag{4}$$

here α, β-const, function $\varphi(x)$ continuously differentiable on $[0,X]$, functions $\psi(y), \theta(y), \gamma(y)$ are continuously differentiable on $[0,Y]$, $\gamma(y) \neq 1$.

Theorem 1. Let the following conditions be satisfied:

a) the function $\varphi(x)$ is continuously differentiable on $[0,X]$,

b) the functions $\gamma(y), \psi(y), \theta(y)$ are continuously differentiable on $[0,Y]$, $\gamma(y) \neq 1$,

c) $q = \alpha Y + \frac{X^2 Y \gamma}{1-\gamma} + \frac{X^2 \gamma}{1-\gamma} + \frac{X^2}{2} + \frac{X^2 Y l_2}{2} + X^2 Y \frac{l_2 \gamma}{1-\gamma} + (l_1 + \beta) XY < 1$,

d) $\frac{\sigma}{1-q} \frac{\gamma}{1-\gamma} XY^2 < r_1, \quad \frac{qY\sigma}{1-q} < r_2$,

where $\gamma = \max\limits_{y \in [0,Y]} \|\gamma(y)\|$, $\psi = \max\limits_{y \in [0,Y]} \|\psi(y)\|$, $\theta = \max\limits_{y \in [0,Y]} \|\theta(y)\|, \alpha, \beta - const$

$$\sigma = \theta' + \alpha \max_{x \in [0,X]} \|\varphi'(x)\| + \alpha\theta + X\left(\frac{\gamma'}{[1-\gamma]^2}\Big[\varphi(X) - \varphi(0)\Big] + \frac{\psi'}{[1-\gamma]^2}\right) +$$

$$+ X \max_{x \in [0,X]} \|\varphi(x)\| \max_{x \in [0,X]} \|\varphi'(x)\| + X\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}[\varphi(X) - \varphi(0)] + \frac{\psi}{1-\gamma}\right) \max_{x \in [0,X]} \|\varphi'(x)\| +$$

$$+ \beta \int\limits_0^X \varphi'(x) dx,$$

then the sequence of functions $w^{(k)}(x,y), k = 1, 2, ...,$ is contained in $S(w^{(0)}(x,y), r_1 + r_2)$ converges to the unique solution $w^*(x,y)$ of problem (1)-(4) in $S(w^{(0)}(x,y), r_1 + r_2), r_1, r_2 - const$, and the inequality

$$\|w^*(x,y) - w^{(k)}(x,y)\| \leq \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{X^2 Y^2}{2} \sum_{i=k+1}^{\infty} q^i \sigma + Y \sum_{i=k}^{\infty} q^i \sigma.$$

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grants No. AP23488729, 2024-2026).

Keywords: Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation, differential equations with partial derivatives, algorithm, approximate solution.

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 39A10, 39A70; Secondary 47B39, 26D15

References

[1] Dzhumabayev D. S., *Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation*, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 29:1 (1989), 34-46. https://doi.org/10.1016/0041-5553(89)90038-4

[2] Asanova A. T., Dzhumabaev D. S., *Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 402:1 (2013), 167-178. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.01.012

[3] Manat A.M., Orumbayeva N.T., *On one approximate solution of nonlocal boundary value problem for the Benjamin-Bona-Mahony equation*, *Bulletin of the Karaganda University Mathematics Series*, 2(110), (2023), 84-92. http://dx.doi.org/10.31489/2023M2/84-92

Non-classical one-phase Stefan problem with heating effect of current flow in gradient of temperature

Targyn NAURYZ

Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan E-mail: targyn.nauryz@gmail.com,

This paper introduces a mathematical model designed to provide a thorough understanding of the thermal phenomena occurring during the arc erosion of enclosed electrical contacts, initiated by the sudden explosion of micro-asperities with The heating effect resulting from the flow of electrical current in gradient of temperature. The phenomenon encompasses vaporization and liquid zones, and the distribution of temperature describing with a generalized heat equation with the heating influence arising from current flow in temperature gradients and the effect of Joule heating.

The mathematical model of the liquid phase can be considered as

$$c(\theta)\gamma(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{1}{z^\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda(\theta)z^\nu\frac{\partial\theta}{\partial z}\right] + \sigma_\theta\rho(\theta)\frac{I(t)}{\pi z^\nu}\frac{\partial\theta}{\partial z} + \rho(\theta)\frac{I^2(t)}{\pi^2 z^{2\nu}}, \tag{1}$$

$$\alpha(t) < z < \beta(t), \quad 0 < t < t_a, \quad \nu > 1,$$

$$\theta(\alpha(t), t) = \theta_b, \ \ t > 0, \tag{2}$$

$$\theta(\beta(t), t) = \theta_m, \ \ t > 0, \tag{3}$$

$$\frac{P}{\alpha(t)} = -\lambda(\theta(\alpha(t), t))\frac{\partial\theta}{\partial z}\bigg|_{z=\alpha(t)} + L_b\gamma_b\frac{d\alpha}{dt}, \ \ t > 0, \tag{4}$$

$$-\lambda(\theta(\beta(t), t))\frac{\partial\theta}{\partial z}\bigg|_{z=\beta(t)} = L_m\gamma_m\frac{d\beta}{dt}, \ \ t > 0, \tag{5}$$

$$\theta(z, 0) = \theta_m. \tag{6}$$

Solution of the problem based on similarity transformation which allow us to reduce problem to ordinary differential equation and integral equation of Volterra type. The aim of this work to attempt to prove existence and uniqueness of the solution of the problem (1)-(6).

Funding: The research is partially sponsored by the grant project AP19675480 "Problems of heat conduction with a free boundary arising in modeling of switching processes in electrical devices" and partially supported by SSH2023029 "Improved Hardy-type inequalities".

Keywords: Stefan problem, nonlinear thermal coefficients, generalized heat equation, similarity transformation, fixed point theorem.

2010 Mathematics Subject Classification: 80A22, 80A23, 35C11

References

[1] Kharin S.N. *Mathematical models of phenomena in electrical contacts*, A.P.Ershov Institute of Informatics Systems SB RAS, Novosibirsk (2017).

[2] Kharin S.N., Nauryz T.A. The two-phase Stefan problem for generalized heat equations, *News of the national academy of sciences of the republic of Kazakhstan*, **2**:330 (2020), 40–49.

[3] Bollari J., Briozzo A.C., Kharin S.N., Nauryz T.A. Mathematical model of thermal phenomena of closure electrical contact with Joule heat source and nonlinear thermal coefficients, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **158** (2024), 104568

Well-posedness of the inverse problem for a time-fractional integro-differential equation

A.A. RAHMONOV

Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Science
E-mail: araxmonov@mail.ru

Let H be a separable Hilbert space and $A : H \to H$ be an arbitrary unbounded positive selfadjoint operator in H and A^{-1} is a compact operator

In this work, we consider the time-fractional integro-differential diffusion equation:

$$\partial_t^\alpha u + Au = \int_0^t k(t-s)u(s)ds + f(t), \quad t \in (0,T), \tag{1}$$

where $T > 0$ is a fixed final time, and $\alpha \in (0,1)$ is fractional order of the time derivative. The fractional derivative ∂_t^α denotes the Gerasimov–Caputo fractional, which is defined as:

$$(\partial_t^\alpha y)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} y'(s)ds, \quad y \in W_1^1(0,T),$$

and $\Gamma(\cdot)$ is the Euler's Gamma function.

Problem 1. Given $k(t)$ and $f(t)$, find a function $u(t)$ such that $u(t) : [0,T] \to H$ satisfies the equation (1) and the final time condition

$$u(T) = \varphi, \tag{2}$$

where φ is a given element of H, $f : [0,T] \to H$ is a known function.

Problem 2. Given α, $f(t)$ and φ, determine a pair of functions $u : [0,T] \to H$ and $k : (0,T) \to \mathbf{R}^+$ satisfying the problem (1)-(2) and the additional condition

$$\Phi[u(t)] = h(t), \qquad t \in [0,T]; \tag{3}$$

where $h : [0,T] \to \mathbf{R}$ is a given function, $\Phi : D(\Phi) \subset H \to \mathbf{R}$ is a known linear bounded functional, where $D(\Phi) = \{u \in H : Au \in H\}$.

Throughout this work, we set $0 < \varepsilon < 1$ and make the following assumptions.

(C1) $\varphi \in D(A^{\varepsilon+1})$, $f \in C([0,T]; D(A^\varepsilon)) \cap C^1([0,T]; H)$;

(C2) $h(T) = \Phi[\varphi]$, $\Phi[Au](0) = \Phi[f](0)$;

(C3) $\partial_t^\alpha h \in C^1[0,T]$ and $\partial_t^\alpha h(0) = 0$ and satisfy the condition $h(0) \neq 0$;

(C4) $\Phi : \{\lambda_m \Phi[e_m]\} \in l^2(\mathbf{N})$, where $l^2(\mathbf{N})$ is the space of square summable sequences.

Theorem 1.5. Under hypotheses (C1)-(C4), there exists a unique solution $(u,k) \in Y_0^T$ of the inverse problem (1)-(3) for any $T > 0$.

A diffusive competition model with nonlinear convection term and free boundary

M. S. RASULOV[1,a], M. T. UMIRKHONOV[2,b]

[1] *Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan*
[2] *Tashkent State university of economics , Tashkent, Uzbekistan*
E-mail: [a]*rasulovms@bk.ru*, [b]*masudxonumirxonov@mail.ru*

The spread of new or invasive species is a central topic of ecology, and significant research has been devoted to better understanding the nature of such spread. Environmental problems require the use of a whole hierarchy of models capable of describing not only different levels of organization of systems, but also the interaction between these levels. However, significant advances have been made in species invasion studies through frontal spread studies (see [1], [2]).

In this article, we study a diffusive competitive system with free boundary:

$$u_t - d_1 u_{xx} + m_1 v_x u_x = u\left(a_1 - b_1 u - c_1 v\right), \quad 0 < t \le T, \quad 0 < x < s(t),$$

$$v_t - d_2 v_{xx} + m_2 u_x v_x = v\left(a_2 - b_2 u - c_2 v\right), \quad 0 < t \le T, \quad 0 < x < l,$$

$$u\left(0, x\right) = u_0\left(x\right), \quad 0 \le x \le s\left(0\right) \equiv s_0,$$

$$v\left(0, x\right) = v_0\left(x\right), \quad 0 \le x \le l,$$

$$u_x\left(t, 0\right) = 0, \quad 0 \le t \le T,$$

$$u\left(t, s\left(t\right)\right) = 0, \quad 0 \le t \le T,$$

$$s'\left(t\right) = -\mu u_x\left(t, s\left(t\right)\right), \quad 0 \le t \le T,$$

$$v_x\left(t, 0\right) = 0, \quad 0 \le t \le T,$$

$$v_x\left(t, l\right) = 0, \quad 0 \le t \le T,$$

where $s\left(t\right)$ is a free boundary to be determined, s_0, μ, d_i, m_i, a_i, b_i, c_i (i=1,2) are given positive constants, and the initial functions $u_0(x)$ and $v_0(x)$ satisfies

$$u_0\left(x\right) \in C^2\left(\left[0, s_0\right]\right), \quad 0 < u_0\left(x\right) \le \frac{a_1}{b_1} \quad \text{in} \quad \left[0, s_0\right), \quad u_0'\left(0\right) = u_0\left(s_0\right) = 0,$$

$$v_0\left(x\right) \in C^2\left(\left[0, l\right]\right), \quad 0 < v_0\left(x\right) \le \frac{a_2}{c_2} \quad \text{in} \quad \left(0, l\right), \quad u_0'\left(0\right) = 0.$$

Keywords: free boundary, reaction-diffusion system, parabolic equation, aprior bounds, existence and uniqueness.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

References

[1] Yihong Du, Zhgui Lin. The diffusive competition model with a free boundary: invasion of a superior or inferior competitor, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B.*, **19**:10 (2014), 3105-3132.

[2] Yihong Du. Propagation and reaction–diffusion models with free boundaries, *Bulletin of Mathematical Sciences*, **12**:1 (2022), 56 pages.

A multi-dimensional diffusion coefficient determination problem for the time-fractional equation

Z.A. SUBHONOVA

V.I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Bukhara, Uzbekistan
E-mail: subhonovaziyoda5@gmail.com.

We consider the following n-dimensional anomalously diffusive equation with convolution integral:

$$\left({}^C\mathcal{D}_t^\alpha u\right)(x,t) - \triangle u(x,t) = \int_0^t k(x',\tau)u(x,t-\tau)d\tau + f(x,t), \quad (x,t) \in (0,T], \tag{1}$$

the solution of which satisfies the initial conditions

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

where $1 < \alpha < 2$, $\mathcal{D}_t^{(\alpha)}-$ Caputo fractional derivative , that is

$$(\mathcal{D}_t^{(\alpha)}u\big)(x,t) := (I_t^{2-\alpha})u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^t \frac{u_{\tau\tau}(x,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-1}}d\tau$$

$x' = (x_1, ..., x_{n-1})$. In (1) and (2) $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x,t)$, $k(x',t)$ are given smooth functions.

We will study problem of finding the function $u(x,t) \in D_T : \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T]\}$.

We obtain the integral equation for solution to the problem (1)-(2)

$$u(x,t) = u_0(x,t) - \int_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} Y(x-\xi,t-\tau)\int_0^\tau k(\xi',\zeta)u(\xi,\tau-\zeta)d\zeta d\xi d\tau, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \tag{3}$$

where

$$\begin{aligned} u_0(x,t) := &\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_1(x-\xi,t)\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_2(x-\xi,t)\psi(\xi)d\xi \\ &+ \int_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} Y(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau. \end{aligned} \tag{4}$$

Where the triple $\{Z_1(x,t), Z_2(x,t), Y(x,t)\}$ is the fundamental solution of the n-dimensional diffusion-wave equation with Caputo fractional derivative in terms of the H-Fox function:

$$Z_j(x,t) = \frac{t^{j-1}}{(\pi)^{\frac{n}{2}}|x|^n} H_{1,2}^{2,0}\left[\frac{|x|^2}{4t^\alpha}\left|{}^{(j,\alpha)}_{(\frac{n}{2},1),(1,1)}\right.\right], \quad j = 1,2,$$

$$Y(x,t) = \frac{1}{(\pi)^{\frac{n}{2}}|x|^n} t^{\alpha-1} H_{1,2}^{2,0}\left[\frac{|x|^2}{4t^\alpha}\left|{}^{(\alpha,\alpha)}_{(\frac{n}{2},1),(1,1)}\right.\right]. \tag{5}$$

Lemma. *If $k(x',t) \in C[0,T], f(x,t) \in C(H^l(\mathbb{R}),[0,T]), \varphi(x) \in H^l(\mathbb{R}), \psi(x) \in H^l(\mathbb{R}), l \in (0,1)$, then there exists a unique solution of the problem (1)-(2) such that $u(x,t) \in C^{2,\alpha}(D_T)$.*

Funding: There are no funders to report for this submission.

Keywords: Gerasimov-Caputo fractional derivative, Fox H-function, Mittag-Leffler function, integral equation.

2010 Mathematics Subject Classification: 35R11, 35R30, 35E15, 42A38, 44A10, 45D05

References

[1] Kilbas. A. A., Srivastava. H. M., and Trujillo. J. J. *Theory and Application of Fractional Differential Equations*, *North-Holland Mathematical Studie*, (2006).

[2] Kochubei. A. N. *Asymptotic properties of solutions of the fractional diffusion-wave equation* Fract. Calc. Appl. Anal, **17**, (2014), 881–896.

[3] Durdiev. D. K., Rahmonov. A. A. *A multidimensional diffusion coefficient determination problem for the time-fractional equation,* Lobachevskii J. Math.*, (2022), 2250–2263.*

[4] Fox. C. *Theory and Application of Fractional Differential Equations*, *Trans. Am. Math. Soc.*, (1961), 395–398.

[5] Subhonova Z.A., Rahmonov A.A. *Problem of Determining the Time Dependent Coefficient in the Fractional Diffusion-Wave Equation*, *Lobachevskii J. Math*, (2021).

4 Алгебра, математическая логика

Руководители:	член-корр. НАН РК Байжанов Б.С.
	академик НАН РК Джумадильдаев А.С.
Секретарь:	Умбетбаев О.А.

Квазимногообразие SP(L6)

А.О. БАШЕЕВА[1,a], М.В. ШВИДЕФСКИ[2,b]

[1]*ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан*
[2]*Институт математики СО РАН, Новосибирск, Россия*
E-mail: [a]*basheyeva3006@gmail.com*, [b]*m.schwidefsky@g.nsu.ru*

Мы доказали, что категория полных биалгебраических $(0,1)$-решеток, принадлежащих квазимногообразию $\mathbf{SP}(L6)$, порожденная конечной решеткой $L6$ с полными $(0,1)$-решеточными гомоморфизмами, рассматриваемая как конкретная категория, дуально эквивалентна категории так называемых $L6$-пространств с $L6$-морфизмами. Ранее в [1] установлено, что квазимногообразие SP(L6) образует (конечно базируемое) многообразие. С помощью метода, развитого в [2, 3],был найден некоторый конечный эквациональный базис для SP(L6). С помощью этого эквационального базиса мы доказываем, что категории L6 и B6 дуально эквивалентны.

Наше доказательство основано на подходе, предложенном В. Дзебяком в [2].

Funding: Первый автор поддержан Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант AP13268735).

Ключевые слова: Квазимногообразие, эквоциональный базис, категория, функтор, дуальная эквивалентность.

2010 Mathematics Subject Classification: 06B20, 08B05, 08C15

Литература

[1] Basheyeva A. O., Schwidefsky M.V., Sultankulov K. D. On the quasivariety SP(L6). I. An equational basis„ *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **19**:2 (2022), 902–911.

[2] Dziobiak W., Schwidefsky M.V. Categorical dualities for some two categories of lattices: An extended abstract, *Bull. Sec. Logic*, 51, no. 3 (2022), 329-344

Алгебры бинарных изолирующих формул для теорий гомоморфных произведений графов

Дмитрий ЕМЕЛЬЯНОВ

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия
E-mail: dima-pavlyk@mail.ru

Продолжается изучение алгебр бинарных изолирующих формул [2] для произведений графов.

Опеределение 1. *Гомоморфное произведение графов [1]* $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ с гомоморфизмом $f : V_1 \to V_2$ - это граф $H = (V_H, E_H)$, где:
множество вершин $V_H = \{(v, u) \mid v \in V_1, u \in V_2\}$;
множество ребер $E_H = E_1^H \cup E_2^H$, где $E_1^H = \{(v_1, u_1), (v_2, u_2)) \mid (v_1, v_2) \in E_1, f(v_1) = f(v_2)\}$, $E_2^H = \{(v, u_1), (v, u_2)) \mid v \in V_1, u_1, u_2 \in V_2, f(v) = u_1u_2\}$.

Описаны алгебры бинарных изолирующих формул [2] для теорий гомоморфных произведений. Рассмотрены умножения для графов правильных многорганников от отрезка до шестиугольника. Для них получены таблицы Кэли гомоморфных произведений. В некоторых вариациях гомомрфизма исходный граф может содержать симплекс, тогда алгебра будет изморфна алгебре симплексов[3].

Теорема 1. *Если T — теория гомоморфного произведения графов, $\mathfrak{M}$ — алгебра бинарных изолирующих формул теории T,то агебра $\mathfrak{M}$ будет изоморфна алгебре $\mathfrak{H}$.*

Funding: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 24-21-00096.

Ключевые слова: гомоморфные произведения, графы, налгебра бинарных изолирующих формул, теория моделей, произведение графов.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Литература

[1] David E. Roberson, Laura Mancinska. *Graph Homomorphisms for Quantum Players.* — 2012.

[2] Д. Ю. Емельянов, Б. Кулпешов, С. В. Судоплатов *Алгебры бинарных формул : монография* . - Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2023. - 330 с. - ISBN 978-5-7782-5028-4. - DOI: 10.17212/978-5-7782-5028-4.

[3] Емельянов Д. Ю. Алгебры распределений бинарных изолирующих формул для теорий симплексов. Algebra and Model Theory 11: Collection of papers. Novosibirsk: NSTU Publisher, 2017. – P. 66–74.

Об аксиоматизируемости наследственных классов моделей конечных и бесконечных языков и разрешимости их универсальных теорий

А.В. ИЛЬЕВ

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Омск, Россия
E-mail: artyom_iljev@mail.ru

В работе изучаются наследственные классы алгебраических систем языка $\mathrm{L} = \mathrm{L}_{\mathrm{fin}} \cup \mathrm{L}_{\infty}$, где $\mathrm{L}_{\mathrm{fin}} = \langle R_1, R_2, \ldots, R_m, = \rangle$ и $\mathrm{L}_{\infty} = \langle R_{m+1}, R_{m+2}, \ldots \rangle$, причем в L_{∞} число предикатов каждой местности конечно, все предикаты упорядочены по возрастанию своей местности и обладают свойством неповторения элементов. Класс L-систем называется *наследственным*, если он замкнут относительно подсистем. Характерными примерами таких классов являются наследственные классы гиперграфов с ребрами конечной мощности.

Гиперграфом называется пара $H = (V, E_H)$, где V — непустое множество элементов, называемых *вершинами*, а E_H — некоторое семейство непустых неупорядоченных подмножеств множества V, называемых *ребрами*. *Гиперграф с ребрами конечной мощности* — это алгебраическая система $H = \langle V, \mathrm{L}_H \rangle$, носитель которой V — непустое множество вершин, а язык $\mathrm{L}_H = \langle E_1, E_2, \ldots, = \rangle$ состоит из счетного множества предикатов, местность каждого из которых совпадает с его порядковым номером, и предиката равенства; каждый предикат $E_n(x_1, \ldots, x_n)$ означает, что элементы $x_1, \ldots, x_n$ лежат в ребре гиперграфа мощности n, т. е. предикаты $E_n(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяют условиям *неупорядоченности* и *неповторения элементов* для всех $n \in \mathbb{N}$:

(H1) $\forall x_1 \ldots \forall x_n \, [E_n(x_1, \ldots, x_n) \to \bigwedge\limits_{\pi} E_n(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n))]$, где π — любая перестановка $x_1, \ldots, x_n$;

(H2) $\forall x_1 \ldots \forall x_n \, [E_n(x_1, \ldots, x_n) \to \bigwedge\limits_{p \neq q} (x_p \neq x_q)]$.

Подгиперграфом называется гиперграф, полученный из исходного гиперграфа удалением вершин вместе со всеми инцидентными ребрами.

Алгебраическая система называется *запрещенной подсистемой* для некоторого класса L-систем, если она не содержится в качестве подсистемы ни в какой модели этого класса. Следующий критерий аксиоматизируемости необходим для указания связи между наследственными классами моделей языка L и их запрещенными подсистемами.

Теорема 1. *Наследственный класс* L*-систем аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он может быть определен в терминах конечных запрещенных подсистем. Используемая при этом аксиоматика состоит только из универсальных предложений.*

В частности, наследственный класс гиперграфов аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он может быть определен в терминах конечных запрещенных подгиперграфов.

Исследование разрешимости универсальных теорий и построение соответствующих алгоритмов является актуальной задачей при изучении свойств, присущих всем алгебраическим системам рассматриваемых классов. Следующий результат является обобщением раннее полученных результатов о графах [1], матроидах [2] и гиперграфах.

Теорема 2. *Универсальная теория произвольного аксиоматизируемого наследственного класса L-систем, множество минимальных запрещенных подсистем которого рекурсивно, разрешима.*

Funding: Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0003).

Ключевые слова: алгебраическая система, наследственный класс, универсальная теория, универсальная аксиоматизируемость, разрешимость.

2010 Mathematics Subject Classification: 03B25

Литература

[1] Ильев А.В. Разрешимость универсальных теорий и аксиоматизируемость наследственных классов графов, *Труды ИММ УрО РАН*, **22**:1 (2016), 100–111.

[2] Il'ev A.V., Il'ev V.P. On axiomatizability and decidability of universal theories of hereditary classes of matroids, *Journal of Physics: Conference Series*, **1210**, IOP Publishing Ltd (2019), 012056.

Свойства немультиразменности для класса семантических пар

М.Т. КАСЫМЕТОВА[1,a], Г.Е. ЖУМАБЕКОВА[2,b]

[1]*Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан*
[2]*Карагандинский индустриальный университет, Темиртау, Казахстан*
E-mail: [a]*mairusha@mail.ru*, [b]*galkatai@mail.ru*

Рассмотрим наследственную совершенную йонсоновскую теорию T в допустимом обогащении $\odot$ из [1], которая J-λ-стабильная [2], и понятие «тип p не форкуется над A» в смысле теоремы 8 [3]. Пусть p центральный тип из обогащения $\odot$ [1], A — йонсоновское подмножество C [2]. Тогда p J-стационарен над A, если:

1) p не ответвляется над A;

2) p имеет единственное непротиворечивое расширение, не ответвляющееся над A.

