

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. С. Байжанов, Определимость 1-типов в слабо σ -минимальных теориях, *Матем. тр.*, 2005, том 8, номер 2, 3–38

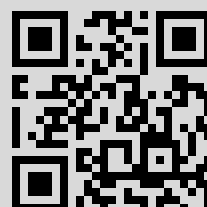
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 89.250.84.250

6 февраля 2015 г., 16:38:38



ОПРЕДЕЛИМОСТЬ 1-ТИПОВ В СЛАБО σ -МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЯХ

Б. С. Байжанов

В работе получен критерий определимости 1-типов над множествами слабо σ -минимальных теорий в терминах левой и правой сходимости формулы к типу.

Л. ван ден Дриес доказал, что любой тип над полем всех вещественных чисел определим. Усиливая этот результат, Д. Маркер и Ч. Стейнхорн, а затем и А. Пиллай установили, что в любой σ -минимальной теории для любой пары моделей $M \prec N$ тип над M любого кортежа элементов из N определим, если любой элемент из N имеет определимый тип над M .

В статье строится слабо σ -минимальная теория, для которой не выполняется теорема Маркера — Стейнхорна, т. е. некоторая пара моделей этой теории обладает тем свойством, что все элементы из большей модели имеют определимые 1-типы над меньшей моделью, но существует кортеж элементов из большей модели, имеющий неопределимый 2-тип над меньшей моделью.

Ключевые слова и фразы: определимость типа, слабо σ -минимальная теория, неортогональность типов.

§ 1. Введение

Статья содержит четыре параграфа. В § 1 даются общие факты об определимости типов, вводятся понятия квазимодельного типа, слабой и сильной сходимости формулы к типу, устанавливается связь между этими понятиями и известными понятиями из теории стабильности (предложение 15). В § 2 приводятся обозначения, определения и известные факты (без доказательств) из теории неортогональности 1-типов для слабо σ -минимальных теорий. § 3 содержит доказательство критерия определимости 1-типа над множеством модели слабо σ -минимальной теории (теорема 31) в терминах левой и правой сходимости формул к типу (определение 28).

Пусть M — элементарная подмодель N . Мы говорим, что пара моделей (M, N) является D -1-парой, если для любого элемента $\alpha \in N$ тип α

Работа выполнена при финансовой поддержке Американского фонда гражданских исследований (CRDF, AWARD KM2-2246).

над M ($\text{tp}(\alpha/M)$) определим, и D -парой, если для любой конечной последовательности элементов $\bar{\alpha}$ из N тип $\text{tp}(\bar{\alpha}/M)$ определим. Аналогично M будет D -1-моделью, если любой 1-тип над M определим, и D -моделью, если любой тип над M определим. Л. ван ден Дриес доказал [13], что D -1-модель теории вещественно замкнутого поля является D -моделью. Д. Маркер и Ч. Стейнхорн показали [17], что для любой o -минимальной теории любая D -1-пара есть D -пара и, следовательно, любая D -1-модель является D -моделью.

В § 4 строится D -1-пара моделей счетно категоричной слабо o -минимальной теории, которая не является D -парой (теорема 37).

На протяжении всей статьи мы полагаем, что M — линейно упорядоченная структура языка L .

Определение 1. Разбиение (A, B) модели M называется *сечением*, если $A < B$. Здесь $A < B \iff \forall a \in A \forall b \in B (a < b)$. Сечение называется *рациональным*, если A имеет максимальный элемент или B — минимальный, или одно из них пусто. Мы говорим, что сечение *квазирационально*, если A и, следовательно, B определимы (с параметрами). Не квазирациональное сечение называется *иррациональным*. Модель M называется *дедекндово полной*, если любое ее сечение рационально. Мы говорим, что M — *квазидедекндово полная модель*, если любое ее сечение квазирационально. Пусть M — элементарная подмодель N . Скажем, что сечение (A, B) в M реализуется в N , если существует $\alpha \in N \setminus M$ такой, что $A < \alpha < B$.

Определение 2 [12, 20]. Линейно упорядоченная структура M называется *o -минимальной*, если любое определимое (с параметрами) подмножество M является конечным объединением точек в M и интервалов (a, b) , $a \in M \cup \{-\infty\}$, $b \in M \cup \{\infty\}$.

Заметим, что в o -минимальной модели M любое квазирациональное сечение является рациональным.

Определение 3 [17]. Пусть M — элементарная подмодель N , где $N \models T$ и T — o -минимальная теория. Модель M называется *дедекндово полной в N* , если не существует нерационального сечения в M , реализованного в N .

Определение 4. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если любой элемент M , лежащий между двумя элементами A , лежит в A . В частности, любое пустое или одноэлементное множество выпукло. Мы говорим, что формула $\phi(x)$ *выпукла*, если множество $\phi(M) := \{\alpha \in M \mid M \models \phi(\alpha)\}$ выпукло.

Определение 5 [11, 15]. Линейно упорядоченная структура M называется *слабо o -минимальной*, если любое определимое (с параметрами) подмножество M является конечным объединением выпуклых подмножеств.

Теория T *слабо o -минимальна*, если любая ее модель слабо o -минимальна.

Заметим, что любая o -минимальная модель является слабо o -минимальной.

Определение 6. Пусть M — элементарная подмодель N , где $N \models T$ и T — слабо o -минимальная теория. Мы говорим, что M *квазидедекиндово полна в N* , если не существует иррационального сечения в M , реализованного в N .

Определение 7. Пусть A — множество в модели M и $M \models T$, $n < \omega$, $p \in S_n(A)$. Тип p является $\phi(\bar{x}_n, \bar{v})$ -*определимым* для $\phi(\bar{x}_n, \bar{v}) \in L(\bar{x}_n)$, если существует формула $R_\phi(\bar{v}) \in L(A)$ (A -определимая формула) такая, что для любого $\bar{a} \in A$ имеем $\phi(\bar{x}_n, \bar{a}) \in p$, если и только если $M \models R_\phi(\bar{a})$.

Тогда формула $R_\phi(\bar{v})$ называется $\phi(\bar{x}_n, \bar{v})$ -*определением* типа p . Скажем, что тип p *определим*, если p является $\phi(\bar{x}_n, \bar{v})$ -определимым для любой формулы $\phi(\bar{x}_n, \bar{v}) \in L(\bar{x}_n)$, $n < \omega$.

Кортеж $\bar{\gamma} \in M$ называется *ht-определимым над A* , если его тип над A определим.

Напомним [17, лемма 2.3], что в o -минимальной теории для любого сечения в модели M существует только один 1-тип над M , расширяющий его. Этот тип определим, если и только если сечение рационально. Поэтому любая o -минимальная модель M является D -1-моделью тогда и только тогда, когда M дедекиндово полна. Любая пара (M, N) произвольной o -минимальной теории является D -1-парой тогда и только тогда, когда M дедекиндово полна в N .

Л. ван ден Дриес изучал определимые типы над вещественно замкнутым полем и доказал следующее утверждение.

Теорема 8 [13]. *Любой тип над $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ определим (здесь $\mathbb{R}$ — множество всех вещественных чисел).*

Д. Маркер и Ч. Стейнхорн расширили этот результат на o -минимальные теории.

Теорема 9 [17]. Пусть T — o -минимальная теория, $M \models T$. Тогда выполняется следующее.

1. Модель M дедекиндово полна тогда и только тогда, когда каждый тип из $S(M) := \bigcup_{n < \omega} S_n(M)$ определим.

2. Пусть M — элементарная подмодель N . Тогда для любого $\bar{\alpha} \in N \setminus M$ тип $\text{tp}(\bar{\alpha}/M)$ определим тогда и только тогда, когда M дедекиндово полна в N .

Из утверждения 21 следует, что для слабо o -минимальной теории T любая пара моделей (M, N) является D -1-парой тогда и только тогда, когда M квазидедекиндово полна в N , и произвольная модель M теории T является D -1-моделью, если и только если M квазидедекиндово полна.

Некоторые общие факты об определимости типов.

Центральным понятием в данной работе является понятие сходимости формулы к типу.

Пусть T — произвольная полная теория языка L , N — достаточно насыщенная модель теории T , $A \subset N$, $\bar{\alpha} \in N$, и пусть q — неизолитованный тип из $S(A)$, а $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ — A -определимая формула. Мы говорим, что формула $\phi(\bar{x}, \bar{b})$, $\bar{b} \in N$, делит $C \subset N^l$ (l — длина кортежа $(\bar{x})$, C необязательно определимо), если $\phi(N^l, \bar{b}) \cap C \neq \emptyset$, $\neg\phi(N^l, \bar{b}) \cap C \neq \emptyset$. Часто мы будем писать $\phi(N, \bar{b})$ вместо $\phi(N^l, \bar{b})$.

Мы говорим, что A -определимая формула $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ слабо сходится к типу $q(\bar{x}) \in S(A)$ и обозначаем это через $\text{WEC}(\phi(\bar{x}, \bar{y}), q(\bar{x}))$, если для любой $\Theta \in q$ существует $\bar{a} \in A$ такой, что $\phi(\bar{x}, \bar{a})$ делит $\Theta(N)$.

Мы говорим, что A -определимая формула $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ сильно сходится к типу $q(\bar{x})$ и обозначаем это через $\text{STC}(\phi(\bar{x}, \bar{y}), q(\bar{x}))$, если для любой $\Theta \in q$ существует $\bar{a} \in A$ такой, что $\phi(N, \bar{a}) \subset \Theta(N)$. Почти всегда мы будем опускать $\bar{x}$ при написании $q(\bar{x})$.

Допустим, что выполняется $\text{WEC}(\phi(\bar{x}, \bar{y}), q(\bar{x}))$ для $q \in S(A)$, и пусть $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ — график некоторой A -определимой функции $f(\bar{y})$ (т.е. $\phi(\bar{x}, \bar{y}) \equiv \bar{x} = f(\bar{y})$). Тогда справедливо $\text{STC}(\phi(\bar{x}, \bar{y}), q(\bar{x}))$. В этом случае говорим, что значения функции $f(\bar{y})$ сходятся к типу q , и пишем $\text{STC}(f(\bar{y}), q)$.

Мы говорим, что кортеж $\bar{\alpha}$ слабо ортогонален типу q , если для любой A -определимой формулы $\phi(\bar{x}, \bar{y})$, формула $\phi(\bar{x}, \bar{\alpha})$ не делит $q(N) = \bigcap_{\Theta \in q} \Theta(N)$ (обозначаем это через $\bar{\alpha} \perp^w q$), и говорим, что $\bar{\alpha}$ не слабо ортогонален типу q , если существует A -определимая формула $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ такая, что $\phi(\bar{x}, \bar{\alpha})$ делит $q(N)$ ($\bar{\alpha} \not\perp^w q$).

Заметим, что $\phi(\bar{x}, \bar{\alpha})$ делит $q(N)$ тогда и только тогда, когда для любой $\Theta \in q$ формула $\phi(\bar{x}, \bar{\alpha})$ делит $\Theta(N)$. Тогда для всех $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ таких, что $\text{tp}(\bar{\alpha}/A) = \text{tp}(\bar{\beta}/A)$, имеем $\bar{\alpha} \not\perp^w q \iff \bar{\beta} \not\perp^w q$. Таким образом, $p \in S(A)$ слабо ортогонален типу $q \in S(A)$ ($p \perp^w q$), если существует $\bar{\alpha} \in p(N)$ (при этом годится любой $\bar{\alpha} \in p(N)$) такой, что $\bar{\alpha} \perp^w q$ или, что эквивалентно (см. [21, определение V.1.1 (i)]), $p(\bar{x}) \cup q(\bar{y})$ определяет полный $(l(\bar{x}) + l(\bar{y}))$ -тип. Заметим, что если $p \not\perp^w q$, то $q \not\perp^w p$ [21, лемма V.1.1 (i)].

Определение 10. Пусть Γ — неизолитованное совместное множество формул, определенных над A . Мы говорим, что Γ — *квазимодельное множество*, если для любой формулы $\Theta \in \Gamma$ существует $\bar{a} \in A$ такой, что $N \models \Theta(\bar{a})$.

Утверждение 11. Для любого неизолитованного квазимодельного множества Γ формул над A , замкнутого относительно конечных конъюнкций, существует квазимодельный тип над A , расширяющий Γ .

Доказательство. Для любой A -определимой формулы $Q(\bar{y})$ по крайней мере одно из множеств формул $\Gamma(\bar{y}) \cup \{Q(\bar{y})\}$, $\Gamma(\bar{y}) \cup \{\neg Q(\bar{y})\}$ квазимодельно. $\square$

Пусть $q(\bar{x})$ тип из $S(A)$, $A \subset N$. Мы говорим, что q — *строго определимый* (или *слабо изолитованный*) тип, если для любой A -определимой формулы $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ существует A -определимая формула $\Theta(\bar{x}) \in q$ такая, что для всех $\bar{a} \in A^{l(\bar{y})}$ имеем

$$N \models \exists \bar{x} (\Theta(\bar{x}) \wedge \phi(\bar{x}, \bar{a})) \rightarrow \forall \bar{x} (\Theta(\bar{x}) \rightarrow \phi(\bar{x}, \bar{a})).$$

Очевидно, что любой изолитованный тип является строго определимым, а строго определимый тип $q \in S(A)$ — определимым, и в этом случае существует формула $\Theta \in q$ такая, что $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ -определением типа $q(\bar{x})$ будет A -определимая формула $\Psi_\phi(\bar{y}) := \forall \bar{x} (\Theta(\bar{x}) \rightarrow \phi(\bar{x}, \bar{y}))$.

Утверждение 12. Пусть q — тип из $S(A)$. Тип $q(\bar{x})$ строго определим тогда и только тогда, когда для любой формулы $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ языка L имеет место $\neg \text{WEC}(\phi(\bar{x}, \bar{y}), q)$.

Утверждение 13. Пусть q — тип из $S(A)$. Тогда выполняется следующее.

1. Если существует A -определимая формула $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ такая, что имеет место $\text{WEC}(\phi(\bar{x}, \bar{y}), q)$, то существует квазимодельный тип $r \in S(A)$ такой, что для любого $\bar{a} \in r(N)$ формула $\phi(x, \bar{a})$ делит $q(N)$, т. е. $r \not\vdash^w q$.
2. Если для некоторого квазимодельного типа $r \in S(A)$ выполняется $r \not\vdash^w q$, то для некоторой A -определимой формулы $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ имеет место $\text{WEC}(\phi(\bar{x}, \bar{y}), q)$.

Доказательство. 1. Рассмотрим в качестве Γ следующее множество A -определимых формул:

$$\left\{ K(\Theta)(\bar{y}) \mid \Theta \in q, K(\Theta)(\bar{y}) := \exists x [\phi(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \Theta(\bar{x})] \wedge \exists x [\neg \phi(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \Theta(\bar{x})] \right\}.$$

Ясно, что Γ — квазимодельное множество, замкнутое относительно конечных конъюнкций. Тогда по утверждению 11 существует квазимодельный тип $r \in S(A)$, расширяющий Γ . Поэтому для любого $\bar{\gamma} \in$

$r(N) \subseteq \Gamma(N)$ формула $\phi(x, \bar{\alpha})$ делит $q(N)$. Это значит, что $\bar{\gamma} \not\vdash^w q$ и, следовательно, $r \not\vdash^w q$.

