

ISSN 1682—0525

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ**

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ

2004 ТОМ 4 № 3 (13)
ИЗДАЕТСЯ С 2001 ГОДА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ МО И Н РК
АЛМАТЫ

Министерство образования и науки Республики Казахстан

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 4 № 3 (13) 2004

Периодичность — 4 номера в год

Главный редактор
А.А.Женсыкбаев

Заместители главного редактора:
М.Т.Дженалиев, М.И.Рахимбердиев

Редакционная коллегия:

М.Б.Айдарханов, Л.А.Алексеева, Б.Л.Байдельдинов, Г.И.Бижанова,
Н.К.Блиев, Д.С.Джумабаев, А.С.Джумадильдаев, А.Ж.Найманова,
М.К.Орунханов, И.Т.Пак, М.Г.Перетягькин, У.М.Султангазин,
А.Т.Кулахметова (ответственный секретарь).

Адрес редколлегии и редакции: 480100, г. Алматы, Пушкина ул., 125, к. 304
Телефон 8-(3272)-91-20-03, journal@math.kz, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

©Институт математики МОН РК, 2004г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 4, № 3 (13), 2004

Об обобщенно-верхнем центральном показателе линейной системы с неограниченными коэффициентами <i>Т. М. Алдибеков</i>	5
О разрешимости граничных задач для гиперболического уравнения с усреднением <i>М. М. Амангалиева</i>	12
Исследование взаимодействия сверхзвукового потока с вдуваемой струей <i>А. О. Бекетаева</i>	16
О задаче Коши для "существенно" нагруженного параболического уравнения <i>М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов</i>	22
Уравнение диаграммы "нагрузка-деформация" <i>А. Б. Жакыпбеков, Т. Б. Дуйшеналиев</i>	27
К спектральной теории уравнений с отклоняющимся аргументом <i>Т. Ш. Кальменов, С. Т. Ахметова, А. Ш. Шалданбаев</i>	41
Признаки однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи при неравномерном разбиении интервала <i>Е. В. Кокотова</i>	49
О корректности линейной двухточечной краевой задачи <i>К. Ж. Назарова</i>	58
Об одной конкретной задаче для сингулярной системы типа А.В.Бицадзе <i>К. Н. Оспанов</i>	68
Дифракция плоской волны на ленте при произвольном волновом векторе <i>С. С. Саутбеков</i>	74
Оценки решения одной задачи Коши теории магнитной гидродинамики в L_p <i>Ш. Сахаев</i>	84
О корректной разрешимости сингулярной задачи для линейного дифференциального уравнения <i>Р. Е. Утешова</i>	91

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О наилучших N -членных приближениях в смешанной норме <i>Д. Б. Базарханов</i>	99
Оценки поперечников по Колмогорову множеств, связанных с областью определения нелинейного уравнения смешанного типа <i>А. Б. Иманбаева</i>	102
<hr/>	
Рефераты	106

УДК 517.938

ОБ ОБОБЩЕННО-ВЕРХНЕМ ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОКАЗАТЕЛЕ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Т.М. Алдибеков

АГУ им. Абая
480021 г.Алматы ул. Толе би, 86
Институт Математики МОиН РК
480100 Алматы ул. Пушкина, 125

Установлено представление для обобщенно-верхнего центрального показателя линейной дифференциальной системы с неограниченной матрицей коэффициентов.

Центральные показатели [1, с. 99-122], а также их модификации [2] играют ведущую роль в теории устойчивости квазилинейных систем. Для квазилинейных систем с неограниченной линейной частью аналогичную роль играют обобщенно-центральные показатели.

В работе установлено новое представление для обобщенно-верхнего центрального показателя. Имеет место утверждение [3].

Теорема 1. Если функция $F(t, x)$ непрерывна в области $G = J \times D$, $D \subset R^n$, $J = [0, +\infty)$, $F(t, 0) = 0$ и удовлетворяет условию $|F(t, x)| \leq K\Psi(t)|x|$, где $\Psi(t)$ — непрерывная положительная в J функция, K — положительная постоянная, то все ненулевые решения уравнения $x' = F(t, x)$ имеют конечные обобщенные показатели относительно $q(t) = \int_{t_0}^t \Psi(\tau) d\tau$.

В частности, теорема справедлива для линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (1)$$

с непрерывной и неограниченной матрицей $A(t)$ в J , удовлетворяющей условию $|A(t)| \leq K\Psi(t)$. Напомним некоторые определения [4]. Q — класс монотонно возрастающих и непрерывно дифференцируемых на J функций.

Keywords: *Lyapunov exponent, system of differential equations, generalized central exponent*

2000 Mathematics Subject Classification: 34D08

© Т.М. Алдибеков, 2004.

Определение 1. Функции $r_q(t)$ и $R_q(t)$ называются, соответственно, обобщенно-нижними и обобщенно-верхними относительно $q(t) \in Q$ для системы (1), если они ограничены, измеримы и осуществляют оценки

$$d_{r,\varepsilon} e^{\int_{[r_q(\tau)-\varepsilon]dq(\tau)}^t} \leq \frac{|x(t)|}{|x(s)|} \leq D_{R,\varepsilon} e^{\int_{[R_q(\tau)+\varepsilon]dq(\tau)}^t}$$

для всех $t \geq s \geq 0$ и всех ненулевых решений системы $x(t)$, где $D_{R,\varepsilon}$, $d_{r,\varepsilon}$ — константы, зависящие от выбора $R_q(t)$, $r_q(t)$ и $\varepsilon > 0$.

Множество $\{R_q(t)\}$ обобщенно-верхних функций системы (1) называется верхним классом системы (1) относительно $q \in Q$ и обозначается символом $B(A, q)$.

Множество $\{r_q(t)\}$ обобщенно-нижних функций системы (1) называется нижним классом системы (1) относительно $q \in Q$ и обозначается символом $H(A, q)$.

Пусть

$$\Omega(R, q) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{q(t)} \int_0^t R_q(\tau) dq(\tau), \quad \omega(r, q) = \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{q(t)} \int_0^t r_q(\tau) dq(\tau).$$

Определение 2. Число $\Omega(q) = \inf_{R \in B(A, q)} \Omega(R, q)$ называется обобщенно-верхним центральным показателем системы (1) относительно $q \in Q$. Число $\omega(q) = \sup_{r \in H(A, q)} \omega(r, q)$ называется обобщенно-нижним центральным показателем системы (1) относительно $q \in Q$.

Заметим, что $\omega(q) \leq \Omega(q)$.

Для матрицы Коши $X(t, s)$ системы (1) при любых фиксированных $t, s \in J$ справедливо соотношение $X(t, s) = \max \frac{|x(t)|}{|x(s)|}$ [1, с. 100], где максимум берется по всем ненулевым решениям $x(t)$ системы (1). Отсюда и из определения 1 следует, что имеет место утверждение

Лемма 1. $R_q \in B(A, q)$ тогда и только тогда, когда для матрицы Коши $X(t, s)$ системы (1) выполняется неравенство

$$|X(t, s)| \leq D_{R,\varepsilon} e^{\int_{[R_q(\tau)+\varepsilon]dq(\tau)}^t}$$

при всех $t \geq s \geq 0$. $D_{R,\varepsilon}$ — константа зависящая, вообще говоря, от выбора R_q и $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим треугольную систему

$$\dot{y} = P(t)y \tag{2}$$

с непрерывными и неограниченными коэффициентами $p_{ik}(t)$, $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, n}$, $p_{ik}(t) = 0$ при $i > k$, $t \in J$. Кроме того, диагональные коэффициенты $p_i(t) \equiv p_{ii}(t)$, $i = \overline{1, n}$, $t \in J$ — вещественные.

Пусть

$$\dot{u} = P_d(t)u \tag{3}$$

— диагональная система с коэффициентами $p_i(t) \equiv p_{ii}(t)$, $i = \overline{1, n}$, $t \in J$.

Лемма 2. Имеет место равенство $B(P, q) = B(P_d, q)$, т.е. верхние классы системы (2) и (3) относительно $q \in Q$ совпадают.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Матрица Коши $Y(t, s)$ системы (2) имеет следующие коэффициенты [1, с. 80]

$$\left. \begin{aligned} y_{ik}(t, s) &= \int_s^t \sum_{\alpha=i+1}^k p_{i\alpha}(t_1) x_{\alpha k}(t_1) e^{\int_{t_1}^t p_i(\tau) d\tau} dt_1 \quad \text{при } i < k, \\ y_{ik}(t, s) &= e^{\int_s^t p_k(\tau) d\tau} \quad \text{при } i = k, \\ y_{ik}(t, s) &= 0 \quad \text{при } i > k. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Пусть $R_q \in B(P, q)$. Следовательно, в силу леммы 1 имеем неравенство

$$|Y(t, s)| \leq D_{R,\varepsilon} e^{\int_s^t [R_q(\tau)+\varepsilon] dq(\tau)} \quad \text{при } t \geq s \geq 0. \quad (5)$$

Это неравенство справедливо для отдельных элементов матрицы Коши $Y(t, s)$ системы (2), в частности, для $y_{ii}(t, s)$, $i = \overline{1, n}$.

Так как

$$\text{diag}[e^{\int_s^t p_i(\tau) d\tau}] = \text{diag}[y_{ii}(t, t_0)] = \text{diag}[u_{ii}(t, t_0)],$$

где $u_{ii}(t, t_0)$ — диагональные элементы матрицы Коши $U(t, t_0)$ системы (3), образует базис в пространстве решений системы (3), то выполняется неравенство (везде используются универсальные константы [1, с.8])

$$|U(t, s)| \leq D_{R,\varepsilon} e^{\int_s^t [R_q(\tau)+\varepsilon] dq(\tau)} \quad \text{при } t \geq s \geq 0, \quad (6)$$

$D_{R,\varepsilon} > 0$, $\varepsilon > 0$.