Если $p(\bar{x}_1)$, $q(\bar{x}_2)$ — полные $\exists$-типы над A, то p называется J-слабо ортогональным к q тогда и только тогда, когда $p(\bar{x}_1) \cup q(\bar{x}_2)$ является $\exists$-полным типом (над A).

Пусть p_1 и p_2 — $\exists$-полные и J-стационарные типы, тогда p_1 J-ортогонален p_2, если для любого A имеет место $Domp_1 \cup Domp_2 \subseteq A$, и q_1 слабо J-ортогонален q_2, где q_1 и q_2 — любые J-неответвляющиеся расширения p_1 и p_2 над A.

$\exists$-полный тип p называется J-мультиразмерностным, если p ортогонален любому полному $\exists$-типу над A. Если в T не существует J-мультиразмерностный тип, то T называется J-немультиразмерностной теорией. Если каждая теория класса будет J-немультиразмерностной, тогда класс называется J-немультиразмерностным.

Теорема. *Пусть* $K = \{(C, M) | M \preceq_{\exists_1} C, (C, M) -$ *семантическая пара*$\}$, $JSp(K) = \{\Delta | \Delta -$*йонсоновская теория*$, \Delta = Th_{\forall\exists}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$, *где* $(\mathcal{C}, \mathcal{M}) \in K\}$, $[\Delta] \in JSp(K)/_{\bowtie}$. *Пусть* $[\Delta]$ — $\exists$*-полный и* J*-*λ*-стабильный йонсоновский класс,* $\overline{[\Delta]} - [\Delta]$ *в обогащении* $\odot$, $\overline{[\Delta]}^*$ — *центр теории* $\overline{[\Delta]}$ *[1]. Тогда следующие условия эквивалентны: 1)* $\overline{[\Delta]}^*$ — *немультиразмерностный (в классическом смысле [4]); 2)* $\overline{[\Delta]}$ — J*-немультиразмерностный.*

Ключевые слова: наследственная теория, допустимое обогащение, йонсоновское подмножество, J-ортогональный тип, J- немультиразмерностная теория, J- немультиразмерностный класс.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Литература

[1] Zhumabekova, G.E. Model-theoretic properties of semantic pairs and e.f.c.p. in Jonsson spectrum, *Bulletin of the Karaganda University*, **4**:112 (2024), 185–193.

[2] Ешкеев А.Р., Касыметова М.Т. *Йонсоновские теории и их классы моделей*, КарГУ, Караганда (2016).

[3] Yeshkeyev A.R., Kassymetova M.T., Ulbrikht O.I. Independence and simplicity in Jonsson's theories with abstract geometry, *Siberian electronics mathematical reports*, **1**:16 (2019), 144–166.

[4] Shelah S. *Classification theory and the number of nonisomorphic models*, North-Holland, Amsterdam (1978).

О числе счетных моделей константного расширения полной теории

К.Ж. КУДАЙБЕРГЕНОВ

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: kanatkud@gmail.com

Константным расширением (или константным обогащением, или несущественным расширением) полной счетной теории T языка L называется полная теория $T^* \supseteq T$ языка L^*, полученного добавлением к L конечного числа новых константных символов.

А.Д. Тайманов ставил вопрос о существовании полной счетной теории, имеющей континуум счетных моделей, некоторое константное расширение которой имеет конечное или счетное число счетных моделей.

В работе [1] доказано, что существуют полная счетная теория, имеющая конечное число счетных моделей, и полная счетная теория, имеющая счетное число счетных моделей, некоторые константные расширения которых имеют меньшее число счетных моделей. В работе [1] также есть теорема, утверждающая положительный ответ на вопрос А.Д. Тайманова.

Но в работе [2] на основе детального анализа работы [1] сделан вывод, что вопрос А.Д. Тайманова остается открытым.

Нами доказаны следующие теоремы, дающие ответ на вопрос А.Д. Тайманова.

Теорема 1. *Существует полная счетная теория, имеющая континуум счетных моделей, некоторое константное расширение которой имеет счетное число счетных моделей.*

Теорема 2. *Для любого натурального числа $n \geq 3$ существует полная счетная теория, имеющая континуум счетных моделей, некоторое константное расширение которой имеет n счетных моделей.*

Funding: Автор был поддержан грантом BR20281002 КН МНВО РК.

Ключевые слова: полная счетная теория, константное расширение, число счетных моделей.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C15

Литература

[1] Омаров Б. Несущественные расширения полных теорий, *Алгебра и логика*, **22**:5 (1983), 542–550.

[2] Baizhanov B., Umbetbayev O. Constant expansion of theories and the number of countable models, *Сибирские электронные математические известия*, **20**:2 (2023), 1037–1051.

Об алгебрах бинарных формул для слабо циклически минимальных теорий: отношения эквивалентности

Бейбут Шайыкович КУЛПЕШОВ

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
Казахстанско-Британский технический университет, Алматы, Казахстан
E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz

Данный доклад касается понятия *слабой циклической минимальности*, первоначально изученного в [1]. Пусть $A \subseteq M$, где $\mathcal{M}$ — циклически упорядоченная структура. Множество A называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ выполняется следующее свойство: для любого $c \in M$ с условием $K(a, c, b)$ имеет место $c \in A$ или для любого $c \in M$ с условием $K(b, c, a)$ справедливо $c \in A$. *Слабо циклически минимальная структура* есть циклически упорядоченная структура $M = \langle M, K, \dots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M.

Пусть $\mathcal{M}$ — счетно категоричная слабо циклически минимальная структура, $G := \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$. Следуя стандартной теоретико-групповой терминологии, группа G называется *k-транзитивной*, если для любых попарно различных $a_1, a_2, \ldots, a_k \in M$ и попарно различных $b_1, b_2, \ldots, b_k \in M$ существует $g \in G$, для которого $g(a_1) = b_1, g(a_2) = b_2, \ldots, g(a_k) = b_k$. *Конгруэнцией* на $\mathcal{M}$ называется любое G-инвариантное отношение эквивалентности на $\mathcal{M}$. Группа G называется *примитивной*, если G является 1-транзитивной и не существует нетривиальных собственных конгруэнций на $\mathcal{M}$.

Алгебры бинарных формул являются инструментом для исследования связей между элементами множеств реализаций типов на бинарном уровне относительно суперпозиции бинарных определимых множеств. Мы будем рассматривать алгебры бинарных изолирующих формул, первоначально изученные в работах [3, 4], где под бинарной изолирующей формулой понимается формула вида $\varphi(x, y)$, не имеющая параметров и такая, что для некоторого параметра a формула $\varphi(a, y)$ изолирует некоторый полный тип из $S_1(\{a\})$. В последние годы алгебры бинарных формул изучаются интенсивно и получили свое продолжение в работах [5]–[9].

В настоящем докладе мы обсуждаем алгебры бинарных изолирующих формул для счетно категоричных слабо циклически минимальных теорий ранга выпуклости, большего 1, имеющих 1-транзитивную непримитивную группу автоморфизмов и тривиальное определимое замыкание.

Следующая теорема полностью характеризует счетно категоричные 1-транзитивные непримитивные слабо циклически минимальные структуры ранга выпуклости, большего 1, с точностью до бинарности для случая, когда имеются только отношения эквивалентности:

Теорема. [2] *Пусть M — счетно категоричная 1-транзитивная непримитивная слабо циклически минимальная структура ранга выпуклости, большего 1, только с отношениями эквивалентности и $dcl(a) = \{a\}$ для некоторого $a \in M$. Тогда M изоморфна с точностью до бинарности структуре $M_{s,m} := \langle M, K^3, E_1^2, E_2^2, \ldots, E_s^2, E_{s+1}^2 \rangle$, где M — циклически упорядоченная структура, M плотно упорядочено, $s, m \geq 1$; E_{s+1} — отношение эквивалентности, разбивающее M на m бесконечных выпуклых классов без концевых точек; E_i для каждого $1 \leq i \leq s$ есть отношение эквивалентности, разбивающее каждый E_{i+1}-класс на бесконечное число бесконечных выпуклых E_i-подклассов без концевых точек, так что индуцированный порядок на E_i-подклассах является плотным без концевых точек.*

Нами доказана следующая теорема:

Теорема. *Алгебра $\mathfrak{P}_{M_{s,m}}$ бинарных изолирующих формул имеет $2s + m + 2$ меток, является коммутативной и строго $(2s + 3)$-детерминированной для любых натуральных чисел $s, m \geq 1$.*

Funding: Данное исследование поддержано Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (Грант AP19674850).

Ключевые слова: слабая циклическая минимальность, алгебра бинарных изолирующих формул, коммутативность

2010 Mathematics Subject Classification: 03C64, 03C07, 03C15

Литература

[1] Kulpeshov B.Sh., Macpherson H.D. Minimality conditions on circularly ordered structures, *Mathematical Logic Quarterly* **51**:4 (2005), 377–399.

[2] Кулпешов Б.Ш. Определимые функции в $\aleph_0$-категоричных слабо циклически минимальных структурах , *Сибирский математический журнал* **50**:2 (2009), 356–379.

[3] Судоплатов С.В. *Классификация счетных моделей полных теорий*, Издательство НГТУ, Новосибирск (2018).

[4] Shulepov I.V., Sudoplatov S.V. Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory, *Siberian Electronic Mathematical Reports* **11** (2014), 362–389.

[5] Емельянов Д.Ю., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Алгебры распределений бинарных формул в счетно категоричных слабо о-минимальных структурах, *Алгебра и логика*, **56**:1 (2017), 20–54.

[6] Емельянов Д.Ю., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Алгебры распределений бинарных изолирующих формул для вполне о-минимальных теорий, *Алгебра и логика*, **57**:6 (2018), 662–683.

[7] Емельянов Д.Ю., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Алгебры бинарных формул для композиций теорий, *Алгебра и логика*, **59**:4 (2020), 432–457.

[8] Алтаева А.Б., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Алгебры распределений бинарных изолирующих формул для почти ω-категоричных слабо о-минимальных теорий, *Алгебра и логика*, **60**:4 (2021), 369–399.

[9] Kulpeshov B.Sh. Algebras of binary formulas for $\aleph_0$-categorical weakly circularly minimal theories: piece monotonic case, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **20**:2 (2023), 824–832.

О несущественных обогащениях вполне о-минимальных теорий

Бейбут Шайыкович КУЛПЕШОВ[1,a], Сергей Владимирович СУДОПЛАТОВ[2,b]

[1]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

[1]*Казахстанско-Британский технический университет, Алматы, Казахстан*

[2]*Институт математики имени С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия*

[2]*Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия*

[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*

E-mail: [a]*b.kulpeshov@kbtu.kz*, [b]*sudoplat@math.nsc.ru*

Настоящий доклад касается понятия *слабой о-минимальности*, первоначально исследованного Д. Макферсоном, Д. Маркером и Ч. Стейнхорном в [1]. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M.

Пусть T — слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические типы. Мы говорим, что тип p является *не слабо ортогональным* типу q ($p \not\perp^w q$), если существуют L_A-формула $H(x, y)$, $\alpha \in p(M)$ и $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ такие, что $\beta_1 \in H(M, \alpha)$ и $\beta_2 \notin H(M, \alpha)$.

Вполне о-минимальные теории были введены в [2]. Мы говорим, что тип p является *вполне ортогональным* типу q ($p \perp^q q$), если не существует A–определимой биекции $f : p(M) \to q(M)$. Мы говорим, что слабо о-минимальная теория является *вполне о-минимальной*, если понятия слабой и вполне ортогональности совпадают для 1-типов над произвольными подмножествами моделей данной теории.

Пример. [1] *Пусть $M = \langle M; <, P_1^1, P_2^1, f^1 \rangle$ — линейно упорядоченная структура такая, что M есть непересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов P_1 и P_2, при этом $P_1(M) < P_2(M)$. Мы отождествляем интерпретацию P_2 с множеством рациональных чисел $\mathbb{Q}$, упорядоченном как обычно, а P_1 с $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, упорядоченном лексикографически. Символ f интерпретируется частичной унарной функцией с $Dom(f) = P_1(M)$ и $Range(f) = P_2(M)$ определяется равенством $f((n, m)) = n$ для всех $(n, m) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.*

Может быть доказано, что $Th(M)$ — слабо о-минимальная теория. Пусть $p(x) := \{P_1\}$, $q(x) := \{P_2\}$. Очевидно что $p, q \in S_1(\emptyset)$, $p \not\perp^w q$, но $p \perp^q q$, т.е. $Th(M)$ не является вполне о-минимальной.

Несущественным обогащением (расширением) теории T языка L называется полное расширение T_1 теории T в языке $L_1 = L \cup \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — новые константные символы.

Свойства несущественных обогащений теорий с конечным числом счетных моделей изучали М. Бенда [3], Р. Вудроу [4], М.Г. Перетятькин [5], Б.И. Омаров [6]. Р. Вудроу построил пример теории, имеющей четыре счетные модели, несущественное обогащение которой имеет бесконечное число счетных моделей. М.Г. Перетятькин построил пример теории, имеющей три счетные модели, несущественное обогащение которой имеет бесконечное число счетных моделей. Б.И. Омаров построил пример эренфойхтовой теории, имеющей несущественное обогащение с меньшим числом счетных моделей. Недавно в [7] было установлено, что любое несущественное обогащение о-минимальной эренфойхтовой теории сохраняет эренфойхтовость и ее счетный спектр не уменьшается.

Теорема. *Пусть T — вполне о-минимальная эренфойхтова теория, M — счетная насыщенная модель теории T. Тогда для каждого $n < \omega$ и любого $\bar{a} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in M$ теория $T_1 = Th(\langle M, \bar{a} \rangle)$ также является вполне о-минимальной и эренфойхтовой. Более того:* (1) *если каждый a_i является реализацией изолированного или квазирационального 1-типа над $\emptyset$, то $I(T_1, \omega) = I(T, \omega)$;* (2) *если существуют $1 \leq s \leq n$ и $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leq n$, такие что a_{i_t} является реализацией иррационального 1-типа p_{i_t} над $\emptyset$ для каждого $1 \leq t \leq s$, а остальные a_w (т.е. $w \neq i_t$ для каждого $1 \leq t \leq s$) являются реализациями изолированных или квазирациональных 1-типов над $\emptyset$, то $I(T_1, \omega) = 6^{m_T - l} 3^{k_T + 2l}$, где $l = \dim\{p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_s}\}$, $I(T, \omega) = 6^{m_T} 3^{k_T}$.*

Funding: Данное исследование поддержано Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (Грант BR20281002), а также выполнено в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева, проект № FWNF-2022-0012..

Ключевые слова: слабая о-минимальность, вполне о-минимальность, ранг выпуклости, эренфойхтова теория, несущественное обогащение теории.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C64, 03C07, 03C15

Литература

[1] Macpherson H.D., Marker D., and Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields, *Transactions of the American Mathematical Society*, **352**:12 (2000), 5435–5483.

[2] Kulpeshov B.Sh. Convexity rank and orthogonality in weakly o-minimal theories, *News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, physical and mathematical series*, **227** (2003), 26–31.

[3] Benda M. Remarks on countable models, *Fundamenta Mathematicae*, **81**:2 (1974), 107–119.

[4] Woodrow R.E. Theories with a finite number of countable models, *The Journal of Symbolic Logic*, **43**:3 (1978), 442–445.

[5] Peretyat'kin M.G. Theories with three countable models. *Algebra and Logic*, **19**:2 (1980), 139–147.

[6] Omarov B. Nonessential extensions of complete theories, *Algebra and Logic*, **22**:5 (1983), 390–397.

[7] Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. Ranks, spectra and their dynamics for families of constant expansions of theories, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, **45** (2023), 121–137.

О видах предгеометрий композиций кубических и ациклических структур

Сергей Борисович МАЛЫШЕВ

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия
E-mail: sergei2-mal1@yandex.ru

Приводится описание видов предгеометрий [1] с алгебраическим оператором замыкания для композиций $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ [2] кубической $\mathcal{M}$ и ациклической $\mathcal{N}$ структуры.

Определение. *Предгеометрией называется множество S вместе с определённой операцией замыкания $\mathrm{cl} : P(S) \to P(S)$, удовлетворяющей следующим условиям:*
1) для любого $X \subseteq S$ выполняется $X \subseteq \mathrm{cl}(X)$;
2) для любого $X \subseteq S$ выполняется $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X)) = \mathrm{cl}(X)$;
3) для любого $X \subseteq S$ и любых $a, b \in S$ если $a \in \mathrm{cl}(X \cup \{b\}) - \mathrm{cl}(X)$, то $b \in \mathrm{cl}(X \cup \{a\})$;
4) для любого $X \subseteq S$ если $a \in \mathrm{cl}(X)$, то $a \in \mathrm{cl}(Y)$ для некоторого конечного $Y \subseteq X$.

Пусть $M = \langle S, R \rangle$ это модель ациклической теории. Обозначать через $P(G)$ множество всех подграфов графа G. Разобьём $P(G)$ на классы эквивалентности по отношению изоморфизма и проиндексируем типы изоморфизма I. Обозначим классы эквивалентности через G^i, где $i \in I$ — индекс, соответствующий представителю данного класса. Тогда через G^i_A обозначим подграфы данного графа, изоморфные друг другу и содержащие все вершины множества $A \subseteq S$.

Предложение. *Пусть T — ациклическая теория. Если модель $M = \langle S, R\rangle$ теории T не содержит компоненты с бесконечным числом ∞-вершин и не существует подмножества $A \subseteq S$, для которого множество подграфов $G^i_A \subseteq G^i$ конечно, а класс G^i бесконечен, то предгеометрия $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$ вырожденная.*

Заметим, что для композиции $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ свойство замены может не выполняться. Вследствие этого назовём пару $\langle S, \mathrm{acl}\rangle$, удовлетворяющую условиям 1), 2), 4) определения предгеометрии, — *a-предгеометрией.*

Определение. *a-Предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl}\rangle$ называется a-*модулярной*, если для любых* acl-*замкнутых множеств $X_0, Y_0 \subseteq S$, X_0 независимо от Y_0 относительно $X_0 \cap Y_0$, т.е. для любых конечномерных* acl-*замкнутых множеств $X \subseteq X_0$, $Y \subseteq Y_0$ верно:*
1) если существует бесконечная компонента D, для которой $X \cap Y \cap D = \emptyset$, $X \cap D \neq \emptyset$, $Y \cap D \neq \emptyset$, то выполняется равенство:

$$\dim_a(X \cap D) + \dim_a(Y \cap D) +$$

$$+\rho(X \cap D, Y \cap D) = \dim_a((X \cup Y) \cap D),$$

где $\rho(X \cap D, Y \cap D)$ — число вершин кратчайшего пути между вершинами $x \in X \cap D$ и $y \in Y \cap D$ (не считая вершины этих множеств);
2) в остальных случаях для компонент связности D выполняется равенство:

$$\dim_a(X \cap D) + \dim_a(Y \cap D) - \dim_a(X \cap Y \cap D) = \dim_a((X \cup Y) \cap D).$$

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ — композиция кубической структуры $\mathcal{M}$ и ациклической структуры $\mathcal{N}$. Тогда верны утверждения:*
1) *предгеометрия $\langle \mathcal{M}[\mathcal{N}], \mathrm{acl}\rangle$ вырожденная тогда и только тогда, когда все компоненты связности $\mathcal{M}$ конечны, а $\mathcal{N}$ имеет вырожденную предгеометрию;*
2) *a-предгеометрия $\langle \mathcal{M}[\mathcal{N}], \mathrm{acl}\rangle$ a-модулярная.*

Funding: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 24-21-00096.

Ключевые слова: предгеометрия, ациклическая теория, a-предгеометрия, a-модулярность.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C30, 03C65, 51D05

Литература

[1] Pillay A. *Geometric Stability Theory*, Clarendon Press, Oxford (1996).

[2] Емельянов Д. Ю., Кулпешов Б. Ш., Судоплатов С. В. *Алгебры бинарных формул: монография*, НГТУ, Новосибирск (2023).

Представление некоторых типов графов в контексте Анализа Формальных Понятий

Ильдар Ильминович МУЛЮКОВ[1,a], Айман Тобылжанкызы ЖУСУПОВА[1,b]

[1]*Евразийский университет имени Л.Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан*
E-mail: [a]ildar.mulyukov@gmail.com, [b]aiman240390@gmail.com

Анализ Формальных Понятий (АФП) применяется в прикладных задачах вида «множество объектов — множество атрибутов» . Целью этой работы является представление графов в контекст АФП для построения концепт-решётки графов, что откроет новые инструменты для анализа графов больших размеров средствами АФП и теории решёток.

Рассмотрен метод сопоставления графа концепт-решётки с матрицей смежности произвольного графа, выявивший не стабильность этого представления по отношению к изоморфным преобразованиям контекста и графа концепт-решётки.

Рассмотрены некоторые макропараметры графов и локальные свойства подграфов, которые подходят для представления в виде формальных понятий и отношений.

Отдельно рассмотрены проблемы, связанные с представлением графов, как алгебраических систем, вопросы применения аппарата тождеств для аксиоматизации графов.

Разработана программа для автоматического преобразования и построения графов, контекстов и концепт-решёток АФП.

Работа выполнена под руководством PhD, и.о. доцента Башеевой А.О.

Ключевые слова: Анализ Формальных Понятий, решётки, графы

2010 Mathematics Subject Classification: 05C62, 68R10, 03G10, 90C35

Литература

[1] Ganter, B. and Wille, R. *Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations*, Springer Berlin Heidelberg (1999).

[2] Мальцев, А.И. *Алгебраические системы*, Издательство "Наука" (1970).

Антикоммутативные алгебры с тождеством степени 3

К.М. ТУЛЕНБАЕВ[1,a], А.К. КУНАНБАЕВ[2,b], А.А. КЕНГЕСБАЙ[3,c]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

[2] *АУЭС, Алматы, Казахстан*

[3] *КБТУ, Алматы, Казахстан*

E-mail: [a] *tulen75@hotmail.com*, [b] *kunanbayev@math.kz*, *k_assiya@kbtu.kz*

Б. А. Купершмидт доказал, что антикоммутативная алгебра, удовлетворяющая тождеству степени 3, не являющей Лиевой, должна удовлетворять тождеству $(xy)z = (yz)x$ в [1]. Мы доказываем, что данные алгебры нильпотентны степени 4.

Теорема 1. *Пусть алгебра A, удовлетворяет тождествам* $xy = -yx$ *и* $(xy)z = (yz)x$, *тогда алгебра A, является нильпотентной степени 4.*

Доказательство: $((ab)c)d = (ab)(cd) = -(cd)(ab) = -(d(ab)c = -((ab)c)d$.

Funding: Первый автор был поддержан грантом BR20281002 КН МНВО РК.

Ключевые слова: неассоциативная алгебра, нильпотентность.

2010 Mathematics Subject Classification: 16R10, 17A50, 17A30, 17D25, 17C50

Литература

[1] Kupershmidt B.A. *Phase Spaces of Algebras*, University of Tennessee, Knoxville (2010).

О простоте алгебр с переключателями

К.М. ТУЛЕНБАЕВ[1,a], А.К. КУНАНБАЕВ[2,b], Н.Л. ПОЛАТХАН

[1] *Институт Математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

[2] *АУЭС, Алматы, Казахстан*

E-mail: [a] *tulen75@hotmail.com*, [b] *kunanbayev@math.kz*,

Теория неассоциативных алгебр начинается с работ Софуса Ли по алгебрам Ли.
Мы в нашей работе рассматриваем тождество

$$a(bc) = (ba - ab)c \qquad (*)$$

Алгебры удовлетворяющие данному тождеству мы называем алгебрами с переключателями.
Рассмотрим $I(a, b, c) = a(bc) + b(ca) + c(ab) \neq 0$ в A.

Лемма. $\forall d \in A \ I(a, b, c) \cdot d = 0$

Доказательство. Поставив в тождество $(*)$ вместо с элементом получим:

$$a(b(cd)) = (ba - ab)(cd) = (c(ba - ab) - (ba - ab)c)d$$

Так как: $c(ba - ab) = c(ba) - c(ab) = (bc - cb)a - (ac - ca)b = (bc)a - (cb)a - (ac)b + (ca)b$
С другой стороны:

$$a(b(cd)) = a(((cb) - (bc))d) = ((cb - bc)a - a(cb - bc))d$$

Получим равенство:

$$[(cb - bc)a - a(cb - bc) - (bc)a + (cb)a + (ac)b - (ca)b + (ba - ab)c]d = 0$$

$$[2(cb)a - 2(bc)a - 2(ca - ac)b + (ba - ab)c + (ac)b - (ca)b + (ba - ab)c]d =$$
$$= [2(cb)a - 2(bc)a - 2(ca)b + 2(ac)b + 2(ba)c - 2(ab)c]d =$$
$$= [2b(ca) + 2c(ab) + 2a(bc)]d = 0$$

Следовательно, $Id = 0$.