2. Пусть $\bar{\alpha}$ — кортеж из $r(N)$ и $\bar{\alpha} \not\vdash^w q$. Тогда для некоторой формулы $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ формула $\phi(\bar{x}, \bar{\alpha})$ делит $q(N)$. Отсюда следует, что $\phi(\bar{x}, \bar{\alpha})$ делит $\Theta(N)$ для любой $\Theta(\bar{x}) \in q$. Последнее означает, что $N \models K(\Theta)(\bar{\alpha})$. Таким образом, имеем $K(\Theta)(\bar{y}) \in r$, и в силу квазимодельности r существует $\bar{a} \in A$ такой, что $N \models K(\Theta)(\bar{a})$. Тогда имеет место $\text{WEC}(\phi(\bar{x}, \bar{y}), q)$. $\square$

Утверждение 14. Пусть r, q — типы из $S(A)$, r — квазимодельный тип, и пусть $H(\bar{x}, \bar{y})$ — A -определимая формула. Если существует $\bar{\gamma} \in r(N)$, для которого $H(N, \bar{\gamma}) \subset q(N)$ (при этом годится любой $\bar{\gamma} \in r(N)$), то имеет место $\text{STC}(H(\bar{x}, \bar{y}), q)$.

Доказательство. Имеем $H(N, \bar{\gamma}) \subset q(N)$ тогда и только тогда, когда для любой формулы $\Theta \in q$ выполняется включение $H(N, \bar{\gamma}) \subset \Theta(N)$. В свою очередь это равносильно тому, что для любой формулы $\Theta \in q$ имеет место $N \models \forall \bar{x} (H(\bar{x}, \bar{\gamma}) \rightarrow \Theta(\bar{x}))$. В силу того, что $\forall \bar{x} (H(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow \Theta(\bar{x})) \in r$ и r — квазимодельный тип, получаем $\text{STC}(H(\bar{x}, \bar{y}), q)$. $\square$

Для слабо o -минимальной теории понятие слабой сходимости формулы к 1-типу конкретизируется (трансформируется) в понятия левой, правой и двусторонней сходимости (определение 28, лемма 36). В этих терминах и сформулированы критерий определимости 1-типа над произвольным множеством (теорема 31) и его следствие, критерий определимости 1-типа над объединением модели с ht -определимой над ней конечной последовательностью (предложение 35).

Замечание. Понятие сходимости формулы к неизолированному типу неявно использовалось в доказательствах теорем по упорядоченным моделям [5, 7, 17, 19] и моделям стабильных теорий [1, 3, 8, 9, 14, 21]. Понятие квазимодельного типа неявно использовалось в доказательствах теорем в работах [2, 5]. Чтобы завершить мотивацию введения этих понятий, приведем один простой факт, который поможет объяснить природу понятия сходимости формулы к типу с помощью хорошо известных понятий из теории стабильности.

Предложение 15. Пусть T — стабильная теория, N — большая насыщенная модель теории T , $A \subset N$, $q \in S(A)$ и $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ — A -определимая формула. Тогда выполняется следующее.

1. Если q — квазимодельный тип, то q стационарен.
2. Если имеет место $\text{WEC}(\phi(\bar{x}, \bar{y}), q)$, то существует квазимодельный (стационарный) тип $r \in S(A)$ такой, что $r \not\vdash^a q$.
3. Пусть M — элементарная подмодель N , где $p \in S(N)$ и p не отвечает над M . Тогда для любого $\bar{\alpha} \in N \setminus M$ тип $p_1 := \{\theta(\bar{x}) \in p \mid \theta(\bar{x}) \text{ — } (M \cup \bar{\alpha})\text{-определимая формула}\}$ квазимодельный.

4. Пусть $\bar{\alpha}$ — кортеж из $N \setminus A$, $q = \text{tp}(\bar{\alpha} \mid A)$ и формула $\phi(\bar{x}, \bar{\alpha})$ делится над A [21, определение V.1.3]. Тогда для любого типа $p \in S(A)$ такого, что $p(N) \cap \phi(N, \bar{\alpha}) \neq \emptyset$, имеем $p(N) \cap \neg \phi(N, \bar{\alpha}) \neq \emptyset$, т.е. $\bar{\alpha} \not\perp^w p$ и, следовательно, $q \not\perp^w p$.

Доказательство. 1. Из [21, определение III.1.7, определение III.4.1, лемма III.4.18, следствие III.2.9 (ii)] следует, что если для любой A -определимой эквивалентности $E(\bar{x}, \bar{z})$ с конечным числом E -классов существует $\bar{a} \in A$ такой, что $E(\bar{x}, \bar{a}) \in q$, то q — стационарный тип.

Пусть $E(\bar{x}, \bar{y})$ — A -определимое отношение эквивалентности с конечным числом E -классов. Положим $\phi_0(\bar{x}) := (\exists \bar{z}) E(\bar{x}, \bar{z}) \in q$. Так как q — квазимодельный тип, существует $\bar{a}_0 \in A$ такой, что $N \models (\exists \bar{z}) E(\bar{z}, \bar{a}_0)$. Если $E(\bar{x}, \bar{a}_0) \notin q$, то $\phi_1(\bar{x}) := \exists \bar{z} [E(\bar{x}, \bar{z}) \wedge \neg E(\bar{x}, \bar{a}_0)]$ — A -определимая формула и $\phi_1 \in q$. Пусть $\bar{a}_1 \in A$ такой, что $N \models \phi_1(\bar{a}_1)$. Далее, положим $\phi_i(\bar{x}) := \exists \bar{z} [E(\bar{x}, \bar{z}) \wedge \bigwedge_{j < i} \neg E(\bar{x}, \bar{a}_j)]$. Это — A -определимая формула, и $\phi_i \in q$. Тогда $N \models \bigwedge_{j \neq n < i} \neg E(\bar{a}_j, \bar{a}_n)$. Таким образом, если для каждого $i < \omega$ выполняется $\phi_i(\bar{x}) \notin q$, то получаем противоречие с тем, что E имеет только конечное число E -классов.

Следовательно, $q(N)$ — подмножество одного из A -определимых E -классов для любого A -определимого отношения эквивалентности $E(\bar{x}, \bar{z})$.

2. Из [8, с. 143] следует, что два типа $p, q \in S(A)$ почти ортогональны ($p \perp^a q$), если любые кортежи $\bar{\alpha} \in p(N)$ и $\bar{\beta} \in q(N)$ A -независимы и из $p \perp^a r$ и стационарности p или r следует, что $p \perp^w r$. По утверждению 13 существует квазимодельный тип $r \in S(A)$ такой, что $p \not\perp^w r$ и, следовательно, в силу стационарности r ввиду п. 1 предложения 15 имеем $p \not\perp^a r$.

3. Из [21, теорема III.0.1.(4), следствие III.4.10] вытекает, что тип $p \in S(N)$ не ответвляется над M , где $M \prec N$, если и только если p конечно реализуем в M (p конечно реализуем в модели M , если для любой формулы $\phi \in p$ существует $\bar{a} \in M$ такой, что $N \models \phi(\bar{a})$). Рассмотрим произвольную $(M \cup \bar{\alpha})$ -определимую формулу $\theta(\bar{x}, \bar{\alpha}) \in p$. Поскольку p конечно реализуем в M , существует $\bar{a} \in M$ такой, что $N \models \theta(\bar{a}, \bar{\alpha})$. Это значит, что p_1 — квазимодельный тип.

4. Пусть $\bar{\gamma}$ — кортеж из пересечения $p(N) \cap \phi(N, \bar{\alpha})$. Из определения деления над A следует существование $n < \omega$, $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n \in q(N)$ таких, что $N \models \neg \exists \bar{x} (\phi(\bar{x}, \bar{\alpha}) \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi(\bar{x}, \bar{\alpha}_i))$. Тогда для некоторого $\bar{\alpha}_i$ выполняется $\bar{\gamma} \notin \phi(N, \bar{\alpha}_i)$. Далее, в силу того, что $\text{tp}(\bar{\alpha} \mid A) = \text{tp}(\bar{\alpha}_i \mid A) = q$ и $\bar{\gamma} \in p(N)$, $p \in S(A)$, найдется $\bar{\gamma}_i \in p(N)$ такой, что $\bar{\gamma}_i \notin \phi(N, \bar{\alpha})$. Последнее доказывает п. 4 предложения 15. $\square$

§ 2. Обозначения, определения, факты

Всюду далее предполагаем, что M и N — произвольные модели слабо o -минимальной теории T такие, что $M \prec N$ и N — достаточно насыщен-ная модель. Для любого $A \subset N$ положим

$$A^+ := \{x \in N \mid \forall a \in A, x > a\},$$

$$A^- := \{x \in N \mid \forall a \in A, x < a\}.$$

Пусть $\bar{y}$ — кортеж $\langle y_1, \dots, y_n \rangle$. Длину кортежа $\bar{y}$ обозначим через $l(\bar{y})$ ($l(\bar{y}) = n$). Иногда мы будем писать $\bar{a} \in A$ вместо $\bar{a} \in A^{l(\bar{a})}$.

Пусть B — множество в модели N . B -определимая формула — это результат подстановки последовательности параметров $\bar{b} \in B^{l(\bar{x})}$ в L -формулу $\phi(\bar{x}, \bar{y})$, образующий формулу $\phi(\bar{x}, \bar{b})$. Подмножество $X \subset M^l$ называется B -определимым, если $X = \phi(M^l, \bar{b}) := \{\bar{a} \in M^l / M \mid \phi(\bar{a}, \bar{b})\}$ для некоторой B -определимой формулы $\phi(\bar{x}, \bar{b})$ с $l(\bar{x}) = l$. Иногда мы будем писать « $L(B)$ -формула» вместо « B -определимая формула». Пусть B — произвольное выпуклое множество (необязательно определимое). Говорим, что формула $U(x)$ *расщепляет* B , если $U(N)$ и $\neg U(N)$ суть выпуклые множества и $U(N) \cap B \neq \emptyset$, $\neg U(N) \cap B \neq \emptyset$. Если $A \subset M$, то $S_n(A)$ — множество n -типов над A и $S(A) = \bigcup_{n < \omega} S_n(A)$. Часто мы будем записывать формулы первого порядка через отношения формульных множеств, например:

$$x < \phi(N) \equiv \forall y (\phi(y) \rightarrow x < y);$$

$$x \in (\beta_1, \beta_2) \equiv \beta_1 < x < \beta_2;$$

$$\phi(N) \bigcap \theta(N) \neq \emptyset \equiv N \models \exists x (\phi(x) \wedge \theta(x));$$

$$\phi(N) < \theta(N)^+ \equiv N \models \forall t (\forall y (\theta(y) \rightarrow y < t) \rightarrow \forall x (\phi(x) \rightarrow x < t)).$$

Мы говорим, что два выпуклых множества C и D *отделимы элементом a* (a -отделимы), если $C < a < D$ или $D < a < C$. Говорим, что семейство выпуклых множеств E -отделимо, если эти множества попарно отделимы элементами из E .

Утверждение 16 [2, 7]. Теория T слабо o -минимальна тогда и только тогда, когда для любой формулы $\phi(x, \bar{y})$ существует натуральное число $n_\phi < \omega$ такое, что для любой модели $M \models T$ и любого $\bar{a} \in M$ множество $\phi(M, \bar{a})$ — это объединение менее n_ϕ $\bar{a}$ -определимых выпуклых $\neg\phi(M, \bar{a})$ -отделимых подмножеств.

Замечание 17. Пересечение семейства выпуклых подмножеств произвольного линейно упорядоченного множества выпукло, и, следовательно, по утверждению 16 для любого 1-типа $p \in S_1(A)$, $A \subset M \models T$, множество $p(M)$ выпукло. Если M — $|A|^+$ -насыщенная модель и p — неалгебраический 1-тип, то $p(M)$ не имеет ни минимального, ни максимального элемента.

Из утверждения 16 и замечания 17 следует

Замечание 18. Если существует $\bar{a}$ -определимая формула, которая делит выпуклое множество B , то существует $\bar{a}$ -определимая формула, которая расщепляет B .

Утверждение 19. Пусть p — тип из $S_1(A)$, A — множество в модели M и $M \models T$. Тогда тип p определим, если и только если p является $\phi(x, \bar{y})$ -определимым для любой формулы $\phi(x, \bar{y})$ такой, что для любого $\bar{b} \in M$ множество $\phi(M, \bar{b})$ выпукло.

Определение 20 [5]. Пусть p — тип из $S_1(A)$, A — множество в модели M и $M \models T$. Мы говорим, что тип p *квазирациональный вправо*, если существует A -определимая выпуклая формула $U_p(x) \in p$ такая, что для любой достаточно насыщенной модели $N \succ M$ имеем $U_p(N)^+ = p(N)^+$. Говорим, что p *квазирациональный влево*, если существует A -определимая выпуклая формула $U_p(x) \in p$ такая, что для любой достаточно насыщенной модели $N \succ M$ имеем $U_p(N)^- = p(N)^-$. Квазирациональный вправо и влево тип называется *изолированным*. Неизолированный 1-тип называется *квазирациональным*, если он квазирациональный либо вправо, либо влево. Неквазирациональный и неизолированный 1-тип называется *иррациональным*.

Пусть p — n -тип над A , $F \subset p$. Мы говорим, что p *определяется F* (или F *определяет p*), если для любой формулы $\phi(\bar{x}) \in p$ существует $\theta(\bar{x}) \in F$ такая, что $N \models \forall \bar{x}(\theta(\bar{x}) \rightarrow \phi(\bar{x}))$.

Говорим, что 1-тип $p \in S_1(A \cup B)$ *определяется квазирациональным сечением (A, B)* , если p определяется следующим множеством формул: $\{a < x \wedge U(x) \mid a \in A\}$ или $\{x < b \wedge \neg U(x) \mid b \in B\}$. Здесь, $U(x)$ — $(A \cup B)$ -определимая формула такая, что $A \subset U(N)$, $U(N) \cap B = \emptyset$.

Утверждение 21 [5, 7]. Пусть p — тип из $S_1(M)$, $M \models T$. Тогда

- 1) p — неопределимый тип, если и только если p — иррациональный тип, если и только если p определим иррациональным сечением в M ;
- 2) p — определимый тип, если и только если p — квазирациональный тип, если и только если p определяется квазирациональным сечением в M .

Заметим, что утверждение 21 является обобщением аналогичного факта для o -минимальных теорий, доказанного Д. Маркером и Ч. Стейнхорном в [17, лемма 2.3], и для o -минимальных теорий определимые 1-типы над моделями определяются рациональными сечениями.

Предложение 22 [5]. Пусть p и r — типы из $S_1(A)$, A — множество в модели N и $N \models T$, $\bar{\gamma} \in N \setminus A$.

1. Если $p \not\perp^w r$, то $r \not\perp^w p$.
2. Если $\bar{\gamma}$ ht-определим над A и $\bar{\gamma} \not\perp^w p$, то p — определимый тип.
3. Если $p \not\perp^w r$, то p определим, если и только если r определим.

Доказательство. 1. Напомним, что $p \perp^w r$ тогда и только тогда, когда $p(x) \cup r(y)$ — полный 2-тип.

2. Пусть $K(x, \bar{y})$ — A -определимая формула такая, что $K(N, \bar{\gamma}) \cap p(N) \neq \emptyset$, $\neg K(N, \bar{\gamma}) \cap p(N) \neq \emptyset$. Тогда по замечанию 18 существует $(A \cup \bar{\gamma})$ -определимая выпуклая формула $H(x, \bar{y})$ такая, что $H(N, \bar{\gamma}) < \neg H(N, \bar{\gamma})$ и существуют $\beta_1, \beta_2 \in p(N)$, для которых $\beta_1 < \beta_2$, $\beta_1 \in H(N, \bar{\gamma})$, $H(N, \bar{\gamma}) < \beta_2$.