Следовательно, в силу леммы 1 функция R_q является обобщенно-верхней функцией и для системы (3). Поэтому имеет место включение

$$B(P, q) \subseteq B(P_d, q). \quad (7)$$

Обратно, пусть $R_q \in B(P_d, q)$, т.е. выполняется неравенство (6). Следовательно, при $i = k$ и в силу дифференциального тождества $dq(t) = \Psi(t)dt$ для диагональных элементов матрицы $Y(t, s)$ имеем неравенство

$$|y_{ii}(t, s)| \equiv e^{\int_s^t \frac{p_i(\tau)}{\Psi(\tau)} dq(\tau)} \leq D_{R,\varepsilon} e^{\int_s^t [R_q(\tau)+\varepsilon] dq(\tau)}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Допустим, что для $\alpha = k, k - 1, \dots, i + 1$ имеют место оценки

$$|y_{\alpha k}(t, s)| \leq D_{R,\varepsilon} e^{\int_s^t [R_q(\tau)+\varepsilon] dq(\tau)}.$$

Тогда из (4) следует, что

$$\begin{aligned} |y_{ik}(t, s)| &\leq \int_s^t \sum_{\alpha=i+1}^k |p_{i\alpha}(t_1)| \cdot |y_{\alpha k}(t_1)| e^{\int_{t_1}^t p_i(\tau) d\tau} dt_1 \leq \\ &\leq D_{R,\varepsilon} \int_s^t \sum_{\alpha=i+1}^k \frac{|p_{i\alpha}(t_1)|}{\Psi(t_1)} e^{\int_s^{t_1} [R_q(\tau)+\varepsilon] dq(\tau)} \cdot e^{\int_{t_1}^t [R_q(\tau)+\varepsilon] dq(\tau)} dq(t_1) \leq D_{R,\varepsilon} e^{\int_s^t [R_q(\tau)+\varepsilon] dq(\tau)} \int_s^t dq(t_1). \end{aligned} \quad (8)$$

Для $\varepsilon > 0$ возьмем $D_{R,\varepsilon}$ так, чтобы

$$\int_s^t dq(t_1) \leq D_{R,\varepsilon} e^{\int_s^t \varepsilon dq(t_1)}. \quad (9)$$

Из (7) и (8) следует, что

$$|y_{ik}(t, s)| \leq D_{R,\varepsilon} e^{\int_s^t [R_q(\tau) + \varepsilon] dq(\tau)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Таким образом, оценка верна для всех элементов матрицы Коши $Y(t, s)$ системы (2), следовательно, имеем оценку (5), т.е. $R_q \in B(P, q)$. Поэтому

$$B(P_d, q) \subseteq B(P, q). \quad (10)$$

Из (7) и (10) следует требуемое равенство. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Для любых фиксированных $\beta \in N$, $T > 0$ при $q(t) = t^\beta$ имеет место равенство

$$\Omega(R, q) = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^\beta T^\beta} \int_0^{mT} R_q(\tau) d\tau^\beta.$$

Доказательство. Пусть $|R_q(\tau)| \leq D$, $\tau \in J$. Тогда для $mT \leq t \leq (m+1)T$ имеем

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{t^\beta} \int_0^t R_q(\tau) d\tau^\beta - \frac{1}{m^\beta T^\beta} \int_0^{mT} R_q(\tau) d\tau^\beta \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{1}{t^\beta} \int_0^t R_q(\tau) d\tau^\beta - \frac{1}{m^\beta T^\beta} \int_0^t R_q(\tau) d\tau^\beta \right| + \left| \frac{1}{m^\beta T^\beta} \int_0^t R_q(\tau) d\tau^\beta - \frac{1}{m^\beta T^\beta} \int_0^{mT} R_q(\tau) d\tau^\beta \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{m^\beta T^\beta - t^\beta}{t^\beta m^\beta T^\beta} \right| \left| \int_0^t R_q(\tau) d\tau^\beta \right| + \left| \frac{1}{m^\beta T^\beta} \int_0^t R_q(\tau) d\tau^\beta \right| \leq \frac{|m^\beta T^\beta - t^\beta|}{m^\beta T^\beta} \cdot D + \frac{|t^\beta - m^\beta T^\beta|}{m^\beta T^\beta} \cdot D = \\ & = \frac{2D}{m^\beta T^\beta} |t^\beta - m^\beta T^\beta| \leq \frac{2D}{m^\beta T^\beta} |(m+1)^\beta T^\beta - m^\beta T^\beta| = \frac{2D}{m^\beta} (m^{\beta-1} \beta + \dots + 1) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $m \rightarrow \infty$. Отсюда следует требуемое равенство. Лемма 3 доказана.

Разобьем полуось $J = [0, +\infty)$ на равные отрезки $\mathcal{T}_j = [(j-1)T, jT]$, $j \in N$ произвольной длины $T > 0$. Пусть $p_{ii}(t)$, $i = \overline{1, n}$, $t \in J$ — диагональные коэффициенты системы (2).

Функция $P^T(t)$, $t \in J$ определяется следующим образом: $P^T(t)$ внутри каждого отрезка \mathcal{T}_j совпадает с одной из тех функций $\left\{ \frac{p_{ii}(t)}{\Psi(t)} \right\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, для которых интеграл $\int_{\mathcal{T}_j} \frac{p_{ii}(\tau)}{\Psi(\tau)} dq(\tau)$ принимает максимальное значение, т.е.

$$\int_{\mathcal{T}_j} P^T(\tau) d\tau = \max_i \int_{\mathcal{T}_j} \frac{p_{ii}(\tau)}{\Psi(\tau)} dq(\tau).$$

На концах отрезка положим $P^T = 0$.

Лемма 4. Функция P^T является обобщенно-верхней функцией для системы (2), т.е. $P^T \in B(P, q)$.

Доказательство. Возьмем произвольный отрезок $[s, t] \subset J$. Если $[s, t] = \bigcup_{j=1}^r \mathcal{T}_j$, т.е. отрезок $[s, t]$ состоит из целого числа отрезков \mathcal{T}_j , то

$$\int_s^t p_{ii}(\tau) d\tau = \sum_{j=1}^r \int_{\mathcal{T}_j} \frac{p_{ii}(\tau)}{\Psi(\tau)} dq(\tau) \leq \sum_{j=1}^r \int_{\mathcal{T}_j} P^T(\tau) dq(\tau) = \int_s^t P^T(\tau) dq(\tau).$$

Если отрезок $[s, t]$ состоит из нецелого числа отрезков, то, добавляя к обеим частям неравенства

$$\int_s^t p_{ii}(\tau) d\tau \leq \int_s^t P^T(\tau) dq(\tau)$$

по два интеграла на отрезках длины, не более T , и учитывая ограниченность всех функций $\frac{p_{ii}(\tau)}{\Psi(\tau)}$, $i = \overline{1, n}$, получаем неравенство

$$\int_s^t p_{ii}(\tau) d\tau \leq D_p + \int_s^t P^T(\tau) dq(\tau) + D[q(t) - q(s)]$$

или

$$\int_s^t p_{ii}(\tau) d\tau \leq D_p + \int_s^t [P^T(\tau) + D] dq(\tau),$$

где $D_p > 0$, $D > 0$. Следовательно имеем

$$|U(t, s)| \leq D'_p e^{\int_s^t [P^T(\tau) + D] dq(\tau)} \quad \text{при} \quad t \geq s \geq 0,$$

где $D'_p = \exp D_p$, $U(t, s)$ — матрица Коши системы (3). Таким образом, $P^T \in B(P_d, q)$. Отсюда в силу леммы 2 следует, что $P^T \in B(P, q)$. Лемма 4 доказана.

Напомним, что обобщенно-верхний центральный показатель $\Omega(q)$ системы (1) определяется по формуле $\Omega(q) = \inf_{R_q \in B(A, q)} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{q(t)} \int_0^t R_q(\tau) dq(\tau)$. Положим

$$\Omega^*(q) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m^\beta T^\beta} \sum_{j=0}^{m-1} \ln |X((j+1)T, jT)|,$$

где $X(t, s)$ — матрица Коши системы (1), $\beta \in N$, $q \in Q$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. При $q(t) = t^\beta$, $\beta \in N$ имеет место равенство $\Omega(q) = \Omega^*(q)$.

Доказательство. Преобразование Перрона, приводящее систему (1) к треугольной системе (2), является унитарным [1, с. 261]. Поэтому оно не меняет обобщенных, обобщенно-центральных показателей. Следовательно, теорему достаточно доказать для треугольной системы (2).

В силу леммы 4 $P^T \in B(P, q)$. Отсюда и из определения $\Omega(q)$ следует, что

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^\beta} \int_0^t P^T(\tau) d\tau^\beta \geq \Omega(q).$$

Следовательно, в силу леммы 3 имеем

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m^\beta T^\beta} \int_0^{mT} P^T(\tau) d\tau^\beta \geq \Omega(q). \quad (11)$$

В силу леммы 2 $P^T \in B(P_d, q)$. Тогда для матрицы Коши $U(t, s)$ диагональной системы (3) имеем

$$|U((j+1)T, jT)| = \max_i \frac{|u((j+1)T)|}{|u(jT)|} = e^{\max_i \int_{jT}^{(j+1)T} p_{ii}(\tau) d\tau}.$$

Отсюда, логарифмируя и суммируя по $j = \overline{0, m-1}$, получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m-1} \ln |U((j+1)T, jT)| &= \sum_{j=0}^{m-1} \max_i \int_{jT}^{(j+1)T} p_{ii}(\tau) d\tau = \sum_{j=0}^{m-1} \max_i \int_{jT}^{(j+1)T} \frac{p_{ii}(\tau)}{\Psi(\tau)} dq(\tau) = \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \int_{jT}^{(j+1)T} P^T(\tau) dq(\tau) = \int_0^{mT} P^T(\tau) d\tau^\beta \end{aligned}$$

или

$$\frac{1}{m^\beta T^\beta} \sum_{j=0}^{m-1} \ln |U((j+1)T, jT)| = \frac{1}{m^\beta T^\beta} \int_0^{mT} P^T(\tau) d\tau^\beta.$$

Следовательно, из (11) вытекает, что

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m^\beta T^\beta} \sum_{j=0}^{m-1} \ln |U((j+1)T, jT)| \geq \Omega(q).$$

Используя лемму 2 и переходя к пределу при $T \rightarrow +\infty$, имеем

$$\Omega^*(q) \geq \Omega(q). \quad (12)$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Используя определение $\Omega(q)$, возьмем $R_q^\varepsilon \in B(P, q)$ такое, что

$$R_q^\varepsilon < \Omega(q) + \varepsilon. \quad (13)$$

В силу леммы 2 $R_q^\varepsilon \in B(P_d, q)$ и в силу леммы 1 выполняется неравенство

$$|U((j+1)T, jT)| \leq D_{R, \varepsilon} e^{\int_{jT}^{(j+1)T} [R_q^\varepsilon(\tau) + \varepsilon] dq(\tau)}. \quad (14)$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{1}{m^\beta T^\beta} \sum_{j=0}^{m-1} \ln |U((j+1)T, jT)| \leq \frac{\ln D_{R, \varepsilon}}{m^{\beta-1} T^\beta} + \frac{1}{m^\beta T^\beta} \int_0^{mT} [R_q^\varepsilon(\tau) + \varepsilon] dq(\tau).$$

Следовательно, устремляя $m \rightarrow +\infty$ и используя (13), имеем

$$\frac{1}{m^{\beta}T^{\beta}} \sum_{j=0}^{m-1} \ln |U((j+1)T, jT)| \leq \Omega(q) + 2\varepsilon.$$

Переходя к пределу при $T \rightarrow +\infty$ и используя лемму 2, получим

$$\Omega^*(q) \leq \Omega(q) + 2\varepsilon.$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем

$$\Omega^*(q) \leq \Omega(q). \quad (15)$$

Из (12) и (15) вытекает требуемое равенство. Теорема доказана.