Теорема. *Алгебра с переключателем A проста (поле?) если* $\dim A = 1$ *и абелева.*

Доказательство. Пусть $\exists a,\ b,\ c$, такие что $I = I(a, b, c) \neq 0$. По лемме $Id = 0$ для любого $d \in A$. Далее, $a_1(a_2 I) = [a_2, a_1] \cdot I$.

Так как A простое, $A = \langle I \rangle$, кроме того $A = A^2$, $0 = a(Id) = (Ia - aI)d = 0$, значит, $(aI)d = 0$, $(Ia)d = 0$. Противоречие

Случай $I(a, b, c) = 0$, $\forall a, b, c$

$$a(bc) + b(ca) + c(ab) = 0, \quad a(bc) = -b(ac)$$

$$a(bc) + b(ca) - a(cb) = 0, \quad a[b, c] = -b(ca) = -[c, b]a = [b, c]a$$

Центр алгебры $Z(A) = \{z \in A : \forall c \in A(zc = cz)\}$. Коммутатор $[A, A]$ содержится в центре $Z(A)$. Если коммутатор $[A, A] \neq 0$, то $Z(A) \neq 0$, $A^2 = A$, $b \in Z(A)$, $a(bc) = b(ac) = 0$, $bA = 0$, $bc = cb$, $Ab = 0$. $Lin\langle b \rangle$ есть одномерный идеал.

Funding: Первый автор был поддержан грантом BR20281002 КН МНВО РК.

Ключевые слова: неассоциативная алгебра, нильпотентность.

2010 Mathematics Subject Classification: 16R10, 17A50, 17A30, 17D25, 17C50

Малые модели центра совершенного класса йонсоновского спектра семантической модели фиксированной йонсоновкой теории

Индира ТУНГУШБАЕВА[a], Бекзат ӘЛЖАН[b],

Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова,
Караганда, Казахстан
E-mail: [a]intng@mail.ru, [b]ilu_n@mail.ru

В известной работе [1] Дж. Балдвином и Д. Киккером были введены понятия (Γ_1, Γ_2)-атомной модели, Σ-пiсе-алгебраически простой модели, Δ-алгебраически простой модели теории T. Пусть T — теория языка L. Пусть для любой экзистенциальной формулы $\varphi(\bar{x}) \in \Delta$, совместной с T, найдется формула $\psi(\bar{x}) \in \Delta$, совместная с T, такая, что $T \vDash \psi \to \varphi$, а формула $\varphi(\bar{x})$ является Δ-формулой относительно T, если существуют $\exists$-формулы $\psi_1(\bar{x})$ и $\psi_2(\bar{x})$, такие, что $T \vDash (\varphi \leftrightarrow \psi_1)$ и $T \vDash (\neg\varphi \leftrightarrow \psi_2)$. Описанное условие мы обозначим как условие R [4].

Пусть T — некоторая йонсоновская теория [2], C_T — ее семантическая модель [3], $JSp(C_T)_{/\bowtie}$ — ее йонсоновский спектр C_T [4]. Введем на $JSp(C_T)_{/\bowtie}$) отношение косемантичности ($\bowtie$). Полученное фактор-множество будем обозначать как $JSp(C_T)_{/\bowtie}$. Зафиксируем некоторый класс косемантичности $[\Delta] \in JSp(C_T)_{/\bowtie}$. Обозначим центр этого класса через $[\Delta]^*$.

Теорема. Пусть $[\Delta] \in JSp\left(C_T\right)/\bowtie$ таков, как описано выше, и пусть центр этого класса $[\Delta]^*$ допускает условие R. Тогда следующие утверждения эквивалентны:
1) Существует модель $A_1 \in \mathrm{Mod}\left([\Delta]^*\right)$, такая, что A_1 алгебраически проста;
2) Существует модель $A_2 \in \mathrm{Mod}\left([\Delta]^*\right)$, такая, что A_2 является (Δ, Σ)-атомной;
3) Существует модель $A_3 \in \mathrm{Mod}\left([\Delta]^*\right)$, такая, что A_3 является (Σ, Δ)-атомной;
4) Существует модель $A_4 \in \mathrm{Mod}\left([\Delta]^*\right)$, такая, что $A_4\Delta$-nice алгебраически проста;
5) Модель A_1 из условия 1) единственна.

Keywords: йонсоновская теория, йонсоновский спектр, классы косемантичности, алгебраически простая модель, атомная модель.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C10, 03C50, 03C52, 03C68

References

[1] Baldwin J., Kueker D. Algebraically prime models, *Annals of Mathematical Logic*, **20** (1981), 289–330.

[2] Барвайс Дж. *Справочная книга по математической логике. Том 1. Теория моделей*, Наука, Москва (1982).

[3] Ешкеев А.Р., Касыметова М.Т. *Йонсоновские теории и их классы моделей*, КарГУ, Караганда (2016).

[4] Ешкеев А.Р., Ульбрихт О.И. JSp-косемантичность R-модулей, *Сиб. электрон. мат. изв.*, **16** (2019), 1233–1244.

О выпуклости фрагмента йонсоновского подмножества семантической модели фиксированной йонсоновской теории

Индира ТУНГУШБАЕВА[a], Гульнур ЖАКЫПБАЕВА[b],

Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан
E-mail: [a]intng@mail.ru, [b]zhakipbaeva@bk.ru

В данной работе был получен синтаксический критерий выпуклости для йонсоновского фрагмента йонсоновского множества фиксированной йонсоновской теории.

Пусть T — йонсоновская теория [1], C — ее семантическая модель, X — подмножество C. X будет называться теоретическим множеством для теории T, если выполнены следующие условия: 1) X $\exists$-определимо; 2) $\mathrm{dcl}(X) = M \in E_T$; 3) Универсальное замыкание формулы, определяющей X в пункте 1 , является предложением, представляющим собой конечно аксиоматизируемую йонсоновскую теорию. Теория $Fr(X) = Th_{\forall\exists}(M)$ называется йонсоновским фрагментом йонсоновского множества X [2].

В данной работе мы рассматриваем выпуклые теории [3]. Пусть φ есть $\forall\exists$-предложение, т.е. предложение вида $\forall\bar{x}\exists y_1 \ldots y_m\psi$, где $\psi\left(\bar{x}, y_1, \ldots, y_m\right)$ — бескванторная формула. Тогда конвексизацией предложения φ будет называться любое предложение вида $\varphi^c = \forall\bar{x}\vee_{1\leq i\leq n}\theta_i\wedge\wedge_{1\leq i\leq n}\forall\bar{x}\left[\theta_i \to \exists^{=k_i} < y_i, \ldots, y_m > (\chi_i \wedge \psi)\right]$, где $\theta_i(\bar{x})$ — универсальная формула, $\chi_i(\bar{x}, \bar{y})$ - экзистенциальная формула и k_i — положительное целое число для $i = 1, \ldots, n$ [4].

Теорема. Пусть T — йонсоновская теория фиксированного счетного языка первого порядка L, C — ее семантическая модель, $X \subseteq C$ — йонсоновское множество для данной теории. Пусть фрагмент $Fr(X)$ конечно аксиоматизируем, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ - список аксиом теории $Fr(X)$. Тогда $Fr(X)$ является выпуклой теорией, если и только если $\wedge_{i\leq n}\alpha_i \leftrightarrow \alpha^c$, где α^c есть любая конвексизация $\wedge_{i\leq n}\alpha_i$.

Keywords: выпуклая теория, конвексизация теории, йонсоновская теория, йонсоновское множество, йонсоновский фрагмент.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C10, 03C50, 03C52, 03C68

References

[1] Барвайс Дж. *Справочная книга по математической логике. Том 1. Теория моделей*, Наука, Москва (1982).

[2] Ешкеев А.Р., Касыметова М.Т. *Йонсоновские теории и их классы моделей*, КарГУ, Караганда (2016).

[3] Robinson A. *Introduction to Model Theory and to the metamathematics of algebra*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1963).

[4] Kueker D.W. Core structures for theories, *Fundamenta Mathematicae*, **89**:2 (1975), 155–171.

Об определимом замыкании экзистенциально замкнутой подмодели семантической модели фиксированной йонсоновской теории

О.И. УЛЬБРИХТ[a], Г.А. УРКЕН[b]

Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан

E-mail: [a]ulbrikht@mail.ru, [b]guli_1008@mail.ru

В работе [1] было определено отношение нефоркуемости на подмножествах семантической модели некоторой фиксированной йонсоновской теории. Если эти подмножества являются йонсоновскими, то, используя понятие оператора замыкания, задающего предгеометрию на этих подмножествах, мы можем предложить результат, описывающий этот оператор замыкания.

Пусть T — йонсоновская теория, C_T — её семантическая модель.

Определение 1. Будем говорить, что теория T с оператором замыкания cl, если $cl\,(g\,(X)) = g\,(cl\,(X))$ для всех $X \in \mathcal{P}(C_T)$ и $g \in Aut(C_T)$.

Определение 2. [2] Множество X называется йонсоновским в теории T, если оно удовлетворяет следующим свойствам:

1) X — определимое подмножество C_T;

2) $cl(X)$ есть носитель некоторой экзистенциально замкнутой подмодели C_T.

Пусть T — некоторая йонсоновская теория, X — йонсоновское множество и $cl(X) = M \in E_T$, где E_T — класс всех экзистенциально замкнутых моделей теории T. Если $a, b \in C_T \backslash M$, то $b \in C_M\,(a)$ означает, что существуют $n < \omega$ и последовательность $\langle b_0, ..., b_n \rangle$ элементов из $C_T \backslash M$ такие, что $b_0 = a$, $b_n = b$, $b_i \in cl(b_{i+1})$ или $b_{i+1} \in cl(b_i)$ для всех $i < n$. В этом случае последовательность $\langle b_0, ..., b_n \rangle$ назовем cl-путем вне M между a и b длины n.

Пусть T — йонсоновская теория с оператором замыкания cl. Рассмотрим некоторые условия, налагаемые на оператор cl.

Аксиома 1. *Если $M \in E_T$, то $M = \overline{M}$, $\overline{M} \leftrightharpoons \cup\{cl(m) \mid m \in M\}$.*

Аксиома 2. *Если $M \in E_T$ и $M = \overline{M}$, $\bar{a}, \bar{b}$ — кортежи элементов из $C_T \setminus M$, $C_M(\bar{a}) \cap C_M(\bar{b}) = \varnothing$, то $\bar{a} \underset{M}{\not\downarrow} \bar{b}$.* [1]

Пусть T — йонсоновская теория, $S^J(X)$ — множество всех экзистенциальных полных n-типов над X, совместных с T для каждого конечного n.

Определение 3. [3] Мы говорим, что йонсоновская теория T J-λ-стабильна, если для любой T-экзистенциально замкнутой модели A, для любого подмножества X множества A из того, что $|X| \leq \lambda$ следует, что $|S^J(X)| \leq \lambda$.

Далее, вместо оператора замыкания cl мы имеем в виду оператор алгебраического замыкания acl, который одновременно является оператором определимого замыкания dcl.

В связи с вышеуказанными определениями имеем следующие результаты:

Теорема 1. *Пусть T совершенная йонсоновская J-λ-стабильная теория, полная для $\exists$-предложений с оператором замыкания cl. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) cl удовлетворяет аксиомам 1, 2;

2) если $M \in E_T$, то для всех $a \in C_T \backslash M$ выполняется $C_M(a) = cl(C_M(a))$.

Теорема 2. Если T совершенная йонсоновская J-λ-стабильная теория, полная для $\exists$-предложений с оператором замыкания cl, оператор cl удовлетворяет аксиомам 1, 2, $M, N \in E_T$, $M \prec_{\exists_1} N$, $a \in N\backslash M$, тогда:

1) $M \prec_{\exists_1} \mathrm{M} \cup (N \cap C_M(a)) \preceq_{\exists_1} N$;

2) $M \preceq_{\exists_1} \mathrm{N} \backslash (N \cap C_M(a)) \prec_{\exists_1} N$.

Все неопределенные в данном тезисе понятия, касающиеся йонсоновских теорий, и связанные с ними теоремы, можно найти в [3].

Ключевые слова: йонсоновская теория, семантическая модель, экзистенциально замкнутая модель, нефоркуемость, оператор замыкания.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C45, 03C68.

Литература

[1] Yeshkeyev A.R., Kassymetova M.T., Ulbrikht O.I. Independence and simplicity in Jonsson theories with abstract geometry, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **18**:1 (2021), 433–455. DOI: 10.33048/semi.2021.18.030

[2] Yeshkeyev A.R. Model-theoretic properties of Jonsson fragments, *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series,* 4(76) (2014), 37–41.

[3] Yeshkeyev A.R., Kassymetova M.T., *Jonsson theories and their classes of models*, Monograph, Karaganda, KarGU, 2009.

Description of almost inner Rickart algebras

F. N. ARZIKULOV[1,2,a], U. I. KHAKIMOV[2,b]

[1], *V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan,*

[2] *Andizhan State University, Andizhan, Uzbekistan*

E-mail: [a]*arzikulovfn@rambler.ru*, [b]*khakimov_u@inbox.ru*

In the present paper, we introduce and study counterparts of Rickart $*$-algebras, that is almost inner Rickart algebras. We define an almost inner Rickart algebra as an associative algebra which is a Jordan algebra with respect to the Jordan multiplication $a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba)$ close to inner RJ-algebras. Inner RJ-algebras are introduced and studied in the papers [1], [2], [3].

The chosen notions were built around an (inner) quadratic annihilator. For each nonempty subset $\mathcal{B}$ of an associative algebra $\mathcal{A}$, the (inner) quadratic annihilator of $\mathcal{B}$ is defined by

$$^{\perp_q}\mathcal{B} := \{a \in \mathcal{A} : sas = 0,\ \forall s \in \mathcal{B}\}.$$

Thus, following [4], an associative algebra $\mathcal{A}$ which is equal to the direct sum $\mathcal{S} \dot{+} \mathcal{D}$ of vector spaces $\mathcal{S}$ and $\mathcal{D}$, where $\mathcal{S}$ is a semisimple algebra and $\mathcal{D}$ is a nilpotent radical of $\mathcal{A}$ (including the case $\mathcal{D} \equiv \{0\}$), is called an almost inner Rickart algebra if, for each element $x \in \mathcal{A}$, there exists an idempotent $e \in \mathcal{A}$ such that $^{\perp_q}\{x\} \cap (\mathcal{S}^2 \cup \mathcal{D}^2) = e\mathcal{A}e \cap (\mathcal{S}^2 \cup \mathcal{D}^2)$, where $\mathcal{S}^2 := \{a^2 : a \in \mathcal{S}\}$, $\mathcal{D}^2 := \{a^2 : a \in \mathcal{D}\}$. There exist examples of almost inner Rickart algebras without unit element (cf. [2, p.32]). Note that, there exist pairwise non-isomorphic (associative) almost inner Rickart algebras, the Jordan algebras of which are isomorphic. This is a motivation to introduce the notion of an almost inner Rickart algebra.

As a main result of the paper we describe a finite-dimensional almost inner Rickart algebra $\mathcal{A}$ over a field $\mathbb{F}$, isomorphic to $\mathbb{F}^n \dot{+} \mathcal{N}$, $n = 1, 2$, with a nilradical $\mathcal{N}$ (Theorems 1 and 3). Also, we classify finite-dimensional almost inner Rickart algebras over the real or complex numbers with a nonzero nilradical $\mathcal{N}$ (Theorem 2).

Theorem 1. Let $\mathcal{A}$ be a finite-dimensional almost inner Rickart algebra over a field $\mathbb{F}$ of characteristic $\neq 2$ and $\neq 3$ with a one-dimensional simple subalgebra $\mathcal{S}$ and an n-dimensional commutative nilpotent radical $\mathcal{N}$ such that $\mathcal{A} = \mathcal{S} \dot{+} \mathcal{N}$, $\mathcal{N}^2 = \{a^2 : a \in \mathcal{N}\} \neq \{0\}$. Then there is a nonzero idempotent $e \in \mathcal{A}$ such that $\mathcal{A} = \mathbb{F}e \dot{+} \mathcal{N}$ and for any basis $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ of $\mathcal{N}$ the following conditions are valid

$$e_i e_j e_k = 0, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n, \tag{1.1}$$

$$e(e_i e_j) = (e_i e_j)e = e_i e_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \tag{1.2}$$

$$e_i e e_j + e_j e e_i = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \tag{1.3}$$

$$e e_i \in \mathcal{N}, e_i e \in \mathcal{N}. \tag{1.4}$$

Conversely, any associative algebra $\mathcal{A}$ over a field $\mathbb{F}$ of characteristic $\neq 2$ and $\neq 3$ with a one-dimensional simple subalgebra $\mathcal{S} = \mathbb{F}e$, where e is an idempotent element, and an n-dimensional commutative nilpotent radical $\mathcal{N}$ with a basis $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ such that $\mathcal{A} = \mathcal{S} \dot{+} \mathcal{N}$, is an almost inner Rickart algebra if the conditions (1.1)–(1.4) are valid.

Theorem 2. Let $\mathcal{A}$ be a finite-dimensional almost inner Rickart algebra over the real or complex numbers, with a nilpotent radical $\mathcal{N}il(\mathcal{A})$. Then there exist pairwise orthogonal idempotents $e_1, e_2, \dots, e_m$ in $\mathcal{A}$ such that

$$\mathcal{A} = (e_1\mathbb{F} \oplus e_2\mathbb{F} \oplus \dots \oplus e_m\mathbb{F}) \dot{+} \mathcal{N}il(\mathcal{A}),$$

where $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$.

Theorem 3. Let $\mathcal{A}$ be an indecomposible finite-dimensional almost inner Rickart algebra over a field $\mathbb{F}$ of characteristic $\neq 2$ and $\neq 3$ with a two-dimensional semisimple subalgebra $\mathcal{S}$ and an n-dimensional commutative nilpotent radical $\mathcal{N}$ such that $\mathcal{A} = \mathcal{S} \dot{+} \mathcal{N}$, $\mathcal{N}^2 = \{a^2 : a \in \mathcal{N}\} \neq \{0\}$. Then there exist two mutually orthogonal nonzero idempotents p_1, $p_2 \in \mathcal{A}$ such that $\mathcal{A} = (\mathbb{F}p_1 \oplus \mathbb{F}p_2) \dot{+} \mathcal{N}$ and for any basis $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ of $\mathcal{N}$ one of the following two cases is valid

the first case

$$e_i e_j e_k = 0, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n, \tag{1.1}$$

$$p_1(e_i e_j) = (e_i e_j)p_1 = e_i e_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \tag{1.2}$$

$$e_i p_1 e_j + e_j p_1 e_i = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \tag{1.3}$$

$$p_k e_i \in \mathcal{N}, e_i p_k \in \mathcal{N}, k = 1, 2, \tag{1.4}$$

$$p_2(e_i e_j + e_j e_i) = 0, i, j = 1, 2, \dots, n, \tag{1.5}$$

the second case

$$e_i e_j e_k = 0, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n, \tag{2.1}$$

$$e(e_i e_j) = (e_i e_j)e = e_i e_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \tag{2.2}$$

$$e_i(p_1 + p_2)e_j + e_j(p_1 + p_2)e_i = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \tag{2.3}$$

$$(p_1 + p_2)e_i \in \mathcal{N}, e_i(p_1 + p_2) \in \mathcal{N}. \tag{2.4}$$

$$\forall b \in \mathcal{N} p_1 b^2 p_1 \neq 0, p_2 b^2 p_2 \neq 0 \text{ if } b^2 \neq 0. \tag{2.5}$$

Conversely, any associative algebra $\mathcal{A}$ over a field $\mathbb{F}$ of characteristic $\neq 2$ and $\neq 3$ with a two-dimensional semisimple subalgebra $\mathcal{S} = \mathbb{F}p_1 \oplus \mathbb{F}p_2$, where p_1, p_2 are mutually orthogonal idempotents, and an n-dimensional commutative nilpotent radical $\mathcal{N}$ with a basis $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ such that $\mathcal{A} = \mathcal{S} \dot{+} \mathcal{N}$, is an almost inner Rickart algebra if conditions (1.1)–(1.5) or conditions (2.1)–(2.5) are valid.

Keywords: associative algebra; nilradical; nilpotent associative algebra; nilpotent element; idempotent.

2010 Mathematics Subject Classi?cation: 16W10, 16E50, 16N40

References

[1] Ayupov Sh.A., Arzikulov F.N. Jordan counterparts of Rickart and Baer $*$-algebras. Uzbek. Mat. Zh. No. 1(2016), 13–3.

[2] Ayupov Sh.A, Arzikulov F.N. Jordan counterparts of Rickart and Baer $*$-algebras, II. S̃ao Paulo J. Math. Sci. Vol. 13(2019), 27-38. DOI: https://doi.org/10.1007/ s40863-017-0083-7

[3] Arzikulov F.N., Khakimov U.I. Description of finite-dimensional inner Rickart and Baer Jordan algebras. Communications in Algebra (2023), 10 pp. DOI: https://doi.org/10.1080/00927872.2022.2164586

[4] Garces J., Li L., Peralta A., Tahlawi H. A projection-less approach to Rickart Jordan structures. Journal of Algebra Vol. 609 (2022), 567–605. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2022.06.007

Expansion, definability of types, number of non-isomorphic models in different classes of complete theories

Bektur BAIZHANOV[1,a], Sayan BAIZHANOV[1,b]

[1]*Institute of mathematics and mathematical modelling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]baizhanov@hotmail.com, [b]sayan-5225@mail.ru

In this report we will consider the properties of models of complete theories such that strict order property (SOP), Independence property (IP), stability and definability of types.

A structure, denoted $\mathbb{M} = \langle M; \Sigma\rangle$, with universe M and signature Σ, for which there exists a theory, that is a set of consistent sentences, constructed using logical connectives like $\wedge, \vee, ^{\neg}, \to$ and quantifiers $\exists, \forall$. For structure M consider a set $D_R(\mathbb{M}) = \{\varphi(M, \bar{a}) | a \in M\}$. The set of sentences, that holds true for M, denoted by $Th(M) = T = \{\varphi \in \Sigma | \mathbb{M} \models \varphi\}$ is called an elementary theory of $\mathbb{M}$ Any structure for which sentences of T holds true is model of theory T.

In first part we will consider known classification of complete theories in four main classes[1] by using properties of their formula trees: SOP, IP, NIP and NSOP.

A theory is called to have a strict order property if there is a formula $\varphi(x, \bar{y})$ and a sequence $(\bar{a}_i)_{i<\omega}$ such that $\models \exists x(\varphi(x, a_j) \wedge \neg\varphi(x, a_i)) \iff i < j$. Theory is NSOP if no formula has strict order property.

A theory is called to have independence property if there is a formula $\varphi(x, y)$ and a sequences $(a_i)_{i<\omega}$ and $(b_I)_{I\subseteq\omega}$ such that $\varphi(a_i, b_I)$ holds if and only if $i \in I$. Theory is NIP if no formula has independence property.

Theories with NIP and NSOP properties include stable, super stable, ω-stable and strongly minimal theories.

A theory is called stable if it is k-stable for some infinite k. A theory is k-stable if $|S_n^M(A)| \leq k$ for all models M and $A \subseteq M$ of size at most k.

A theory is called superstable if there is some cardinal λ such that T is k-stable for all $k \geq \lambda$

A theory is ω-stable if $S_n^M(A)$ is countable for all models M and countable $A \subseteq M$

A theory is strongly minimal if for all models M, any definable subset of M is finite or cofinite.

An expansion of a model $\mathbb{M} = \langle M, \Sigma\rangle$ is a model $M^+ = \langle M, \Sigma \cup \{P^n\}\rangle$. In case $A = P(M^+) \neq \varphi(M, \bar{a})$ for $\forall \bar{a} \in M$ such expansion is called essential expansion.

Problem in expansions of models is whether an expansion preserves initial properties or whether there a criteria for an expansion to preserve class of theory, from more than 20 classes theories[2].