Пусть $\theta(x, \bar{z})$ — произвольная формула. Согласно утверждению 19 можно предположить, что для любого $\bar{b} \in N$ формула $\theta(x, \bar{b})$ выпукла. Для любого $\bar{a} \in A^{l(\bar{z})}$ верно следующее:

$$\begin{aligned} \theta(x, \bar{a}) \in p &\iff (\beta_1, \beta_2) \subset p(N) \subset \theta(N, \bar{a}) \\ &\iff N \models \forall x (x \in (\beta_1, \beta_2) \rightarrow \theta(x, \bar{a})) \\ &\iff N \models \exists x_1, x_2 \left(H(x_1, \bar{\gamma}) \wedge \neg H(x_2, \bar{\gamma}) \wedge x_1 < x_2 \wedge \forall x (x \in (x_1, x_2) \rightarrow \theta(x, \bar{a})) \right). \end{aligned}$$

Обозначим последнюю формулу через $Q(\theta)(\bar{\gamma}, \bar{a})$. Тогда в силу определения 7 существует A -определимая формула $R_{Q(\theta)}(\bar{z})$ такая, что

$$N \models Q(\theta)(\bar{\gamma}, \bar{a}) \iff N \models R_{Q(\theta)}(\bar{a}).$$

Положим $\mu_\theta(\bar{z}) := R_{Q(\theta)}(\bar{z})$. Таким образом,

$$\theta(x, \bar{a}) \in p \iff N \models \mu_\theta(\bar{a}).$$

3. Заметим, что если $p \not\perp^w r$, то $\alpha \not\perp^w r$ для любого $\alpha \in p(N)$. Тогда из 1 и 2 получаем утверждение 3. $\square$

Напомним один элементарный факт, который непосредственно следует из определений типа и насыщенной модели.

Утверждение 23. Пусть M — модель любой теории первого порядка такая, что для некоторого $A \subset M$ модель M будет $|A|^+$ -насыщенной. Тогда справедливы следующие утверждения.

(i) Пусть существуют $n, m < \omega$, A -определимая формула $\psi(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, $p \in S_m(A)$, $l(\bar{x}_1) = \dots = l(\bar{x}_n) = m$ такие, что $M \models \psi(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$ для любого $\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n \in p(M^m)$. Тогда найдется $\theta(\bar{x}) \in p$ такая, что $M \models \forall \bar{x}_1, \dots, \forall \bar{x}_n (\bigwedge \theta(\bar{x}_i) \rightarrow \psi(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n))$.

(ii) Если $p \in S_m(A)$, $m < \omega$ — неизолитованный тип, то множество $p(M^m)$ не является M -определимым.

(iii) Пусть p и r — типы из $S(A)$, $\bar{\alpha}$ — кортеж из $p(M)$, $\bar{\beta}_1$ и $\bar{\beta}_2$ — кортежи из $r(M)$, а $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ является A -определимой формулой такой, что $M \models \phi(\bar{\beta}_1, \bar{\alpha}) \wedge \neg \phi(\bar{\beta}_2, \bar{\alpha})$. Тогда для любого $\bar{\beta} \in r(M)$ существуют $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2 \in p(M)$ такие, что $M \models \phi(\bar{\beta}, \bar{\alpha}_1) \wedge \neg \phi(\bar{\beta}, \bar{\alpha}_2)$.

Определение 24. Формула $K(x, y)$ монотонно возрастает по y на выпуклом множестве B , если выполняется

$$\forall b_1, \forall b_2 [(b_1 \in B \wedge b_2 \in B \wedge b_1 < b_2) \rightarrow K(N, b_1) < K(N, b_2)^+].$$

Аналогично можно определить монотонное убывание.

Теорема 25 [5–7]. Если $p(y) \not\leq^w q(x)$, то существует A -определимая формула $K(x, y)$, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $K(x, y)$ монотонна по y на некотором $\Theta(N)$, $\Theta(y) \in p$, и монотонна по x на некотором $\mu(N)$, $\mu(x) \in q$;
- 2) $K(x, \alpha)$ расщепляет $q(N)$ и $K(\beta, y)$ расщепляет $p(N)$ для любого $\alpha \in p(N)$ и любого $\beta \in q(N)$.

Заметим, что в o -минимальном случае формула $K(x, y)$ из теоремы 25 является графиком некоторой монотонной функции (см. [2, 16, 18]).

Отметим, что утверждение теоремы 25 верно и для более общего случая, когда A является подмножеством слабо o -минимальной модели конечной глубины, теория которой необязательно слабо o -минимальна [4].

Предложение 26 [5–7]. Пусть p и q — типы из $S_1(A)$, $p \not\leq^w q$. Тогда:

- 1) p строго определим $\iff q$ строго определим;
- 2) p — иррациональный тип $\iff q$ — иррациональный тип;
- 3) p — квазирациональный тип $\iff q$ — квазирациональный тип;
- 4) $\not\leq^w$ — отношение эквивалентности на $S_1(A)$.

Заметим, что предложение 26 является обобщением аналогичного факта для 1-типов над o -минимальной моделью, доказанного Д. Маркером в [16].

§ 3. Определимость 1-типов

Цель параграфа — дать критерий неопределимости 1-типов (теорема 31) и одну из его форм (предложение 35).

Утверждение 27. *Любой квазирациональный тип $p \in S_1(A)$ определен.*

Доказательство. Положим для определенности, что p квазирационален вправо. Случай, когда тип p квазирационален влево, рассматривается аналогично. Пусть $U_p(x)$ — A -определимая формула такая, что $U_p(x) \in p$, $U_p(N)^+ = p(N)^+$. Пусть $\varphi(x, \bar{y})$ — произвольная A -определимая $(l(\bar{y}) + 1)$ -формула. Рассмотрим следующую A -определимую $l(\bar{y})$ -формулу:

$$\Theta_\varphi(\bar{y}) := \exists x \left((\varphi(x, \bar{y}) \wedge U_p(x)) \wedge \forall z (x < z < U_p(N)^+ \rightarrow \varphi(z, \bar{y})) \right).$$

Ясно, что для всякого $\bar{a} \in A^{l(\bar{y})}$ верно $N \models \Theta_\varphi(\bar{a}) \iff \varphi(x, \bar{a}) \in p$. $\square$

Пусть q — тип из $S_1(A)$, $A \subset N$. Обозначим

$$L(q) := \{G(x)/G(x) \text{ — } A\text{-определимая формула такая, что } G(N) < q(N)\},$$

$$R(q) := \{D(x)/D(x) \text{ — } A\text{-определимая формула такая, что } q(N) < D(N)\}.$$

Определение 28. Пусть q — тип из $S_1(A)$, $A \subset N$, а $\theta(\bar{y})$ и $H(x, \bar{y})$ — A -определимые формулы, $X := \theta(N^{l(\bar{y})}) \cap A^{l(\bar{y})}$.

Мы говорим, что выполняется *условие левой сходимости* формулы $H(x, \bar{y})$ на множестве X или $\theta(\bar{y})$ к типу q , и обозначаем это через

$$LC(H(x, \bar{y}), X, q) \text{ или } LC(H(x, \bar{y}), \theta(\bar{y}), q),$$

если верно следующее:

$$\forall G(x) \in L(q), \exists \bar{a} \in X, N \models \exists x (G(N) < x < H(N, \bar{a})^+), H(N, \bar{a}) < q(N).$$

Говорим, что выполняется *условие правой сходимости* $H(x, \bar{y})$ на X к q , и обозначаем это через $RC(H(x, \bar{y}), X, q)$, если

$$\forall D(x) \in R(q), \exists \bar{a} \in X, N \models \exists x (H(N, \bar{a}) < x < D(N)), q(N) < H(N, \bar{a})^+.$$

Также говорим, что выполняется *условие двусторонней сходимости* $H(x, \bar{y})$ на X или $\theta(\bar{y})$ к q , и обозначаем это через $C(H(x, \bar{y}), X, q)$ или $C(H(x, \bar{y}), \theta(\bar{y}), q)$, если $LC(H, X, q)$ и $RC(H, X, q)$ имеют место одновременно.

Отметим, что в определениях как левой, так и правой сходимостей формулы $H(x, \bar{y})$ мы использовали правую границу формулы $H(x, \bar{a})$, $\bar{a} \in A$. Можно было бы определить сходимость и по левой границе формулы, но мы этого в данной статье делать не будем.

Заметим, что фактически в [17, 19] была рассмотрена (левая) сходимость значений функции к типу q .

Замечание 29. Пусть q — тип из $S_1(A)$. Тогда если q квазирационален вправо, то для любых A -определимых формул $H(x, \bar{y})$, $\theta(\bar{y})$ имеет место $\neg \text{LC}(H, \theta, q)$, и если q квазирационален влево, то для любых A -определимых формул $H(x, \bar{y})$, $\theta(\bar{y})$ имеет место $\neg \text{RC}(H, \theta, q)$.

Из замечания 29 следует, что если для $L(A)$ -формул $H(x, \bar{y})$, $\theta(\bar{y})$ и 1-типа $q \in S_1(A)$ верно $\text{C}(H, \theta, q)$, то q должен быть иррациональным. Из утверждения 27 заключаем, что вопрос неопределимости 1-типа надо рассматривать только для иррациональных типов.

Замечание 30. Пусть $H(x, \bar{y})$, $\theta(\bar{y})$ — A -определимые формулы такие, что имеет место $\text{C}(H, \theta, q)$ для некоторого $q \in S_1(A)$. Тогда для любой A -определимой формулы $\theta_1(\bar{y})$ верно следующее.

- (i) Если $\text{LC}(H, \theta_1, q)$ и $\neg \text{RC}(H, \theta_1, q)$, то $\text{RC}(H, \theta(\bar{y}) \wedge \neg \theta_1(\bar{y}), q)$.
- (ii) Если $\models \forall \bar{y}(\theta(\bar{y}) \rightarrow \theta_1(\bar{y}))$, то $\text{C}(H, \theta_1, q)$.

Теорема 31. Пусть A — множество в модели M и $M \models T$, T — слабо ω -минимальная теория, q — иррациональный 1-тип над A . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) q неопределим;
- (ii) существует A -определимая формула $H(x, \bar{y})$ такая, что для любой A -определимой формулы $\theta(\bar{y})$ выполняется

$$\text{C}(H(x, \bar{y}), \theta(\bar{y}), q) \bigvee \text{C}(H(x, \bar{y}), \neg \theta(\bar{y}), q).$$

Доказательство. Отметим, что условие « q — иррациональный тип» означает, что среди формул $L(q)$ нет наибольшей, а среди формул $R(q)$ нет наименьшей. Сущность доказательства необходимости заключается в том, что по крайней мере одна из границ (левая или правая) формулы, для которой выполняется неопределимость типа, с помощью констант из A аппроксимирует как $L(q)$, так и $R(q)$. При доказательстве же достаточности по формуле, которая одновременно аппроксимирует $L(q)$ и $R(q)$, строится формула, которая дает неопределимость типа q .

Необходимость. Пусть $\varphi(x, \bar{y})$ — A -формула такая, что q не является $\varphi(x, \bar{y})$ -определимым. По утверждению 19 можно допустить, что для любого $\bar{b}$ из M множество $\varphi(x, \bar{b})$ выпукло. Пусть

$$H_1(x, \bar{y}) := x < \varphi(N, \bar{y}), \quad H_2(x, \bar{y}) := \varphi(x, \bar{y}).$$

Тогда $H_i(x, \bar{y})$, $i = 1, 2$, — A -определимые формулы.

Пусть $\theta(\bar{y})$ — произвольная A -формула.

Замечание 32. Для $j = 1, 2$ выполняется $\neg RC(H_j, \theta, q)$ тогда и только тогда, когда существует $D_j(x) \in R(q)$ такая, что верно:

$$\forall \bar{a} \in \theta(N^{l(\bar{y})}) \cap A^{l(\bar{y})} \left[N \models \exists x (H_j(N, \bar{a}) < x < D_j(N)) \iff H_j(N, \bar{a}) < q(N) \right].$$

Замечание 33. Для $j = 1, 2$ выполняется $\neg LC(H_j, \theta, q)$ тогда и только тогда, когда существует $G_j(x) \in L(q)$ такая, что верно:

$$\forall \bar{a} \in \theta(N^{l(\bar{y})}) \cap A^{l(\bar{y})} \left[N \models \exists x (G_j(N) < x < H_j(N, \bar{a})^+) \iff q(N) < H_j(N, \bar{a})^+ \right].$$

Мы утверждаем, что по крайней мере одна из двух формул H_1 или H_2 удовлетворяет условию (ii). Предположим противное, т. е. существуют две A -формулы $\theta_1(\bar{y})$, $\theta_2(\bar{y})$ такие, что выполняются условия

$$\neg C(H_1, \theta_1, q), \quad \neg C(H_1, \neg \theta_1, q), \quad \neg C(H_2, \theta_2, q), \quad \neg C(H_2, \neg \theta_2, q).$$

Тогда из определения двусторонней сходимости получаем

$$\begin{aligned} & (\neg LC(H_1, \theta_1, q) \vee \neg RC(H_1, \theta_1, q)) \\ & \bigwedge (\neg LC(H_1, \neg \theta_1, q) \vee \neg RC(H_2, \neg \theta_1, q)) \\ & \bigwedge (\neg LC(H_2, \theta_2, q) \vee \neg RC(H_2, \theta_2, q)) \\ & \bigwedge (\neg LC(H_2, \neg \theta_2, q) \vee \neg RC(H_2, \neg \theta_2, q)). \end{aligned}$$

Для условий $\neg RC(H_i, \theta_i, q)$, $\neg RC(H_i, \neg \theta_i, q)$, $i = 1, 2$, обозначим соответственно через $D_{i,1}(x)$ и $D_{i,2}(x)$ A -формулы, полученные по замечанию 32.

Для условий $\neg LC(H_i, \theta_i, q)$, $\neg LC(H_i, \neg \theta_i, q)$, $i = 1, 2$, обозначим соответственно через $G_{i,1}(x)$ и $G_{i,2}(x)$ A -формулы, полученные по замечанию 33.