Цитированная литература

1. **Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.** Теория показателей Ляпунова и ее приложение к вопросам устойчивости. М., 1966.
2. **Миллионщиков В.М.** // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, №8. С. 1344–1356.
3. **Алдибеков Т.М.** // Математический журнал. 2001. Т. 1, №2. С. 10–14.
4. **Алдибеков Т.М.** // Математический журнал. 2003. Т. 3, №1. С. 15–17.

Поступила в редакцию 16.04.2004 г.

УДК 519.6

О РАЗРЕШИМОСТИ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С УСРЕДНЕНИЕМ

М. М. АМАНГАЛИЕВА

Институт математики МОН РК
480100 г.Алматы ул.Пушкина, 125 dzhenali@math.kz

Рассматриваются вопросы сильной разрешимости двух граничных задач для гиперболического уравнения с усреднением.

Введем обозначения $Q_1 = \{x, y, t | 0 < x < 1, 0 < y < 2\pi, 0 < t < T\}$, $Q = \{x, t | 0 < x < 1, 0 < t < T\}$, $T < +\infty$.

Граничная задача 1.

$$Lu \equiv v_{tt}(y, t) - \Delta u(x, y, t) = f(x, y, t), \{x, y, t\} \in Q_1, \quad (1)$$

$$u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0, t) = u(x, 2\pi, t), \quad u_y(x, 0, t) = u_y(x, 2\pi, t), \quad (3)$$

$$v(y, 0) = \varphi_0(y), \quad v_t(y, 0) = \varphi_1(y), \quad (4)$$

где $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $v(y, t) = \int_0^1 u(\xi, y, t) d\xi$. Будем предполагать, что

$$f \in L_2(Q; W_2^1(0, 2\pi)), \quad \varphi_j \in L_2(0, 2\pi), \quad j = 0, 1. \quad (5)$$

Замечание 1. На важность изучения граничных задач для уравнений с усреднением указывалось, например, в [1, с.90].

Определение. Будем называть функцию $u(x, y, t)$ сильным решением граничной задачи (1)–(5), если существует последовательность

$$\{u_n(x, y, t)\}_{n=1}^\infty \subset \tilde{C}^2(Q_1)$$

такая, что

$$1^0. \quad u_n(x, y, t) \rightarrow u(x, y, t) \quad \text{в } L_2(Q_1),$$

Keywords: loaded equation, hyperbolic equation, boundary value problem

2000 Mathematics Subject Classification: 34K06, 35D05, 35L20

© М. М. Амангалиева, 2004.

$$2^0. Lu_n(x, y, t) \rightarrow f(x, y, t) \text{ в } L_2(Q; W_2^1(0, 2\pi)),$$

где $\tilde{C}^2(Q_1) = \{u | u \in C^2(Q_1), u \in C(\bar{Q}; C^1[0, 2\pi]) \text{ и удовлетворяет условиям (2)-(4)}\}$.

Установлена следующая

Теорема 1. При любых f, φ_0, φ_1 , удовлетворяющих условиям (5), задача (1)-(4) имеет единственное сильное решение.

Решение задачи (1)-(4) ищем в виде

$$u(x, y, t) = \sum_{s \in \mathcal{S}} u_s(x, t) e^{isy}, \tag{6}$$

где $\mathcal{S} = \{s | s = 0; \pm 1; \pm 2; \dots\}$.

Для Фурье-коэффициентов $u_s(x, t)$ получим семейство граничных задач

$$L_s u_s \equiv v_s''(t) - u_{sxx}(x, t) + s^2 u_s(x, t) = f_s(x, t), \{x, t\} \in Q, \tag{7}$$

$$u_s(0, t) = u_s(1, t) = 0, \tag{8}$$

$$v_s(0) = \varphi_{0s}, v_s'(0) = \varphi_{1s}, s \in \mathcal{S}, \tag{9}$$

где

$$f(x, y, t) = \sum_{s \in \mathcal{S}} f_s(x, t) e^{isy}, \varphi_0(y) = \sum_{s \in \mathcal{S}} \varphi_{0s} e^{isy}, \varphi_1(y) = \sum_{s \in \mathcal{S}} \varphi_{1s} e^{isy};$$

$$v_s(t) = \int_0^1 u_s(\xi, t) d\xi.$$

Справедливы следующие

Лемма 1. Каждая из задач (7)-(9) имеет единственное регулярное решение, для которого справедливы оценки

$$\|u_s(x, t)\|_{L_2(Q)} \leq K_1 \|s \cdot f_s(x, t)\|_{L_2(Q)} \forall s \in \mathcal{S}, \tag{10}$$

где постоянная K_1 не зависит от s .

Лемма 2. Решение задачи (1)-(4) удовлетворяет априорной оценке

$$\|u(x, y, t)\|_{L_2(Q_1)} \leq K \|f(x, y, t)\|_{L_2(Q; W_2^1(0, 2\pi))}. \tag{11}$$

Для доказательства леммы 1 мы находим следующее представление решения каждой из задач (7)-(9):

$$u_s(x, t) = -\beta(x) v_s''(t) + \int_0^1 G_s(x, \xi) f_x(\xi, t) d\xi, s \in \mathcal{S}, \tag{12}$$

где

$$G_s(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\text{sh}\{s\xi\} \cdot \text{sh}\{s(1-x)\}}{s \cdot \text{sh} s}, & 0 \leq \xi \leq x \leq 1, \\ \frac{\text{sh}\{sx\} \cdot \text{sh}\{s(1-\xi)\}}{s \cdot \text{sh} s}, & 0 \leq x \leq \xi \leq 1, \end{cases} \quad s \in \mathcal{S}, s \neq 0;$$

$$G_0(x, \xi) = \begin{cases} \xi \cdot (1 - x), & 0 \leq \xi \leq x \leq 1, \\ x \cdot (1 - \xi), & 0 \leq x \leq \xi \leq 1; \end{cases}$$

$$\beta_s(x) = \frac{2 \operatorname{sh} \frac{s(1-x)}{2} \cdot \operatorname{sh} \frac{sx}{2}}{s^2 \cdot \operatorname{ch} \frac{s}{2}}, \quad s \in \mathcal{S}, \quad s \neq 0;$$

$$\beta_0(x) = \frac{x(1-x)}{2}.$$

Далее, интегрируя соотношение (12) по x от 0 до 1 и учитывая (7)–(9), получаем задачу Коши

$$\begin{cases} v_s''(t) + \gamma_s^2 \cdot v_s(t) = \gamma_s^2 \cdot g_s(t), & t \in (0, T), \\ v_s(0) = \varphi_{0s}, \quad v_s'(0) = \varphi_{1s}, \end{cases} \quad \forall s \in \mathcal{S}, \quad (13)$$

где

$$\gamma_s^{-2} = \frac{1}{s^2} \left[1 - \frac{2 \operatorname{sh}\{s/2\}}{s \cdot \operatorname{ch}\{s/2\}} \right], \quad s \neq 0; \quad \gamma_0^{-2} = 6;$$

$$g_s(t) = \int_0^1 \int_0^1 G_s(x, \xi) f_s(\xi, t) d\xi dx.$$

Нетрудно заметить, что $\gamma_s^2 > 0 \quad \forall s \in \mathcal{S}$. Решение задачи (13) имеет представление

$$v_s(t) = \varphi_{0s} \cdot \cos \gamma_s t + \varphi_{1s} \cdot \frac{\sin \gamma_s t}{\gamma_s} + \int_0^t \gamma_s \cdot g_s(\tau) \sin \gamma_s(t - \tau) d\tau. \quad (14)$$

На основе (12) и (14) мы получаем представления решений граничных задач (7)–(9) и требуемые оценки (10) из леммы 1. Что касается оценки (11) из леммы 2, то она является следствием оценок (10) и равенства Парсеваля, имеющих место для функций из пространства $L_2(Q_1)$ и их коэффициентов Фурье.

Доказанные оценки из лемм 1 и 2 показывают справедливость утверждения теоремы.

Замечание 2. Одномерный вариант исследуемой задачи для параболического уравнения был рассмотрен в работах [2, 3].

Граничная задача 2.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 u(\xi, t) d\xi = f, \quad \{x, t\} \in Q, \quad (15)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial^j u(x, 0)}{\partial t^j} = \frac{\partial^j u(x, 2\pi)}{\partial t^j}, \quad j = 0, 1, \quad (17)$$

$$\text{где } \alpha, \beta - \text{ заданные постоянные, } f \in L_2(Q) - \text{ заданная функция.} \quad (18)$$

Применяя метод Фурье, будем иметь

$$\begin{cases} -u_s''(x) + \lambda^2 u_s(x) + is\alpha \int_0^1 u_s(\xi) d\xi = f_s(x), \\ u_s(0) = u_s(1) = 0, \quad s \in \mathcal{S}, \end{cases} \quad (19)$$

где $\lambda^2 = -s^2 + is\beta$.

Используя функцию Грина

$$G_s(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} \lambda \xi \cdot \operatorname{sh} \lambda(1-x)}{\lambda \operatorname{sh} \lambda}, & 0 \leq \xi \leq x, \\ \frac{\operatorname{sh} \lambda x \cdot \operatorname{sh} \lambda(1-\xi)}{\lambda \operatorname{sh} \lambda}, & x \leq \xi \leq 1, \end{cases} \quad s \in \mathcal{S}, \quad (20)$$

для $s \neq 0$ получим представление решения задачи (19)

$$u_s(x) = \int_0^1 G_s(x, \xi) f_s(\xi) d\xi - is \cdot \alpha \cdot \Delta_s^{-1} \int_0^1 \gamma_s(\xi) f_s(\xi) d\xi \cdot \gamma_s(x), \quad (21)$$

где

$$\Delta_s = 1 + \frac{is\alpha}{\lambda^2} \left(1 - \frac{2 \operatorname{th}(\lambda/2)}{\lambda} \right) \neq 0 \quad \forall s \in \mathcal{S} \setminus \{0\}, \quad (22)$$

$$\gamma_s(x) = \frac{1}{\lambda^2} \left[1 - \frac{\operatorname{ch}[\lambda(1-2x/2)]}{\operatorname{ch}(\lambda/2)} \right].$$

Для случая $s = 0$ формула решения выписывается достаточно просто.