We call a set of formulas $p = \{\varphi_i(x, \bar{a}) | i \in I, \bar{a} \in A\}$ to be a type, if any finite conjunction of formulas from p is consistent. A type p is a definable type if for any formula $\varphi(x, \bar{y})$ there exists a controlling formula $\psi_\varphi(\bar{y}, \bar{z})$, such that for any formula $\forall \bar{a}(\varphi(x, \bar{a}) \in p \leftrightarrow \models \psi_\varphi(\bar{a}, \bar{b}))$.

[2]https://www.forkinganddividing.com/

Theory is stable if and only if any type in this theory is definable. (Shelah)

Problem of non-definability of types in theories is one of main directions of research. Pair of models is called conservative pair if any sentence that is true in lower model is true in higher model. Thus any type in higher model is conservative over lower model. One of the areas of research is pairs of models and properties of definability of type and externally definable expansion by set of realizations of type.

For any complete theory T there is a number of non-isomorphic models. Problem of counting this models for all classes is still open.

In this context we will be considering expansion for different theories, including expansion of dp-minimal theories by equivalence relation and we will consider the number of countable models for different classes and strongly minimal theory expansion by unary predicates.

Funding: The authors were supported by the grant no. AP14972657 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: expansion, definability, types, independence property, strict order property.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C15, 03C52, 03C64

References

[1] Zambarnaya T.S., Baizhanov B.S. Countable Models of Complete Ordered Theories, *Doklady Mathematics*, **108**:2 (2023), 343–345.

[2] Zambarnaya T.S., Baizhanov B.S. Заметка об n-арных теориях, *Математические заметки, принято к публикации*

[3] Baizhanov B.S., Zambarnaya T.S., Umbetbayev O.A. Small ordered theories and quasi-successor properties on 1-type, *Bulletin of the NEA RK*, **90**:4 (2023), 169–178.

[4] Baizhanov B.S., Umbetbayev O.A. Constant expansion of theories and the number of countable models, *SEMR*, **20**:2 (2023), 1037–1051.

[5] Baizhanov B.S., Sargulova F. Externally definable expansion for ordered structures, *Traditional International April Mathematical Conference In Honor of the Kazakhstan Day of science workers*, 2024

Expansion of stable theory and the order property

Bektur BAIZHANOV[1,2,a], Altynay BAKIROVA[1,3,b]

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2]*Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan*
[2]*Kazakh National University after al-Farabi, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*baizhanov@math.kz,* [b]*altynay.bakirova@alumni.nu.edu.kz*

Consider one sufficient condition of non-stability of A^* for pair (M, A), A - stable set, M - model of (super)stable theory.

Definition 1. Formula $\phi(x, y)$ has order property if $\exists a_n, b_n, n < w$ such that $\models \phi(a_i, b_j))$ if and only if $i < j$.

S. Shelah proved that theory T is stable iff there is no formulas with Order Property. [4]

We shall denote all formulas of language L by letters ϕ, θ, and the formulas of Language $L^* = L \cup \{P^1\}$ by letters H, K, P.

Let $\theta(y, z, t), \phi(x, t)$ be arbitrary $L(M)$-formulas, K^1 be an arbitrary formula of Language L^*. $P(y)$ will mean $\cap_{i,l(y)} P(y_i)$, where $y = \langle y_0, y_1, ...\rangle$.

There exists examples of stable theories such that $H^{(i)}_{\theta,\phi,K}, i \in \{1, 2, 3\}$ are three L^*-formulas describing the interactions between θ, ϕ and K that satisfy Order Property:

$$H^{(1)}_{\theta,\phi,K}(y, z) := P(y) \wedge P(z) \wedge \forall t[\theta(y, z, t) \to \forall x(\phi(x, t) \to K(x))]$$

$$H^{(2)}_{\theta,\phi,K}(y, z) := P(y) \wedge P(z) \wedge \forall t[\theta(y, z, t) \to \forall x(\phi(x, t) \to^{\neg} K(x))]$$

$$H^{(3)}_{\theta,\phi,K}(y, z) := P(y) \wedge P(z) \wedge \forall t[\theta(y, z, t) \to \exists x_1 \exists x_2(\phi(x_1, t) \wedge K(x_1) \wedge \phi(x_2, t) \wedge^{\neg} K(x_2))]$$

E. Bouscaren studied pairs of models of superstable theory and found sufficient and necessary condition that theory of pair of models is superstable.[3]

We believe that if these formulas do not satisfy Order Property then expansion of theory is stable as proved E.Bouscaren for theory of pair of superstable theory.[3]

Conjecture 1. If M is a stable model, then A^* is stable iff for any L-formulas θ, ϕ for any $i \in \{1,2,3\}$ $H^{(i)}_{\theta\phi,P}$ has no Order Property.

Definition 2. (M, A) is benign if for every $\alpha, \beta \in M$ if $tp(\alpha|A) = tp(\beta|A)$ implies $tp_*(\alpha|A) = tp_*(\beta|A)$ where the $*$-type in language with a new predicate P denoting A.

Definition 3. The set A is weakly benign in M if for every $\alpha, \beta \in M$ if $stp(\alpha|A) = stp(\beta|A)$ implies $tp_*(\alpha|A) = tp_*(\beta|A)$ (stp(α)-strongly type [4]).

Definition 4. (M, A) is uniformly weakly benign if every (N, B) which is $L(P)$-elementary equivalent to (M, A) is weakly benign.

Conjecture 2. Let M be a stable model and (M, A) be uniformly weakly benign, then (M, A) is stable iff for any L-formulas θ, ϕ for any $i \in \{1,2,3\}$ $H^{(i)}_{\theta\phi,P}$ has no Order Property.

Funding: The authors were supported by the grant no. AP19677434 of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan.

Keywords: Expansion, Stable theory, Order Property.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

References

[1] Baizhanov B., Baldwin J.T. *Local Homogeneity*, The Journal of Symbolic Logic, vol.69 (2004), 1243-1260.

[2] Baizhanov B., Baldwin J.T. and Shelah S. *Subsets of superstable structures are weakly benign* , The Journal of Symbolic Logic, vol.70 (2005), 142-150.

[3] Bouscaren E. *Dimensional Order Property and pairs of Models*, Annals of Pure and Applied Logic, 41 (1989), 205-231.

[4] Shelah S. *Classification Theory and the Number of Nonisomorphic Models*, North Holland (1978).

[5] Baizhanov B., Baldwin J.T. *Notes on Expansion of Stable Model* (draft).

Expansion of a model of strongly minimal trivial theory by unary predicates

Bektur BAIZHANOV[1,2,a], Madina BERDIKULOVA[2,b]

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2]*Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan*
E-mail: [a]*baizhanov@math.kz*, [b]*berd2024@inbox.ru*

Let $\mathfrak{M} = \langle M, \Sigma\rangle$ be a structure of signature Σ, $\mathfrak{M}^+ = \langle M, \Sigma \bigcup P^n\rangle$ be a structure of signature $\Sigma^+ = \Sigma \bigcup P^n$, such that $P^n(\mathfrak{M}^+) \neq \varphi(\mathfrak{M}, \bar{a})$ for any definable set $\varphi(\mathfrak{M}, \bar{a}), \mathfrak{M}^+$ is called to be **expansion** of $\mathfrak{M}$.

Let $\mathfrak{M} = \langle M, \Sigma\rangle$ be a model of complete theory T, $\mathfrak{M}$ is **minimal**, if for any 1-formula $\varphi(x, \bar{a}), \bar{a} \in M, \varphi(M, \bar{a})$ or $\neg\varphi(M, \bar{a})$ finite.

By other words, it is impossible to divide M into two definable infinite sets.

Theory T is a **strongly minimal**, if any model of T is minimal.

The strongly minimal theory T is **trivial**, if for any finite sets $a_1, ..., a_n \subset M$, $acl(a_1, ..., a_n) = \bigcup_{1\leq i\leq n} acl(a_i)$, where for any $A \subseteq M$, algebraic closure of A $acl(A) = \langle b \in M|\ \exists\varphi(x, \bar{a}), \bar{a} \in \exists n_\varphi, \mathfrak{M} \models \exists^{\leq n} x\varphi(x, \bar{a}) \wedge \varphi(b, \bar{a})\rangle$.

A complete theory T is **superstable**, if there are not infinite set of formulas $\varphi_1(x, \bar{y_1}), ..., \varphi_n(x, \bar{y_n}), ..., n < \omega$ and $\bar{a_1}, ..., \bar{a}_{i,...,i<\omega}$, $length(\bar{a_i}) = length(\bar{y_1})$...
$length(\bar{a}_{i_1 i_2 ... i_n}) = length(\bar{y_n})$, such that for any $n < \omega$, for any $i_1, i_2, ..., i_n < \omega$
$\mathfrak{M} \models \exists x(\varphi_1(x, \bar{a}_{i_1}) \wedge \varphi_2(x, \bar{a}_{i_1 i_2}) \wedge \varphi_3(x, \bar{a}_{i_1 i_2 i_3}) \wedge ... \wedge \varphi_n(x, \bar{a}_{i_1 i_2 i_3 ... i_n})$.

Theorem 1. *Expansion of a model of strongly minimal trivial theory by family unary predicates has superstable theory.*

Funding: The first author were supported by the grant no. AP19677434 of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan.

Keywords: strongly minimal theory, algebraic closure, superstable theory, expansion.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C15, 03C64

References

[1] B. Baizhanov, John T. Baldwin Local homogeneity, *The Journal of Symbolic Logic* , **69**:4 (December 2004), pp. 1243 – 1260

Discrete ordered theories and quasi-successor properties

Bektur BAIZHANOV[1,2,a], Olzhas UMBETBAYEV[1,3,b], Tatyana ZAMBARNAYA[1,c]

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2]*Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan*
[3]*Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*baizhanov@math.kz,* [b]*umbetbayev@math.kz,* [c]*zambarnaya@math.kz*

Let $\mathfrak{M}$ be an $|A|^+$-saturated linearly ordered structure, where $A \subseteq M$, and let $p \in S_1(A)$ be a non-algebraic type. Then an A-definable formula $\varphi(x, y)$ is called to be a quasi-successor on the type p if for each $\alpha \in p(\mathfrak{M})$ there are $\gamma_1, \gamma_2 \in p(\mathfrak{M}), \beta \in (\varphi(M, \alpha) \setminus \{\alpha\} \cap p(\mathfrak{M}))$ such that α is the left (right) endpoint of the convex in $p(\mathfrak{M})$ set $(\varphi(M, \alpha) \cap p(\mathfrak{M})) \neq \{\alpha\}$ and belongs to this set, $\gamma_1 < \varphi(M, \alpha) < \gamma_2$, and $p(\mathfrak{M}) \cap (\varphi(M, \beta) \setminus \varphi(M, \alpha)) \neq \emptyset$.

Theorem 1. *Let $\mathfrak{M}$ be a countably saturated model of a small linearly ordered theory T, and let for each $n < \omega$ there exists $m_n \geq n$ such that in $\mathfrak{M}$ there is a discretely ordered chain of length m_n. Then there exist a finite set $A \subset M$, a 1-type $p \in S_1(A)$, and a 2-A-formula $\varphi(x, y)$ which is a quasi-successor on the type p.*

Funding: The authors were supported by the grant no. AP14971869 of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan.

Keywords: small theory, linear order, discrete order.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C15, 03C64

References

[1] Moconja S., Tanovic P. Stationarily ordered types and the number of countable models, *Annals of Pure and Applied Logic*, **171**:3 (2019), 102765.

[2] Rubin M. Theories of linear order, *Israel Journal of Mathematics*, **17** (1974), 392–443.

On the existence of a model companion for ω_1-categorical theories

M. BEKENOV[1], A. KABIDENOV[1], A. KASATOVA[2]

[1]*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*
[2]*Medical University of Karaganda, Karagandy, Kazakhstan*
E-mail: kassatova@kmu.kz, kabiden@gmal.com, bekenov50@mail.ru)

We consider theories T of a first-order language of countable signature σ, which has only infinite models (i.e. algebraic structures of signature σ, all countable models of theory T are elementarily embedded for some cardinal $\lambda > \omega$ into all models of cardinality λ of theory T. Uncountably categorical theories of T are like that. Conditions are given under which, for such theories T, there exists a model companion.

Funding: This research was funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19677451).

Keywords: model companion, ω_1-categorical theory.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C48, 03C50, 03C07

References

[1] 1. A.Robinson, Introduction to Model Theory and to the Metamathematies of Algebra North-Holland, Amsterdam, 1963.

[2] P. Eklof, G. Sabbagh Model-completions and modules // Annals of Mathematical Logic. 1971. Vol. 2, no. 3. P. 251–295

[3] D. Saracino, Model companions for ω_0-categorical theories, American mathematical society, vol. 39, n. 3, 1973

[4] O.B. Belegradek, B.I. Zilber, Model companion of ω_1-categorical theory, 3rd All-Union Conference on Mathematical Logic, Novosibirsk, 1974, p.10

[5] G. Keisler, Ch. Ch. Chen, Theory of models, M. Mir, 1977

[6] M.I. Bekenov, Properties of elementary embeddability in Model Theory, Journal of Mathematical Sciences, vol. 230, 2018, 10-13

On the number of countable models of constant and unary predicates expansions of the dense meet-tree theory

A. B. DAULETIYAROVA[1,a], V. V. VERBOVSKIY[2,b]

[1] *SDU University, Kaskelen, Kazakhstan*

[2] *Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan*

E-mail: [a]*d_aigera95@mail.ru*, [b]*verbovskiy@math.kz*

We consider some possibilities of expansions T of a theory T_{dmt} of a dense meet-tree $\langle M, \leq\rangle$ [1, 3]. Recall that a *dense meet-tree* $\mathcal{M} = \langle M; \leq\rangle$ is a lower semilattice without least and greatest elements such that:

(a) for each pair of incomparable elements, their join does not exist;

(b) for each pair of distinct comparable elements, there is an element between them;

(c) for each element a there exist infinitely many pairwise incomparable elements greater than a, whose infimum is equal to a.

We extend the theory T_{dmt} to a T_0, so that constants $c_k^{(0)}$, $k \in \omega$, form a strictly increasing sequence. Note that the theory T_0 was constructed by Peretyat'kin in [2], where he proved that it is Ehrenfeucht, namely, T_0 has exactly three countable models: the prime model, the saturated model, and the prime model over the realization of the powerful type $p_0(x)$, isolated by the set of formulas $\{c_k^{(0)} < x \mid k \in \omega\}$.

Now we construct a theory T_1. To do this, we expand the theory T_0 to a T_1 with a strictly decreasing sequence of constants $c_k^{(1)}$, $k \in \omega$. We have the following pairwise non-isomorphic countable models of T_1:

Theorem 1. *The theory T_1 has exactly 6 countable models up to isomorphism.*

Starting with the theory T_n, where $n \geq 2$ the situation looks a little different since there are several meets, that are either the same or different up to the renaming of the constants. Thus, we have the following:

Theorem 2. *Let T_n, where $n \geq 2$, be a countable constant expansions of the dense meet-tree theory T_{dmt} with increasing sequence of constants $(c_k^{(0)})_{k\in\omega}$ and n number of decreasing sequences of constants $(c_k^{(2)})_{k\in\omega}, \ldots, (c_k^{(n)})_{k\in\omega}$, so that $c_k^{(0)} < c_k^{(1)}, \ldots, c_k^{(0)} < c_k^{(n)}$, $k \in \omega$ and $c_k^{(j)} \parallel c_k^{(t)}$ for each $1 \leq j \neq t \leq n$. Then T has exactly 3^{n+1} countable models, where 2^{n+1} of them are prime models.*

If there are several sequences that are increasing, but pairwise incomparable, and each one has several sequences that are decreasing from above, then this can be considered as a disjunctive union. Then the following theorem will be true.

Theorem 3. *Let T be a countable constant expansions of the dense meet-tree theory T_{dmt} with n number of increasing sequence of constants $(c_k^{(i,0)})_{k\in\omega}$ and for each i there is $\tau(i)$ number of decreasing sequence of constants $(c_k^{(1,i)})_{k\in\omega}, \ldots, (c_k^{(\tau(i),i)})_{k\in\omega}$ defining the function $d(m) = \{i \mid \tau(i) = m\}$, so that $c_k^{(i,0)} < c_k^{(1,i)}, \ldots, c_k^{(i,0)} < c_k^{(\tau(i),i)}$, $k \in \omega$ and $c_k^{(j,i)} \parallel c_k^{(t,i)}$ for each $1 \le j \ne t \le \tau(i)$. Let $I = \{i : 1 \le i \le n \wedge d(i) \ne 1\}$. Then T has exactly*

$$6^{d(1)} \cdot \prod_{i\in I} 3^{\tau(i)+1}$$

countable models, where $3^{d(1)} \cdot \prod\limits_{i\in I} 2^{\tau(i)+1}$ of them are prime models.

To obtain the theory T_n^P we replace the set of constants $\{c_k^{(1)}, c_k^{(2)}, \ldots c_k^{(n)}\}$ in the theory T_n with the predicates P_k.

In case the same meets the number of non-isomorphic countable models of T_n^P is equal to the number of combinations of a three-element set with repetitions, namely $3 \cdot C(3+n-1, n) = 3 \cdot \frac{(n+2)(n+1)}{2}$ countable models since in T_n we have 3 possible realizations of each type p_k, where $k \in \{1, \ldots n\}$. Note that the number of non-isomorphic prime countable models of T_n^P is equal to the number of combinations of a two-element set with repetitions, so, the number is $2 \cdot C(2+n-1, n) = 2 \cdot (n+1)$.

Let a be a vertex which is fixed by each automorphism of $\mathcal{T}$ and which has at least two sons of the same type. Let b_0 be a leaf which is a descendant of a. Let b_1 be the parent of b_0 of the type m_1^0, that is, b_1 has exactly m_1^0 sons.

Let b_2 be the parent of b_1 and have exactly m_2^0 sons of the same type with b_1. And so on, let $b_k = a$ be the parent of b_{k-1} and let it have exactly m_k^0 sons of the same type as b_{k-1} has. Let $\gamma_1^0 = C(3 + m_1^0 - 1, m_1^0)$ and $\gamma_{i+1}^0 = C(3 + m_i^0 - 1, m_i^0)$. Let $\delta_1^0 = C(2 + m_1^0 - 1, m_1^0)$ and $\delta_{i+1}^0 = C(2 + m_i^0 - 1, m_i^0)$.

Let $B_0 = G(b_0)$, where G is the group of all automorphisms of the rooted tree $\mathcal{T}$. Then similarly to the example above we can prove that there exist γ_k^0 colorings of B_0 into 3 colors and δ_k^0 colorings of B_0 into 2 colors. Given a set B_0, we denote γ_k^0 by Γ_0 and δ_k^0 by Δ_0.

Now we consider T_n and its possible completions different from the considered above and the next theorem follows.

Theorem 4. *Let T be a completion of T_n^P and let $\mathcal{T}$ be the corresponding rooted tree. Let $B_0, \ldots, B_w$ be a partition of the set of leaves of $\mathcal{T}$, where each B_i is the orbit of some leaf under the action of the group of automorphisms of $\mathcal{T}$. Then the number of countable models of T is equal to*

$$3 \cdot \prod_{i\le w} \Gamma_i$$

and the number of countable prime models is equal to

$$2 \cdot \prod_{i\le w} \Delta_i.$$

Funding: The work is supported by CS of MSHE of RK (grant BR20281002 "Fundamental research in mathematics and mathematical modeling").

Keywords: Constants expansion, Ehrenfeucht's theory, the number of limit models, the number of prime models, small theory.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C15, 03C35

References

[1] Mennuni R. Weakly binary expansions of dense meet-trees, *Mathematical Logic Quarterly*, **68**:1 (2022), 32–47.

[2] Peretyat'kin M. G. On complete theories with a finite number of denumerable models, *Algebra and Logic*, **12**:5 (1973), 310–326.

[3] Sudoplatov S. V. *Classification of Countable Models of Complete Theories*, Novosibirsk : NSTU, (2018).

Reverse associative operad and non-symmetric version of symmetric operad

Askar DZHUMADIL'DAEV

Institute of mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: dzhuma@hotmail.com

An algebra A with identity $revas = 0$, where $revas(t_1, t_2, t_3) = t_1(t_2t_3) - (t_3t_2)t_1$ is called *reverse associative.* Such algebras appear in considering non-symmetric versions of symmetric operads. Let operad $\mathcal{A}$ is symmetric operad, i.e., it is generated by multilinear polynomial identities $f_1 \equiv 0, f_2 \equiv 0, \ldots$ where $f_1 = t_1t_2 + \epsilon\, t_2t_1$ with $\epsilon^2 = 1$, and $deg\, f_i > 2$, for $i > 1$. Denote by $\mathcal{A}^\flat$ a new operad generated by polynomial identities of $\mathcal{A}$, where the identity of degree 2 is changed by the following identites of degree $3 :$ $f_{1,r}$ and $revas$, where $f_1^r(t_1, t_2, t_3) = f(t_1, t_2)\, t_3$. Here instead of $f_{1,r}$ one can use also the polynomial of degree three $f_{1,l}(t_1, t_2, t_3) = t_3\, f_1(t_1, t_2)$.

Theorem 1. *The operad $\mathcal{A}^\flat$ is non-symmetric, but it is almost symmetric in the following sence: it satisfies all consequences of the identity $f_1 \equiv 0$ for degrees more than 2. In particular, if*

$$G(t) = \sum_{i\geq 1}(-1)^i d_i \frac{t^i}{i!}, \quad G^\flat(t) = \sum_{i\geq 1}(-1)^i d_i^\flat \frac{t^i}{i!},$$

are skew-exponential generating functions of multilinear parts of operads $\mathcal{A}$ and $\mathcal{A}^\flat$, then

$$G^\flat(t) = \frac{t^2}{2} + G(t).$$

Example. Let $\mathcal{L}ie = \langle f_1, f_2\rangle$ be operad of Lie algebras: $f_1(t_1, t_2) = [t_1, t_2] = t_1t_2 - t_2t_1, f_2(t_1, t_2, t_3) = (t_1t_2)t_3 + (t_2t_3)t_1 + (t_3t_1)t_2$. Then $\mathcal{L}ie^\flat = \langle f_{1,r}, revas, f_2\rangle$ coincides with two-sided Leibniz operad. Note that another version of Leibniz operad generated by polynomial identites $\{f_{1,r}, f_{1,l}\}$ does not satisfy some degree 3 consequences of the skew-symmetric identity $f_1 \equiv 0$, for example, $revas \equiv 0$ is not identity.

Example. For operad $\mathcal{A}$ denote by $\mathcal{A}^!$ its Koszul dual. Then

$$(\mathcal{A}sCom)^! = \mathcal{L}ie, \quad (\mathcal{A}sCom^\flat)^! = \mathcal{L}ieAdm,$$

$$(\mathcal{A}sACom)^! = \mathcal{C}om, \quad (\mathcal{A}sACom^\flat)^! = \mathcal{M}ag,$$

$$\mathcal{L}ie^\flat = \mathcal{L}ei, \quad (\mathcal{L}ie^\flat)^! = (\mathcal{L}ei)^! = \mathcal{A}sAdm, .$$

Let $arevas(t_1, t_2, t_3) = t_1(t_2t_3) + (t_3t_2)t_1$ be anti-reverse associative polynomial. Call colored rooted tree plus-colored (minus-colored) if colors of all vertices coincide with color of root (colors are alternating for any path from root to leaf). For element u of free reverse associative algebra denote by u_+ and u_- projection of u to a space generated by plus-colored trees with black root and white root. Similarly, for element u of free anti-reverse associative algebra denote by u_+ and u_- projection of u to a space generated by minus-colored trees with black root and white root.