Введем следующие обозначения:

$$\mu_{1,1}(\bar{y}) := \begin{cases} \exists x (H_1(N, \bar{y}) < x < D_{1,1}(N)), & \text{если } \neg RC(H_1, \theta_1, q); \\ H(N, \bar{y}) < G_{1,1}(N)^+, & \text{если } RC(H_1, \theta_1, q) \\ & \text{и } \neg LC(H_1, \theta_1, q); \end{cases}$$

$$\mu_{1,2}(\bar{y}) := \begin{cases} \exists x (H_1(N, \bar{y}) < x < D_{1,2}(N)), & \text{если } \neg RC(H_1, \neg \theta_1, q); \\ H(N, \bar{y}) < G_{1,2}(N)^+, & \text{если } RC(H_1, \neg \theta_1, q) \\ & \text{и } \neg LC(H_1, \neg \theta_1, q); \end{cases}$$

$$\mu_{2,1}(\bar{y}) := \begin{cases} D_{2,1}(N)^- < H_2(N, \bar{y})^+, & \text{если } \neg \text{RC}(H_2, \theta_2, q); \\ \exists x (G_{2,1}(N) < x < H(N, \bar{y})^+), & \text{если } \text{RC}(H_2, \theta_2, q) \\ & \text{и } \neg \text{LC}(H_2, \theta_2, q); \end{cases}$$

$$\mu_{2,2}(\bar{y}) := \begin{cases} D_{2,2}(N)^- < H_2(N, \bar{y})^+, & \text{если } \neg \text{RC}(H_2, \neg \theta_2, q); \\ \exists x (G_{2,2}(N) < x < H(N, \bar{y})^+), & \text{если } \text{RC}(H_2, \neg \theta_2, q) \\ & \text{и } \neg \text{LC}(H_2, \neg \theta_2, q). \end{cases}$$

Очевидно, что $\mu_{1,1}$, $\mu_{1,2}$, $\mu_{2,1}$ и $\mu_{2,2}$ являются A -формулами. Рассмотрим A -формулу

$$\begin{aligned} \mu(\bar{y}) := & \exists x \varphi(x, \bar{y}) \wedge [\theta_1(\bar{y}) \rightarrow \mu_{1,1}(\bar{y})] \wedge [\neg \theta_1(\bar{y}) \rightarrow \mu_{1,2}(\bar{y})] \\ & \wedge [\theta_2(\bar{y}) \rightarrow \mu_{2,1}(\bar{y})] \wedge [\neg \theta_2(\bar{y}) \rightarrow \mu_{2,2}(\bar{y})]. \end{aligned}$$

Согласно замечаниям 32 и 33 имеем

$$\forall \bar{a} \in A^{l(\bar{y})} [N \models \mu(\bar{a}) \iff H_1(N, \bar{a}) < q(N) < H_2(N, \bar{a})^+].$$

Напоминаем, что

$$\begin{aligned} \varphi(x, \bar{a}) \in q & \iff q(N) \subset \varphi(N, \bar{a}) \iff \varphi(N, \bar{a})^- \\ & < q(N) < \varphi(N, \bar{a})^+ \iff H_1(N, \bar{a}) < q(N) < H_2(N, \bar{a})^+. \end{aligned}$$

Тогда $\forall \bar{a} [N \models \mu(\bar{a}) \iff \varphi(x, \bar{a}) \in q]$. Следовательно, q является $\varphi(x, \bar{y})$ -определимым типом. Получили противоречие.

Достаточность. Пусть $H(x, \bar{y})$ — A -формула, удовлетворяющая условию (ii). Пусть также $D(x)$ — произвольная A -формула такая, что $q(N) < D(N)$.

Положим $\varphi(x, \bar{y}) := H(N, \bar{y}) < x < D(N)$. Покажем, что тип q не является $\varphi(x, \bar{y})$ -определимым.

Допустим, что выполняется следующее условие: существует A -формула $\mu(\bar{y})$ такая, что

$$[N \models \mu(\bar{a}) \iff \varphi(x, \bar{a}) \in q] \quad (*)$$

для любого $\bar{a} \in A^{l(\bar{y})}$. Но для любого $\bar{a} \in A^{l(\bar{y})}$ мы имеем

$$[N \models \mu(\bar{a}) \iff \varphi(x, \bar{a}) \in q \iff H(N, \bar{a}) < q(N)].$$

Отсюда, получаем условие

$$1) \text{ LC}(H, \mu, q), \neg \text{RC}(H, \mu, q).$$

Возьмем произвольную формулу $G \in L(q)$. Тогда по замечанию 33 имеем $\neg \text{LC}(H, \neg \mu, q)$. В силу утверждения (ii) теоремы 31, только что полученного условия 1 и п.(i) замечания 30 имеем

2) $\text{RC}(H, \neg\mu, q), \neg\text{LC}(H, \neg\mu, q)$.

Одновременное выполнение условий 1 и 2 означает, что

$$\neg\text{C}(H, \mu, q) \wedge \neg\text{C}(H, \neg\mu, q),$$

а это противоречит выбору $H(x, \bar{y})$. Таким образом, условие $(*)$ не выполняется, и тип q не является $\varphi(x, \bar{y})$ -определимым.

Утверждение 34*. Пусть $\bar{\alpha}$ — кортеж из $N \setminus M$, тип $\text{tp}(\bar{\alpha}/M)$ определим и выполняется $\text{LC}(H(x, \bar{y}, \bar{\alpha}), \Theta(\bar{y}, \bar{\alpha}), q)$. Тогда существует M -формула $\mu(\bar{y})$ такая, что $\text{LC}(H(x, \bar{y}, \bar{\alpha}), \mu(\bar{y}), q)$.

Доказательство. По определению $\text{tp}(\bar{\alpha}/M)$ существует M -формула $\mu_\Theta(\bar{y})$ такая, что $\forall \bar{a} \in M [N \models \Theta(\bar{a}, \bar{\alpha}) \iff M \models \mu_\Theta(\bar{a})]$. Тогда для проверки сходимости достаточно рассмотреть только кортежи элементов M . $\square$

Предложение 35. Пусть $\bar{\alpha}$ — кортеж из $N \setminus M$, тип $\text{tp}(\bar{\alpha}/M)$ определим, $\beta \in N \setminus (M \cup \bar{\alpha})$, $q := \text{tp}(\beta/M \cup \bar{\alpha})$ — иррациональный и нестрогий определимый тип. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) существуют $(M \cup \bar{\alpha})$ -определимые формулы $H(x, \bar{y})$, $\Theta(\bar{y})$ такие, что имеет место

$$\text{LC}(H, \Theta, q), \neg\text{RC}(H, \Theta, q) \text{ или } \neg\text{LC}(H, \Theta, q), \text{RC}(H, \Theta, q);$$

- (ii) тип q определим.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Допустим, что имеет место $\text{LC}(H, \Theta, q)$ и $\neg\text{RC}(H, \Theta, q)$. Случай $\neg\text{LC}(H, \Theta, q), \text{RC}(H, \Theta, q)$ рассматривается аналогично. Предположим (см. утверждение 34), что $\Theta(\bar{y})$ — M -формула. Положим $X := \Theta(M^k)$, $Z := \Theta(N^k)$. Таким образом, выполняется $H(N, \bar{a}, \bar{\alpha}) < q(N)$ для любого $\bar{a} \in X$. Пусть $\varphi(x, \bar{y}, \bar{\alpha})$ — произвольная $(M \cup \bar{\alpha})$ -формула такая, что для любого $\bar{\gamma} \in N$ множество $\phi(N, \bar{\gamma}, \bar{\alpha})$ выпукло. Тогда положим

$$S_1(\bar{z}, \bar{y}_1, \bar{\alpha}) := \varphi(N, \bar{z}, \bar{\alpha})^- < H(N, \bar{y}_1, \bar{\alpha})^+ \wedge \theta_1(\bar{y}_1),$$

$$S_2(\bar{z}, \bar{y}_2, \bar{\alpha}) := \varphi(N, \bar{z}, \bar{\alpha}) < H(N, \bar{y}_2, \bar{\alpha})^+ \wedge \theta_1(\bar{y}_2).$$

В силу определимости типа $\text{tp}(\bar{\alpha}/M)$ найдутся M -формулы $Q_1(\bar{z}, \bar{y}_1)$ и $Q_2(\bar{z}, \bar{y}_2)$ такие, что

$$N \models S_1(\bar{a}, \bar{b}_1, \bar{\alpha}) \iff M \models Q_1(\bar{a}, \bar{b}_1),$$

$$N \models S_2(\bar{a}, \bar{b}_2, \bar{\alpha}) \iff M \models Q_2(\bar{a}, \bar{b}_2)$$

* Для o -минимального случая это утверждение доказано в [17].

для всех $\bar{a}, \bar{b}_1, \bar{b}_2 \in M$. Тогда для формулы

$$Q(\bar{z}) := \exists \bar{y}_1 Q_1(\bar{z}, \bar{y}_1) \wedge \neg \exists \bar{y}_2 Q_2(\bar{z}, \bar{y}_2)$$

выполняется

$$\forall \bar{a} \in M^{l(\bar{z})} \quad [M \models Q(\bar{a}) \iff \varphi(x, \bar{a}, \bar{\alpha}) \in q].$$

Действительно, из $M \models Q(\bar{a})$ следует, что существует $\bar{b}_1 \in M$, для которого

$$M \models Q_1(\bar{a}, \bar{b}_1), \text{ и } M \models \forall \bar{y}_2 \neg Q_2(\bar{a}, \bar{y}_2).$$

Поскольку справедливы предложения

$$\begin{aligned} [M \models Q_1(\bar{a}, \bar{b}_1) &\iff \varphi(N, \bar{a}, \bar{\alpha})^- < q(N)], \\ [M \models \forall \bar{y}_2 \neg Q_2(\bar{a}, \bar{y}_2) &\iff q(N) < \varphi(N, \bar{a}, \bar{\alpha})^+], \end{aligned}$$

импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) доказана.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Для доказательства нам понадобится первая часть следующего утверждения.

Лемма 36. Пусть q — тип из $S_1(A)$, A — множество в модели N , $\phi(x, \bar{y})$ — произвольная формула без параметров.

(a) Если $\text{WEC}(\phi(x, \bar{y}), q)$, то $\text{LC}(H(x, \bar{y}), \bar{y} = \bar{y}, q)$ или (и)

$$\text{RC}(H(x, \bar{y}), \bar{y} = \bar{y}, q)$$

(здесь $H(x, \bar{y})$ является либо $\phi(x, \bar{y})$,

$$\text{либо } \phi(x, \bar{y})^- := \neg \phi(x, \bar{y}) \wedge x < \phi(N, \bar{y}).$$

(b) Если $\text{STC}(\phi(x, \bar{y}), q)$, то $\text{LC}(\phi(x, \bar{y})^-, \bar{y} = \bar{y}, q)$ и

$$\text{RC}(\phi(x, \bar{y}), \bar{y} = \bar{y}, q).$$

Доказательство. (a) Для L -формулы $\phi(x, \bar{y})$ определим по индукции формулы ϕ_i , $i < \omega$, следующим образом:

$$\begin{aligned} \phi_0(x, \bar{y}) &:= \phi(x, \bar{y}) \wedge \forall x_1 \left[(\phi(x_1, \bar{y}) \wedge x_1 < x) \rightarrow \forall z (x_1 < z < x \rightarrow \phi(z, \bar{y})) \right]; \\ \phi_{i+1}(x, \bar{y}) &:= \phi(x, \bar{y}) \wedge \phi_i(N, \bar{y}) < x \wedge \forall x_1 \left[(\phi(x_1, \bar{y}) \wedge \phi_i(N, \bar{y}) < x_1 < x) \right. \\ &\quad \left. \rightarrow \forall z (x_1 < z < x \rightarrow \phi(z, \bar{y})) \right]. \end{aligned}$$

Из определения формул вытекает, что для любого $i < \omega$ и любого $\bar{b} \in N$ множество $\phi(N, \bar{b})$ является выпуклым (пустое множество по определению выпукло).

Из утверждения 16 следует, что для некоторого $n_\phi < \omega$ справедлива эквивалентность

$$\phi(x, \bar{y}) \equiv \bigvee_{i < n_\phi} \phi_i(x, \bar{y}).$$

Покажем, что из выполнения $\text{WEC}(\phi(x, \bar{y}), q)$ вытекает существование такого $i < n_\phi$, что имеет место $\text{WEC}(\phi_i(x, \bar{y}), q)$. Предположим противное, т. е. $\neg \text{WEC}(\phi_i(x, \bar{y}), q)$ для любого $i < n_\phi$. Тогда существуют $L(A)$ -формулы $\mu_i(x) \in q$, $i < n_\phi$, такие, что для любого $\bar{b} \in A$ и любого $i < n_\phi$ верно одно из двух: $\phi_i(N, \bar{b}) \cap \mu_i(N) = \emptyset$ или $\mu_i(N) \subseteq \neg \phi_i(N, \bar{b})$. Положим $\mu(x) := \bigwedge \mu_i(x)$. Очевидно, что $\mu(x) \in q$. Зафиксируем произвольный кортеж $\bar{b} \in A$. Предположим, что $\phi_i(N, \bar{b}) \cap \mu_i(N) = \emptyset$ для любого $i < n_\phi$. Так как $\mu(N) \subseteq \mu_i(N)$, имеем $\phi_i(N, \bar{b}) \cap \mu(N) = \emptyset$. Отсюда

$$\phi(N, \bar{b}) \cap \mu(N) = \bigcup_i (\phi_i(N, \bar{b}) \cap \mu(N)) = \emptyset,$$

и, следовательно, $\phi(x, \bar{b})$ не делит $\mu(N)$.

Если же для некоторого $i < n_\phi$ имеем $\mu_i(N) \subseteq \phi_i(N, \bar{b})$, то

$$\mu(N) \subseteq \mu_i(N) \subseteq \phi_i(N, \bar{b}) \subseteq \bigcup_i \phi_i(N, \bar{b}) = \phi(N, \bar{b}),$$

и, следовательно, $\phi(x, \bar{b})$ не делит $\mu(N)$. В обоих случаях $\phi(x, \bar{b})$ не делит $\mu(N)$, что противоречит условию $\text{WEC}(\phi(x, \bar{y}), q)$ в силу произвольности выбора $\bar{b} \in A$.

Таким образом, в дальнейшем полагаем, что в условии $\text{WEC}(\phi(x, \bar{y}), q)$ формула $\phi(x, \bar{y})$ обладает следующим свойством: $\phi(x, \bar{b})$ — выпуклая формула для любого $\bar{b} \in N$.

Рассмотрим произвольную выпуклую $L(A)$ -формулу $\mu(x)$ такую, что $\mu(x) \in q$. Последнее означает, что $q(N) \subset \mu(N)$. Так как q — иррациональный 1-тип, существуют $\gamma_1, \gamma_2 \in \mu(N)$ такие, что

$$\gamma_1 < q(N) < \gamma_2.$$

Следовательно, $\mu(N)$ распадается на три неформульных выпуклых подмножества $\mu(N) = X_1(\mu) \cup q(N) \cup X_2(\mu)$, причем

$$X_1(\mu) < q(N) < X_2(\mu).$$

Из $\text{WEC}(\phi(x, \bar{y}), q)$ следует существование такого $\bar{b} \in A$, что $\phi(x, \bar{b})$ делит $\mu(N)$. Иррациональность q влечет неформульность как левой, так и правой границ выпуклого множества $q(N)$. Отсюда,

- (*) выпуклая формула $\phi(x, \bar{b})$, которая делит $\mu(N)$, не может проходить по границам $q(N)$ и должна делить по меньшей мере одну из выпуклых составляющих $\mu(N)$, $X_1(\mu)$ или $X_2(\mu)$.

Предположим, что $\phi(x, \bar{b})$ делит $X_1(\mu)$. Тогда в силу выпуклости формульного множества $\phi(N, \bar{b})$ и неформульного $X_1(\mu)$ имеем $\phi(N, \bar{b}) < q(N)$ или $q(N) \subset \phi(N, \bar{b})$. Отсюда, если для любой выпуклой $L(A)$ -формулы $\mu(x) \in q$ найдется $\bar{b} \in A$ такой, что $\phi(x, \bar{b})$ делит $X_1(\mu)$ и $\phi(N, \bar{b}) < q(N)$, то имеем $\text{LC}(\phi(x, \bar{y}), \bar{y} = \bar{y}, q)$. Если же для любой выпуклой $L(A)$ -формулы $\mu(x) \in q$ найдется $\bar{b} \in A$ такой, что $\phi(x, \bar{b})$ делит $X_1(\mu)$ и $q(N) \subset \phi(N, \bar{b})$, то имеет место $\text{LC}(\phi(x, \bar{y})^-, \bar{y} = \bar{y}, q)$, где $\phi(x, \bar{y})^- := \neg\phi(x, \bar{y}) \wedge x < \phi(N, \bar{y})$.