На основе (21)–(22) и решения $u_0(x)$ мы устанавливаем следующие равномерные по s оценки:

$$\|u_s(x)\|_{L_2(0,1)} \leq C \cdot \|f_s(x)\|_{L_2(0,1)}. \quad (23)$$

Таким образом, используя лемму 1 [4, с.118], мы устанавливаем следующее утверждение.

Теорема 2. *При любых f , удовлетворяющих условиям (18), задача (15)–(17) имеет единственное сильное решение, тогда и только тогда, когда выполнены условия (22).*

Замечание 3. *В уравнении (15) нагрузка может быть представлена в виде усреднения на интервале $(x_1, x_2) \subset (0, 1)$. Такие модели возникают при изучении процессов колебаний токопроводящих стержней под воздействием магнитного поля.*

Цитированная литература

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М., 1995.
2. Дженалиева М.М. // Изв.МОН РК. Сер.физ.-матем. 2000. № 1. С.37–43.
3. Дженалиева М.М. // Изв.МН–АН РК. Сер.физ.-матем. 1996. № 3. С.3–6. 1997. № 1. С.24–32.
4. Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач. М., 1980.

Поступила в редакцию 01.06.2004г.

УДК 532.526

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА С ВДУВАЕМОЙ СТРУЕЙ

А. О. БЕКЕТАЕВА

Институт математики Министерства образования и науки
480100 г. Алматы ул. Пушкина, 125 ked@math.kz

В работе численно моделируется сверхзвуковое течение при наличии перпендикулярного вдува струи через щель на стенке. Исходными являются полные уравнения Навье-Стокса, решение которых производится неявной факторизованной схемой Бима-Уорминга. Для замыкания используется алгебраическая модель турбулентности Болдуина-Ломакса. Задача решается в обобщенных координатах в двумерной постановке. Исследовано влияние основных параметров таких, как нерасчетность и число Маха струи на длину отрывной зоны. Определено влияние числа Маха на увеличение подъемной силы, возникающей при взаимодействии потока с вдуваемой струей. Результаты расчета согласуются с экспериментальными данными.

В последнее время большое внимание уделяется изучению сверхзвуковых течений над обтекаемой поверхностью при наличии на поверхности уступов и струй. Одной из актуальных проблем является создание управляемых усилий на поверхностях летательных аппаратов, обтекаемых сверхзвуковым потоком при инъекции газовых струй с поверхности, с целью увеличения подъемной силы или создания дополнительных сил торможения. Вопросу обтекания препятствий и струй посвящены в основном экспериментальные исследования. Существуют ряд теоретических исследований, в которых численно моделируется поперечный вдув водорода в канале воздушно-реактивных двигателей. Однако, в этих работах в основном производятся тестовые расчеты и практически отсутствует численное исследование влияния важных с практической точки зрения параметров, как числа Маха, нерасчетность на схему течения. В данной работе рассматривается задача о взаимодействии сверхзвукового свободного потока с поперечной струей, вдуваемой через щель на стенке. Схема течения показана на фигуре 1.

П о с т а н о в к а з а д а ч и. Исходной является система полных двумерных уравнений Навье-Стокса для сжимаемого турбулентного газа, записанных в декартовой системе координат, в консервативной форме

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{V}_1(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x)}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}_2(\mathbf{U}, \mathbf{U}_y)}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}_1(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{W}_2(\mathbf{U}, \mathbf{U}_y)}{\partial z}, \quad (1)$$

Keywords: *supersonic flow, Mach number, pressure, jet, boundary layer, shock wave*

2000 Mathematics Subject Classification: 76F40

© А. О. Бекетаева, 2004.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho w \\ E_t \end{bmatrix}; \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho w \\ (E_t + p)u \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho u w \\ \rho w^2 + p \\ (E_t + P)w \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{V}_1 = \frac{1}{Re} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4}{3}\mu_t \frac{\partial u}{\partial x} \\ \mu_t \frac{\partial w}{\partial x} \\ \mu_t w \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{4}{3}\mu_t u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu_t}{(\gamma-1)M_\infty^2 Pr} \frac{\partial T}{\partial x} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{V}_2 = \frac{1}{Re} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3}\mu_t \frac{\partial w}{\partial z} \\ \mu_t \frac{\partial u}{\partial z} \\ \mu_t w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu_t u \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{W}_1 = \frac{1}{Re} \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_t \frac{\partial w}{\partial x} \\ -\frac{2}{3}\mu_t \frac{\partial u}{\partial x} \\ \mu_t u \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu_t w \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{W}_2 = \frac{1}{Re} \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_t \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{4}{3}\mu_t \frac{\partial w}{\partial z} \\ \mu_t u \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{4}{3}\mu_t w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\mu_t}{(\gamma-1)M_\infty^2 Pr} \frac{\partial T}{\partial z} \end{bmatrix};$$

$$p = (\gamma - 1) \left[E_t - \frac{1}{2}(\rho u^2 + \rho w^2) \right]; \quad c_\nu = \frac{1}{\gamma(\gamma-1)M_\infty^2}; \quad T = \left(\frac{1}{\rho c_\nu} \right) \left[E_t - \frac{1}{2}(\rho u^2 + \rho w^2) \right];$$

$$E_t = \frac{P}{(\gamma-1)} + \frac{1}{2}(\rho u^2 + \rho w^2).$$

Здесь t — время, u, w — компоненты скорости потока в продольном и поперечном направлениях, ρ — плотность, p — давление, T — температура, c_ν — теплоемкость при постоянном объеме, γ — показатель адиабаты, M_0 и M_∞ — числа Маха струи и потока, μ_t — коэффициент турбулентности, k — коэффициент теплопроводности, Re — число Рейнольдса, Pr — число Прандтля; здесь индекс ∞ относится к значениям параметров потока, индекс 0 — к значениям параметров струи.

Система уравнений (1) записана в безразмерной форме. В качестве определяющих параметров приняты параметры на входе ($\rho_\infty, u_\infty, T_\infty$), давление и полная энергия отнесены к значению $\rho_\infty u_\infty^2$, характерным размером длины является ширина щели.

Система (1) замкнута с помощью алгебраической модели турбулентности Болдуина-Ломакса. В соответствии с работой [1] коэффициент турбулентной вязкости определяется следующим образом:

вблизи стенки $\mu_t = \rho l^2 |\zeta|$, где $\zeta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$ — завихренность, $l = \chi z [1 - e^{-z^+/A}]$ — длина пути перемещения, $\chi = 0,41$ — постоянная Кармана, $A = 26$, $z^+ = zu_\tau/\nu$ — универсальная переменная, u_τ — динамическая скорость;

вдали от стенки принято $\mu_t = 0,0168\rho V_0 L_0$, где $V_0 = \min[F_{\max}; 0,25q_{dif}^2/F_{\max}]$; $q_{dif} = u_{\max} - u_{\min}$, $L_0 = 1,6z_{\max} I^k$; $F_{\max} = \max(|\zeta|l/\chi)$, $I^k = [1 + 5,5(0,3y/z_{\max})^6]^{-1}$ — ограничивающий множитель Клебанова, z_{\max} соответствует F_{\max} .

Г р а н и ч н ы е у с л о в и я. На входе задаются параметры потока

$$u = 1, \quad w = 0, \quad \rho = 1, \quad T = 1, \quad x = 0, \quad 0 \leq z \leq H;$$

на стенке условие прилипания и теплоизоляции

$$u = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad 0 < x \leq L;$$

на щели задаются параметры струи

$$u = 0 \quad w = \sqrt{T}M_0/M_\infty, \quad \rho = P_0\gamma M_\infty^2/T, \quad P_0 = nP_\infty, \quad z = 0, \quad L_b \leq x \leq L_N;$$

здесь $n = P_0/P_\infty$ — степень нерасчетности, где P_0 — давление в струе, P_∞ — давление потока;

во входном сечении вблизи стенки задается пограничный слой, профиль продольной скорости аппроксимируется степенным законом [2];

на верхней и выходной границе задаются условия неотражения, т.е. краевые условия так называемого отсутствия границы или "свободного полета" [3].

Метод решения. Для более точного учета течения в пограничном слое вблизи стенки и на уровне щели, т.е. в областях больших градиентов, вводится сгущение сетки в продольном и поперечном направлениях с помощью преобразований $\xi = \xi(x)$ $\eta = \eta(z)$.

При этом система (1) в обобщенных координатах запишется так

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}}{\partial \eta} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}_2}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{W}}_1}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{W}}_2}{\partial \eta}, \quad (2)$$

где $\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U}/J$; $\tilde{\mathbf{E}} = \xi_x \mathbf{E}/J$; $\tilde{\mathbf{F}} = \eta_z \mathbf{F}/J$; $\tilde{\mathbf{V}}_1 = \xi_x \mathbf{V}_1/J$; $\tilde{\mathbf{V}}_2 = \xi_x \mathbf{V}_2/J$;

$\tilde{\mathbf{W}}_1 = \eta_z \mathbf{W}_1/J$; $\tilde{\mathbf{W}}_2 = \eta_z \mathbf{W}_2/J$; $\xi_x = z_\eta/|J^{-1}|$; $\eta_z = x_\xi/|J^{-1}|$; $|J^{-1}| = x_\xi z_\eta$;

J — якобиан преобразования.

Численное решение преобразованной системы (2) осуществляется разностным методом Би-ма-Уорминга

$$\tilde{\mathbf{U}}^{n+1} + \Delta t \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}^{n+1}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}^{n+1}}{\partial \eta} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}_1^{n+1}}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}_2^{n+1}}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{W}}_1^{n+1}}{\partial \eta} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{W}}_2^{n+1}}{\partial \eta} \right) = \tilde{\mathbf{U}}^n + O(\Delta t^2), \quad (3)$$

где $\tilde{\mathbf{E}}^{n+1} = \tilde{\mathbf{E}}(\tilde{\mathbf{U}}^{n+1})$; $\tilde{\mathbf{F}}^{n+1} = \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{U}}^{n+1})$ и т.д.