Theorem 2. *Reverse associative and anti-reverse associative operads have the following properties.*

- a *Operads Revas and Arevas are Koszul*
- b *Any anti-reverse associative algebra is associative-admissible and Lie-admissible*
- c *$Revas^! = Arevas$*
- d *$Revas = \langle\{t_1, [t_2, t_3]\}, [t_1, \{t_2, t_3\}]\rangle$, where $\{t_1, t_2\} = t_1t_2 + t_2t_1$*

e *Arevas* $= \langle [t_1,[t_2,t_3]], \{t_1,\{t_2,t_3\}\}\rangle$

f *Plus-colored trees generate a base of free reverse-associative algebra. In particular,* $Revas(n) = Com^+(n) \oplus Com^-(n)$ *if* $n > 1$

g *Minus-colored trees generate a base of free anti-reverse-commutative algebra. In particular,* $Arevas(n) = Com^{\pm}(n) \oplus Com^{\mp}(n)$ *if* $n > 1$

h $dim\, Arevas(n) = dim\, Revas(n) = 2(2n-1)!!$, *if* $n > 1$ *and* $dim\, Arevas(1) = dim\, Revas(1) = 1$.

i $Arevas = ComNil_2 * AcomNil_2$, *where* $ComNil_2 = \langle t_1t_2 - t_2t_1, (t_1t_2)t_3\rangle$, $AcomNil_2 = \langle t_1t_2 + t_2t_1, (t_1t_2)t_3\rangle$.

j *Multiplication table in free reverse associative algebra* $F_+(X)$ *generated by elements set* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *can be given by*

$$x_ix_j = x_i\bullet x_j + x_i\circ x_j,\ x_iu = x_i\bullet u_+ + x_i\circ u_-,\ ux_j = u_+\bullet x_j + u_-\circ x_j,\ uv = u_+\circ v_+ + u_-\circ v_-,$$

where $u, v \in F_+(X)^2, 1 \le i, j \le n$.

k *Multiplication table in free anti-reverse associative algebra* $F_-(X)$ *generated by elements of* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *can be given by*

$$x_ix_j = x_i\bullet x_j + x_i\circ x_j,\ x_iu = x_i\bullet u_- + x_i\circ u_+,\ ux_j = u_-\bullet x_j + u_+\circ x_j,\ uv = u_-\circ v_- + u_+\circ v_+,$$

where $u, v \in F_-(X)^2, 1 \le i, j \le n$.

Funding: The work is supported by CS of MSHE of RK (grant BR20281002 “Fundamental research in mathematics and mathematical modeling”

Keywords: associative algebra, operad, reverse associative algebra.

2010 Mathematics Subject Classification: 16G30

Associative-admissibe and Lie-admissible operads

Askar DZHUMADIL’DAEV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: dzhuma@hotmail.com

For an algebra $A = (A, \times)$ denote by $A^- = (A, \circ)$, $A^+ = (A, \bullet)$ and $A^{\mp} = (A, \circ, \bullet)$ its minus-, plus- and polarized versions, where

$$a \circ b = 1/2(a\cdot b - b\cdot a), a \bullet b = 1/2(a\cdot b + b\cdot a).$$

Conversely, for dialgebra $A = (A, \circ, \bullet)$, where $\circ$ and $\bullet$ are skew-symmetric and symmmetric multiplications denote by $(A, \times)$ its depolarized version, where

$$a \times b = a \circ b + b \bullet a.$$

An algebra A is called *Aslia* (Asssociative-Lie-admissible), if it satisfies the identity $aslia \equiv 0$, where

$$aslia = aslia(t_1, t_2, t_3) = [t_1, [t_2, t_3]] + 2(t_2(t_3t_1) - t_3(t_2t_1) - (t_1t_2)t_3 + (t_1t_3)t_2).$$

Theorem 1. *($p \neq 3$) A polarization of any Aslia algebra $(A, \times)$ is Associative-admissible and Lie-admissible,*

$$< a, b, c >= a \bullet (b \bullet c) - (a \bullet b) \bullet c = 0,$$

$$[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0,$$

for any $a, b, c \in A$. Conversely, depolarization of any Associative-admissible and Lie-admissible dialgebra $(A, \circ, \bullet)$ is Aslia.

Theorem 2. *Let $\mathcal{A}sLieAdm$ be Associative-admissible and Lie-admissible operad. The operad $\mathcal{A}sLieAdm$ has the following properties.*

- $\mathcal{A}sLieAdm$ *is Koszul*
- $\mathcal{A}sLieAdm = \langle aslia \rangle$, *if* $p \neq 3$
- $\mathcal{A}sLieAdm = \mathcal{A}sCom \star \mathcal{L}ie$
- $\mathcal{A}sLieAdm^! = \langle revcom, lwlei \text{ or } rwlei \rangle$
- $d_n^! = dim\ \mathcal{A}sLieAdm^!(n) = (n-1)! + 1$
- *Poincare series* $f^!_{\mathcal{A}sLieAdm}(x) = \sum_{i \geq 1} d_i^! \frac{x^i}{i!} = -1 + e^x - x - \ln(1-x)$
- $d_n = dim\ \mathcal{A}sLieAdm(n) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \lambda_k B_{n-1,k}(d_1, d_2, \ldots, d_{n-k})$, *where*

$$\lambda_k = \sum_{s=1}^{k} (-1)^s s! B_{k,s}(1! + 1, 2! + 1, \ldots, i! + 1, \ldots, (k - s + 1)!).$$

Theorem 3. *Associative-admissible operad has the following properties.*

a $\mathcal{L}ie^\flat = \mathcal{L}ei$

b $dim\ \mathcal{L}ie^\flat(n) = (n-1)!$, *if* $n \neq 2$ *and* $= 2$, *if* $n = 2$

c *Operads $\mathcal{A}sAdm$ and $\mathcal{L}ie^\flat$ are Koszul*

d $\mathcal{A}sAdm^! = \mathcal{L}ie^\flat$

e $\mathcal{A}sAdm = \mathcal{A}sCom \star \mathcal{A}com$

f *Dimensions of multi-linear parts of associative-admissible operad $d_n = dim\ \mathcal{A}sAdm(n)$ can be found by the following recurrence relations*

$$d_n = \sum_{k=1}^{n-1} k! F_{k+2} B_{n-1,k}(d_1, d_2, \ldots, d_{n-k}), \quad n > 1,$$

$$d_1 = 1,$$

where F_n are Fibonacci numbers and $B_{n,k}(x_1, \ldots, x_{n-k+1})$ are Bell polynomials.

Funding: The work is supported by CS of MSHE of RK (grant BR20281002 “Fundamental research in mathematics and mathematical modeling”

Keywords: associative algebra, operad, Lie-admissible operad, associative-admissible operadreverse associative algebra, Aslia.

2010 Mathematics Subject Classification: 16G30

On Nagata-Higman theorem for Novikov algebras

Askar DZHUMADIL'DAEV[a], Kaisar TULENBAYEV[b]

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: [a]*dzhuma@hotmail.com,* [b]*tulen75@hotmail.com*

Let $A = (A, \circ)$ be right-Novikov algebra over a field of characteristic 0,

$$a \circ [b, c] = (a \circ b) \circ c - (a \circ c) \circ b, \quad a \circ (b \circ c) = b \circ (a \circ c),$$

for any $a, b, c \in A$. Here $[a, b] = a \circ b - b \circ a$. Let $r_s, l_a : A \to A$ are right- and left-multiplication operators, $(b)r_a = b \circ a$, $(b)l_a = a \circ b$. In terms of right- and left- multiplication operators right-Novikov conditions can be written as

$$[r_a, r_b] = r_{[a,b]}, \quad r_{a \circ b} = r_b l_a, \quad [r_a, l_b] = l_a l_b - l_{b \circ a}, \quad [l_a, l_b] = 0, \quad \forall a, b \in A,$$

where $[X, Y] = XY - YX$ is Lie commutator. For $a \in A$ define its right- and left-powers $a^{\cdot n}$ and $a^{n \cdot}$ by

$$a^{\cdot n} = (a)r_a^{n-1} = (\ldots((a \circ a) \circ a) \ldots) \circ a,$$
$$a^{n \cdot} = (a)l_a^{n-1} = a \circ (a \circ (\cdots (a \circ a) \cdots)).$$

Number of a's in each case is n.

Main conjecture. *If $a^{\cdot n} = 0, n > 2$, for any $a \in A$, then $l_a^{2n-3} = 0$ for any $a \in A$. In particular, the identity $a^{\cdot n} = 0$ implies the identity $a^{(2n-2)\cdot} = 0$.*

Weaker version of conjecture: the identity $r_a^n = 0, \forall a \in A \Rightarrow l_a^{2n-1} = 0, \forall a \in A$. Note that $a^{\cdot n} = 0, \forall a \in A \Rightarrow r_a^n = 0, \forall a \in A$. Therefore, this version gives us a weaker version of main conjecture: the identity $a^{\cdot n} = 0$ implies that left-multiplication operator is nil with nil-index $2n - 1$

Theorem 1. *For right-Novikov algebras the main conjecture is true for $2 < n \le 8$.*

Theorem 2. *If A is right-Novikov algebra with identities $a^{\cdot n} = 0, a^{n \cdot} = 0$, then A is nilpotent with nilpotency index $N < n^2 + 1$.*

Corollary. *Any right-Novikov algebra with identity $a^{\cdot n} = 0$, $2 \le n \le 8$, is nilpotent with nilpotency index $N < 4n^2 - 8n + 5$.*

Funding: The work is supported by CS of MSHE of RK (grant BR20281002 "Fundamental research in mathematics and mathematical modeling"

Keywords: associative algebra, Novikov algebra.

2010 Mathematics Subject Classification: 16G30

Expansion, equivalence relations and dp-rank

Dilnaz KASSYMOVA[2,c], Bektur BAIZHANOV[1,2,a], Madina BAIKENGES[2,b]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan*
E-mail: [a]*baizhanov@math.kz,* [b]*200101031@stu.sdu.edu.kz,* [c]*200101042@stu.sdu.edu.kz*

A complete theory T has *dp-rank* $\ge n$ if there are formulas $\varphi_1(x, y), \ldots, \varphi_n(x, y)$ and mutually indiscernible sequences $(a_i^1)_{i<\omega}, \ldots, (a_i^n)_{i<\omega}$ such that for any function $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \omega$, the set of formulas

$$\{\varphi_k(x, a_{\sigma(k)}^k) : k \le n\} \cup \{\neg\varphi_k(x, a_i^k) : i \ne \sigma(k), k \le n\}$$

is consistent. A theory T has dp-rank is equal to n, if it does not have dp-rank $\ge$ n+1.

A theory T is **dp-minimal** if it has **dp-rank is equal to 1**. [1].

Theorem. For any $n > 1$ there are theories having dp-rank is n, and constructed from n-different relations of equivalents. Conditions for new equivalence relation are obtained so that expansion of the structure increases the dp-rank.

We give an example when n theory has four different equivalents, but the dp-rank is 2.

Funding: The first author was supported by the program no. BR20281002 of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan.

Keywords: dp-rank, equivalents relations, expansion.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C15, 03C64

References

[1] A. Dolich, J. Goodrick, D. Lippel, *Dp-Minimality:Basic Facts and Examples*, Norte Dame J.Formal Logic **52**(3), (2011), 267-288.

[2] B.S. Baizhanov, S. Baizhanov, A. Mukankyzy, *Dp-rank in different classes of theories*, Volume 18 №1/67 **2**, (2018), 1-3.

On cosemanticness classes of the fixed Jonsson spectrum

Aibat YESHKEYEV[a], Indira TUNGUSHBAYEVA[b] Aziza KOSHEKOVA[c]

Karaganda Buketov University, Karaganda, Kazakhstan

E-mail: [a]aibat.kz@gmail.com, [b]intng@mail.ru, [c]koshekova1998@mail.ru

We study Jonsson theories in a countable first-order language L.

Definiton 1 [1] A theory T is called Jonsson if the following conditions hold for T:

1. T has at least one infinite model;
2. T is an inductive theory;
3. T has the amalgam property (AP);
4. T has the joint embedding property (JEP).

Definition 2 [2] A set $JSp(K)$ of Jonsson theories of L, where

$$JSp(K) = \{T \mid T \text{ is a Jonsson theory and } K \subseteq Mod(T)\},$$

is said to be a Jonsson spectrum of K.

Definition 3 [3] T_1 and T_2 are said to be cosemantic Jonsson theories (denoted by $T_1 \bowtie T_2$), if $T_1^* = T_2^*$.

Let T be a Jonsson theory in L, $K \subseteq E_T$. We consider the Jonsson spectrum of the given class K. Let us introduce the cosemanticness relation on $JSp(K)$. As it is well known, this relation is an equivalence relation, and therefore divides the spectrum into cosemanticness classes. Thus, we get a factor set $JSp(K)_{/\bowtie}$. Next, we will work with some fixed cosemanticness class $[T]$. It is clear that all the Jonsson theories in this class have the same semantic model, which we denote by $C_{[T]}$. As part of the study, the following results were obtained.

Lemma 1 [4] *Let $[T] \in JSp(K)_{/\bowtie}$ consist only of $\exists$-complete theories, and let in $JSp(K)_{/\bowtie}$ there be such a class $[T']$, which consists of extensions of theories of the class $[T]$ in the same language. Then if $p(\bar{x}) \cup T$ is consistent for each theory $T \in [T]$, then $p(\bar{x}) \cup T'$ is also consistent for each theory $T' \in [T']$, where $p(\bar{x})$ is the set of $\exists$-formulas.*

Proposition [4] *Let $K' \subseteq K$, $[T] \in JSp(K)_{/\bowtie}$, and let $C_{[T]}$ be a semantic model of $[T]$. Then $T' \in [T]$, where*

$$T' = T^0(K') \vee T^0(C_{[T]}) = \{\varphi \vee \psi \mid \varphi \in T^0(K'),\ \psi \in T^0(C_{[T]})\}.$$

Theorem 1 [4] *Let T be an arbitrary inductive L-theory such that $A \models T$ for any $A \in K$, where K is a class of infinite L-structures, and let the cosemanticness class $[T'] \in JSp(K)_{/\bowtie}$ consist only of $\exists$-complete theories. Then $[T''] \in JSp(K)_{/\bowtie}$, where*

$$[T''] = \{T'' \mid T'' = T \cup T' \text{ for each } T' \in [T]\}.$$

Keywords: Jonsson theory, cosemanticness, cosemantic Jonsson theories, Jonsson spectrum, cosemanticness classes, Kaiser hull, Jonsson equivalence, J-class, cosemantic models, cosemantic classes.

2020 Mathematics Subject Classification: 03C50, 03C52

References

[1] Barwise,J. *Teoriya modelei: spravochnaia kniga po matematicheskoi logike. Chast 1 [Model theory: Handbook of mathematical logic. Part 1]*, Izdatelstvo Nauka, Moscow (1982).

[2] Ешкеев А.Р., Ульбрихт О.И. JSp-косемантичность R-модулей, *Сибирские Электронные Математические Известия*, **16** (2019), 1233–1244.

[3] Ешкеев А.Р., Касыметова М.Т. *Йонсоновские теории и их классы моделей*, Издательство КарГУ, Караганда (2016), 370с.

[4] Yeshkeyev, A.R., Tungushbayeva I.O., Koshekova A.K. The cosemanticness of Kaiser hulls of fixed classes of models, *Bulletin of the Karaganda University*, **1(103)** (2024), 208–217

On almost quasi-Urbanik structures and theories

Beibut KULPESHOV[1,a], Sergey SUDOPLATOV[2,b]

[1]*Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan*
[2]*Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*
E-mail: [a]*b.kulpeshov@kbtu.kz*, [b]*sudoplat@math.nsc.ru*

We continue to study natural characteristics of structures and theories introducing the notions of almost quasi-Urbanik structures and theories based on the notion of quasi-Urbanik structure. We also introduce existential and universal degrees similar to degrees of rigidity [2]. Spectra of these degrees are described for some natural classes of structures and theories including unary theories, preordered theories, spherically ordered theories [3] and strongly minimal theories [4].

Definition. A theory T is called *almost quasi-Urbanik*, if some expansion of T by finitely many constants is quasi-Urbanik, and the models $\mathcal{M}$ of T are *almost quasi-Urbanik*, too. If a finite set A of constants produces a quasi-Urbanik expansion T_A of T then we say that A *witnesses* that T is almost quasi-Urbanik. The least cardinality of the witnessing set A is called the *quasi-Urbanik $\exists$-degree* of T and it is denoted by $\deg^{\exists}_{\rm qU}(T)$. If these finite sets A do not exist we put $\deg^{\exists}_{\rm qU}(T)=\infty$. The minimal cardinality $n\in\omega$ such that each set A of cardinality n produces the quasi-Urbanik theory T_A is called the *quasi-Urbanik $\forall$-degree* of T and it is denoted by $\deg^{\forall}_{\rm qU}(T)$. If such n does not exist then we put $\deg^{\forall}_{\rm qU}(T)=\infty$. Similarly it is transformed to the models $\mathcal{M}$ of T with quasi-Urbanik $\exists$-degrees $\deg^{\exists}_{\rm qU}(\mathcal{M})$ and $\forall$-degrees $\deg^{\forall}_{\rm qU}(\mathcal{M})$.

Clearly, for any theory T, $\deg^{\exists}_{\rm qU}(T)=0$ iff $\deg^{\forall}_{\rm qU}(T)=0$, and iff T is quasi-Urbanik. Thus, by the definition any quasi-Urbanik theory is almost quasi-Urbanik. Besides, for any theory T,

$$\deg^{\exists}_{\rm qU}(T)\leq \deg^{\forall}_{\rm qU}(T) \tag{1}$$

implying that if T is not almost quasi-Urbanik then $\deg^{\exists}_{\rm qU}(T)=\deg^{\forall}_{\rm qU}(T)=\infty$, and vice versa. We have the similar effect for structures. At the same time there are examples illustrating that there are (almost) quasi-Urbanik structures whose theories are not almost quasi-Urbanik.

Theorem 1. *For any $\mu,\nu\in(\omega\setminus\{0\})\cup\{\infty\}$ with $\mu\leq\nu$ there is a theory $T_{\mu,\nu}$ such that $\deg^{\exists}_{\rm qU}(T_{\mu,\nu})=\mu$ and $\deg^{\forall}_{\rm qU}(T_{\mu,\nu})=\nu$.*

For a theory T we denote by $\deg_{2,{\rm qU}}(T)$ the pair $\left(\deg^{\exists}_{\rm qU}(T),\deg^{\forall}_{\rm qU}(T)\right)$ of quasi-Urbanik degrees for T. In view of the inequality (1) and Theorem 1 the set ${\rm DEG}_{2,{\rm qU}}=\{(0,0)\}\cup\{(\mu,\nu)\in((\omega\setminus\{0\})\cup\{\infty\})^2\mid\mu\leq\nu\}$ collects the spectrum of all possibilities for $\deg_{2,{\rm qU}}(T)$. For a family $\mathcal{T}$ of theories we denote by ${\rm DEG}_{2,{\rm qU}}(\mathcal{T})$ the restriction of ${\rm DEG}_{2,{\rm qU}}$ to the family of theories in $\mathcal{T}$: ${\rm DEG}_{2,{\rm qU}}(\mathcal{T})=\{\deg_{2,{\rm qU}}(T)\mid T\in\mathcal{T}\}$.

Let Σ_1 be a signature of unary predicate symbols and of constant symbols.

Theorem 2. *Let T be a theory of a signature Σ_1, $\mathcal{M} \models T$. Then the following conditions hold:* 1) *T is quasi-Urbanik iff each algebraic* 1*-type over $\emptyset$ has unique realization;* 2) *T is almost quasi-Urbanik iff T has finitely many algebraic* 1*-types $p_1, \ldots, p_n$ over $\emptyset$ with at least two realizations; here* $\deg^{\exists}_{\rm qU}(\mathcal{T}) = \sum\limits_{i=1}^{n}(|p_i(\mathcal{M})|-1)$*;* 3) $\deg^{\forall}_{\rm qU}(\mathcal{T}) > 0$ *is finite iff $\mathcal{M}$ is finite and has an algebraic* 1*-type $p \in S(\emptyset)$ with at least two realizations; here* $\deg^{\forall}{\rm qU}(\mathcal{T}) = |M|-1$.

Corollary 1. *Let $\mathcal{T}$ be the family of theories in signatures of the form Σ_1. Then* ${\rm DEG}_{2,{\rm qU}}(\mathcal{T}) = {\rm DEG}_{2,{\rm qU}}$.

Theorem 3. *Let $\mathcal{T}_{\rm po}$ be the family of theories of preordered structures. Then* ${\rm DEG}_{2,{\rm qU}}(\mathcal{T}_{\rm po}) = {\rm DEG}_{2,{\rm qU}}$.

Theorem 4. *Any n-spherically ordered structure $\mathcal{M}$ has an almost quasi-Urbanik theory T with* $\deg^{\forall}_{\rm qU}(T) \leq n-2$.

Theorem 5. *Let $\mathcal{T}_{\rm so}$ be the family of theories of spherically ordered structures. Then* ${\rm DEG}_{2,{\rm qU}}(\mathcal{T}_{\rm so}) = \{(0,0)\} \cup \{(m,n) \mid m,n \in \omega\setminus\{0\}, m \leq n\} = {\rm DEG}_{2,{\rm qU}} \setminus \{(\mu,\infty) \mid \mu \in (\omega\setminus\{0\}) \cup \{\infty\}\}$.

Theorem 6. *For any strongly minimal theory T, $\deg^{\forall}_{\rm qU}(T)$ equals either 0 or ∞.*

Corollary 2. *Let $\mathcal{T}_{\rm sm}$ be the family of strongly minimal theories. Then*

$$ {\rm DEG}_{2,{\rm qU}}(\mathcal{T}_{\rm sm}) = \{(0,0)\} \cup \{(\mu,\infty) \mid \mu \in (\omega\setminus\{0\}) \cup \{\infty\}\}. $$

Funding: The authors were supported by Science Committee of Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19674850), and in the framework of the State Contract of the Sobolev Institute of Mathematics, Project No. FWNF-2022-0012.

Keywords: almost quasi-Urbanik structure, almost quasi-Urbanik theory, degree of quasi-Urbanikness.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C30, 03C15, 03C50

References

[1] Zil'ber B.I. Hereditarily transitive groups and quasi-Urbanik structures, *American Mathematical Society Translations: Series* 2, **195** (1999), 165–186.

[2] Sudoplatov S.V. Variations of rigidity, *Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, **47** (2024), 119–136.

[3] Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. Spherical orders, properties and countable spectra of their theories, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **20**:2 (2023), 588–599.

[4] Baldwin J.T., Lachlan A.H. On strongly minimal sets, *Journal of Symbolic Logic*, **36**:1 (1971), 79–96.

On finite lattices generating not finitely based and non-profinite quasivarieties

Svetlana LUTSAK[1,a], Anvar NURAKUNOV[2,b]

[1]*M. Kozybayev North Kazakhstan University, Petropavlovsk, Kazakhstan*
[2]*Institute of Mathematics, NAS KR, Bishkek, Kyrgyzstan*
E-mail: [a]*sveta_lutsak@mail.ru*, [b]*a.nurakunov@gmail.com*

A (topological) lattice is profinite if it is representable as an inverse limit of finite lattices (endowed with the product topology). A quasivariety $\mathbf{N}$ is profinite if every profinite lattice in $\mathbf{N}$ is an inverse limit of finite lattices from $\mathbf{N}$. We present a sufficient condition on a locally finite quasivariety of lattices which provides not finite axiomatizability and non-profiniteness of this quasivariety.

Theorem. *Let $\mathbf{N}$ be a locally finite quasivarieties of lattices satisfying the following conditions:*

a) there is a finite lattice M with a semi-splitting pair (a, b) such that $M \notin \mathbf{N}$ and $M_{ab} \in \mathbf{N}$;

b) there exists a finite simple lattice $P \in \mathbf{N}$ which is not a proper homomorphic image of any subdirectly $\mathbf{N}$-irreducible lattice.

Then the quasivariety $\mathbf{N}$ is not profinite, as well as has no finite basis of quasi-identities.

These yield a host of examples of finite lattices that generate no finitely axiomatizable and non-profinite quasivarieties.

Funding: The first author was funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (grant no. AP09058390).

Keywords: lattice, quasivariety, topological quasivariety

2010 Mathematics Subject Classification: 08C15, 06C99

On Pseudofiniteness of Unars

Nurlan MARKHABATOV

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan
E-mail: markhabatov@gmail.com

Our research concerns theories of unars approximated by theories of finite unars [1]. This work continues, possibly concludes, research on pseudofinite unars [2,4,5,6].

Definition. [A.Lachlan] Let Σ be a countable signature and let $\mathcal{M}$ be a countable and ω-categorical Σ-structure. Σ-structure $\mathcal{M}$ (or $Th(\mathcal{M})$) is said to be *smoothly approximable* if there is an ascending chain of finite substructures $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{M}$ such that $\bigcup_{i\in\omega} \mathcal{M}_i = \mathcal{M}$ and for every i, and for every $\bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{M}_i$ if $tp_{\mathcal{M}}(\bar{a}) = tp_{\mathcal{M}}(\bar{b})$, then there is an automorphism σ of M such that $\sigma(\bar{a}) = \bar{b}$ and $\sigma(\mathcal{M}_i) = \mathcal{M}_i$.

Countably categorical unars were characterized in [3].

Proposition 1. *Any infinite ω-categorical unar $\mathcal{U} = \langle U, f\rangle$ is smoothly approxi-mable.*

Model-theoretic properties such as pseudofiniteness and definable minimality of unars were studied in [5] and [6], respectively.

Proposition 2. *Let T be the theory of a strongly minimal unar such that each vertex has n preimages for some natural n. Then the theory T is pseudofinite if and only if $n = 1$.*

Funding: This research was funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19674850, AP19677451).