Отметим, что если для некоторой выпуклой $L(A)$ -формулы $\mu(x) \in q$ и любого $\bar{b} \in A$ такого, что $\phi(x, \bar{b})$ делит $X_1(\mu)$, выполняется соотношение $\neg(q(N) \subset \phi(N, \bar{b}))$ и, следовательно, $\phi(N, \bar{b}) < q(N)$, то для любой выпуклой $L(A)$ -формулы $\mu'(x) \in q$, $\mu'(N) \subset \mu(N)$, и любого $\bar{b} \in A$ такого, что $\phi(x, \bar{b})$ делит $X_1(\mu')$, имеем $\neg(q(N) \subset \phi(N, \bar{b}))$ и, следовательно, $\phi(N, \bar{b}) < q(N)$. Другими словами,

(**) если для любой выпуклой $L(A)$ -формулы $\mu(x) \in q$ существует $\bar{b} \in A$ такой, что $\phi(x, \bar{b})$ делит $X_1(\mu)$, то $\neg\text{LC}(\phi(x, \bar{y})^-, \bar{y} = \bar{y}, q)$ влечет $\text{LC}(\phi(x, \bar{y}), \bar{y} = \bar{y}, q)$.

Аналогично рассуждая, получим утверждение:

(**)' если для любой выпуклой $L(A)$ -формулы $\mu(x) \in q$ существует $\bar{b} \in A$ такой, что $\phi(x, \bar{b})$ делит $X_2(\mu)$, то $\neg\text{RC}(\phi(x, \bar{y})^-, \bar{y} = \bar{y}, q)$ влечет $\text{RC}(\phi(x, \bar{y}), \bar{y} = \bar{y}, q)$.

Предположим, что $\phi(x, \bar{b})$ не делит $X_2(\mu)$ для некоторой выпуклой $L(A)$ -формулы $\mu(x)$ из типа q и любого $\bar{b} \in A$. Тогда для любого $\bar{b} \in A$ такого, что $\phi(x, \bar{b})$ делит $\mu(N)$, формула $\phi(x, \bar{b})$ делит $X_1(\mu)$.

Более того, для любой выпуклой $L(A)$ -формулы $\mu'(x)$ из типа q такой, что $\mu'(N) \subset \mu(N)$, и для любого $\bar{b} \in A$ такого, что $\phi(x, \bar{b})$ делит $\mu'(N)$, формула $\phi(x, \bar{b})$ не делит $X_2(\mu')$ и делит $X_1(\mu')$.

Таким образом, принимая во внимание, что одновременное выполнение условий $\neg\text{RC}(\phi(x, \bar{y}), \bar{y} = \bar{y}, q)$ и $\neg\text{RC}(\phi(x, \bar{y})^-, \bar{y} = \bar{y}, q)$ обеспечивает существование выпуклой формулы $\mu(x) \in q$ такой, что для любого $\bar{b} \in A$, если $\phi(x, \bar{b})$ делит $\mu(N)$, то $\phi(x, \bar{b})$ не делит $X_2(\mu)$ и делит $X_1(\mu)$. Последнее в силу $\text{WEC}(\phi(x, \bar{y}), q)$, (*) и (**) означает выполнение

(***) $\text{LC}(\phi(x, \bar{y}), \bar{y} = \bar{y}, q)$ или (и) $\text{LC}(\phi(x, \bar{y})^-, \bar{y} = \bar{y}, q)$.

Суммируя (*), (**) и (***) получаем утверждение (а) леммы 36.

Доказательство утверждения (b) проводится аналогично. $\square$

Ввиду нестрогой определимости иррационального типа q в силу леммы 36 (а) выполняется $\text{LC}(H(x, \bar{y}), \bar{y} = \bar{y}, q)$ или (и) $\text{RC}(H(x, \bar{y}), \bar{y} = \bar{y}, q)$. Если формула $\bar{y} = \bar{y}$ не годится в качестве $\Theta(\bar{y})$ из условия (i), то имеем

$C(H(x, \bar{y}), \bar{y} = \bar{y}, q)$. Так как q — определимый тип, по теореме 31 для формулы $H(x, \bar{y})$ находим $L(M \cup \bar{\alpha})$ -формулу $\Theta(\bar{y})$. $\square$

§ 4. Пример D -1-пары моделей слабо o -минимальной теории, не являющейся D -парой

Теорема 37. Существует слабо o -минимальная теория T с двумя моделями $M_b \prec M$ такая, что тип $\text{tp}(\bar{\alpha}/M_b)$ неопределим для некоторого кортежа элементов $\bar{\alpha} \in M$, а модель M_b квазидедекиндово полна в M .

Доказательство. Сконструируем модель (M, L_0) одновременно с доказательством слабой o -минимальности элементарной теории модели (M, L_0) . Представим элементарную теорию $\text{Th}((M, L_0))$ модели (M, L_0) конечным множеством аксиом T_0 . Доказательство непротиворечивости, полноты и слабой o -минимальности теории T_0 разделим на следующие этапы доказательств и построений.

- 4.1. Аксиомы T_0 . Если множество T_0 непротиворечиво, то теория, выводимая из T_0 , ω_0 -категорична.
- 4.2. Построение модели (M, L) , $L \supset L_0$, такой, что $T_0 \vdash_L T := \text{Th}(M, L)$.
- 4.3. Доказательство того, что T допускает сокращение кванторов и является слабо o -минимальной.
- 4.4. Пример пары моделей $(M_b, L) \prec (M, L)$ такой, что (M_b, M) является D -1-парой, но не является D -парой.

4.1. Аксиомы T_0 . Если T_0 — непротиворечивое множество, то теория, выводимая из T_0 , ω_0 -категорична.

Зафиксируем язык $L_0 := \{=, P^1, <^2, E^3\}$ для T_0 . Дадим список аксиом из T_0 .

Ак (I). Символ $<$ суть отношение плотного линейного порядка без концевых точек.

Ак (II). Справедлива формула

$$\forall x \forall y \left(\left((P(x) \wedge \neg P(y)) \rightarrow y < x \right) \wedge \forall z \forall x \forall y (P(z) \rightarrow \neg E(x, y, z)) \right).$$

Ак (III). Формула $\forall z (\neg P(z) \rightarrow E(x, y, z))$ есть отношение эквивалентности по x, y на P ; каждый E_z -класс — непустое выпуклое множество без концевых точек; порядок, приведенный на множестве E_z -классов, является плотным; существует минимальный E_z -класс и нет максимального).

Ак (IV). Для любых z, t, x если выполняется $P(x) \wedge \neg P(z) \wedge \neg P(t) \wedge z < t$, то каждый E_z -класс из x находится в E_t -классе из x ; каждый E_t -класс (кроме минимального) не содержит ни минимального E_z -класса, ни максимального E_z -класса; и минимальный E_t -класс содержит минимальный E_z -класс и не содержит максимального E_z -класса.

Положим

$$H^2(x, z) := P(x) \wedge \neg P(z) \wedge \forall y \left((P(y) \wedge y < x) \rightarrow E(x, y, z) \right),$$

$$\varepsilon^2(x, y) := \exists z (\neg P(z) \wedge E(x, y, z) \wedge \neg H(x, z)).$$

Формула $H^2(x, z)$ означает, что x находится в минимальном E_z -классе; $\varepsilon^2(x, y)$ означает, что x и y не лежат в минимальном E_z -классе для некоторого z из $\neg P$.

Ак (V). Справедлива формула

$$\forall x \forall y \left(\varepsilon^2(x, y) \leftrightarrow \forall z (H(x, z) \leftrightarrow H(y, z)) \right).$$

Заметим, что аксиомы Ак (V) и Ак (IV) означают, что ε^2 — это отношение эквивалентности на P . При этом каждый ε -класс представляет собой бесконечное выпуклое множество, и множество ε -классов образует плотный линейный порядок без концевых точек. Заметим, что каждое утверждение может быть записано на языке первого порядка и выведено из Ак (I)–Ак (V).

Ак (VI). Выполняются предложения

- (i) $\forall x \forall y \left((\varepsilon^2(x, y) \wedge x \neq y) \rightarrow \exists z (\neg P(z) \wedge \neg E(x, y, z)) \right);$
- (ii) $\forall x \forall y \forall z \left((E(x, y, z) \wedge \neg H(x, z)) \rightarrow \exists t (t < z \wedge E(x, y, t)) \right).$

Положим

$$\varepsilon^4(x, y; u, v) := x < y \wedge u < v \wedge \varepsilon^2(x, y) \wedge \varepsilon^2(y, u) \wedge \varepsilon^2(u, v)$$

$$\wedge \forall z \left(\neg P(z) \rightarrow (E(x, y, z) \leftrightarrow E(u, v, z)) \right).$$

Отметим, что ε^4 — это отношение эквивалентности на упорядоченных парах из ε^2 -классов, причем каждый ε^4 -класс определяет разбиение $\neg P$ на два выпуклых множества без концевых точек (расщепляет $\neg P$). Для любой упорядоченной пары элементов a_1, a_2 , лежащих в одном ε^2 -классе, выпуклое множество элементов $b \in \neg P$ таких, что a_1, a_2 лежат в одном E_b -классе, определяет «степень близости» a_1 и a_2 , и можно сказать, что чем больше это выпуклое множество, тем «ближе» a_1 и a_2 . Кроме того, необходимо отметить, для любых $a_1, a_2, a_3 \in P$ формулы $\varepsilon^4(a_1, a_2, x, a_3)$, $\varepsilon^4(a_1, a_2, a_3, x)$, $\varepsilon^4(a_1, a_2, x, a_2)$, $\varepsilon^4(a_1, a_2, a_1, x)$ выпуклы.

Ак (VII). Справедливы следующие предложения:

- (i) $\forall u_2 \forall u_4 \left((\varepsilon^2(u_2, u_4) \wedge u_2 < u_4) \right.$
 $\rightarrow \exists u_1 \exists u_3 \exists u_5 \left(\bigwedge_{i < j} u_i < u_j \wedge \varepsilon^2(u_1, u_5) \right.$
 $\left. \wedge \bigwedge_{1 \leq i < j < k < r \leq 5} E(u_i, u_j, u_k, u_r) \right) \Bigg);$
- (ii) $\forall u_2 \forall u_3 \forall u_4 \left((\varepsilon^2(u_2, u_4) \wedge u_2 < u_3 < u_4) \right.$
 $\rightarrow \exists u_1 \exists u_5 (u_1 < u_3 < u_5 \wedge \varepsilon^4(u_2, u_4, u_1, u_3)$
 $\left. \wedge \varepsilon^4(u_2, u_4, u_3, u_5)) \right);$
- (iii) $\forall u_2 \forall u_4 \left((\varepsilon^2(u_2, u_4) \wedge u_2 < u_4) \right.$
 $\rightarrow \exists u_1 \exists u_3 \exists u'_3 \exists u_5 (u_1 < u_2 < u_3 < u_{3'} < u_4 < u_5)$
 $\wedge \forall u \forall u' ((u_1 \leq u \leq u_3 \wedge u_{3'} < u' < u_5)$
 $\left. \rightarrow (\varepsilon^4(u_2, u_4, u, u_4) \wedge \varepsilon^4(u_2, u_4, u_2, u')) \right).$

Отметим, что из аксиомы Ак (VII) следует бесконечность каждого ε^4 -класса, плотность расположения упорядоченных пар в одном ε^4 -классе и то, что для любых $a_1, a_2, a_3 \in P$, лежащих в одном ε^2 -классе и удовлетворяющих условию $a_1 < a_3 < a_2$, формулы

$$\varepsilon^4(a_1, a_2, x, a_2), \quad \varepsilon^4(a_1, a_2, a_1, x), \quad \varepsilon^4(a_1, a_2, x, a_3), \quad \varepsilon^4(a_1, a_2, a_3, x)$$

определяют непустые выпуклые множества без концевых точек.

Ак (VIII). Выполняется предложение

$$\forall x \forall y \forall u \forall v \left((\varepsilon^2(x, y) \wedge \varepsilon^2(u, v) \wedge x < y \wedge u < v \wedge \neg \varepsilon^2(x, u)) \right.$$

$$\rightarrow \exists z \left(\neg P(z) \wedge (E(x, y, z) \wedge \neg E(u, v, z)) \right.$$

$$\left. \vee (E(u, v, z) \wedge \neg E(x, y, z)) \right).$$

Заметим, что аксиома Ак (VIII) говорит о том, что любые два различных ε^2 -класса «отделимы» отношением E_z для некоторого z из $\neg P$.

Ак (IX). Выполняется предложение

$$\begin{aligned} \forall x \forall y \forall u \Big(& P(x) \wedge P(u) \wedge \varepsilon^2(x, y) \wedge \neg \varepsilon^2(x, u) \\ & \rightarrow \exists z \big(H(u, z) \wedge \neg E(x, y, z) \big) \vee \big(\neg H(u, z) \wedge E(x, y, z) \big) \Big). \end{aligned}$$

Заметим, что аксиома Ак (IX) говорит о том, что любой элемент из P , не лежащий в данном ε^2 -классе, «отделяется» от ε^2 -класса отношениями H_z, E_z для некоторого z из $\neg P$.

Предложение 38. Если множество T_0 непротиворечиво, то теория, выводимая из T_0 , ω -категорична.

Доказательство. Для каждой модели M теории, выводимой из T_0 , на объединении множеств всех ε^2 -классов, ε^4 -классов и множества всех элементов, удовлетворяющих $\neg P$, можно определить порядок $\triangleleft$. Полученный линейный порядок будем называть моделью языка $L' = \{=, \triangleleft\}$ и его универсум будем обозначать через N , а саму модель — через (N, L') . Для произвольных счетных моделей (M_1, L_0) и (M_2, L_0) теории T_0 построим изоморфизм g с помощью изоморфизма t между (N_1, L') и (N_2, L') и эти два изоморфизма определим одновременно индукцией по $n < \omega$ как объединения возрастающих последовательностей частичных изоморфизмов.

Пусть (M, L_0) — произвольная модель теории, выводимой из T_0 . Положим $A := P(M)$, $B := \neg P(M)$, $C := \{(a, a') : a, a' \in A, M \models \varepsilon^2(a, a') \wedge a < a'\}$. Введем следующую систему обозначений для элементов из C : если $c = (a_1, a_2) \in C$, то $c = c(a_1, a_2)$ и $l(c) = a_1$, $r(c) = a_2$. Заметим, что для любого $c \in C$ выполняется $M \models \varepsilon^2(l(c), r(c)) \wedge l(c) < r(c)$.