Линейная система уравнений относительно вектора $\tilde{\mathbf{U}}^{n+1}$ получается путем разложения в ряд Тейлора векторов потоков .

$$\tilde{\mathbf{E}}^{n+1} \approx \tilde{A}^n \tilde{\mathbf{U}}^{n+1}, \quad \tilde{\mathbf{F}}^{n+1} \approx \tilde{B}^n \tilde{\mathbf{U}}^{n+1}, \quad (4)$$

где $\tilde{A} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial \tilde{\mathbf{U}}}$; $\tilde{B} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}}{\partial \tilde{\mathbf{U}}}$ — матрицы Якоби; выражения для них даны в работе [4].

Члены, содержащие вторые производные, представляются в виде суммы двух сомножителей

$$\tilde{\mathbf{V}}_1^{n+1} = \tilde{\mathbf{V}}_{11}^{n+1} + \tilde{\mathbf{V}}_{12}^n, \quad \tilde{\mathbf{W}}_2^{n+1} = \tilde{\mathbf{W}}_{21}^{n+1} + \tilde{\mathbf{W}}_{22}^n, \quad (5)$$

где векторы $\tilde{\mathbf{V}}_{11}$ и $\tilde{\mathbf{W}}_{21}$ имеют следующий вид

$$\tilde{\mathbf{V}}_{11} = \frac{\mu_t \xi_x}{ReJ} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u\rho}{\rho} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{w\rho}{\rho} \right) \\ \frac{\gamma}{Pr} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{E_t}{\rho} \right) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{W}}_{21} = \frac{\mu_t \eta_z}{ReJ} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u\rho}{\rho} \right) \\ \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{w\rho}{\rho} \right) \\ \frac{\gamma}{Pr} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{E_t}{\rho} \right) \end{bmatrix},$$

а векторы $\tilde{\mathbf{V}}_{12}$ и $\tilde{\mathbf{W}}_{22}$ содержат оставшиеся диссипативные функции вида

$$\tilde{\mathbf{V}}_{12} = \frac{\xi_x^2}{ReJ} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \left(\mu_t - \frac{\gamma \mu_t}{Pr} \right) \left(w \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + \\ + \left(\frac{4}{3} \mu_t - \frac{\gamma \mu_t}{Pr} \right) u \frac{\partial u}{\partial \xi} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{W}}_{22} = \frac{\eta_z^2}{ReJ} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \left(\mu_t - \frac{\gamma \mu_t}{Pr} \right) \left(u \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \\ + \left(\frac{4}{3} \mu_t - \frac{\gamma \mu_t}{Pr} \right) w \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix}.$$

Для учета векторов потоков со смешанными производными используем аппроксимацию по явной схеме при равномерном шаге по времени

$$\tilde{\mathbf{V}}_2^{n+1} = 2\tilde{\mathbf{V}}_2^n - \tilde{\mathbf{V}}_2^{n-1} + O(\Delta t^2) \quad \tilde{\mathbf{W}}_1^{n+1} = 2\tilde{\mathbf{W}}_1^n - \tilde{\mathbf{W}}_1^{n-1} + O(\Delta t^2). \quad (6)$$

После введения аппроксимации (4)–(6), система (3) запишется следующим образом

$$\begin{aligned} & \left[I + \Delta t \left\{ \frac{\partial \tilde{A}^n}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{B}^n}{\partial \eta} - \frac{\partial \mu_t \xi_x^2}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\tilde{\mathbf{U}}_1} \right) - \frac{\partial \mu_t \eta_z^2}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\tilde{\mathbf{U}}_1} \right) \right\} \right] \tilde{\mathbf{U}}^{n+1} = \\ & = \tilde{\mathbf{U}} + \Delta t \left[2 \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}_2^n}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{W}}_1^n}{\partial \eta} \right) - \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}_2^{n-1}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{W}}_1^{n-1}}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}_{12}^n}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{W}}_{22}^n}{\partial \eta} \right] + O(\Delta t^2). \end{aligned} \quad (7)$$

Применяя факторизацию к системе уравнений (7), получаем два одномерных оператора, решение которых производится матричной прогонкой

1 шаг

$$\left[I + \Delta t \left\{ \frac{\partial \tilde{A}^n}{\partial \xi} - \frac{\partial \mu_t \xi_x^2}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\tilde{\mathbf{U}}_1} \right) \right\} \right] \tilde{\mathbf{U}}^* = RHS,$$

2 шаг

$$\left[I + \Delta t \left\{ \frac{\partial \tilde{B}^n}{\partial \eta} - \frac{\partial \mu_t \eta_z^2}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\tilde{\mathbf{U}}_1} \right) \right\} \right] \tilde{\mathbf{U}}^{n+1} = \tilde{\mathbf{U}}^*, \quad (8)$$

где RHS — правая часть уравнения (7).

Для подавления высокочастотных возмущений в решение (8) вводится сглаживание второго порядка с ε -коэффициентом при сглаживающих членах.

При аппроксимации производных в конвективных и диффузионных членах использованы центрально-разностные операторы со вторым порядком точности.

А н а л и з р е з у л ь т а т о в. Параметры преобразования координат имели следующий вид [5]

$$\xi = D + \frac{1}{\tau} \operatorname{arsh}[(x/x_c - 1) \operatorname{sh}(\tau D)], \quad \text{где } D = \frac{1}{2\tau} \ln[(1 + (e^\tau - 1)x_c/L)],$$

$$\eta = H \left[(\beta + 1) - (\beta - 1) \left(\frac{\beta + 1}{\beta - 1} \right)^{1 - \frac{z}{a}} \right] / \left[\left(\frac{\beta + 1}{\beta - 1} \right)^{1 - \frac{z}{a}} + 1 \right],$$

где β , $\tau > 1$ — параметры сгущения, a — высота расчетной области в обобщенных координатах, x_c — точка, относительно которой производится сгущение.

На рисунках 2–4 приводятся некоторые результаты численного расчета задачи с параметрами $M_\infty = 4$, $n = 4 \div 10$ для различных значений числа Маха струи.

Перед струей вследствие торможения набегающего потока повышается давление и происходит образование головного скачка уплотнения. Взаимодействие головного скачка уплотнения с пограничным слоем и наличие встречного градиента давления вызывают отрыв пограничного слоя перед струей. Зависимость длины отрывной зоны от нерасчетности показана на фигуре 2 для вдува звуковой струи при $M_\infty = 3$, $\operatorname{Pr} = 0.9$, $Re = 10^7$ (кривая 1 — численный расчет длины отрывной зоны l_s для $M_0 = 1$, кривая 2 — для $M_0 = 1.5$, “ Δ ” — экспериментальные исследования в пространственном случае в работе [6]). Из графика видно, что в качественном отношении численные результаты зависимости длины отрывной зоны l_s от нерасчетности

соответствуют эксперименту. В количественном же отношении значение длины отрывной зоны в плоском случае больше, чем в пространственном, что объясняется отсутствием бокового растекания.

Участок высоких давлений перед струей достаточно хорошо виден из распределения давления на стенке, приведенного на фигуре 3 для двух значений числа Маха струи при $n = 10$ (кривая 1 — $M_0 = 1$, кривая 2 — $M_0 = 2$). Там же наблюдается дополнительный максимум давлений непосредственно перед щелью, который некоторые авторы связывают с ошибкой вычисления. Однако, он может быть результатом наличия в отрывной области второго вихря, расположенного ближе к струе. На графике отражено увеличение давления на стенке с ростом числа Маха струи (сравнение кривых 1 и 2).

Подъемная сила определяется из распределения давления на стенке по формуле $F = \int_{l_s} (P - P_\infty) dl_s$. На фигуре 4 представлена кривая изменения силы взаимодействия в зависимости от числа Маха струи. Так, при увеличении числа Маха струи с $M_0 = 1$ до $M_0 = 2$ для случая с нерасчетностью $n = 10$ сила взаимодействия увеличивается в 1.58 раз, в то время как для нерасчетности $n = 4$ подъемная сила изменяется лишь в 1.32 раза.

Цитированная литература

1. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т.2. М., 1991.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., 1974.
3. Thompson Kevin W. // Journal of Comput. Physics. 1987. V. 68. P.1–24.
4. Бим Р.М., Уорминг Р.Ф. // Ракетная техника и космонавтика. 1978. Т.16, № 4. С.145–156.
5. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т.1. Т.2. М., 1990.
6. Глаголев А.И., Зубков А.И., Панов Ю.А. // Известия АН СССР МЖГ. 1967. №3. С.97–102.

Поступила в редакцию 30.12.2003г.