Keywords: approximation of theory, pseudofinite theory, strongly minimal unars.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C48, 03C50, 03C07

References

[1] Sudoplatov S. V. Approximations of theories // *Siberian Electronic Mathematical Reports,* 2020, vol. 17, pp. 715–725. https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.049

[2] N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov, On approximations of unars, Mal'tsev meeting: Proceedings of the International scientific conference, (Novosibirsk, September 20–24, 2021), Publ.: S. L. Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, 2021, P.168

[3] Ovchinnikova E.V., Shishmarev Yu.E., (1988). Countably categorical graphs, Ninth All-Union Conference on Mathematical Logic. Leningrad, September 27-29, dedicated to the 85th anniversary of Corresponding Member of the USSR Academy of Sciences A.A. Markov: abstracts, p.120

[4] N. D. Markhabatov, Types Of Approximation Of The Theories Of Unars, ABSTRACTS of the VII World Congress of Turkic World Mathematicians (TWMS Congress-2023) (September 20-23, Turkestan, Kazakhstan), 2023, 247

[5] N. D. Markhabatov, Approximations of strongly minimal unars, Mal'tsev meeting: abstract. report international conf. (Novosibirsk, November 13-17, 2023), Publishing House, S. L. Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, 2023, 119

[6] E.R. Baisalov, K.A. Meirembekov, A.T. Nurtazin, Definably-minimal models, Model theory in Kazakhstan (editor M.M. Erimbetov), Almaty: EcoStudy, 2006, 140-157. (in Russian)

Identities in mutations of bicommutative algebras

Madina OSTEMIROVA[a], Farukh MASHUROV[b]

SDU University, Kaskelen, Kazakhstan
E-mail:
[a]*madinaostemirova@gmail.com*, [b]*farukh.mashurov@sdu.edu.kz*

An algebra $\mathcal{B} = (\mathcal{B}, \cdot)$ with vector space $\mathcal{B}$ and multiplication $\cdot$ is called bicommutative if it satisfies the identities

$$a(bc) = b(ac), \quad (ab)c = (ac)b$$

for any $a, b, c \in \mathcal{B}$. Define the mutation product on $\mathcal{B}$ for fixed $p, q \in \mathcal{B}$ by $\langle a, b\rangle = (ap)b - b(qa)$. We obtain that any bicommutative algebra under the mutation product satisfies Lie-admissible identity, which follows from two independent identities of degree three. Moreover, we obtain all identities of degree four.

Theorem 1. *Every identity of degree 3 in a mutation of a bicommutative algebra* $(\mathcal{B}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *follows from identities:*

$$\langle\langle a, b\rangle, c\rangle - \langle\langle a, c\rangle, b\rangle + \langle b, \langle c, a\rangle\rangle - \langle c, \langle b, a\rangle\rangle = 0,$$

$$\langle a, \langle b, c\rangle\rangle - \langle a, \langle c, b\rangle\rangle - \langle b, \langle a, c\rangle\rangle + \langle b, \langle c, a\rangle\rangle + \langle c, \langle a, b\rangle\rangle - \langle c, \langle b, a\rangle\rangle = 0.$$

Theorem 2. *Every identity of degree 4 in a mutation of a bicommutative algebra* $(\mathcal{B}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *follows from identities:*

$$\langle\langle a, \langle d, c\rangle\rangle, b\rangle - \langle a, \langle\langle d, c\rangle, b\rangle\rangle = 0,$$

$$\langle\langle\langle b, c\rangle, a\rangle, d\rangle - \langle\langle\langle b, d\rangle, a\rangle, c\rangle + \langle c, \langle\langle d, b\rangle, a\rangle\rangle - \langle d, \langle\langle c, b\rangle, a\rangle\rangle = 0,$$

$$\langle\langle b, \langle a, c\rangle\rangle, d\rangle - \langle b, \langle\langle a, d\rangle, c\rangle\rangle + \langle b, \langle c, \langle d, a\rangle\rangle\rangle - \langle b, \langle d, \langle c, a\rangle\rangle\rangle = 0,$$

$$\langle\langle\langle d, b\rangle, a\rangle, c\rangle - \langle\langle\langle d, c\rangle, a\rangle, b\rangle + \langle b, \langle\langle d, c\rangle, a\rangle\rangle - \langle c, \langle\langle d, b\rangle, a\rangle\rangle - \langle d, \langle\langle b, c\rangle, a\rangle\rangle + \langle d, \langle\langle c, b\rangle, a\rangle\rangle = 0,$$

$$\langle\langle b, \langle d, a\rangle\rangle, c\rangle - \langle b, \langle\langle d, c\rangle, a\rangle\rangle + \langle a, \langle b, \langle d, c\rangle\rangle\rangle - \langle b, \langle c, \langle d, a\rangle\rangle\rangle - \langle b, \langle d, \langle a, c\rangle\rangle\rangle + \langle b, \langle d, \langle c, a\rangle\rangle\rangle = 0,$$

$$\langle\langle\langle a, b\rangle, c\rangle, d\rangle + \langle b, \langle\langle d, c\rangle, a\rangle\rangle - \langle a, \langle b, \langle d, c\rangle\rangle\rangle - \langle c, \langle d, \langle b, a\rangle\rangle\rangle -$$
$$\langle\langle\langle a, d\rangle, b\rangle, c\rangle + \langle a, \langle d, \langle b, c\rangle\rangle\rangle + \langle b, \langle c, \langle d, a\rangle\rangle\rangle - \langle d, \langle\langle b, c\rangle, a\rangle\rangle = 0.$$

Funding: This research was funded by an internal research grant from SDU University.

Keywords: bicommutative algebra, mutation, Lie-admissible algebras.

2010 Mathematics Subject Classification: 17A30, 17B01, 17B35.

On variations of rigidity for abelian groups

Inessa PAVLYUK[1,a], Sergey SUDOPLATOV[2,b]

[1]*Novosibirsk State Technical University, Russia*
[2]*Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*
E-mail: [a]*inessa7772@mail.ru*, [b]*sudoplat@math.nsc.ru*

We continue to study characteristics of families of abelian groups applying a general approach for degrees $\deg_4(\mathcal{M}) = \Big(\deg^{\exists\text{-sem}}_{\text{rig}}(\mathcal{M}), \deg^{\exists\text{-synt}}_{\text{rig}}(\mathcal{M}), \deg^{\forall\text{-sem}}_{\text{rig}}(\mathcal{M}), \deg^{\forall\text{-synt}}_{\text{rig}}(\mathcal{M}) \Big)$ and indexes $\text{ind}_{\text{rig}}(\mathcal{M})$ of rigidity [1] for structures $\mathcal{M}$ to the class of standard abelian groups [2–5]. We use both properties of these degrees for structures with arbitrary cardinalities [1] and for finite ones [6] as well as possibilities of Szmielew invariants $\alpha_{p,n}$, β_p, γ_p, ε and of ranks rk.

Theorem 1. *For any finite abelian group $\mathcal{A}$ the following conditions are equivalent:* (1) $\mathcal{A}$ *is quasi-Urbanik;* (2) $\deg_4(\mathcal{A}) = (0,0,0,0)$*;* (3) $|\mathcal{A}| \le 2$.

Recall that any finite abelian group $\mathcal{S}$ is represented in a standard form, i.e. as a direct sum $\oplus_{p,n}\mathbf{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})}$. Recall also that *Euler function* $\varphi(n)$ is defined as follows: $\varphi(n) = |\{m \in \mathbf{Z}_n \mid (m,n) = 1\}|$.

Theorem 2. *For any finite abelian group $\mathcal{A} = \oplus_{p,n}\mathbf{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})}$,*

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{A}) = \prod_{p,n}(p^{n\alpha_{p,n}} - (p^n - \varphi(p^n))^{\alpha_{p,n}}).$$

Proposition 1. *For any finite abelian group $\mathcal{A} = \oplus_{p,n}\mathbf{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})}$, $\deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-sem}}(\mathcal{A}) = \deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{A}) = \delta$, with $\delta = \mathrm{rk}(\mathcal{A}) - 1$ if $\alpha_{2,1} = 1$, and with $\delta = \mathrm{rk}(\mathcal{A})$ if $\alpha_{2,1} \ne 1$.*

Proposition 2. *For any finite abelian group $\mathcal{A} = \oplus_{p,n}\mathbf{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})}$ with some $\alpha_{p,n} > 0$ and $\mathcal{A} \not\cong \mathbf{Z}_2$, $\deg_{\mathrm{rig}}^{\forall\text{-sem}}(\mathcal{A}) = \deg_{\mathrm{rig}}^{\forall\text{-synt}}(\mathcal{A}) = \zeta$, where*

$$\zeta = q^{n_0(\alpha_{q,n_0}-1)}q^{n_0-1} \times \prod_{\alpha_{p,n}>0, p\neq q, \text{ or } p=q \text{ and } n_0>n} p^{n\alpha_{p,n}},$$

if $\alpha_{2,1} = 1$, and

$$\zeta = q^{n_0(\alpha_{q,n_0}-1)}q^{n_0-1} \times \prod_{\alpha_{p,n}>0, p\neq q, \text{ or } p=q \text{ and } n_0>n} p^{n\alpha_{p,n}} + 1,$$

if $\alpha_{2,1} \ne 1$, q is the maximal prime number with $\alpha_{q,n} > 0$ and n_0 is maximal one among n with $\alpha_{q,n} > 0$.

For a finite abelian group $\mathcal{A}$ we denote by $\delta(\mathcal{A})$ the value δ in Proposition 1, and by $\zeta(\mathcal{A})$ the value for $\forall$-degrees in Proposition 2. Summarizing these propositions we conclude:

Theorem 3. *For any finite abelian group $\mathcal{A}$ either $\deg_4(\mathcal{A}) = (0,0,0,0)$ if $|A| \le 2$, or $\deg_4(\mathcal{A}) = (\delta(\mathcal{A}), \delta(\mathcal{A}), \zeta(\mathcal{A}), \zeta(\mathcal{A}))$, otherwise.*

Proposition 3. *If $\mathcal{A}$ is an abelian group of finite rank $r = \mathrm{rk}(\mathcal{A}) > 0$ then $\deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{A}) = r - 1$ if $\alpha_{2,1}(\mathcal{A}) = 1$, and $\deg_{\mathrm{rig}}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{A}) = r$ if $\alpha_{2,1}(\mathcal{A}) \ne 1$.*

Theorem 4. *For any infinite standard abelian group $\mathcal{A}$ one of the following conditions hold:*
1) $\deg_4(\mathcal{A}) = (1,1,2,2)$, *if* $\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = 1$;
2) $\deg_4(\mathcal{A}) = (1,1,3,3)$, *if* $\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = 2$ *and* $\alpha_{2,1}(\mathcal{A}) = 1$;
3) $\deg_4(\mathcal{A}) = (r-1, r-1, \infty, \infty)$, *if* $\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = r > 2$ *is finite and* $\alpha_{2,1}(\mathcal{A}) = 1$;
4) $\deg_4(\mathcal{A}) = (r, r, \infty, \infty)$, *if* $\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = r > 2$ *is finite and* $\alpha_{2,1}(\mathcal{A}) \ne 1$;
5) $\deg_4(\mathcal{A}) = (\infty, \infty, \infty, \infty)$, *if* $\mathrm{rk}(\mathcal{A})$ *is infinite.*

Theorem 5. *For any standard infinite abelian group $\mathcal{A}$ either $\mathrm{ind}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{A})$ is finite and satisfies the formula*

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{A}) = \prod_{\alpha_{p,n}\in\omega}(p^{n\alpha_{p,n}} - (p^n - \varphi(p^n))^{\alpha_{p,n}}),$$

if all positive $\beta_p(\mathcal{A})$ are infinite and $\mathcal{A}$ has finitely many positive natural $\alpha_{p,n}$, or $\mathrm{ind}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{A}) = \omega$, otherwise.

Funding: This research was carried out in the framework of the State Contract of Sobolev Institute of Mathematics, Project No. FWNF-2022-0012, and partially supported by Science Committee of Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19677451).

Keywords: rigidity, abelian group, semantic degree of rigidity, syntactic degree of rigidity, index of rigidity.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C50, 03C30, 20K21

References

[1] Sudoplatov S.V. Variations of rigidity, *Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, **47** (2024), 119–136.

[2] Szmielew W. Elementary properties of Abelian groups, *Fundamenta Mathematicae*, **41** (1955), 203–271.

[3] Eklof P. C., Fischer E.R. The elementary theory of Abelian groups, *Annals of Mathematical Logic*, **4** (1972), 115–171.

[4] Ershov Yu.L., Palyutin E.A. *Mathematical logic*, Fizmatlit, Moscow (2011). [in Russian]

[5] Pavlyuk In.I., Sudoplatov S.V. Ranks for families of theories of Abelian groups, *Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, **28** (2019), 95–112.

[6] Pavlyuk In.I., Sudoplatov S.V. On algebraic and definable closures for finite structures, in: *Algebra and model theory* 14. *Collection of papers*, NSTU, Novosibirsk (2023), 87–94.

First-level analog of Rice's theorem for semantic classes over the Cartesian layer

M.G. PERETYAT'KIN

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: peretyatkin@math.kz

We use general concepts of model theory and computability theory that are introduced in the work [1]. A finite signature is called *rich*, if it contains at least an n-ary predicate or functional symbol for $n > 1$, or two unary functional symbols. By $SL(\sigma)$, we denote the set of all sentences of signature σ. By $[\Phi]^\sigma$, we denote a theory of signature σ generated by the sentence Φ as an axiom. In the work, we consider a finite rich signature σ, and fix a Gödel numbering Φ_i, $i \in \mathbb{N}$, for the set of all sentences of signature σ. For a set $E \subseteq SL(\sigma)$, we denote by $\mathrm{Nom}\,(E)$ the set of Gödel numbers $\{i \mid \Phi_i \in E\}$. For a class Ξ of a hierarchy and a set A of integers, the record $\Xi \leqslant_m A$ indicates the fact that any set from Ξ is m-reducible to A. Definitions of the layers *MQL* and *ACL* of model-theoretic properties can be found in [2].

Two theories T and S are said to be *semantically similar* over a layer L of model-theoretic properties, symbolically $T \equiv_L S$, if there is a computable isomorphism $\mu : \mathcal{L}(T) \to \mathcal{L}(S)$ between the Tarski-Lindenbaum algebras of these theories, such that, for any complete extension T' of theory T and corresponding complete extension S' of theory S, $S' = \mu(T')$, theories T' and S' have identical properties in terms of this layer L. Two sentences Φ and Ψ of signature σ are said to be *semantically similar* over the layer L, symbolically $\Phi \equiv_L \Psi$, if theories $[\Phi]^\sigma$ and $[\Psi]^\sigma$ are semantically similar over L. A set $E \subseteq SL(\sigma)$ is called *semantically closed over a layer* L, if for any sentences $\Phi, \Psi \in SL(\sigma)$, we have $\Phi \equiv_L \Psi \Rightarrow (\Phi \in E \Leftrightarrow \Psi \in E)$.

A theory T of the finite rich signature σ is said to be f*-approximable* if, for any complete theory T' extending T and any sentence Φ of signature σ satisfying $T' \vdash \Phi$, the formula Φ has a finite model $\mathfrak{N}$, which is not a model of T'. The theory T is called *hereditarily undecidable*, if any its subtheory $T' \subseteq T$ of signature σ is undecidable, while T is *essentially undecidable*, if any its extension $T' \supseteq T$ of signature σ is undecidable.

Consider the following *particular* set of sentences of signature σ:

$$H = \bigl\{\Phi_n \mid [\Phi_n]^\sigma \text{ is } f\text{-approximable, hereditarily \&essentially undecidable}\bigr\}.$$

The following statement represents a first-level analog of the known Rice theorem (modulo the particular set) for semantically closed classes of sentences.

Theorem 1. *For an arbitrary semantically closed over ACL class of sentences $E \subseteq SL(\sigma)$ satisfying $H \subseteq E$ or $H \subseteq (SL(\sigma) \setminus E)$, the following assertions are satisfied*:

(a) $\mathrm{Nom}\,(E)$ *is computable* $\Leftrightarrow E = \varnothing$ *or* $E = SL(\sigma)$,

(b) *if $E \neq \varnothing$ and $E \neq SL(\sigma)$, then $\Sigma^0_1 \leqslant_m \mathrm{Nom}\,(E)$ or $\Pi^0_1 \leqslant_m \mathrm{Nom}\,(E)$.*

In [2], it is possible to find an informal substantiation of the fact that, the layer $AreaL$ of all real model-theoretic properties coincides with the algebraic Cartesian layer ACL involved in formulation of Theorem 1.

A certain version of the first-level analog of Rice's theorem for semantically closed classes of sentences was presented in $[1, \mathrm{Th.}\, 7.1]$. That version of the result concerns the quasiexact semantic layer MQL of model-theoretic properties, which is a proper subset of the layer ACL. Moreover, in the formulation of the result $[1, \mathrm{Th.}\, 7.1]$, there are no exceptions such as the special subset H in Theorem 1. Thus, the two indicated results are independent; each of them is not a corollary of the other.

A question arises whether there is a version of first-order analog of Rice's theorem for semantically closed classes of sentences of a finite rich signature, which is not covered by the results of Theorem 1 and statement $[1, \mathrm{Th.}\, 7.1]$?

Funding: This research was funded by the grant BR20281002 of Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan.

Keywords: model-theoretic property, semantic class of sentences, algorithmic complexity estimate, analog of Rice's theorem, hereditarily undecidable theory.

2010 Mathematics Subject Classification: 03B10, 03D35.

References

[1] Peretyat'kin M.G., Constructive models of finitely axiomatizable theories, In: *Handbook of Recursive Mathematics*, Volume 1, Elsevier (1998), 347–379.

[2] Peretyat'kin M.G., First-order combinatorics and a definition to the concept of a model-theoretic property with demonstration of possible applications, In: *Algebra and Model Theory 11*, Conference: Problems Allied to Universal Algebra and Model Theory, Novosibirsk–Erlagol (2017), 86–101.

Externally definable expansion for ordered structures

Bektur BAIZHANOV[1,2,a], Fatima SARGULOVA[1,2,b]

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2]*Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan*
E-mail: [a]*baizhanov@math.kz*, [b]*fsargulova@gmail.com*

In our report we consider the uniformly externally definable expansion for ordered structure which condition on the 1-type over model.

Definition of Uniformly externally definable expansion. $\mathfrak{M}^+ = \langle M; \Sigma \cup \{U^1\}\rangle$ is uniformly externally definable if for any $H(\overline{x})$ of Σ^+, there is $H_\varphi(\overline{x}, \overline{\alpha})$, $\overline{\alpha} \in N$, such that for all $\overline{a} \in M$.

$[\mathfrak{M}^+ \models \varphi(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models H_\varphi(\overline{a}, \overline{\alpha})]$ that means $H_\varphi(N^r, \overline{\alpha}) \cap M^r = \varphi(M^+)$, $r = lenght\ \overline{x}$

Lemma. Let $p \in S_1(M)$ such that for all $\alpha \in p^c(N)$, for any $2-M$- formula $\Theta(x, y)$ convex to the left (to the right), we have $\Theta(N, \alpha) \cap M \neq \emptyset$.

Then for any formula $L(x) \in p(x)$, for any $\beta \in L(N)$ the following true, if $E_L(N, \beta) \cap p(N) \neq \emptyset$, then $p(N) \subset p^c(N) \subset E_L(N, \beta)$.

Theorem 1. $\mathfrak{M} = \langle M; =; <, \Sigma ...\rangle$ linear ordering, where $\Sigma = \langle =, <, ...\rangle$. Let (C,D) be irrational cut such that for $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$, for any $\alpha \in N$ $(C < \alpha < D)$, for any 2-M formula $H(x, y)$, if $H(N, \alpha)$- convex to right(left) then $H(N, \alpha) \cap M \neq \emptyset$. Then $\mathfrak{M}^+ = (M; \Sigma \cup \{U^1\})$ is uniformly externally definable expansion for $U^1(\mathfrak{M}^+) = C$

Funding: The authors were supported by the grant no. AP19677434 of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan.

Keywords: externally definable expansion, ordered structure, irrational cut, convex set.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C15, 03C64

References

[1] D. Macpherson, D. Marker, Ch. Steinhorn Weakly o-minimal structures and real closed fields, *Translations of the American Mathematical Society*, **171**:3 (2019), 102765.

[2] A. Pillay On externally definable sets and a theorem of Shelah, *Algebra, logic, set theory, Stud. Log.(Lond.)*, (2007)

[3] B.S. Baizhanov Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates, *The Journal of Symbolic Logic*, **66** (2001), 1382–1414.

Leibniz analogue of Malcev algebras

Nurken SMADYAROV

SDU University

E-mail: nurken.smadyar@gmail.com

In [1] Dzhumadil'daev and Ismailov studied binary Leibniz algebras and proved that the variety of binary Leibniz algebras $\mathcal{L}eib_2$ are define by the following identities:

$$(aa)b = 0,$$

$$b(aa) + (a, b, a) = 0,$$

$$(ab)(ab) - a(b(ab)) + b(a(ab)) = 0.$$

Furthermore, they showed strictness of the inclusions in the diagram below:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{L}ie & \subset & \mathcal{M}alc & \subset & \mathcal{L}ie_2 & \subset & \mathcal{L}ie_1 \\ \cap & & & & \cap & & \cap \\ \mathcal{L}eib & \subset & & \subset & \mathcal{L}eib_2 & \subset & \mathcal{L}eib_1 \end{array}$$

where $\mathcal{L}ie$, $\mathcal{M}alc$, $\mathcal{L}ie_2$, $\mathcal{L}ie_1$ $\mathcal{L}eib$, $\mathcal{L}eib_2$, $\mathcal{L}eib_1$ are the varieties of Lie, Malcev, binary Lie, mono Lie (anticommutative), Leibniz, binary Leibniz and mono Leibniz algebras, respectively.

The authors asked a question whether there is a Leibniz analogue of Malcev algebras (if exists) that makes the picture complete. In our talk we give polynomial identities that describe all subvarieties of the variety $\mathcal{L}eib_2$ that includes the variety $\mathcal{M}alc$ and the variety $\mathcal{L}eib$.

Funding: The author was supported by the grant no. AP14870282 of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan.

Keywords: Leibniz algebras, Malcev algebras, polynomial identities.

2010 Mathematics Subject Classification: 17A30, 17A32, 17D10

References

[1] Ismailov N.A., Dzhumadil'daev A.S. Binary Leibniz algebras, *Math. Notes*, **110**:3 (2021), 322-328.

On approximating formulae

Sergey SUDOPLATOV

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

E-mail: sudoplat@math.nsc.ru

We continue to study formulae and their properties [1]. We introduce the general notion of approximating formula, based on approximations of theories [2] and generalizing the notion of pseudofinite formula [3], and describe various possibilities for approximating formulae, algebras on sets of these formulae. For a formula φ we denote by $\Sigma(\varphi)$ the set of all signature symbols used for φ. For a signature Σ, we denote by $F(\Sigma)$ and $\mathrm{Sent}(\Sigma)$ the sets of all formulae and sentences in Σ, respectively. We denote by $\mathcal{T}_\Sigma$ the family of all complete theories in Σ.

Definition. [3, 4] A formula φ true in an infinite model is called *pseudofinite* if it is true in a finite model, too. A theory consisting of pseudofinite sentences is called *pseudofinite*. We denote by $\mathrm{PFF}(\Sigma)$ the set of all pseudofinite formulae in the signature Σ. The *spectrum* of a formula φ, $\mathrm{Spec}(\varphi)$, is the set $\{n \in \omega \setminus \{0\} \mid \text{there is } \mathcal{M} \models \varphi \text{ with } |\mathcal{M}| = n\}$.

Definition. For a family $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_\Sigma$, a formula $\varphi = \varphi(\overline{x})$ is called *$\mathcal{T}$-approximating* if φ is satisfied in a model of some accumulation point of $\mathcal{T}$. The formula φ is called *approximating* if it is $\mathcal{T}_\Sigma$-approximating, where $\Sigma \supseteq \Sigma(\varphi)$. We denote by $\mathrm{AF}(\mathcal{T})$ the set of all $\mathcal{T}$-approximating formulae, by $\mathrm{AF}(\Sigma)$ the set of all approximating formulae in the signature Σ, and by $\mathrm{PFS}_\infty(\Sigma)$ the set of all formulae in $\mathrm{PFS}(\Sigma)$ with infinite spectra. Restrictions of $\mathrm{AF}(\mathcal{T})$, and $\mathrm{AF}(\Sigma)$ to the set $\mathrm{Sent}(\Sigma)$ of sentences are denoted by $\mathrm{AS}(\mathcal{T})$ and $\mathrm{AS}(\Sigma)$, respectively.