Пусть $a \in A$, $c \in C$. Положим

$$\begin{aligned} \widehat{c} &:= \varepsilon^4(M^2, c) = \{c' \in C : M \models \varepsilon^4(c', c)\}, & \widehat{C} &:= \{\widehat{c} : c \in C\}, \\ \widehat{a} &:= \varepsilon^2(M, a) = \{a' \in A : M \models \varepsilon^2(a', a)\}, & \widehat{A} &:= \{\widehat{a} : a \in A\}. \end{aligned}$$

Из определений ε^2 и ε^4 видно, что выполняется

$$\begin{aligned} \forall c_1 \in C \forall c_2 \in C \Big[& \widehat{l}(c_i) = \widehat{r}(c_i), \ i = 1, 2, \\ & (\widehat{c}_1 = \widehat{c}_2 \rightarrow \widehat{l}(c_1) = \widehat{l}(c_2) = \widehat{r}(c_1) = \widehat{r}(c_2)) \Big]. \end{aligned}$$

Определим модель следующим образом:

$$(N, L') := (\widehat{A} \cup \widehat{C} \cup B; =, \triangleleft).$$

Пусть $a, a_1 \in A$; $b, b_1 \in B$; $c, c_1 \in C$. Тогда

$$\begin{aligned}
N \models b \triangleleft b_1 &\Leftrightarrow M \models b < b_1, \\
N \models \hat{a} \triangleleft \hat{a}_1 &\Leftrightarrow M \models \neg \varepsilon^2(a, a_1) \wedge a < a_1, \\
N \models \hat{c} \triangleleft b &\Leftrightarrow M \models E(l(c), r(c), b), \\
N \models b \triangleleft \hat{c} &\Leftrightarrow M \models \neg E(l(c), r(c), b), \\
N \models \hat{a} \triangleleft b &\Leftrightarrow M \models H(a, b), \\
N \models b \triangleleft \hat{a} &\Leftrightarrow M \models \neg H(a, b), \\
N \models \hat{c} \triangleleft \hat{a} &\Leftrightarrow M \models \exists x \left(\neg P(x) \wedge E(l(c), r(c), x) \wedge \neg H(a, x) \right), \\
N \models \hat{a} \triangleleft \hat{c} &\Leftrightarrow M \models \exists x \left(\neg P(x) \wedge \neg E(l(c), r(c), x) \wedge H(a, x) \right), \\
N \models \hat{c} \triangleleft \hat{c}_1 &\Leftrightarrow M \models \exists x \left(\neg P(x) \wedge E(l(c_1), r(c_1), x) \wedge \neg E(l(c_2), r(c_2), x) \right).
\end{aligned}$$

Из определения ε^2 , ε^4 , H^2 и аксиом Ак (I)–Ак (IX) следует, что понятие $\triangleleft$ определено корректно.

Заметим, что определение $\triangleleft$ непосредственно влечет:

$$\begin{aligned}
N \models \hat{c} \triangleleft \hat{a} &\Leftrightarrow \exists b \in B, \quad N \models \hat{c} \triangleleft b \wedge b \triangleleft \hat{a}, \\
N \models \hat{a} \triangleleft \hat{c} &\Leftrightarrow \exists b \in B, \quad N \models \hat{a} \triangleleft b \wedge b \triangleleft \hat{c}, \\
N \models \hat{c} \triangleleft \hat{c}_1 &\Leftrightarrow \exists b \in B, \quad N \models \hat{c}_1 \triangleleft b \wedge b \triangleleft \hat{c}_2.
\end{aligned}$$

Обозначим $C_l(a) := \{c \in C : l(c) = a\}$, $C_r(a) := \{c \in C : r(c) = a\}$.

Утверждение 39.

- (i)' Для любых $a \in A$, $c_1, c_2 \in C_l(a)$ если $N \models \hat{c}_1 \triangleleft \hat{c}_2$, то $r(c_1) < r(c_2)$ и $\hat{c}(r(c_1), r(c_2)) = \hat{c}_2$.
- (i)'' Для любых $a \in A$, $c_1, c_2 \in C_r(a)$ если $N \models \hat{c}_1 \triangleleft \hat{c}_2$, то $l(c_1) < l(c_2)$ и $\hat{c}(l(c_1), l(c_2)) = \hat{c}_2$.
- (ii) Системы $(\hat{A}, =, \triangleleft)$, $(B, =, \triangleleft)$, $(\hat{C}, =, \triangleleft)$ суть плотные линейные порядки без концевых точек.
- (iii) Отношение $\triangleleft$ есть отношение плотного линейного порядка на $\hat{A} \cup \hat{C} \cup B$, и каждое из множеств $\hat{A}$, $\hat{C}$, B является $\triangleleft$ -плотным в $\hat{A} \cup \hat{C} \cup B$.
- (iv)' Для любого $a \in A$ выполняется равенство $\hat{C}_l(a) = \hat{C}_r(a)$.
- (iv)'' Для любого $a \in A$ множество $\hat{C}_l(a)$ плотно в $(-\infty, \hat{a})_N$.

Доказательство. (i)' Пусть $N \models \hat{c}_1 \triangleleft \hat{c}_2$. Тогда для некоторого $b_0 \in B$ имеем

$$M \models E(a, r(c_1), b) \wedge \neg E(a, r(c_2), b_0) \quad \text{и} \quad a < r(c_1), \quad a < r(c_2).$$

Из выпуклости $E(a, M, b_0)$ следует, что $r(c_1) < r(c_2)$.

Покажем, что $\widehat{c}(r(c_1), r(c_2)) = \widehat{c}_2$. Пусть b — элемент из B такой, что $M \models E(a, r(c_2), b)$. Так как любой E_b -класс есть выпуклое множество и $a < r(c_1) < r(c_2)$, имеем $M \models E(r(c_1), r(c_2), b)$.

Предположим существование элемента $b_1 \in B$ такого, что

$$M \models E(r(c_1), r(c_2), b_1) \wedge \neg E(a, r(c_2), b_1).$$

Тогда $E(M, a, b_1) \wedge E(M, r(c_1), b_1) = \emptyset$ и, следовательно, $r(c_1) \notin E(M, a, b_1)$. Последнее в силу Ак (IV) означает, что $E(M, a, b_1) \subset E(M, a, b_0)$ и $b_1 < b_0$. Так как $r(c_1) \in E(M, a, b_0)$, по Ак (IV) имеем $E(M, r(c_1), b_1) \subset E(M, a, b_0)$. Из предположения, что $r(c_2) \in E(M, r(c_1), b_1)$, вытекает включение $r(c_2) \in E(M, r(c_1), b_0)$, что противоречит выбору b_0 . Следовательно, для любого $b \in B$ имеем

$$\left[M \models E(a, r(c_2), b) \iff M \models E(r(c_1), r(c_2), b) \right].$$

Пункт (i)'' доказывается аналогично (i)'.

(ii) Согласно Ак (I) и Ак (II) заключаем, что $(B, =, \triangleleft)$ — плотный линейный порядок без концевых точек. Из Ак (I)–Ак (V) следует, что $(\widehat{A}, =, \triangleleft)$ является плотным линейным порядком без концевых точек. Покажем, что $(\widehat{C}, =, \triangleleft)$ удовлетворяет требуемым свойствам. Антирефлексивность $\triangleleft$ в $\widehat{C}$ следует из определений ε^4 -класса и $\triangleleft$. Покажем транзитивность. Пусть c_1, c_2, c_3 — элементы из C такие, что $N \models \widehat{c}_1 \triangleleft \widehat{c}_2 \wedge \widehat{c}_2 \triangleleft \widehat{c}_3$. Тогда существуют $b, b_1 \in B$ такие, что

$$\begin{aligned} M \models E(l(c_1), r(c_1), b) \wedge \neg E(l(c_2), r(c_2), b) \wedge E(l(c_2), r(c_2), b_1) \\ \wedge \neg E(l(c_3), r(c_3), b_1). \end{aligned}$$

Из того, что $M \models \neg E(l(c_2), r(c_2), b) \wedge E(l(c_2), r(c_2), b_1)$, и из Ак (IV) следует, что $b < b_1$. Так как $M \models \neg E(l(c_3), r(c_3), b_1) \wedge b < b_1$, в силу Ак (IV) имеем $M \models \neg E(l(c_3), r(c_3), b)$. Тогда $M \models E(l(c_1), r(c_1), b)$ означает, что $N \models \widehat{c}_1 \triangleleft \widehat{c}_3$. Несимметричность следует из транзитивности и антирефлексивности.

Докажем плотность. Пусть $N \models \widehat{c}_1 \triangleleft \widehat{c}_2$. Тогда найдется $b \in B$ такой, что

$$M \models E(l(c_1), r(c_1), b) \wedge \neg E(l(c_2), r(c_2), b).$$

По Ак (VI) (b) найдется $b_1 < b$ такой, что $M \models E(l(c_1), r(c_1), b_1)$.

Тогда согласно Ак (IV) существует $a \in E(l(c_1), M, b) \setminus E(l(c_1), M, b_1)$ такой, что $a > E(l(c_1), M, b_1)$. Обозначим через c пару $(l(c_1), a)$. Тогда

$N \models \hat{c}_1 \triangleleft \hat{c}$. Поскольку $M \models E(l(c_1), a, b) \wedge \neg E(l(c_2), r(c_2), b)$, имеем $N \models \hat{c} \triangleleft \hat{c}_2$.

(iii) Пусть b, b_1 — элементы из B , $M \models b < b_1$. Из Ак (IV) следует, что $H(M, b_1) \setminus H(M, b) \neq \emptyset$. Выберем элемент $a \in H(M, b_1) \setminus H(M, b)$. Тогда $N \models b \triangleleft \hat{a} \wedge \hat{a} \triangleleft b_1$. Для заданного a согласно Ак (VI) (i) существуют $a_1 \in \varepsilon^2(M, a)$, $b_2 \in B$ такие, что $M \models \neg E(a, a_1, b) \wedge E(a, a_1, b_2)$. Это означает, что

$$N \models b \triangleleft \hat{c}(a, a_1) \wedge \hat{c}(a, a_1) \triangleleft b_2,$$

$E(M, a, b_2) \subset \varepsilon^2(M, a) \subset H(M, b_1)$ и $b_2 \triangleleft b_1$. Последовательно по транзитивности получаем $N \models b \triangleleft \hat{c} \triangleleft b_1$.

Рассуждая аналогично, можно заметить, что

$$(d, d') \cap \hat{A} \neq \emptyset, \quad (d, d') \cap B \neq \emptyset, \quad (d, d') \cap \hat{C} \neq \emptyset$$

для любых $d, d' \in \hat{A} \cup \hat{C} \cup B$, $d \triangleleft d'$.

(iv)' Пусть c — элемент из $C_l(a)$. Согласно Ак (VII) существуют a_1 и a , $a_1 < a$, такие, что $\hat{c} = \hat{c}(a_1, a)$. Таким образом, так как $c(a_1, a) \in C_r(a)$, имеем $\hat{C}_l(a) \subseteq \hat{C}_r(a)$. Аналогично рассуждая, получаем $\hat{C}_r(a) \subseteq \hat{C}_l(a)$.

(iv)'' Пусть b_1, b_2 — элементы из $(-\infty, \hat{a})$. Тогда $N \models b_1 \triangleleft \hat{a} \wedge b_2 \triangleleft \hat{a}$. Следовательно, $M \models \neg H(a, b_1) \wedge \neg H(a, b_2)$. Предположим, что $b_1 < b_2$. Тогда $E(M, a, b_1) \subset E(M, a, b_2)$.

Пусть a_1, a_2 — элементы из $E(M, a, b_2) \setminus E(M, a, b_1)$ такие, что $a_2 < E(M, a, b_1) < a_1$. Отсюда заключаем, что

$$N \models b_1 \triangleleft \hat{c}_1 \wedge b_1 \triangleleft \hat{c}_2 \wedge \hat{c}_1 \triangleleft b_2 \wedge \hat{c}_2 \triangleleft b_2$$

для $c_1 = (a, a_1) \in C_l(a)$ и $c_2 = (a_2, a) \in C_r(a)$. Произвольно выбирая $b_1, b_2 \in B$, приходим к (iv)''. $\square$

Пусть (M_1, L_0) и (M_2, L_0) — произвольные счетные структуры, удовлетворяющие T_0 . Пусть (N_1, L') и (N_2, L') — структуры, построенные как объединения соответствующих множеств B_i и множеств классов отношений эквивалентностей ε^2 и ε^4 . Индукцией по n определим последовательность частичных изоморфизмов

$$\begin{aligned} g_n &: (M_1^{(n)}, L_0) \rightarrow (M_2^{(n)}, L_0), \\ t_n &: (N_1^{(n)}, L'_0) \rightarrow (N_2^{(n)}, L'), \end{aligned} \quad n < \omega,$$

таким образом, чтобы фиксировались конечные множества $M_i^{(n)} \subset M_i$, $N_i^{(n)} \subset N_i$, выбранные после шага n , и выполнялись следующие условия:

(U₁) $g_{n-1} \subset g_n$, $t_{n-1} \subset t_n$; g_n — биекция, сохраняющая $<$ и P^1 ; t_n — L' -изоморфизм;

(U₂) $t_n(\widehat{a}) = \widehat{g}_n(a)$ для любого $a \in A_1^{(n)} \subset A_1$;

(U₃) $t_n(\widehat{c}) = \widehat{\gamma}(g(l(c)), g(r(c)))$ для любого $c \in C \cap A_1^{(n)} \times A_1^{(n)}$.

Здесь γ — элемент из $\Gamma = \{(\alpha_1, \alpha_2) \mid \alpha_1, \alpha_2 \in A_2, M \models \alpha_1 < \alpha_2 \wedge \varepsilon^2(\alpha_1, \alpha_2)\}$.

Четный шаг n определяет g_n , а нечетный — g_n^{-1} . Предположим, что модели M_1 и M_2 имеют фиксированные m - и μ -нумерации:

$$M_1 = \{m_i \mid i < \omega\}, \quad M_2 = \{\mu_i \mid i < \omega\}.$$

Шаг n . Пусть n — четное число. Рассуждение для нечетного n такое же, как и для четного. Выбираем элемент с наименьшим m -номером из $M_1 \setminus (A_1^{(n)} \cup B_1^{(n)})$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $a_n \in A_1 \setminus A_1^{(n)}$ — элемент с наименьшим m -номером. Строим множество $\varepsilon^2(M_1, a_n) \cap A_1^{(n-1)}$. Для него выполняется один из следующих подслучаев:

- 1.1. $\varepsilon^2(M_1, a) \cap A_1^{(n-1)} = \emptyset$;
- 1.2. $|\varepsilon^2(M_1, a) \cap A_1^{(n-1)}| = 1$;
- 1.3. $|\varepsilon^2(M_1, a) \cap A_1^{(n-1)}| \geq 2$.

1.1. Пусть даны два элемента d и $d' \in N_1^{(n-1)}$ такие, что $\widehat{a}_n \in (d, d')_{\triangleleft}$ и $(d, d')_{\triangleleft} \cap N_1^{(n-1)} = \emptyset$, где $(\cdot, \cdot)_{\triangleleft}$ — интервал по отношению $\triangleleft$. Пусть $t_n(\widehat{a}_{2n})$ — произвольный элемент из $(t_{n-1}(d), t_{n-1}(d'))_{\triangleleft} \cap \widehat{A}_2$. Поскольку t_{n-1} — L' -изоморфизм, имеем $(t_{n-1}(d), t_{n-1}(d'))_{\triangleleft} \cap N_2^{(n-1)} = \emptyset$.

Пусть $t_n(\widehat{a}_n) = \widehat{\alpha}$ для некоторого $\alpha \in A_2$. Возьмем произвольный элемент $\alpha_n \in \varepsilon^2(M_2, \alpha)$ и положим $g_n(a_n) = \alpha_n$.

1.2. Пусть a_i — элемент из $A_1^{(n-1)}$ такой, что $\varepsilon^2(M, a_n) \cap A_1^{(n-1)} = \{a_i\}$, $i < n$.