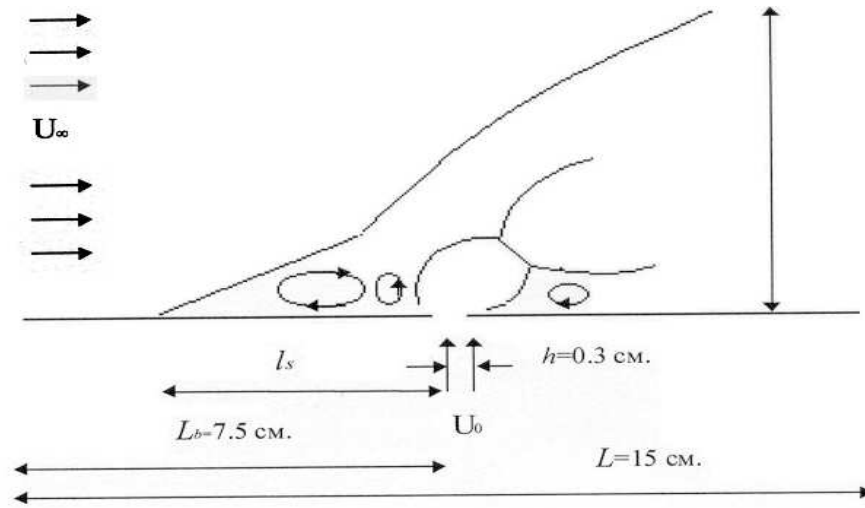


Рис.1

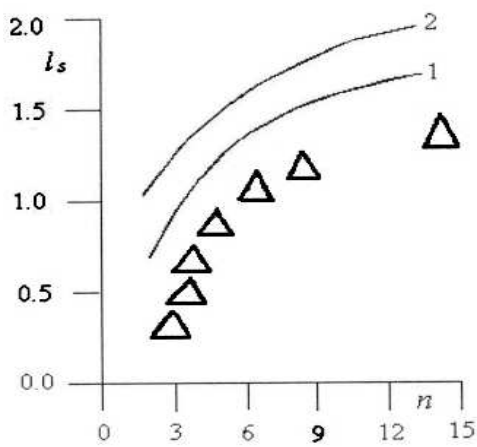


Рис.2

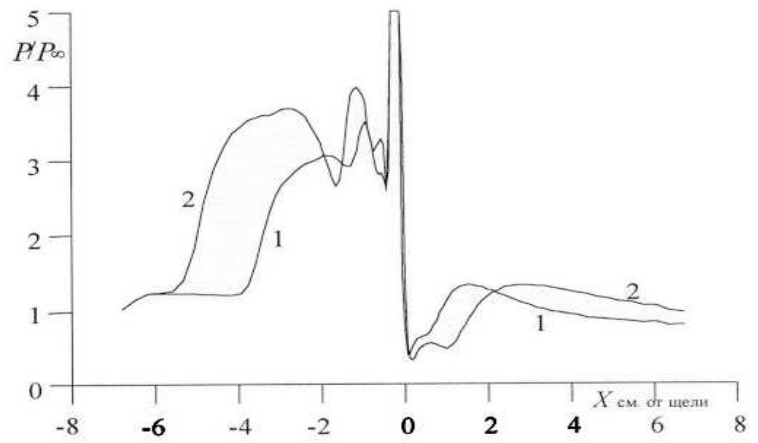


Рис.3

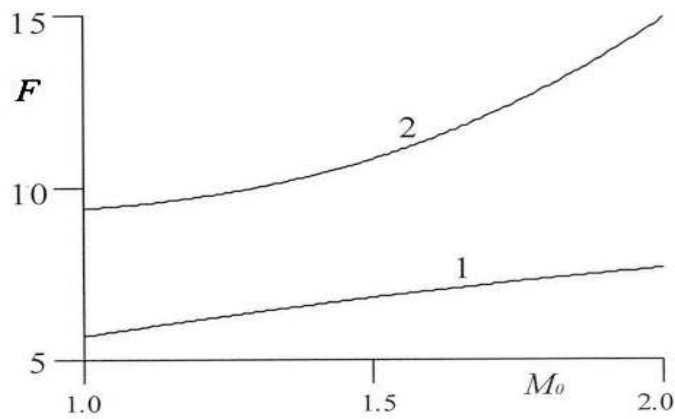


Рис.4

УДК 517.95

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ "СУЩЕСТВЕННО" НАГРУЖЕННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

М. Т. ДЖЕНАЛИЕВ, М. И. РАМАЗАНОВ

Институт математики МОН РК
480100 г.Алматы ул.Пушкина, 125 dzhenali@math.kz

В данной работе изучаются две задачи: первая — это установление размерности ядра оператора задачи Коши для одномерного по пространственной переменной уравнения теплопроводности с нагрузкой при фиксированной временной переменной; вторая — это вопросы сильной однозначной разрешимости задачи Коши для вышеназванного уравнения.

Нагруженным уравнениям посвящены многие работы, отметим лишь [1, 2]. Особенностью рассматриваемых здесь задач является наличие нагруженного слагаемого с производной от искомого решения более высокого порядка, чем в главной дифференциальной части уравнения. Такие нагрузки называются "существенными" [3]. Отметим, что в [3] рассматривались граничные задачи только в ограниченных областях.

И. З а д а ч а 1. Рассматривается следующая однородная задача Коши

$$Lu = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) + \alpha \frac{\partial^k u(x, \bar{t})}{\partial t^k} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1)$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$, $\bar{t} \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ — заданные величины, $k = 0, 1, 2, \dots$

Применяя преобразование Фурье по переменной x , из (1) для Фурье-образа $U(s, t)$ получаем

$$U'(s, t) + s^2 U(s, t) + \alpha U^{(k)}(s, \bar{t}) = 0, \quad U(s, 0) = 0, \quad (2)$$

где s — (вещественная) переменная преобразования Фурье. Из (2) непосредственно следует справедливость утверждения

Предложение 1. Для того, чтобы задача Коши (1) имела только тривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы $\forall s \in \mathbb{R}$ были выполнены условия

$$0 \neq \Delta_k(s) = \begin{cases} 1 + \alpha \frac{1 - e^{-s^2 \bar{t}}}{s^2}, & \text{если } k = 0, \\ 1 + (-1)^{k+1} \alpha s^{2(k-1)} e^{-s^2 \bar{t}}, & \text{если } k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (3)$$

Keywords: Loaded equation, parabolic equation, Cauchy Problem

2000 Mathematics Subject Classification: 34K06, 35D05, 35K05

© М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов, 2004.

Обсудим условия (3).

1. Пусть $k = 0$. В этом случае условие (3) может быть записано в следующем виде

$$\varphi_0(s) \equiv \frac{1 - e^{-s^2\bar{t}}}{s^2} \neq -\frac{1}{\alpha}. \tag{4}$$

Максимальное и минимальное значения функции $\varphi_0(s)$, $s \in \mathbb{R}$ соответственно равны $\varphi_{0\max} = \bar{t}$, $\varphi_{0\inf} = 0$, т.е. имеем, что $\forall s \in \mathbb{R} \quad 0 < \varphi_0(s) \leq \bar{t} = \lim_{s \rightarrow 0} \varphi_0(s)$.

Последние неравенства позволяют получить утверждения, которые представлены в таблице.

Таблица 1.

		$\dim\{\text{Ker } L\}$	условие (4)
1.	$\text{Im } \alpha \neq 0$	0	не нарушается
2.	$\text{Im } \alpha = 0$		
	a) $\alpha > -\bar{t}^{-1}$	0	не нарушается
	b) $\alpha = -\bar{t}^{-1}$	1	нарушается в единственной точке $s = 0$
	c) $\alpha < -\bar{t}^{-1}$	2	нарушается в 2-х точках $s = \pm s_1$

Из Таблицы 1 следует, что если $\alpha \in \mathbb{C}$ такое, что $\{\text{Im } \alpha \neq 0\} \cup \{\text{Im } \alpha = 0, \alpha > -\bar{t}^{-1}\}$, то задача (1) не имеет нетривиального решения. Если $\{\text{Im } \alpha = 0, \alpha = -\bar{t}^{-1}\}$, то задача (1) имеет ровно одно нетривиальное решение; если же $\{\text{Im } \alpha = 0, \alpha < -\bar{t}^{-1}\}$, то задача (1) имеет два нетривиальных линейно независимых решения.

2. Пусть $k = 1$. В этом случае условие (3) записывается в виде

$$\varphi_1(s) \equiv e^{-s^2\bar{t}} \neq -\frac{1}{\alpha}. \tag{5}$$

Максимальное и минимальное значения функции $\varphi_1(s)$, $s \in \mathbb{R}$ соответственно равны $\varphi_{1\max} = \varphi_1(0) = 1$, $\varphi_{1\inf} = 0$, т.е. имеем, что $\forall s \in \mathbb{R} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi_1(s) = 0 < \varphi_1(s) \leq 1$.

Полученное сведем в таблицу.

Таблица 2.

		$\dim\{\text{Ker } L\}$	условие (5)
1.	$\text{Im } \alpha \neq 0$	0	не нарушается
2.	$\text{Im } \alpha = 0$		
	a) $\alpha > -1$	0	не нарушается
	b) $\alpha = -1$	1	нарушается в единственной точке $s = 0$
	c) $\alpha < -1$	2	нарушается в 2-х точках $s = \pm s_1$

Результаты Таблицы 2 означают, что если $\alpha \in \mathbb{C}$ такое, что $\{\text{Im } \alpha \neq 0\} \cup \{\text{Im } \alpha = 0, \alpha > -1\}$, то задача (1) не имеет нетривиального решения. Если $\{\text{Im } \alpha = 0, \alpha = -1\}$, то задача (1) имеет ровно одно нетривиальное решение; если же $\{\text{Im } \alpha = 0, \alpha < -1\}$, то задача (1) имеет два нетривиальных линейно независимых решения.

3. Пусть $k = 2m$, $m = 1, 2, \dots$ В этом случае условие (3) принимает вид

$$\varphi_{2m}(s) \equiv s^{2(2m-1)} e^{-s^2 \bar{t}} \neq \frac{1}{\alpha}. \quad (6)$$

Максимальное и минимальное значения функции $\varphi_{2m}(s)$, $s \in \mathbb{R}$ соответственно равны $\varphi_{2m \max} = [(2m-1)/(\bar{t}e)]^{2m-1}$, $\varphi_{2m \inf} = 0$, т.е. имеем, что $\forall s \in \mathbb{R} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi_{2m}(s) = 0 < \varphi_{2m}(s) \leq [(2m-1)/(\bar{t}e)]^{2m-1}$.

Отсюда непосредственно следует

Таблица 3.

		$\dim\{\text{Ker } L\}$	условие (6)
1.	$\text{Im } \alpha \neq 0$	0	не нарушается
2.	$\text{Im } \alpha = 0$		
	a) $\alpha < [(2m-1)/(\bar{t}e)]^{2m-1}$	0	не нарушается
	b) $\alpha = [(2m-1)/(\bar{t}e)]^{2m-1}$	2	нарушается в 2-х точках $s = \pm s_0$
	c) $\alpha > [(2m-1)/(\bar{t}e)]^{2m-1}$	4	нарушается в 4-х точках $s = \pm s_1, s = \pm s_2$

Итак, данные Таблицы 3 показывают, что если $\alpha \in \mathbb{C}$ такое, что $\{\text{Im } \alpha \neq 0\} \cup \{\text{Im } \alpha = 0, \alpha < [(2m-1)/(\bar{t}e)]^{2m-1}\}$, то задача (1) не имеет нетривиального решения. Если $\{\text{Im } \alpha = 0, \alpha = [(2m-1)/(\bar{t}e)]^{2m-1}\}$, то задача (1) имеет два нетривиальных линейно независимых решения; если же $\{\text{Im } \alpha = 0, \alpha > [(2m-1)/(\bar{t}e)]^{2m-1}\}$, то задача (1) имеет четыре нетривиальных линейно независимых решения.

4. Пусть $k = 2m + 1$, $m = 1, 2, \dots$ В этом случае условие (3) может быть записано в виде

$$\varphi_{2m+1}(s) \equiv s^{4m} e^{-s^2 \bar{t}} \neq -\frac{1}{\alpha}. \quad (7)$$

Максимальное и минимальное значения функции $\varphi_{2m+1}(s)$, $s \in \mathbb{R}$, соответственно равны $\varphi_{2m+1 \max} = [2m/(\bar{t}e)]^{2m}$, $\varphi_{2m+1 \inf} = 0$, т.е. имеем, что $\forall s \in \mathbb{R} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi_{2m+1}(s) = 0 < \varphi_{2m+1}(s) \leq [2m/(\bar{t}e)]^{2m}$.