Proposition 1. *For any signature* Σ, $\mathrm{PFS}_\infty(\Sigma) \neq \emptyset$.

For any signature Σ, $\mathrm{PFF}_\infty(\Sigma) \subseteq \mathrm{AF}(\Sigma)$ and $\mathrm{PFS}_\infty(\Sigma) \subseteq \mathrm{AS}(\Sigma)$, i.e. any pseudofinite formula/sentence with an infinite spectrum is approximating. Thus each signature produces approximating formulae.

Proposition 2. *Let φ be a sentence with finite nonempty spectrum and ψ be a consistent sentence belonging to finitely many theories of given signature $\Sigma \supseteq (\Sigma(\varphi) \cup \Sigma(\psi))$ such that φ does not have infinite models and ψ does not have finite ones. Then $\varphi \vee \psi$ is pseudofinite and not approximating.*

Proposition 3. *For any pseudofinite theory T of a signature Σ, $T \subseteq \mathrm{PFS}_\infty(\Sigma)$.*

Theorem 1. *For any signature Σ the following conditions are equivalent:*

(1) $\mathrm{PFF}(\Sigma) = \mathrm{PFF}_\infty(\Sigma) = \mathrm{AF}(\Sigma)$, *where* $\mathrm{PFF}_\infty(\Sigma)$ *is the restriction of* $\mathrm{PFF}(\Sigma)$ *to the set of formulae φ such that the sentences $\exists\overline{x}\varphi$ belong to* $\mathrm{PFS}_\infty(\Sigma)$;

(2) $\mathrm{PFS}(\Sigma) = \mathrm{PFS}_\infty(\Sigma) = \mathrm{AS}(\Sigma)$;

(3) *the signature Σ does not contain functional symbols of arities > 0 and predicate symbols of arities > 1.*

Proposition 4. *For any family $\mathcal{T}$ of theories in a signature Σ the following equalities hold:* 1) $\mathrm{AS}(\mathcal{T}) = \bigcup\{T \in \mathcal{T} \mid T \text{ is an accumulation point of } \mathcal{T}\}$; 2) $\mathrm{AS}(\mathcal{T}) = \bigcup\{T \mid T \text{ is an accumulation point of } \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})\}$; 3) $\mathrm{AS}(\mathcal{T}) = \{\varphi \in \mathrm{Sent}(\Sigma(\mathcal{T})) \mid \mathrm{RS}_\mathcal{T}(\varphi) \geq 1\}$.

Corollary. *For any family $\mathcal{T}$ of theories in a signature Σ the set of sentences φ separating finite nonempty subsets in $\mathcal{T}$ equals* $\mathrm{CF}(\mathcal{T}) \cap (\mathrm{Sent}(\Sigma) \setminus \mathrm{AS}(\mathcal{T}))$, *where* $\mathrm{CF}(\mathcal{T})$ *is the set of formulae belonging to some theory in $\mathcal{T}$.*

Definition. A theory $T \in \mathcal{T}$ is called *finitely axiomatizable* in $\mathcal{T}$, or *$\mathcal{T}$-finitely axiomatizable*, if there is a sentence $\varphi \in T$ such that φ does not belong to other theories in $\mathcal{T}$. Here the sentence φ is called the *$\mathcal{T}$-complete axiom* for T.

Proposition 5. *For any family $\mathcal{T}$ of theories in a signature Σ the set of sentences φ separating singletons in $\mathcal{T}$ equals the subset of* $\mathrm{CF}(\mathcal{T}) \cap (\mathrm{Sent}(\Sigma) \setminus \mathrm{AS}(\mathcal{T}))$ *consisting of $\mathcal{T}$-complete axioms such that each sentence in* $\mathrm{CF}(\mathcal{T}) \cap (\mathrm{Sent}(\Sigma) \setminus \mathrm{AS}(\mathcal{T}))$ *is $\mathcal{T}$-equivalent to a disjunction of these axioms.*

In view of Proposition 5 the set $\mathrm{CF}(\mathcal{T}) \cap (\mathrm{Sent}(\Sigma) \setminus \mathrm{AS}(\mathcal{T}))$ consists of sentences separating $\mathcal{T}$-finitely axiomatizable theories.

Since $\mathrm{AF}(\mathcal{T})$ and $\mathrm{AS}(\mathcal{T})$ are closed under deducibility then, for any infinite $\mathcal{T}$, $\mathrm{AF}(\mathcal{T})$ and $\mathrm{AS}(\mathcal{T})$ form upper semilattices with respect to the operation $\vee$, denoted by $\mathcal{AF}(\mathcal{T})$ and $\mathcal{AS}(\mathcal{T})$, respectively: $\mathcal{AF}(\mathcal{T}) = \langle \mathrm{AF}(\mathcal{T}); \vee \rangle$, $\mathcal{AS}(\mathcal{T}) = \langle \mathrm{AS}(\mathcal{T}); \vee \rangle$.

Theorem 2. *For any infinite family $\mathcal{T}$ the following conditions are equivalent:* (1) *the semilattice $\mathcal{AF}(\mathcal{T})$ is expandable till the (distributive) lattice* $\langle \mathrm{AF}(\mathcal{T}); \vee, \wedge \rangle$; (2) *the semilattice $\mathcal{AS}(\mathcal{T})$ is expandable till the (distributive) lattice* $\langle \mathrm{AS}(\mathcal{T}); \vee, \wedge \rangle$; (3) *$\mathcal{T}$ is e-minimal;* (4) $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) = 1$ *and* $\mathrm{ds}(\mathcal{T}) = 1$.

Funding: The work was carried out in the framework of Russian Scientific Foundation, Project No. 24-21-00096.

Keywords: approximating formula, pseudofinite formula.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C30, 03C15, 03C50, 54A05

References

[1] Sudoplatov S.V. Formulas and properties, their links and characteristics, *Mathematics*, **9**:12 (2021), 1391, 16 pp.

[2] Sudoplatov S.V. Approximations of theories, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **17** (2020), 715–725.

[3] Markhabatov N.D., Sudoplatov S.V. Pseudofinite formulae, *Lobachevskii J. of Math.*, **43**:12 (2022), 3583–3590.

[4] Durand A., Jones N., Makowsky J., More M. Fifty years of the spectrum problem: Survey and new results, *The Bulletin of Symbolic Logic*, **18**:4 (2012), 505–553.

Inessential expansion of model of the ordered theory and number of countable models

Olzhas UMBETBAYEV[1,3,b], Bektur BAIZHANOV[1,2,a]

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2]*SDU University, Kaskelen, Kazakhstan*
[3]*Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]baizhanov@math.kz, [b]umbetbayev@math.kz

Let T be a countable complete theory of a language $\mathcal{L}$. Denote by $S_n(T)$ the set of all complete n-types of T over an empty set. Let $p \in S_n(T)$ be non-principal, and let $\bar{c} = (c_1, c_2, ..., c_n) \notin \mathcal{L}$ be a tuple of new constants. The theory $T^* := T \cup p(\bar{c})$ is called an inessential expansion of T. The theory T^* is an $\mathcal{L}^*$-theory, where $\mathcal{L}^* := \mathcal{L} \cup \{c_1, c_2, ..., c_n\}$.

A.D. Taimanov asked if it is possible that $I(T, \aleph_0) = 2^{\aleph_0}$ and $I(T^*, \aleph_0)$ is finite or countable. B. Omarov tried to construct an example with $I(T, \aleph_0) = 2^{\aleph_0}$ and $I(T^*, \aleph_0) < \aleph_0$. Omarov's construction in [1] does not give an answer (Theorem 1) and in general, Taimanov's question is still open.

We describe Omarov's constructions from [1] of theories T_0, T_1, and T_2 such that $T_0 \subset T_1 \subset T_2$ and show that T_2 constructed in his work ([1], Theorem 3) does not have continuum of countable models, but has the countable number of countable models and an inessential expansion T_2^* with a finite number of countable models (Theorem 1). That is, $I(T_2, \aleph_0) = \aleph_0$ and $I(T_2^*, \aleph_0) < \omega$.

We analyze Omarov's example in terms of (non-)orthogonality (as well as weak and almost orthogonality).

Theorem 1.[2] *The theory T_2 has countably many countable models, the expansions of T_2 by the complete 1-type $q_j^1(x)$ or by the 1-type $q_j^2(x)$ have a finite number of countable models.*

Taking into account B. Omarov's successful attempt to reduce the number of countable models from $\aleph_0$ to a finite number, we propose the following conditions for constructing an example of a complete theory that reduces the number from the continuum by means of an inessential expansion.

Conjecture.

Let T be a small ordered complete theory of a countable language $\mathcal{L}$. Let $I(T, \aleph_0) = 2^{\aleph_0}$. Then there exists a non-principal type $p \in S_1(T)$ such that $I(T^*, \aleph_0) \leq \omega$, where $T^* := T \cup p(c)$ and c is a new constant, if and only if the following holds:

1. There exists a family of non-principal 1-types $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots \in S_1(T)$ $(n < \omega)$ such that $tp(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}) \perp^a p_j$ for all $k < \omega$, and all pairwise distinct $i_1, i_2, \ldots, i_k, j < \omega$ such that $\alpha_{i_1} \in p_{i_1}(\mathfrak{M})$, $\alpha_{i_2} \in p_{i_2}(\mathfrak{M}), \ldots, \alpha_{i_k} \in p_{i_k}(\mathfrak{M})$, where $\mathfrak{M}$ is a countable saturated model of T.

2. For every $i < \omega$, we have $p \not\perp^a p_i$.

3. There is a finite number of non-principal 1-types, $q_1, q_2, \ldots, q_m \in S_1(T)$, such that for every $j \neq k$ $(1 \leq j \leq m,\ 1 \leq k \leq m)$ we have $q_k \perp^a q_j$, $p \perp^a q_k$, and $q_k \perp^a p$.

4. For every non-principal $q \in S(T)$, we have either $q \sim_{\not\perp^a} p$, or for some $i < \omega$, $q \sim_{\not\perp^a} p_i$, or for some k, $1 \leq k \leq m$, $q \sim_{\not\perp^a} q_k$.

Funding: The authors were supported by the grant no. AP14971869 of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan.

Keywords: small theory, the number of countable models, inessential expansion, non-orthogonality of types, ordered structures.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C15, 03C64

References

[1] Omarov B. Nonessential extensions of complete theories, *Algebra and Logic*, **22**:5 (1983), 390–397.

[2] Baizhanov B., Umbetbayev O. Constant expansion of theories and the number of countable models, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **20**:2 (2023), 1037–1051.

No essential o-stable expansion of $(\mathbb{Z}, <, +)$

Viktor VERBOVSKIY[1,a], Aisha YERSHIGESHOVA[2,b]

[1]*Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan*

[2]*Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan*

E-mail: [a]*verbovskiy@math.com*, [b]*aisha.yershigeshova@gmail.com*

Recall that when the number of types is less than $2^{|A|}$, for each set A of cardinality λ, we have a *stability* in λ.

Definition. Linear ordered structure $\mathfrak{M}$ is called *o-stable in* λ, if for any any subset $A \subseteq \mathfrak{M}$ such that $|A| \leq \lambda$ and for any arbitrary cut s in $\mathfrak{M}$ there exist the biggest λ complete types over A which are consistent with cut s.

Theory T is called *o-stable in* λ, if every model of T is o-stable.

Theory T is called *o-stable*, if there is a λ, such that T is λ stable.

Our question is the following: can we add a new relation P to $(\mathbb{Z}, <, +)$, which is not definable in this structure, so that the elementary theory of the expanded structure $(\mathbb{Z}, <, +, P)$ is o-stable.

Theorem. *There is no essential o-stable expansion of* $(\mathbb{Z}, <, +)$.

Funding: The authors were supported by the grant no. BR20281002 of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan.

Keywords: ordered group, o-minimality, expansion.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C15,03C65

References

[1] Baizhanov B.S., Verbovskiy V.V. O-stable theories, *Algebra and Logic*, **50**:3 (2011), 303–325.

[2] Chang C.C., Keisler H.J. *Model Theory*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 73, Elsevier (1990).

On characteristic of equivalence classes of Robinson spectrum regarding their primitive

Alina YARULLINA[a], Bota AMANDYK[b]

Karaganda Buketov University, Karaganda, Kazakhstan

E-mail: [a]*linka14221@mail.ru*, [b]*amandykbn@mail.ru*

We work in the countable first-order language L of signature σ in the frame of Robinson theories. All undefined concepts one can find in [1-4].

Definition. [2] ∇ is $\Pi_1 \cup \Sigma_1$, that is ∇ is a collection of all universal and existential formulas.

Definition. [2] If $T = T_\nabla$, then the theory T is called primitive.

Definition. [3] A set $RSp(J\mathbb{C})$ of Robinson theories of signature σ, where $RSp(J\mathbb{C}) = \{\Delta \mid \Delta \text{ is Robinson theory of unars and } \forall \mathfrak{C}_\Delta \in J\mathbb{C}, \mathfrak{C}_\Delta \models \Delta\}$, is called the Robinson spectrum for class $J\mathbb{C}$, where $J\mathbb{C}$ is semantic Jonsson quasivariety of Robinson unars.

We introduce cosemanticness relation [3] and consider disjoint equivalence classes $[\Delta] \in RSp(J\mathbb{C})_{/\bowtie}$, $\mathfrak{C}_{[\Delta]}$ denotes this class's semantic model.

Theorem 1. *1) The quantity of pairwise different maximal* $[\Delta]$ *classes of Robinson theories of unars is equal to* ω*. Moreover, these classes of theories have following characteristics:* π_ω, $\{\pi_{0,m}\ \ 1 \leq m < \omega\}$, $\{\pi_{n,m}\ \ 1 \leq n, m < \omega\}$, *where* $\pi_\omega : \Omega = \{\omega\}$, $\nu(m) = 0\ \ \forall m < \omega$, $\mu(\omega) = 1$, $\varepsilon = \infty$*;* $\pi_{0,m} : \Omega = \{(0, m)\}$,

$$\nu(m) = \begin{cases} 0, if\ \ k \neq m, \\ \infty, if\ \ k = m; \end{cases}$$

$\mu(0, m) = 0$, $\varepsilon = 0$*;* $\pi_{n,m} : \Omega = \{(0, m), .., (n, m)\}$,

$$\nu(k) = \begin{cases} 0, if\ \ k \neq m, \\ 1, if\ \ k = m, \end{cases}$$

$$\mu(k, m) = \begin{cases} 1, if\ \ k < n - 1, \\ \infty, if\ \ k = n - 1, \quad \varepsilon = 0. \\ 0, if\ \ k = n, \end{cases}$$

2) Maximal ∇*-complete* $[\Delta]$ *classes of Robinson theories of unars is the only class, that has characterstic* π_ω*.*

Keywords: Model theory, Jonsson theory, semantic model, Jonsson spectrum, Robinson spectrum, cosemanticness, equivalence classes.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C52, 03C99

References

[1] Ешкеев А.Р., Касыметова М.Т. *Йонсоновские теории и их классы моделей*, Издательство КарГУ, Караганда (2016).

[2] Ешкеев А.Р., Мустафин Т.Г. Описание йонсоновских универсалов унаров, *Исследования в теории алгебраических систем*, (1995), 51-–57.

[3] Yeshkeyev A.R., Yarullina A.R., Amanbekov S.M., Kassymetova M.T. On Robinson spectrum of the semantic Jonsson quasivariety of unars, *Bulletin of the Karaganda University-Mathematics*, (2023), 169-–178.

On quantity of equivalence classes of Robinson spectrum of unars

Alina YARULLINA[a], Alua SUINDYKOVA[b]

Karaganda Buketov University, Karaganda, Kazakhstan
E-mail: [a]linka14221@mail.ru, [b]suindykovaa@gmail.com

We work in the countable first-order language L of signature σ in the frame of Robinson theories. All undefined concepts one can find in [1-4].

Definition. [2] ∇ is $\Pi_1 \cup \Sigma_1$, that is ∇ is a collection of all universal and existential formulas.

Here, Π_1 denotes universal formulas, Σ_1 denotes existential ones.

Definition. [2] If $T = T_\nabla$, then the theory T is called primitive.

We consider semantic Jonsson quasivariety of unars as in [3], $J\mathbb{C}_U = \{\mathfrak{C}_\Delta \mid \Delta \in J(Th(K))$, $\mathfrak{C}_\Delta$ is a semantic model $\Delta\}$ of signature $\sigma_U = \langle f \rangle$, f is unary functional symbol, Δ is a Robinson theory of unars, K is a quasivariety in the sense [4].

Definition. [3] A set $RSp(J\mathbb{C}_U)$ of Robinson theories of signature σ_U, where $RSp(J\mathbb{C}_U) = \{\Delta \mid \Delta$ is Robinson theory of unars and $\forall \mathfrak{C}_\Delta \in J\mathbb{C}_U, \mathfrak{C}_\Delta \models \Delta\}$, is called the Robinson spectrum for class $J\mathbb{C}_U$, where $J\mathbb{C}_U$ is semantic Jonsson quasivariety of Robinson unars.

We introduce cosemanticness relation [3] on Robinson spectrum $RSp(J\mathbb{C}_U)$. As a result we obtain a factor-set, denoted as $RSp(J\mathbb{C}_U)_{/\bowtie}$ and consisted of equivalence classes parted by cosemanticness relation $[\Delta] \in RSp(J\mathbb{C}_U)_{/\bowtie}$, $\mathfrak{C}_{[\Delta]}$ denotes this class's semantic model.

Theorem 1. *1) The quantity of pairwise different* $[\Delta_{\mathfrak{U}}]$ *classes of Robinson theories of unars is equal to* 2^ω.

2) The quantity of pairwise different maximal $[\Delta_{\mathfrak{U}}]$ *classes of primitive Robinson theories is equal to* 2^ω.

Keywords: Model theory, Jonsson theory, semantic model, Jonsson spectrum, Ronson spectrum, cosemanticness, equivalence classes.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C52, 03C99

References

[1] Ешкеев А.Р., Касыметова М.Т. *Йонсоновские теории и их классы моделей*, Издательство КарГУ, Караганда (2016).

[2] Ешкеев А.Р., Мустафин Т.Г. Описание йонсоновских универсалов унаров, *Исследования в теории алгебраических систем*, (1995), 51-–57.

[3] Yeshkeyev A.R., Yarullina A.R., Amanbekov S.M., Kassymetova M.T. On Robinson spectrum of the semantic Jonsson quasivariety of unars, *Bulletin of the Karaganda University-Mathematics*, (2023), 169-–178.

[4] Мальцев А.И. *Алгебраические системы*, Издательство Наука, Москва (1970).

On small models of PJ-cosemanticness classes in the Positive Jonsson spectrum

Aibat YESHKEYEV[a], Sultan AMANBEKOV[b]

Karaganda Buketov university, Karaganda, Kazakhstan

E-mail: [a]*modth1705@mail.ru*, [b]*amanbekovsmath@gmail.com*

We define the notion of Δ-positive Jonsson (Δ-PJ) theories. Let L be a first-order language. At is a set of atomic formulae of the language. $B^+(At)$ is a set of formulae containing atomic formulae, which is closed with respect to positive Boolean combinations (conjunction and disjunction), subformulae and substitution of variables. $Q\left(B^+(At)\right)$ is the set of formulae in prenex normal form obtained by the use of quantifiers ($\forall$ and $\exists$) to $B^+(At)$. We call a formula positive if it belongs to $Q\left(B^+(At)\right)$. A theory is positively axiomatizable if its axioms are positive. $B\left(L^+\right)$ is the set of arbitrary Boolean combinations of formulae from L^+.

Σ^+ is a set of positively existentially formulae.

Definition 1. [1] A theory T is called Δ-positive Jonsson (Δ-PJ)-theory if the following conditions hold for T:

1) T has an infinite model;
2) T is positively $\forall\exists$-axiomatizable;
3) T admits Δ-JEP;
4) T admits Δ-AP.

Definition 2. [1] A theory T is called Δ-positive Robinsonian (Δ-PR)-theory if the following conditions hold for T.

1) T has an infinite model;
2) T is positively $\forall$-axiomatizable;
3) T admits Δ-JEP;
4) T admits Δ-AP.

Note that Δ-positive Robinson theories are a special case of Δ-positive Jonsson theories.

Definition 3. [1] A theory $T^*_\Delta = Th_\Delta(U)$ is called the center of Δ-PJ-theory T, where U is a κ-universal structure of this language L, which is a model of the theory of T. We will call U the semantic model of the Δ-PJ-theory of T.

Definition 4. [1] A Δ-PJ-theory T is called Δ-PJ-perfect if its semantic model is saturated in its power for positive Δ-types (a Δ-type is called positive if in the formulae included in this type, the quantifier-free part is positive).

Definition 5. [1] A model of Δ-PJ-theory T is called h-Δ-algebraically prime if for any model of Δ-PJ-theory T there exists h-Δ-immersion of the model A in B.

Definition 6. [2] The model A is called (Γ_1, Γ_2)-atomic model of Δ-PJ-theory T if A is a model of Δ-PJ-theory T and for every n, every n-tuple $\bar{a}$ of elements of A satisfies in A some formula from Γ_1, which is complete for the Γ_2-formulae.

Definition 7. [2] The model A is called Γ-nice model of Δ-PJ-theory T if A is a countable model of T, and for every model B of T, every $n \in \omega$, and for all $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A, b_0, \ldots, b_{n-1} \in B$ if $(A, a_0, \ldots, a_{n-1}) \Rightarrow_\Gamma (B, b_0, \ldots, b_{n-1})$, then for every $a_n \in A$ there exists $b_n \in B$ such that $(A, a_0, \ldots, a_n) \Rightarrow_\Gamma (B, b_0, \ldots, b_n)$.

Definition 8. [1] Two Δ-PJ-theories T_1 and T_2 are said to be Δ-PJ-cosemantic Jonsson theories $\left(T_1 \bowtie^{\Delta}_{PJ} T_2\ \right)$ if they have a common semantic model in the case when T_1 and T_2 are Jonsson theories, and have a common universal domain in the case when they are not Jonsson theories.

It is known that the Δ-PJ-cosemanticness relation is an equivalence relation.

Let E_σ be a class of existentially closed models of the signature σ. Let's fix some subclass $K \subseteq E_\sigma$ and consider its Δ-Jonsson spectrum Δ-$PJSp(K)$. On Δ-$PJSp(K)$ we can consider the Δ-PJ-cosemanticness relation, and obtain a partition of Δ-$PJSp(K)$ into elementary disjoint classes, and get the factor set Δ-$PJSp(K)_{/\bowtie^{\Delta}_{PJ}}$. Let $[T]$ be the class of Δ-PJ-cosemanticness relation of the theory $T \in \Delta$-$PJSp(K)$. Since all theories of this class have the same center, we will denote it as $[T]^*_\Delta$. Let's fix some class $[T]$ for further study of its properties.

Theorem 1. *Let $[T] \in \Delta$-$PJSp(K)_{\bowtie^{\Delta}_{PJ}}$ and let the class $[T]$ consists of Δ-PJ-perfect Δ-PJ-theories, complete for Σ^+ sentences. Then the following conditions are equivalent:*

1) There is a $A \in K$ such that A is h-Δ-algebraically prime model;

2) $[T]^*_\Delta$ has (Σ^+, Σ^+)-atomic model.

Theorem 2. *Let $[T] \in \Delta$-$PJSp(K)_{\bowtie^{\Delta}_{PJ}}$ and let the class $[T]$ consists of Δ-PJ-perfect Δ-PR-theories, complete for $\forall\exists^+$ sentences. Then the following conditions are equivalent:*

1) There is a $A \in K$ such that A is countable and Δ-positively existentially closed Σ^+-nice model;

2) A is countable and (Σ^+, Σ^+) atomic model of $[T]^*_\Delta$.

All definitions that were not given in the abstract can be found in [1].

Keywords: positive Jonsson theory, positive Robinsonian theory, cosemanticness, positive Jonsson spectrum, equivalence class.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C45, 03C48, 03C68

References

[1] Yeshkeyev, A.R., Kassymetova, M.T. (2016). *Yonsonovskie teorii i ih klassy modelei [Model Theory and their Classes of Models]*. Karaganda: Izdatelstvo KarGU [in Russian].

[2] Baldwin J.T., Kueker, D.W. Algebraically prime models, *Annals of Mathematical Logic*, **20**: (1981), 289–330.