Допустим, что $a_i < a_n$. Пусть d, d' — элементы из $N_1^{(n-1)}$ такие, что $\widehat{c}(a_i, a_n) \in (d, d')_{\triangleleft}$ и $(d, d')_{\triangleleft} \cap N_1^{(n-1)} = \emptyset$. Они существуют по Ак (VIII), Ак (IX) и по утверждению 39 (iii). Заметим, что $d' \triangleleft \widehat{a}_i = \widehat{a}_n$ или $d' = \widehat{a}_i$, так как $\widehat{c}(a_i, a_n) \triangleleft \widehat{a}_n = \widehat{a}_i$ ввиду пп. (iv)' и (iv)'' утверждения 39. По условию U₂ имеем $t_{n-1}(d') \triangleleft t_{n-1}(\widehat{a}_i) = \widehat{g}_{n-1}(a_i) = \widehat{\alpha}_i$ или $t_{n-1}(d') = \widehat{\alpha}_i$. Тогда по утверждению 39 (iv)'' множество $\Gamma_l(\alpha_i)$ является плотным в $(t_{n-1}(d), t_{n-1}(d'))_{\triangleleft}$. Пусть γ — элемент из $(t(d), t(d'))_{\triangleleft} \cap \Gamma_l(\alpha_i)$. Ясно, что $l(\gamma) = \alpha_i$. Положим $t_n(\widehat{a}_n) := \gamma$, $g_n(a_n) := r(\gamma)$, $\alpha_n := r(\gamma)$.

Случай $a_n < a_i$ рассматривается аналогично.

1.3. Положим

$$\widehat{c}_n = \min_{\triangleleft} \left\{ \widehat{c} \mid c = (a_n, a_i) \text{ или } c = (a_i, a_n), a_i \in A_1^{(n-1)}, M \models \varepsilon^2(a_n, a_i) \right\}.$$

Рассмотрим два подслучая:

1.3 а) Существуют $a_k, a_j \in A_1^{(n-1)}$, для которых $\widehat{c}(a_k, a_j) = \widehat{c}_n$;

1.3 б) $\widehat{c}_n \neq \widehat{c}(a_k, a_j)$ для любых $a_k \in A_1^{(n-1)}$, $a_j \in A_1^{(n-1)}$.

1.3 а. Пусть $a_k < a_j$, $c_n = (a_n, a_i)$. Предположим, что $a_k < a_n < a_j < a_i$. Тогда ввиду Ак (VII) и минимальности $\widehat{c}_n$ имеем

$$\widehat{c}(a_k, a_n) = \widehat{c}(a_n, a_j) = \widehat{c}(a_n, a_i) = \widehat{c}(a_k, a_j).$$

Отсюда можно предположить, что $a_n \in (a_k, a_j)_\triangleleft$ и $(a_k, a_j) \cap A_1^{(n-1)} = \emptyset$.

Аналогично, используя Ак (VII) и минимальность $\widehat{c}_n$, получаем три случая:

(1) $\alpha_n \in (a_i, a_j)$, $(a_i, a_j) \cap A_1^{(n-1)} = \emptyset$;

(2) $a_n < a_i$, $(a_n, a_i) \cap A_1^{(n-1)} = \emptyset$;

(3) $a_j < a_n$, $(a_j, a_n) \cap A_1^{(n-1)} = \emptyset$.

(1) Пусть $\alpha_i = g_{n-1}(a_i)$, $\alpha_j = g_{n-1}(a_j)$. Находим внешний $\alpha_n \in (\alpha_i, \alpha_j)$ такой, что $\widehat{\gamma}(\alpha_i, \alpha_n) = \widehat{\gamma}(\alpha_n, \alpha_j) = \widehat{\gamma}(\alpha_i, \alpha_j)$. Существование такого α_n следует из Ак (VII). Положим $g_n(a_n) := \alpha_n$.

(2) Находим внешний $\alpha_n < \alpha_i$ такой, что $\widehat{\gamma}(\alpha_n, \alpha_i) = \widehat{\gamma}(\alpha_i, \alpha_j) = \widehat{\gamma}(\alpha_n, \alpha_j)$. Существование такого α_n вытекает из аксиомы Ак (VII). Положим $g_n(a_n) := \alpha_n$.

(3) Рассуждаем аналогично (2).

Заметим, что в случаях (1)–(3) имеем $N_1^{(n-1)} = N_1^{(n)}$, так как $\widehat{A}_n = \widehat{a}_i$, $\widehat{c}(a_n, a_j) = \widehat{c}(a_i, a_j)$ и для любых $a_s \in A_1^{(n-1)}$ из минимальности $\widehat{c}_n$ следует, что $\widehat{c}(a_n, a_s) = \widehat{c}(a_i, a_s)$ или $\widehat{c}(a_s, a_n) = \widehat{c}(a_s, a_j)$ на основании пп. (i)', (i)'' утверждения 39.

1.3 б. Рассмотрим случай, когда $a_n < a_i$ и $\widehat{c}_n = \widehat{c}(a_n, a_i)$, $i < n$, $a_i \in A_1^{(n-1)}$.

Из пп. (i)', (i)'' утверждения 39 и минимальности $\widehat{c}_n$ следует, что

$$\forall j < n \left[\left(\widehat{c}(a_j, a_n) = \widehat{c}(a_j, a_i) \text{ или } \widehat{c}(a_n, a_j) = \widehat{c}(a_n, a_i) \right) \right. \\ \left. \text{и } (a_n, a_i) \cap A_1^{(n-1)} = \emptyset \right].$$

Пусть d, d' — элементы из $N_1^{(n-1)}$ такие, что $\widehat{c}(a_n, a_i) \in (d, d')_\triangleleft$ и $(d, d')_\triangleleft \cap N_1^{(n-1)} = \emptyset$. Существование таких d, d' вытекает из ограниченности $N_1^{(n-1)}$. Заметим, что $d' \triangleleft \widehat{a}_i$. Тогда $t_{n-1}(d') \leq t_{n-1}(\widehat{a}_i) = \widehat{g}_{n-1}(a_i) = \widehat{a}_i$. Следовательно, $\Gamma_r(\alpha_i)$ плотно в $(t(d), t(d'))_\triangleleft$.

Положим $\alpha_n := l(\gamma)$. Предположим, что $t(\widehat{c}(a_n, a_j)) = \widehat{\gamma} = \widehat{\gamma}(\alpha_n, \alpha_i)$, $g(a_n) = \alpha_n$.

С л у ч а й 2. Пусть $b_n \in B_1 \setminus B_1^{(n-1)}$ — элемент с наименьшим m -номером, элементы $d, d' \in N_1^{(n-1)}$ таковы, что $b_n \in (d, d')_{\triangleleft}$, $(d, d') \cap N_1^{(n-1)} = \emptyset$. Рассмотрим интервал $(t_{n-1}(d), t_{n-1}(d'))_{\triangleleft}$. Так как t_{n-1} — частичный L' -изоморфизм, имеем $(t_{n-1}(d), t_{n-1}(d'))_{\triangleleft} \cap N_1^{(n-1)} = \emptyset$. Итак, β_n — произвольный элемент из $(t(d), t(d'))_{\triangleleft} \cap B_2$. Предположим, что $t_n(b_n) = g_n(b_n) = \beta_n$.

Вернемся к доказательству предложения 38. Для любых элементов $d \in N_1^{(n-1)}$ и $e \in M_1^{(n-1)}$ определим $t_n(d) = t_{n-1}(d)$ и $g_n(e) = g_{n-1}(e)$. Из определения и выбора элементов $g_n(a_n)$, $g_n(b_n)$, $t_n(\hat{c}(a_n, a_i))$, $t_n(\hat{a}_n)$, $t_n(b_n)$ следует, что g_n , t_n удовлетворяют условиям U_1 – U_3 . Таким образом, по условию U_1 имеем

$$\begin{aligned} g &= \bigcup_{n < \omega} g_n: (M_1, =, <, P^1) \rightarrow (M_2, =, <, P^1), \\ t &= \bigcup_{n < \omega} t_n: (N_1, =, \triangleleft) \rightarrow (N_2, =, \triangleleft), \end{aligned}$$

g — L'_0 -изоморфизм, t — L' -изоморфизм, где $L'_0 = \{=, <, P_1\}$.

Докажем, что g — L_0 -изоморфизм. Пусть $a, a' \in A_1$, $b \in B_1$. Тогда

$$\begin{aligned} M_1 \models E(a, a', b) \wedge a < a' \\ \iff N_1 \models \hat{c}(a, a') \triangleleft b \\ \iff N_2 \models t(\hat{c}(a, a')) \triangleleft g(b) \\ \iff N_2 \models \hat{\gamma}(g(a), g(a')) \triangleleft g(b) \text{ по условию } U_3 \\ \iff M_2 \models E(g(a), g(a'), g(b)) \wedge g(a) < g(a'). \end{aligned}$$

Таким образом, $M_1 \models E(a, a, b) \iff M_2 \models E(g(a), g(a), g(b))$. $\square$

Прямым следствием из доказательства предложения 38 является

Утверждение 40. Предположим, что T_0 — непротиворечивое множество. Пусть M — модель теории, выводимой из T_0 . Тогда любое иррациональное сечение (B_1, B_2) в $(B, <)$ является M -определимым в (M, L_0) тогда и только тогда, когда выполняется $\exists a \in P(M)(B_1 \triangleleft \hat{a} \triangleleft B_2)$ или $\exists a_1, a_2 \in P(M)(B_1 \triangleleft \hat{c}(a_1, a_2) \triangleleft B_2)$.

4.2. Построим модель (M, L) такую, что $L \supset L_0$ и $T_0 \vdash_L T := \text{Th}(M, L)$. Пусть дан язык $L := \{=, P^1, <^2, E^3, H^2, \varepsilon^2, \varepsilon^4, S^4, S^3\}$, $M := K \cup Q$, где Q — множество рациональных чисел и множество K определяется по индукции.

Построение K . Пусть $\mathbb{R}$ — множество всех вещественных чисел, $I := \{C \mid C \subset \mathbb{R}, C \cap \mathbb{Q} = \emptyset, C \text{ счетное и плотное в } \mathbb{R}\}$, J — подмножество множества I такое, что для любых $C_1 \neq C_2 \in J$ имеем $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ и $|J| > \omega$. Пусть

$$S := \left\{ a \mid a = (\dots, a_b, \dots)_{b \in \mathbb{Q}}, (\forall b \in \mathbb{Q}', a_b \in \mathbb{Q}), \mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{Q}, \right. \\ \left. \text{если } \mathbb{Q}' \subset \mathbb{Q}, \text{ то выполняется } \exists e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \forall b \in \mathbb{Q} (b < e \rightarrow b \in \mathbb{Q}') \right\}$$

— множество всех $\mathbb{Q}$ -последовательностей из рациональных номеров и

$$2^{<\omega} := \left\{ \tau \mid \exists n < \omega, \tau = (\tau(1), \dots, \tau(n)), \forall i (1 \leq i \leq n), \tau(i) \in \{0, 1\} \right\}.$$

Строим K со следующими условиями.

- (Z_1) $K = \bigcup_{n < \omega} K_n \subset S$, $K_n \cap K_{n+1} = \emptyset$, $|K_n| = \omega$.
- (Z_2) Функция $g: K_n \rightarrow (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{n+1}$ такова, что для любого $d \in K_n$ если $g(d) = (g_0(d), \dots, g_n(d))$, то $g_0(d) > g_1(d) > \dots > g_n(d)$.
- (Z_3) Функция $\mathbf{C}: K \rightarrow J$ (положим $\mathbf{C}(d) := C_d$) такова, что $C_{d_1} \neq C_{d_2}$ для любых $d_1 \neq d_2 \in K$.

Зафиксируем произвольный элемент $a = (\dots, a_b, \dots)_{b \in \mathbb{Q}}$ из S .

Шаг 0. Фиксируем произвольный элемент $C_0 \in J$. Для любого $\gamma \in C_0$ пусть $a^\gamma = (\dots, a_b^\gamma, \dots)_{b \in \mathbb{Q}, b < \gamma}$ — элемент из S такой, что $a_b^\gamma = a_b$ для всех $b \in \mathbb{Q}$ ($b < \gamma$). Положим $K_0 := \{a^\gamma \mid \gamma \in C_0\}$, $g_0(a^\gamma) := \gamma$, $g(a^\gamma) := (\gamma)$.

Шаг $n + 1$. Для любых $d \in K_n$, $\gamma \in C_d$ ($\gamma < g_n(d)$), $\tau \in 2^{<\omega}$ определим $d^{\gamma\tau} := (\dots, d_b^{\gamma\tau}, \dots)_{b \in \mathbb{Q}, b < g_0(d)}$ следующим образом:

$$\forall b \in \mathbb{Q} \left[(\gamma < b < g_0(d) \Rightarrow d_b^{\gamma\tau} = d_b) \wedge \left(b < \gamma \Rightarrow d_b^{\gamma\tau} = d_b + \sum_{i=1}^{l(\tau)} \frac{(-1)^{\tau(i)}}{(n+2)^i} \right) \right].$$

Таким образом,

$$K_{n+1} := \{d^{\gamma\tau} \mid d \in K_n, \gamma \in C_d, \gamma < g_n(d), \tau \in 2^{<\omega}\}, \quad g(d^{\gamma\tau}) := (g(d), \gamma).$$

Так как $|K_n| = |\bigcup_{d \in K_n} C_d| = |2^{<\omega}| = \omega$, имеем $|K_{n+1}| = \omega$.