Отсюда непосредственно следует

Таблица 4.

		$\dim\{\text{Ker } L\}$	условие (7)
1.	$\text{Im } \alpha \neq 0$	0	не нарушается
2.	$\text{Im } \alpha = 0$		
	a) $\alpha > -[2m/(\bar{t}e)]^{2m}$	0	не нарушается
	b) $\alpha = -[2m/(\bar{t}e)]^{2m}$	2	нарушается в 2-х точках $s = \pm s_0$
	c) $\alpha < -[2m/(\bar{t}e)]^{2m}$	4	нарушается в 4-х точках $s = \pm s_1, s = \pm s_2$

Таким образом, результаты Таблицы 4 означают, что если $\alpha \in \mathbb{C}$ такое, что $\{\text{Im } \alpha \neq 0\} \cup \{\text{Im } \alpha = 0, \alpha > -[2m/(\bar{t}e)]^{2m}\}$, то задача (1) не имеет нетривиального решения. Если $\{\text{Im } \alpha = 0, \alpha = -[2m/(\bar{t}e)]^{2m}\}$, то задача (1) имеет два нетривиальных линейно независимых решения; если же $\{\text{Im } \alpha = 0, \alpha < -[2m/(\bar{t}e)]^{2m}\}$, то задача (1) имеет четыре нетривиальных линейно независимых решения.

5. О нетривиальных решениях задачи (1). Если $\{\alpha, \bar{t}\}$ заданы согласно таблиц 1–4, то соответствующие им нетривиальные решения задачи (1) определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} u_{(s=0)}(x, t) &= \alpha \cdot t, \\ u_{(s=\pm s_j)}(x, t) &= \frac{\alpha}{s_j^2} \left(1 - e^{-s_j^2 t}\right) e^{\pm i s_j x}, \quad j = 0, 1, 2, \\ \frac{\partial^k u(x, \bar{t})}{\partial t^k} &= e^{i \bar{s} x}, \end{aligned} \tag{8}$$

где вещественные числа $\bar{s} = \{0, \pm s_0, \pm s_1, \pm s_2\}$ являются соответствующими корнями уравнений

$$\begin{aligned} 1 + \alpha \frac{1 - e^{-s^2 \bar{t}}}{s^2} &= 0, & \text{если } k = 0, \\ 1 + (-1)^{k+1} \alpha s^{2(k-1)} e^{-s^2 \bar{t}} &= 0, & \text{если } k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Заметим, что ни одна из функций (8) не принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. Это означает, что в пространстве $L_2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ ядро оператора L (1) нульмерно. Однако, каждая из функций (8) принадлежит пространству с весом

$$L_{2, e^{-\varepsilon t}} \equiv \{v | v(x, t) \cdot e^{-\varepsilon t} \in L_2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) \quad \forall \varepsilon > 0\}, \tag{9}$$

т.е. ядро оператора L (1) в пространстве $L_{2, e^{-\varepsilon t}}$ не всегда пусто и имеет соответствующую размерность согласно данным таблиц 1–4.

II. Задача 2. Рассматривается следующая неоднородная задача Коши

$$Lu = \{f, \phi\} \Leftrightarrow \begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) + \alpha \frac{\partial^k u(x, \bar{t})}{\partial t^k} = f(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{10}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\bar{t} \in \mathbb{R}_+$ — заданные величины, $k = 0, 1, 2, \dots$,

$$f \in W_{2,0}^k(\mathbb{R}_+; L_2(\mathbb{R})), \quad \phi \in L_2(\mathbb{R}). \tag{11}$$

Здесь 0 в обозначении пространства означает, что $\frac{\partial^m f(x, 0)}{\partial t^m} = 0$, $m = 0, 1, \dots, k - 1$.

Дадим следующее

Определение. Функцию $u(x, t) \in L_{2, e^{-\varepsilon t}}$ будем называть *сильным решением задачи Коши (10)*, если существует последовательность

$$\{u_n(x, t), n = 1, 2, \dots\} \subset \{v | v \in L_{2, e^{-\varepsilon t}}, v(x, 0) = \phi(x)\}$$

такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) \rightarrow u(x, t) \text{ в пространстве } L_{2, e^{-\varepsilon t}}$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^k [Lu_n](x, t)}{\partial t^k} \rightarrow \frac{\partial^k f(x, t)}{\partial t^k} \text{ в пространстве } L_2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+).$$

Применяя преобразование Фурье по переменной x , из (10) будем иметь

$$\begin{cases} U'(s, t) + s^2 U(s, t) + \alpha U^{(k)}(s, \bar{t}) = F(s, t), \\ U(s, 0) = \Phi(s), \end{cases} \quad (12)$$

где $F(s, t)$, $\Phi(s)$ — образы Фурье для функций $f(x, t)$, $\phi(x)$ соответственно. При выполнении условий (3) Предложения 1, интегрируя уравнение (12), получим следующее представление единственного решения задачи Коши (12)

$$\begin{aligned} U(s, t) = & -\Delta_k^{-1} \alpha \frac{1 - e^{-s^2 t}}{s^2} \left[(-1)^k s^{2k} \Phi(s) e^{-s^2 \bar{t}} + (-1)^k s^{2k} \int_0^{\bar{t}} F(s, \tau) e^{-s^2(\bar{t}-\tau)} d\tau + \right. \\ & \left. + \sum_{m=1}^{k-1} (-1)^{m-1} s^{2(m-1)} F^{(m-1)}(s, \bar{t}) \right] + \Phi(s) e^{-s^2 t} + \int_0^t F(s, \tau) e^{-s^2(t-\tau)} d\tau, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\Delta_k(s)$ определено в (3). Из (13) видим, что $U(t, s)$ удовлетворяет следующей равномерной по s априорной оценке

$$\|U(s, t) e^{-\varepsilon t}\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leq C \left[|\Phi(s)| + \sum_{m=0}^k \|F^{(m)}(s, t)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \right], \quad (14)$$

где постоянная C не зависит от s , $\varepsilon > 0$. Из оценки (14), используя равенство Парсеваля, получим

$$\|u(x, t) e^{-\varepsilon t}\|_{L_2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)} \leq C \left[\|\phi(x)\|_{L_2(\mathbb{R})} + \|f(x, t)\|_{L_2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)} + \|f^{(k)}(x, t)\|_{L_2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)} \right]. \quad (15)$$

На основе оценки (15) устанавливаем справедливость следующего утверждения.

Предложение 2. *Задача Коши (10) при любых $\{f, \phi\}$, удовлетворяющих условиям (11), однозначно сильно разрешима в пространстве $L_{2, e^{-\varepsilon t}}$ (9) тогда и только тогда, когда выполнены условия (3).*

Замечание 1. *Таким образом, классом сильных решений задачи Коши (10) является пространство с весом $L_{2, e^{-\varepsilon t}}$ (9).*

Цитированная литература

1. **Нахушев А.М.** Уравнения математической биологии. М., 1995.
2. **Дженалиев М.Т.** К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы, 1995.
3. **Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.** // Матер. межд. Российско-Казахского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы современного анализа и информатики". Нальчик, 2004. С.62–65.

Поступила в редакцию 01.06.2004г.

УДК 539.3

УРАВНЕНИЕ ДИАГРАММЫ "НАГРУЗКА-ДЕФОРМАЦИЯ"

А. Б. ЖАКЫПБЕКОВ, Т. Б. ДУЙШЕНАЛИЕВ

Кыргызский государственный университет строительства, транспорта и архитектуры
Кыргызский технический университет им.И. Раззакова
720044 Кыргызская Республика г.Бишкек duishenaliev@mail.ru

В данной работе диаграмма "нагрузка-деформация" рассмотрена без гипотезы об одноосном напряженном состоянии при растяжении (сжатии) цилиндрических образцов. Выведено уравнение диаграммы, которое дает толкование, отличное от общепринятого. При этом меняется процедура определения констант материалов Ламе, что фактически расширяет область действия закона Гука на всю область деформирования образцов. Приводится сопоставление расчетов с опытными данными, полученными разными авторами, которые показывают хорошую точность предлагаемых уравнений.

В механике деформируемого твердого тела диаграмме "нагрузка-деформация" отведена основополагающая роль. Диаграмма принята здесь как определяемый опытом физический закон между напряжением и деформацией, лежащий в основе построения математических моделей различных деформируемых твердых тел. Как известно, тангенс угла наклона начального линейного участка диаграммы служит для определения модуля Юнга материала. Вместе с определяемым также из опытов на "одноосное" сжатие цилиндрических образцов коэффициентом Пуассона они позволяют определить константы Ламе в обобщенном законе Гука, линейно связывающем коэффициенты напряжений и деформаций изотропных упругих тел. При этом существенным фактом при толковании этой диаграммы является гипотеза о равномерном распределении нагрузки на торцах при сжатии и растяжении образцов.

1. О б о б щ е н н ы й з а к о н Г у к а. Опираясь на современные представления о молекулярном строении тел, Ц.Борн, Хуань Кунь [1] в 1958 г. вывели соотношения

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}, \quad (1)$$

где $\sigma_{i,j}, \varepsilon_{kl}$ — компоненты, соответственно, напряжения и деформации, c_{ijkl} — константы. Этот закон для изотропных тел имеет вид:

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}. \quad (2)$$

Keywords: *Deformation, force, stress, generalized Hooke's law, load-deformation diagram, Young's modulus, Poisson's ration, Lamé's constant*

2000 Mathematics Subject Classification: 74B20

© А. Б. Жакыпбеков, Т. Б. Дуйшеналиев, 2004.

Напишем закон (2) в цилиндрических координатах

$$\begin{aligned}\varepsilon_r(r, z, t) &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu(\sigma_\varphi + \sigma_z)), \\ \varepsilon_\varphi(r, z, t) &= \frac{1}{E}(\sigma_\varphi - \nu(\sigma_z + \sigma_r)), \\ \varepsilon_z(r, z, t) &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\varphi)).\end{aligned}\quad (2a)$$

Непосредственная опытная проверка закона (2) невозможна, ибо ε_{ij} , σ_{ij} не измеряемы ни в одной точке внутри тела, а на поверхности тела измеряются не все компоненты деформации ε_{ij} . Компоненты напряжения σ_{ij} на поверхности тела не измеряются.