On the class of existentially closed models regarding cosemanticness and ω-categoricity

Aibat YESHKEYEV[a], Indira TUNGUSHBAYEVA[b], Olga ULBRIKHT[c]

Karaganda Buketov University, Karaganda, Kazakhstan
E-mail: [a]aibat.kz@gmail.com, [b]intng@mail.ru, [c]ulbrikht@mail.ru

We work in a countable first-order language L, in the frame of study of Jonsson theories.

Recall that a theory T is Jonsson [1], if T has at least one infinite model, is inductive, admits AP and JEP. Jonsson theories are, generally speaking, not complete. Any Jonsson theory can be described by its semantic model [2], which is a semantic invariant of this theory. A semantic model C_T of T is ω^+-universal ω^+-homogeneous model of T. Two Jonsson theories are called cosemantic [3], if their semantic models coincide. A Jonsson theory T is called perfect [2], if C_T is ω^+-saturated.

Let K be a class of L-structures. A Jonsson spectrum $JSp(K)$ [4] of K is the following set of theories: $JSp(K) = \{T \mid T$ is a Jonsson theory and $\forall A \in K\ A \models T\}$. We introduce the relation of cosemanticness of theories on $JSp(K)$ and get the factor-set $JSp(K)_{/\bowtie}$. The classes K_1 and K_2 of L-structures are called Jonsson equivalent (denoted by "$K_1 \equiv_J K_2$"), if the following holds for any Jonsson theory T: $A \models T \Leftrightarrow B \models T$.

The following results have been obtained. Theorem 1 and Proposition 1 demonstrate the connection between two cosemanticness classes in the fixed Jonsson spectrum.

Theorem 1. Let $[T_1], [T_2] \in JSp(K)_{/\bowtie}$, $K_1 \subseteq E_{[T_1]}$ and $K_2 \subseteq E_{[T_2]}$. Then the following conditions are equivalent: 1) $K_1 \equiv_J K_2$; 2) $T^0(K_1) = T^0(K_2)$.

Proposition 1. Let $[T_1], [T_2] \in JSp(K)_{/\bowtie}$, $C_{[T_1]}$ and $C_{[T_2]}$ be semantic models of the classes $[T_1]$ and $[T_2]$, correspondingly. Let $C_{[T_1]} \models T_2$ for some $T_2 \in [T_2]$, $C_{[T_2]} \models T_1$ for some $T_1 \in [T_1]$. Then the classes $[T_1]$ and $[T_2]$ coincide.

Theorem 2 shows the link between complete theories and Jonsson theories.

Theorem 2. Let T be a complete ω-categorical L-theory such that $E_T \neq \emptyset$. Then T is a perfect Jonsson theory.

Keywords: existentially closed models, Jonsson theory, cosemantic Jonsson theories, Jonsson spectrum, cosemanticness classes, cosemantic structures, Jonsson equivalence.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C10, 03C50, 03C52, 03C68

References

[1] Barwise J. *Handbook of mathematical logic*, Nauka, Moscow (1982).

[2] Mustafin Ye.T. Some properties of Jonsson theories, *Journal of Symbolic Logic*, **67**:2 (2002), 528–536.

[3] Yeshkeyev A.R., Kassymetova M.T. *Jonsson theories and their classes of models*, KarGU, Karaganda (2016).

[4] Yeshkeyev A.R., Ulbrikht O.I. JSp-cosemanticness and JSB-property of abelian groups, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **13** (2016), 861–874.

On Δ-Jonsson spectrum of Δ-PJ-theories

Aibat YESHKEYEV[1,a], Alina YARULLINA[1,b]

[1] *Karaganda Buketov University, Karaganda, Kazakhstan*
E-mail: [a]aibat.kz@gmail.com, [b]linka14221@mail.ru

We work in the countable first-order language L of signature σ in the frame of Δ-PJ-theories. All undefined concepts one can find in [1].

Definition. [2] A positive fragment (in L) is a subset $\Delta \subseteq L$ that contains all atomic formulae and is closed with respect to positive boolean combinations and subformulae. For given Δ we define the following sets of formulae: $\Sigma = \Sigma(\Delta) = \{\exists\varphi(x, y) : \varphi \in \Delta\}$, $\Pi = \Pi(\Delta) = \{\forall y \neg\varphi(x, y) : \varphi \in \Delta\} = \{\neg\psi : \psi \in \Delta\}$.

Let At be the set of atomic formulae of given language. $B^+(At)$ is a closed set with respect to positive boolean combinations (conjunction and disjunction) of all atomic formulae, their subformulae and replacements of variables. $Q(B^+(At))$ is the set of formulae in prenex normal form that was obtained by means of quantifier application ($\forall$ and $\exists$) to $B^+(At)$. We will call a formula positive, if it belongs to the set $Q(B^+(At)) = L^+$. The theory is called positively axiomatising, if its axioms are positive. $B(L^+)$ is arbitrary boolean combination of formulae from L^+. It is easy to see that $\Pi(\Delta) \subseteq B(L^+)$ at $\Delta = B^+(At)$ where $\Pi(\Delta)$ such, as it was described before. Following [2, 3] Δ-homomomorphism will be defined as follows.

Definition. Let A and B be structures of the language $\Delta \subseteq B(L^+)$. A map $h : M \to N$ is called Δ-homomomorphism (symbolically $h : A \to_\Delta B$) if for any $\varphi(\overline{x}) \in \Delta$, $\forall \overline{a} \in A$ from the fact that $A \models \varphi(\overline{a})$, it follows that $B \models \varphi(h(\overline{a}))$

The model A is called the origin in B and we say that A continues in B, $h(A)$ is called the continuation of A. If the map h is injective, then we say that the map h immerses A into B (symbolically $h : A \leftrightarrow_\Delta B$).

Definition. [1] We say that a theory T admits $\Delta - JEP$ property, if for any two $A, B \in Mod(T)$ there exists $C \in Mod(T)$ and Δ-homomorphisms $h_1 : A \to_\Delta C$, $h_2 : B \to_\Delta C$.

Definition. [1] We say that a theory T admits $\Delta - AP$ property, if for any $A, B, C \in Mod(T)$ such that $h_1 : A \to_\Delta C, g_1 : A \to_\Delta B$ where h_1, g_1 are Δ-homomorphisms, there exists $D \in Mod(T)$ such that $h_2 : C \to_\Delta D, g_2 : B \to_\Delta D$ where h_2, g_2 are Δ-homomorphisms such that $h_2 \cdot h_1 = g_2 \cdot g_1$.

Definition. [1] A theory T is said to be Δ-Jonsson (Δ-PJ) theory, if the following conditions are true:

1) T has at least one infinite model; 2) T is positively $\forall\exists$-axiomatising;

3) T admits Δ-JEP;

4) T admits Δ-AP.

When $\Delta = B(At)$, we get usual Jonsson theory with the exception that its axioms are positive $\forall\exists$-axioms.

Definition. Let A be some infinite model of the signature σ. A is called Δ-PJ-model, if the set of sentences $Th^+_{\forall\exists}(A)$ is Δ-PJ-theory.

Definition. Let A be a model of a theory T. A model A is called existentially closed in B, if for any $B \supseteq A$, $B \models T$, and for any formula $\exists x\varphi(x, a)$, $\varphi(x, a) \in B^+(At)$, $a \in A$, $B \models \exists x\varphi(x, a)$ it follows that there exists such $a' \in A$ such that $A \models \exists x\varphi(x, a')$.

Let K be a class of models of the considered signature σ. We introduce the notion of Δ — Jonsson spectrum for K.

Definition. Δ — Jonsson spectrum for class K of structures of language L^+ is said to be the following set of theories: Δ-$PJSp(K) = \{T \mid T - \Delta - PJ \text{ theory and } \forall M \in K,\ M \models T\}$.

Definition. Δ-PJ-theories T_1, T_2 are called Δ-PJ-cosemantic ($T_1 \bowtie^\Delta_{PJ} T_2$), if they have common semantic model in the case, when T_1 and T_2 are Jonsson theories, and have common universe in the case, when they are not Jonsson.

It is easy to see, that the Δ-PJ-cosemanticness relation is an equivalence relation.

Definition. Let A, B be two models of signature σ. A and B are called Δ-PJ-cosemantic, if Δ-$PJSp(A) = \Delta$-$PJSp(B)$.

Let E_σ be a class of existentially closed models of signature σ. Let us fix some subclass $K \subseteq E_\sigma$ and consider its Δ-Jonsson spectrum Δ-$PJSp(K)$. We introduce the relation of Δ-PJ-cosemanticness on Δ-$PJSp(K)$, thus dividing it on elementary disjoint classes and obtaining a factor-set Δ-$PJSp(K)_{/\bowtie^\Delta_{PJ}}$. Let $[T]$ be a class of Δ-PJ-cosemanticness of theory $T \in \Delta$-$PJSp(K)$. We obtained the following results in the framework of presented definitions.

Lemma 1. *Let $[T] \in \Delta$-$PJSp(K)$ be a class complete for existential sentences. Then any infinite model $A \in K$ of theory $T \in [T]$ is Δ-PJ-model.*

Lemma 2. *Let $[T_1], [T_2] \in \Delta$-$PJSp(K)$, C_1 be semantic model of the class T_1, C_2 be semantic model of the class T_2. If $[T_1]_{\forall^+} = [T_2]_{\forall^+}$, then $[T_1] = [T_2]$.*

Theorem 1. *Let $[T_1], [T_2] \in \Delta$-$PJSp(K)$, C_1 be semantic model of the class T_1, C_2 be semantic model of the class T_2. Then the following conditions are equivalent:*

1) $C_1 \bowtie^\Delta_{PJ} C_2$;

2) $[T_1] = [T_2]$.

Keywords: Model theory, positive model theory, Jonsson theory, positive Jonsson theory, semantic model, Jonsson spectrum, positive Jonsoon spectrum, cosemanticness, equivalence classes.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C52, 03C99

References

[1] Ешкеев А.Р., Касыметова М.Т. *Йонсоновские теории и их классы моделей*, Издательство КарГУ, Караганда (2016).

[2] Ben-Yaacov I. Compactness and independence in non first order frameworks, *Bulletin of Symbolic Logic*, **11**:1 (2005), 28-–50.

[3] Ben-Yaacov I. Positive model theory and compact abstract theories, *Journal of Mathematical Logic*, **03**:01 (2003), 85-–118.

Constructing models over countable sets

Tatyana ZAMBARNAYA

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: zambarnaya@math.kz

Every countable complete theory has a prime model over any arbitrary finite set. That is, a model containing this set and elementarily embedded into any other model containing this set. In this connection the question arises about the possibility to consider countable sets instead of finite.

Theorem 1. [1,2] *Every countable model $\mathfrak{M}$ of a small theory T can be represented as a union of some elementary chain $(\mathfrak{M}(\bar{a}_i))_{i\in\omega}$ of prime models over tuples $\bar{a}_i$.*

Ideas from the proof of Theorem 1 were used to construct models over countable sets possessing certain properties [3-5] including the theorems below. In particular, Theorem 3 is an approach to constructing a prime model over a countable set, which results in a "small" model over this set in terms of the family of realized types.

Theorem 2. *Let T be a small countable complete theory, $\mathfrak{M}$ be a model of T, and B be a countable subset of M. Then there exists a countable model $\mathfrak{N}$ of the theory T such that $B \subseteq N$ and there is no tuple $\bar{a} \in N$ with $tp(\bar{a}/\bar{b})$ being non-principal over each tuple $\bar{b} \in B$.*

Theorem 3. *Let T be a small countable complete theory, $\mathfrak{M}$ be a model of T, and B be a countable subset of M. Then there exists a countable model $\mathfrak{N}$ of the theory T with $B \subseteq N$ and for each model $\mathfrak{N}'$ of the theory T such that $B \subseteq N'$ and each type $q \in S(T)$, $\mathfrak{N} \models q$ implies $\mathfrak{N}' \models q$.*

Funding: The author was supported by the program no. BR20281002 of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan.

Keywords: small theory, prime model, countable model, Tarski-Vaught test.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C15

References

[1] Kudaibergenov K.Zh. On finitely generated models, *Siberian Mathematical Journal*, **27**:2 (1986), 208–209.

[2] Sudoplatov S.V. *Classification of countable models of complete theories: monograph in two parts*, Edition of NSTU, Novosibirsk (2018).

[3] Baizhanov B., Baldwin J.T., Zambarnaya T. Finding $2^{\aleph_0}$ countable models for ordered theories, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **15**:7 (2018), 719–727.

[4] Baizhanov B.S., Umbetbayev O.A., Zambarnaya T.S. On a criterion for omissibility of a countable set of types in an incomplete theory, *Kazakh Mathematical Journa*, **19**:1 (2019), 22–30.

[5] Baizhanov B.S., Umbetbayev O.A., Zambarnaya T.S. Non-existence of uniformly definable family of convex equivalence relations in an 1-type of small ordered theories and maximal number of models, *Kazakh Mathematical Journa*, **19**:4 (2019), 98–106.

Discrete order on convex equivalence classes

Bektur BAIZHANOV[1,2,a], Tatyana ZAMBARNAYA[1,b]

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2]*SDU University, Kaskelen, Kazakhstan*
E-mail: [a]baizhanov@math.kz, [b]zambarnaya@math.kz

For a 1-formula $\Theta(x)$ in a linearly ordered structure $\mathfrak{M}$ define

$$E_{\Theta}(x,y) := \Theta(x) \wedge \Theta(y) \wedge \forall z\big((x \leq z \leq y \to \Theta(z)) \wedge (y \leq z \leq x \to \Theta(z)\big).$$

$E_{\Theta}(x,y)$ is an equivalence relation with convex classes on the set $\Theta(M)$.

Theorem 2. *Let $\mathfrak{M}$ be a countably saturated model of a small linearly ordered theory T, $\bar{a} \in M$, $\Theta(x,y,\bar{a})$ be a 2-formula such that for each $n < \omega$ there exist $m_n \geq n$ and a discretely ordered chain of convex E_{Θ}-classes of length m_n. Then the theory T has the maximal number of countable non-isomorphic models.*

Funding: The authors were supported by the grant no. AP19677434 of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan.

Keywords: small theory, linear order, number of countable models.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C15, 03C64

References

[1] Tanovic P. Vaught's conjecture for theories of discretely ordered structures, arXiv:2212.13605 (2019).

Предметный указатель

Abdikalikova G., 142, 151
Adilkhanov A., 62
Ainakeyeva N., 195
Aitenova G., 142
Akhmanova D.M., 210
Akhymbek M., 59, 74
Amanbekov S., 257
Amandyk B., 255
Apseit K., 60
Arzikulov F.N., 232
Ashirova G., 198
Ashurov R., 200, 201
Assanova A.T., 24, 128, 129

Baikenges M., 243
Baizhanov B.S., 26, 234–237, 243, 251, 254, 261
Baizhanov S.S., 26, 234
Bakirova A., 235
Bekenov M.I., 237
Beketaeva A., 198, 203
Berdikulova M., 236
Biyarov B., 61
Bizhanova G.I., 204, 205
Bliev N.K., 62
Bokayev N., 62

Dauitbek D., 64
Dauletiyarova A.B., 238
Dekhkonov F., 205
Dosmagulova K., 64
Dukenbayeva A.A., 65
Durdiev D.K., 131
Dzhumadil'daev A.S., 240, 241, 243

Fayziev Yu., 200

Hasanov A., 132

Ilyasova R., 66
Ismailov N.A., 28
Issakhanov A., 206
Izhanova K.A., 210

Jumaev J., 133

Kabanikhin S.I., 30
Kabidenov A., 237
Kadirbayeva Zh.M., 134, 135
Kadirbek A., 136
Kadirkulov B.J., 148
Kalaman M., 68
Kalmenov T.Sh., 30, 136
Kanguzhin B., 64
Karimov S.Y., 68
Kasatova A., 237
Kashkynbayev A., 206
Kassabek S.A., 207
Kassymova D., 243
Kavokin A.A., 207
Khakimov U.I., 232
Kharin S.N., 207
Kholmirzayev M., 145
Kholmurodova G.N., 208
Khudoykulova M., 200
Khujakulov J.R., 209
Kokotova Ye.V., 137
Kopezhanova A., 69
Koshekova A., 244
Kosmakova M.T., 210
Kulpeshov B.S., 245
Kulpeshov B.Sh., 29
Kurths J., 206

Lutsak S., 246

Manat A.M., 212
Markhabatov N.D., 247
Mashurov F., 248
Matchanova A. A., 148
Matin D., 62
Merzetkhan A., 141
Molybaikyzy A., 128
Mukash M., 138
Mynbaev K., 70
Mynbayeva S., 139
Myrzagaliyeva A.Kh., 72

Naimanova A., 198, 203
Nauryz T.A., 213
Nurakunov A., 246
Nuriyev Z., 206

Omarbayeva A., 140
Orumbayeva N.T., 212
Oryngaliyev I., 73
Ospanov M.N., 141
Ostemirova M., 248
Ozbekbay B., 74

Pavlyuk I.I., 248

Peretyat'kin M.G., 250

Rahmatullaev M., 75
Rahmonov A.A., 214
Rashidov S.G., 132
Rasulov M. S., 215
Rasulova M., 75
Rogovoy A.V., 30

Sabitbek B., 32, 142
Sadybekov M., 140
Sargulova F., 251
Sarsenbi A.A., 144
Sartabanov Zh., 142, 151
Seilbekov B., 144
Shaimerdenov Ye., 76
Smadiyeva A.G., 145
Smadyarov N., 252
Sobirjonov A., 145
Subhonova Z.A., 216
Sudoplatov S.V., 245, 248, 252
Suindykova A., 256
Sulaymonov I., 201
Suragan D., 147

Tankeyeva A., 139
Tastankul R.A., 77
Tokmagambetov N., 147
Torebek B.T., 148
Tulenbayev K.M., 243
Tulenov K.S., 64, 74, 78
Tungushbayeva I.O., 244, 258
Turapova Sh.Kh., 209
Turdiev H.H., 131

Ulbrikht O.I., 258
Umarova R., 205
Umbetbayev O.A., 237, 254
Umirbaev U.U., 28
Umirkhonov M. T., 215
Uteshova R., 129
Uteshova R.E., 137

Verbovskiy V.V., 238, 255

Yarullina A.R., 255, 256, 259
Yerkinbayev N., 62
Yershigeshova A.D., 255
Yeshkeyev A.R., 244, 257–259
Yessirkegenov N., 78
Yuldashev T.K., 148
Yuldashova H., 150

Zambarnaya T.S., 237, 261
Zaur G., 79
Zhangirbayev A., 79
Zhanibek Z.M., 144
Zhumagaziyev A., 142, 151
Zhumatov S., 153, 154

Абдикаликова Г.А., 117
Абдукодирова М.А., 110
Абдуллаев О.Х., 86
Абиев Н.А., 158
Ажибекова А.С., 184
Азиз Г.Н., 158
Айнакеева Н.Ж., 16
Айтенова Г.М., 117
Айтжанов С.Е., 87
Айшуақ Ә., 160
Акимжанова Ш., 181
Акишев Г., 34
Акпан Д., 161
Алдашев С.А., 88, 89
Алексеева Л.А., 16, 158, 162, 163
Алимжанов Е.С., 87
Алипова Б.Н., 164
Арепова Г.Д., 16, 90
Арзикулов З.О., 165
Асан Ж.Ж., 103
Аубакирова Г.А., 91
Ахажанов Т.Б., 35, 51
Ахметкалиева Р.Д., 82
Ашуров Р., 166
Баегизова А.С., 171
Базарханов Д.Б., 36
Байчапанова Р.Е., 38
Бакирова Э.А., 92
Балгимбаева Ш.А., 40
Басаров С.Ж., 42
Башеева А.О., 220
Бегимкулов Ф.Х., 93
Бейсенбекова З., 179
Бекбауова А.У., 94
Бекбосын А., 179
Бекетаева А.О., 175
Бекчанов Ш.Э., 173
Бердимуратов А.М., 96
Бименов М.А., 98
Бобоев К.С., 167
Болсинов А.В., 18
Василина Г.К., 122
Гульманов Н.К., 170
Дадаева А.Н., 16

Даирбеков Н.С., 168
Данабекова М., 43
Дженалиев М.Т., 101
Емельянов Д.Ю., 220
Ерімбет Н.Д., 122
Ергазина Р., 181
Ергалиев М.Г., 99, 101
Жакыпбаева Г., 230
Жанабилова А.К., 44
Жахина Р.У., 84
Жумабекова Г.Е., 222
Жумагазиев А.Х., 117
Жусупова А.Т., 227
Закирьянова Г.К., 171
Зимин Р.Н., 172
Зиядуллаева Э.А., 173
Ибрагимов М.М., 46
Ильев А.В., 221
Иманбаев Н.С., 100
Иманбердиев К.Б., 99
Иманчиев А.Е., 84
Искакова Н.Б., 100
Ишан А., 90
Йлинен Л., 19
Кабдрахова С.С., 103
Казакбаева К.Б., 114
Каландаров У.Н., 118
Кальменов Т.Ш., 104
Кангужин Б.Е., 105
Канкенова А.М., 54
Каршыгина Г.Ж., 48
Касымбекова А.С., 99
Касыметова М.Т., 222
Касымов А., 49, 50
Каюмов Ш., 173
Кенгесбай А.А., 228
Кенесова А., 90
Койлышов У.К., 107
Копбалина С.С., 170
Кошанов Б.Д., 87, 105, 108
Куандык Г., 90
Кудайбергенов К.Ж., 223
Кулпешов Б.Ш., 223, 225
Кульжумиева А.А., 117
Кунанбаев А.К., 228
Лассас М., 19
Ли Ж., 192
Мадалиева С., 181
Малышев С.Б., 226
Манапова А.К., 175
Матин Д.Т., 35, 51
Матчанова А.А., 86
Махмудов Э.А., 110
Медетбеков М.М., 124
Мирзоев Д.Э., 189
Молдағали Е.Ө., 83
Мулюков И.И., 227
Муминов Ф.М., 110
Мусина А.А., 176
Мухамбетжан М.А., 58
Мырзахметова А.К., 109
Назарова К.Ж., 126
Найманова А.Ж., 175
Найманова Ж., 52
Наурыз Т., 185
Несипбаева А.Н., 92
Нуралиева Н., 166
Нурсултанов Е.Д., 42, 54
Нурсултанов М.Е., 19
Оксанен Л., 19
Олтиев Б.Ж., 190
Омаров Б., 55
Омаров М.Т., 177
Омарова Б.Ж., 117
Оразбекова А.С., 121
Орал А., 100
Орумбаева Н.Т., 179
Орынбасар Б.К., 101
Оспанов Қ.Н., 82, 83
Отелбаев М., 57
Очилова Н.К., 112
Панкратова И.Н. , 113
Пенкин О.М., 168
Полатхан Н.Л., 228
Псху А.В., 114, 177
Рамазанов М.И., 170
Рамазанов М.И., 177
Рузиев М.Х., 114
Рысмендеева Г.С., 180
Садыбеков М.А., 91, 98, 100, 107, 109
Сайидов О.Ж., 115
Сайфидинов О.И., 110
Сакабеков А., 181
Сактапбергенова Г.К., 117
Сартабанов Ж.А., 20, 117
Сарыбекова Л.О., 168
Сарыпбек А.Т., 122
Сафаров Ж.Ш., 118
Сафарова М.Ж., 118
Серовайский С.Я., 22, 120
Солдатов А.П., 108
Судоплатов С.В., 225

Сулейменова З.Р., 58
Талипова М.Ж., 84, 94
Танирберген А.К., 89
Тасмамбетов Ж.Н., 181, 183
Темешева С.М., 121
Тлеубергенов М.И., 122, 124
Тлеулесова А.Б., 121
Тлеумуратов С.Ж., 46
Тлеуханова Н.Т., 42
Тулакова З.Р., 125
Туленбаев К.М., 228
Тунгушбаева И.О., 229, 230
Тургумбаев М.Ж., 58
Турметов Б.Х. , 23
Убаева Ж.К., 183
Ульбрихт О.И., 231
Уркен Г.А., 231
Усманов К.И., 126
Хайруллин Е.М., 184
Харин С.Н., 185
Худойбердиев А.А., 187
Хуррамов Н.Х., 189, 190
Хусанов Э.А., 173
Швидефски М.В., 220
Шень Цин, 194
Шпади Ю.Р., 191
Щеглов А.Ю., 192, 194
Эргашев О., 127
Яхшибоев М.У., 115

Әлжан Б., 229

Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня науки

Алматы, 16–19 апреля 2024 года

Тезисы докладов

Подписано в печать 01.04.2024г.
Формат 60x84 1/16 Бумага офсетная
Тираж 150 экз.

Отпечатано в типографии ИМММ МНВО РК
050010, г. Алматы, ул Шевченко, 28