Поскольку $|J| > \omega$, можно определить $\mathbf{C}: K_{n+1} \rightarrow J$. Заметим, что

$$\forall c, d \in K, \forall b \in \mathbb{Q} \left[(b < g_0(d) = g_0(c) \wedge d_b = c_b) \right. \\ \left. \Rightarrow \forall b' \in \mathbb{Q} (b < b' < g_0(d) \Rightarrow d_{b'} = c_{b'}) \right].$$

$$\begin{aligned} & \left[M \models P^1(d) \iff d \in K \right]; \\ & \left[M \models d <^2 c \iff (\{d, c\} \subset \mathbb{Q} \wedge d < c) \vee (d \in \mathbb{Q} \wedge c \in K) \right. \\ & \vee \left(\{d, c\} \subset K \right. \\ & \quad \wedge \left(g_0(d) < g_0(c) \right. \\ & \quad \vee \left(g_0(d) = g_0(c) \wedge \exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \wedge \exists b' \right. \\ & \quad \left. \left. \in \mathbb{Q} \left[b' < x < g_0(d) \wedge \forall b \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. \in \mathbb{Q} \left([x < b < g_0(d) \Rightarrow c_b = d_b] \right. \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. \left. \left. \wedge [b' < b < x \Rightarrow d_b < c_b] \right) \right) \right) \right) \right) \right]; \end{aligned}$$

$$\left[M \models E^3(c, d, b) \iff \{c, d\} \subset K \wedge b \in \mathbb{Q} \right. \\ \left. \wedge \left(b > \max\{g_0(d), g_0(c)\} \vee (b < g_0(d) = g_0(c) \wedge c_b = d_b) \right) \right];$$

$$\left[M \models H^2(d, b) \iff d \in K \wedge b \in \mathbb{Q} \wedge g_0(d) < b \right];$$

$$\left[M \models \varepsilon^2(c, d) \iff \{c, d\} \subset K \wedge g_0(c) = g_0(d) \right];$$

$$\left[\begin{array}{l} M \models \varepsilon^4(d, c, e, f) \iff \{d, e, c, f\} \subset K \wedge \exists n < \omega, \\ g_n(d) = g_n(c) = g_n(e) = g_n(f) \wedge g_{n+1}(d) \neq g_{n+1}(c) \wedge g_{n+1}(e) \neq g_{n+1}(f), \\ \exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \exists b' \in \mathbb{Q} \left[b' < x < g_n(d) \wedge \forall b \in \mathbb{Q} \right. \\ \left. \left([x < b < g_n(d) \Rightarrow (c_b = d_b \wedge e_b = f_b)] \right. \right. \\ \left. \left. \wedge [b' < b < x \Rightarrow (d_b < c_b \wedge e_b < f_b)] \right) \right] \end{array} \right];$$

$$\begin{aligned}
& \left[M \models S_1^4(d, c, e, f) \iff \{d, c, e, f\} \subset K \right. \\
& \quad \wedge g_0(d) = g_0(c) \wedge g_0(e) = g_0(f) \wedge \exists b \in \mathbb{Q}(d_b = c_b \wedge e_b \neq f_b) \wedge \exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\
& \quad \wedge \exists b' \in \mathbb{Q} \left[b' < x < g_0(d) \wedge \forall b \in \mathbb{Q} \left([x < b < g_0(d) \Rightarrow c_b = d_b] \right. \right. \\
& \quad \quad \quad \left. \left. \wedge [b' < b < x \Rightarrow d_b < c_b] \right) \right] \wedge \exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\
& \quad \wedge \exists b' \in \mathbb{Q} \left[b' < x < g_0(e) \wedge \forall b \in \mathbb{Q} \left([x < b < g_0(e) \Rightarrow e_b = f_b] \right. \right. \\
& \quad \quad \quad \left. \left. \wedge [b' < b < x \Rightarrow e_b < f_b] \right) \right] \left. \right]; \\
& \left[M \models S_2^3(d, c, f) \iff \{d, c, f\} \subset K \wedge g_0(d) \right. \\
& \quad = g_0(c) \wedge \left(g_0(d) > g_0(f) \rightarrow \exists b \in \mathbb{Q}(b < g_0(f) \wedge d_b = c_b) \right) \wedge \exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\
& \quad \wedge \exists b' \in \mathbb{Q} \left[b' < x < g_0(d) \wedge \forall b \in \mathbb{Q} \left([x < b < g_0(d) \Rightarrow c_b = d_b] \right. \right. \\
& \quad \quad \quad \left. \left. \wedge [b' < b < x \Rightarrow d_b < c_b] \right) \right] \left. \right].
\end{aligned}$$

Заметим, что отношения $\varepsilon^2, \varepsilon^4, S_1^4, S_2^3, H^2$ определены в $(M, =, P^1, <^2, E^3)$ и $(M, L_0) \models \text{Ак (I)–Ак (IX)}$.

Пусть a, a_1, a_2, a_3 — элементы из $P(M)$, N — модель из предложения 38. Тогда справедливы следующие условия:

- F1) $[M \models S^3(a_1, a_2, a) \iff N \models \hat{c}(a_1, a_2) \triangleleft \hat{a}]$;
- F2) $[M \models S^4(a, a_1, a_2, a_3) \iff N \models \hat{c}(a, a_1) \triangleleft \hat{c}(a_2, a_3)]$;
- F3) $[M \models \neg \varepsilon^2(a_1, a_2) \wedge a_1 < a_2 \iff N \models \hat{a}_1 < \hat{a}_2]$.

4.3. Докажем, что T допускает сокращение кванторов и является слабо o -минимальной.

Предложение 41. Теория $T = \text{Th}((M, L))$ ω -категорична, конечно аксиоматизируема, допускает сокращение кванторов и слабо o -минимальна.

Доказательство. Пусть M — счетная модель теории T . Пусть $A_i \subset P(M)$, $B_i \subset \neg P(M)$, $i = 1, 2$, такие, что множество $(A_1 \cup B_1)$ конечно и $(A_1 \cup B_1, L) \cong (A_2 \cup B_2, L)$. Введение $H^2, \varepsilon^2, \varepsilon^4, S^3, S^4$ позволяет определять конечные L' -структуры $(N(A_i \cup B_i), =, \triangleleft)$ и L' -изоморфизм

$$t: (N(A_1 \cup B_1), =, \triangleleft) \rightarrow (N(A_2 \cup B_2), =, \triangleleft)$$

так, что t удовлетворяет условию U_2 из предложения 38.

Действительно, пусть a, a_1, a_2, a_3 — элементы из A , $b \in B$. Тогда $\hat{a}$ определено при помощи ε^2 ; $\hat{c}(a, a_1)$ — при помощи $\varepsilon^4, \varepsilon^2, <^2$; $\hat{a}$ и b $\triangleleft$ -сравнимы с помощью H^2 ; $\hat{a}$ и $\hat{c}(a_1, a_2)$ — $\triangleleft$ -сравнимы с помощью S^3 (см. F1); b и $\hat{c}(a_1, a_2)$ — помощью E^3 ; $\hat{c}(a, a_1)$ и $\hat{c}(a_2, a_3)$ — с помощью S^4 (см. F2); $\hat{a}_1$ и $\hat{a}_2$ — с помощью $\varepsilon^2, <^2$ (см. F3).

Используя метод доказательства предложения 38, можно расширить изоморфизм между $(A_1 \cup B_1, L)$ и $(A_2 \cup B_2, L)$ до автоморфизма (M, L) . Это означает, что T допускает сокращение кванторов [10]. В силу того, что теория T ω -категорична (предложение 38) и допускает сокращение кванторов, слабая ω -минимальность теории T будет следовать из выпуклости атомных 1-формул с параметрами (в данной ситуации любая 1-формула, определяемая конечным множеством параметров из $(A \cup B)$, является булевой комбинацией $(A \cup B)$ -определимых атомных 1-формул). Выпуклость атомных 1-формул вида

$$\begin{aligned} & x < a(b), \quad a(b) < x, \quad P(x), \quad H(x, b), \quad H(a, y), \quad E(x, a, b), \quad E(a, x, b), \\ & E(a_1, a_2, y), \quad \varepsilon^2(x, a), \quad \varepsilon^2(a, x), \quad \varepsilon^4(x, a_1, a_2, a_3), \quad \varepsilon^4(a_1, x, a_2, a_3), \\ & \varepsilon^4(a_1, a_2, x, a_3), \quad \varepsilon^4(a_1, a_2, a_3, x), \quad S^3(x, a_1, a_2), \quad S^3(a_1, x, a_2), \quad S^3(a_1, a_2, x), \\ & S^4(x, a_1, a_2, a_3), \quad S^4(a_1, x, a_2, a_3), \quad S^4(a_1, a_2, x, a_3), \quad S^4(a_1, a_2, a_3, x) \end{aligned}$$

следует из Ак (I)–Ак (IX), свойств линейного порядка $\triangleleft$ на N . В самом деле, пусть $a'_1, a_1, a''_1, a_2, a_3$ — элементы из $P(M)$ такие, что

$$M \models S^3(a'_1, a_2, a_3) \wedge S^3(a''_1, a_2, a_3) \wedge a'_1 < a_1 < a''_1.$$

Тогда по F1 имеем $N \models \hat{c}(a'_1, a_2, a_3) \triangleleft \hat{a}_3 \wedge \hat{c}(a''_1, a_2) \triangleleft \hat{a}_3$. Так как $a'_1 < a_1 < a''_1$, из определения ε^4 и $\triangleleft$ следует, что

$$\begin{aligned} N \models & \left(\hat{c}(a'_1, a_2) \triangleleft \hat{c}(a_1, a_2) \vee \hat{c}(a'_1, a_2) = \hat{c}(a_1, a_2) \right) \\ & \wedge \left(\hat{c}(a_1, a_2) \triangleleft \hat{c}(a''_1, a_2) \vee \hat{c}(a_1, a_2) = \hat{c}(a''_1, a_2) \right). \end{aligned}$$

Отсюда, в силу транзитивности $\triangleleft$ заключаем, что $N \models \hat{c}(a_1, a_2) \triangleleft \hat{a}_3$. Тогда по F1 имеем $M \models S^3(a_1, a_2, a_3)$, что означает выпуклость $S^3(x, a_2, a_3)$. Аналогично проверяется выпуклость всех атомных 1-формул вида S^3, S^4 (выпуклость остальных атомных 1-формул является непосредственным следствием определений и аксиом). $\square$

4.4. Пример пары моделей $(M_b, L) \prec (M, L)$ такой, что (M_b, M) является D -1-парой, но не является D -парой.

Пусть (M, L) — модель из п. 4.2, b — произвольный элемент из $\mathbb{Q}$ (т. е. $\neg P(M)$). Обозначим через Q_b множество $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < b\}$, через K_b — множество $\bigcup_{b' < b} H(M, b')$, через M_b — $Q_b \cup K_b$. Легко увидеть, что (M_b, L) —

подмодель модели (M, L) . Так как $\text{Th}(M)$ допускает сокращение кванторов, имеем $(M_b, L) \prec (M, L)$.

Утверждение 42. Пусть $d_1 \neq d_2$ — элементы из $P(M) \setminus M_b$ такие, что существует $n < \omega$, для которого $n > 0, g_n(d_1) = g_n(d_2) < b$. Тогда тип $\text{tp}(d_1 d_2 / M_b)$ неопределим.

Доказательство. Согласно аксиоме Ак(VII) формула $E(d_1, d_2, x)$ определяется по некоторому иррациональному сечению (B_1, B_2) в $(\mathbb{Q}, <)$ и по условию $g_n(d_1) = g_n(d_2) < b, B_1 < b$. Тогда иррациональное сечение $(B_1, (B_2 \cap \{b\}_M^-) \cup P(M_b))$ неопределимо в (M_b, L) по утверждению 40 и условию (Z_3) из конструкции K в п. 4.2. Пусть $p \in S_1(M_b)$ — единственный 1-тип, который расширяет сечение $(B_1, (B_2 \cap \{b\}_M^-) \cup P(M_b))$. Заметим, что по предложению 26 имеем $p \perp^w \text{tp}(d_1 / M_b)$, так как p — иррациональный тип и $\text{tp}(d_1 / M_b)$ — квазирациональный тип. Пусть $q := \text{tp}(d_2 / M_b \cup d_1)$, $p' \in S_1(M_b \cup d_1)$, $p \subseteq p'$. Имеем $d_1 d_2 \not\perp^w p$ и, следовательно, $q \not\perp^w p'$, так как $p(M) = p'(M)$. Отметим, что p' — иррациональный тип, который определяется сечением. Следовательно, p' — неопределимый тип. Тогда из предложения 22 следует, что таковым является и тип q . Отсюда $\text{tp}(d_1 d_2 / M_b)$ — неопределимый тип. Последнее означает, что (M_b, M) не является D -парой. $\square$

Заметим, что (M_b, L) — квазидедекиндово полная модель в (M, L) , так как $P(M) \setminus P(M_b) > P(M_b)$, $\neg P(M) \setminus \neg P(M_b) > \neg P(M_b)$. Таким образом, из утверждения 42 следует теорема 37. $\square$

В заключение, автор выражает благодарность Е. А. Палютину за упрощение формулировки и доказательства теоремы 31, В. В. Вербовскому и Б. Ш. Кулпешову за полезные обсуждения примера, обосновывающего теорему 37, и оказанную помощь в оформлении данной статьи.

Литература

1. Байжанов Б. С. Спектральные вопросы totally трансцендентных теорий конечного ранга // *Теория моделей и ее приложения*. Алма-Ата: Изд-во КазГУ, 1980. С. 25–44.
2. Байжанов Б. С. Обогащение o -минимальной модели унарными выпуклыми предикатами // *Исследования в теории алгебраических систем*. Караганда: Изд-во КарГУ, 1995. С. 3–23.
3. Байжанов Б. С. Пары моделей и свойство NBAM // *Проблемы информатики и управления* / Сб. науч. тр. Алматы: Гылым, 1995. С. 81–89.

4. Байжанов Б., Вербовский В., Туреханова Г. Неортогональность 1-типов в слабо o -минимальных структурах конечной глубины // *Algebra and Model Theory 4* / Collection of Papers / Под ред. А. Г. Pinus, К. Н. Ponomaryov. Novosibirsk: Novosibirsk State Technical University, 1999. С. 7–14.
5. Baizhanov B. S. *Classification of One-Types in Weakly o -Minimal Theories and Its Corollaries* / Preprint. Алматы: Изд-во Ин-та проблем информатики и управления АН Республики Казахстан, 1996.
6. Baizhanov B. S. Orthogonality of one-types in weakly o -minimal theories // *Algebra and Model Theory 2* / Collection of Papers / Eds. Pinus A. G. and Ponomaryov K. N. Novosibirsk: Novosibirsk State Technical University, 1999. P. 5–28.
7. Baizhanov B. S. Expansions of a model of a weakly o -minimal theory by a family of convex unary predicates // *J. Symbolic Logic*. 2001. V. 66, N 3. P. 1382–1414.
8. Baldwin J. T. *Fundamentals of Stability Theory*. Berlin, etc.: Springer-Verlag, 1988.
9. Buechler S. Pseudoprojective strongly minimal sets are locally projective // *J. Symbolic Logic*. 1991. V. 56, N 4. P. 1184–1194.
10. Chang C. C. and Keisler H. J. *Model Theory*. Amsterdam: North-Holland, 1973.
11. Dickmann M. A. Elimination of quantifiers for ordered valuation rings // *Proc. of the Third Easter Model Theory Conf. at Gross Koris*. Berlin: Humboldt-Univ., 1985. V. 70. P. 64–88.
12. van den Dries L. Remarks on Tarski's problem concerning $(\mathbb{R}, +, *, \exp)$ // *Proc. Logic Colloquium*' 82, 1984. P. 240–266.
13. van den Dries L. Tarski's problem and Pfaffian functions // *Logic Colloquium*' 84 / Eds. Paris J. B., Wilkie A. J., and Wilmers G. M. Amsterdam: North-Holland, 1986. P. 59–90.
14. Lachlan A. H. Dimension and totally transcendental theories of rank 2 // *Set Theory and Hierarchy Theory* / Lecture Notes in Math. (Mem. Tribute A. Mostowski, Bierutowice 1975) / Eds. Marek W., Srebrny M., and Zarach A. Berlin: Springer-Verlag, 1976. V. 537. P. 153–183.
15. Macpherson D., Marker D., and Steinhorn Ch. Weakly o -minimal structures and real closed fields // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1993. V. 352, N 12. P. 5435–5483.
16. Marker D. Omitting types in o -minimal theories // *J. Symbolic Logic*. 1986. V. 51. P. 63–74.

17. Marker D. and Steinhorn Ch. Definable types in o -minimal theories // *J. Symbolic Logic*. 1994. V. 59, N 1. P. 185–198.
18. Mayer L. Vaught's conjecture for o -minimal theories // *J. Symbolic Logic*. 1988. V. 53, N 1. P. 146–159.
19. Pillay A. Definability of types, and pairs of o -minimal structures // *J. Symbolic Logic*. 1994. V. 59, N 4. P. 1400–1409.
20. Pillay A. and Steinhorn Ch. Definable sets in ordered structures. I // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1986. V. 295. P. 565–592.
21. Shelah S. *Classification Theory and the Number of Nonisomorphic Models*. Amsterdam: North-Holland, 1978.

Байжанов Бектур Сембиұлы

Институт проблем информатики и управления
Министерства образования и науки
Республики Казахстан,
ул. Пушкина 125, 480100, г. Алматы, КАЗАХСТАН.
E-mail: baizhanov@ipic.kz

Статья поступила
19 февраля 2004 г.