2. Краевая задача для проверки обобщенного закона Гук а. Состоятельность закона (2a) обычно проверяют на величинах, измеряемых в опытах на осевое растяжение и сжатие цилиндрических образцов. Ими являются величина осевой нагрузки, а также величины кольцевой и осевой деформаций на контуре центрального поперечного сечения образца в различные моменты времени. Напишем их в виде векторов, которые далее будем называть *экспериментальными*

$$p = \frac{P(t_1)}{\pi R^2}, \frac{P(t_2)}{\pi R^2}, \dots, \frac{P(t_n)}{\pi R^2}, \quad (3)$$

$$\sigma_r = \sigma_r(R, z, t_1), \sigma_r(R, z, t_2), \dots, \sigma_r(R, z, t_n),$$

$$\varepsilon_\varphi = \varepsilon_\varphi(R, 0, t_1), \varepsilon_\varphi(R, 0, t_2), \dots, \varepsilon_\varphi(R, 0, t_n),$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_z(R, 0, t_1), \varepsilon_z(R, 0, t_2), \dots, \varepsilon_z(R, 0, t_n),$$

где $\sigma_r(R, z, t) = 0$ при осевом растяжении и сжатии, а в трехосном сжатии равно величине гидростатического бокового давления. Вырежем среднюю часть образца (радиуса R и высотой $2h$). Начало цилиндрической системы координат поместим в середине центрального поперечного сечения. Эти испытания представляют собой процесс с изменяющимися во времени величинами нагрузки, деформаций и напряжений. Составим краевую задачу в напряжениях: уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \quad (4)$$

уравнения совместности деформаций в напряжениях

$$\begin{aligned}\nabla^2 \sigma_r - \frac{2}{r^2}(\sigma_r - \sigma_\varphi) + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} + \frac{\rho}{E} \frac{\nu}{1 - \nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} &= 0, \\ \nabla^2 \sigma_\varphi + \frac{2}{r^2}(\sigma_r - \sigma_\varphi) + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial \sigma}{r \partial r} + \frac{\rho}{E} \frac{\nu}{1 - \nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} &= 0, \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} + \frac{\rho}{E} \frac{\nu}{1 - \nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} &= 0, \quad \nabla^2 \sigma_{rz} - \frac{1}{r^2} \sigma_{rz} + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r \partial z} &= 0,\end{aligned}\quad (5)$$

где

$$\nabla^2 = \Delta^2 - \frac{\rho}{E} 2\nu \frac{\partial^2}{\partial r^2}, \quad \Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \sigma = \sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z,$$

u, w — радиальное и осевое перемещения.

Граничные условия на боковой поверхности и основаниях цилиндра:

$$\sigma_r(R, z, t) = 0, \quad \sigma_{rz}(R, z, t) = 0, \quad \sigma_z(r, \pm h, t) = p_z(r, t), \quad \sigma_{zr}(r, \pm h, t) = p_r(r, t). \quad (6)$$

Начальные условия в момент времени $t = 0$ имеют нулевые значения:

$$u(r, z, 0) = 0, \quad w(r, z, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(r, z, 0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial w(r, z, 0)}{\partial t} = 0. \quad (7)$$

Отметим здесь следующее равенство. Пусть $P(t)$ — вся осевая нагрузка. Тогда при любом распределении внешних осевых усилий $p_z(r, t)$ на основаниях цилиндра имеет место равенство

$$P(t) = \int_0^R \int_0^{2\pi} p_z(r, t) r dr d\varphi. \quad (6a)$$

Допустим, эта краевая задача решена, т.е. найдены функции

$$\sigma_r(r, z, t), \quad \sigma_{rz}(r, z, t), \quad \sigma_\varphi(r, z, t), \quad \sigma_z(r, z, t), \quad u(r, z, t), \quad w(r, z, t), \quad (8)$$

удовлетворяющие уравнениям (4)–(7). Решение (8) позволяет аналитически определить величину нагрузки и величины деформаций в любой момент времени:

$$P(t) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma_z(r, 0, t) r dr d\varphi, \quad \varepsilon_r(r, z, t) = \frac{1}{E} \sigma_r(r, z, t) - \nu(\sigma_\varphi(r, z, t) + \sigma_z(r, z, t)), \quad (9)$$

$$\varepsilon_\varphi(r, z, t) = \frac{1}{E} \sigma_\varphi(r, z, t) - \nu(\sigma_z(r, z, t) + \sigma_r(r, z, t)),$$

$$\varepsilon_z(r, z, t) = \frac{1}{E} \sigma_z(r, z, t) - \nu(\sigma_r(r, z, t) + \sigma_\varphi(r, z, t)).$$

Подставляя в нижеследующие выражения

$$P(t) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma_z(r, 0, t) r dr dz, \quad \varepsilon_\varphi(R, 0, t) = \frac{1}{E} \sigma_\varphi(R, 0, t) - \nu(\sigma_z(R, 0, t) + \sigma_r(R, 0, t)), \quad (10)$$

$$\varepsilon_z(R, 0, t) = \frac{1}{E} \sigma_z(R, 0, t) - \nu(\sigma_r(R, 0, t) + \sigma_\varphi(R, 0, t))$$

те моменты времени, при которых проведены замеры элементов векторов (3), вычислим аналитические аналоги этих векторов. Назовем их *теоретическими векторами*. Сравнение величин элементов экспериментальных и теоретических векторов дало бы то или иное суждение о состоятельности закона (2а). Но этого нельзя осуществить из-за отсутствия решения задачи (4)–(7). В ней функции внешних усилий $p_r(r, t), p_z(r, t)$ неизвестны.

3. Упрощение краевой задачи Гук-Сен-Венана. Обычно, в краевой задаче (4)–(7) убирается время, а граничные условия (6), опираясь на суженный и общий принципы Сен-Венана, представляются в виде

$$p_r(r) = 0, \quad p_z(r) = \frac{P}{\pi R^2}. \quad (11)$$

После этих упрощений задача (4)–(7) превращается в статическую задачу с уравнениями равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0, \quad (12)$$

совместности деформаций

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_r - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\varphi) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} &= 0, \\ \nabla^2 \sigma_\varphi + \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\varphi) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial \sigma}{r \partial r} &= 0, \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} = 0, \quad \nabla^2 \sigma_{rz} - \frac{1}{r^2} \sigma_{rz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r \partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\nabla^2 = \Delta^2 - \frac{\rho}{E} 2\nu \frac{\partial^2}{\partial r^2}, \quad \Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \sigma = \sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z,$$

и с граничными условиями

$$\sigma_r(R, z) = 0, \quad \sigma_{rz}(R, z) = 0, \quad \sigma_{zr}(r, \pm h) = 0, \quad \sigma_z(r, \pm h) = p_z(r) = \frac{P}{\pi R^2}. \quad (14)$$

Решение задачи (12)–(14) труда не представляет. Оно очевидно:

$$\sigma_r(r, z) = 0, \quad \sigma_{rz}(r, z) = 0, \quad \sigma_\varphi(r, z) = 0, \quad \sigma_z(r, z) = \frac{P}{\pi R^2}. \quad (15)$$

Из этого решения следует обычный критерий

$$\varepsilon_r(r, z) = -\frac{\nu}{E} \frac{P}{\pi R^2}, \quad \varepsilon_\varphi(r, z) = -\frac{\nu}{E} \frac{P}{\pi R^2}, \quad \varepsilon_z(r, z) = \frac{1}{E} \frac{P}{\pi R^2}. \quad (16)$$

На основе этого критерия:

1. определение констант проводится по формулам

$$E = \frac{P}{\pi R^2 \cdot \varepsilon_z}, \quad \nu = -\frac{\varepsilon_\varphi}{\varepsilon_z}; \quad (17)$$

2. отклонение опытных точек от прямых линий (16) принимается как отклонение от обобщенного закона Гука;
3. диаграмма нагрузка-деформация принимается как определенный опытами физический закон механики деформируемого тела.

Зачастую обобщенный закон Гука отождествляется с соотношениями (16). Это неверно, поскольку это не эквивалентные соотношения. При любом другом виде распределения усилий $p_z(r)$ в граничных условиях (14) выражения (15) не являются решением краевой задачи (12)–(14). В связи с этим соотношения (15) назовем *соотношениями Гука-Сен Венана*. Отклонение опытных точек на диаграмме "нагрузка-деформация" от соотношений (16) будем рассматривать как отклонение от соотношений Гука-Сен Венана, а не как отклонение от обобщенного закона Гука. Покажем далее, что эта диаграмма имеет простое описание.

4. Новый критерий для проверки состоятельности обобщенного закона Гука. Осевое растяжение (сжатие) образцов является

процессом с изменяющимися во времени величинами нагрузки, напряжений и деформаций. Проинтегрируем второе из уравнений движения (4) по верхней половине образца

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h \left(\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} \right) r dr d\varphi dz = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} r dr d\varphi dz. \quad (18)$$

Перепишем это выражение в виде

$$\int_0^{2\pi} \int_0^h d\varphi dz \int_0^R \frac{\partial (r\sigma_{zr})}{\partial r} dr + \int_0^R \int_0^{2\pi} r dr d\varphi \int_0^h \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} r dr d\varphi dz.$$

Здесь первый интеграл равен нулю в силу последнего из условий (6). Учитывая во втором интеграле представление (6а), приходим к следующему уравнению

$$P(t) = 2\pi \int_0^R \sigma_z(r, 0, t) dr + \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} r dr d\varphi dz.$$

По обобщенному закону Гука

$$\sigma_z(r, 0, t) = \lambda \left(\frac{\partial u(r, 0, t)}{\partial r} + \frac{u(r, 0, t)}{r} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w(r, 0, t)}{\partial z}.$$

Подставив это выражение в предыдущее, имеем

$$P(t) = \pi R^2 \left(\frac{\lambda(\lambda + 2\mu)}{R^2} \int_0^R \frac{\partial w(r, 0, t)}{\partial z} r dr + 2\lambda \frac{u(R, 0, t)}{R} \right) + \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} r dr d\varphi dz.$$

Из-за симметрии нагрузки $w(r, 0, t) = 0$, в силу непрерывности и при значениях z , близких к нулю, зависимость этой функции от r должна быть очень слабой, что позволяет сделать приближение

$$\frac{\partial w(r, 0, t)}{\partial z} = \frac{\partial w(R, 0, t)}{\partial z} = \varepsilon_z(R, 0, t).$$

Теперь предыдущее выражение приводится к виду

$$\varepsilon_z(R, 0, t) = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{P(t)}{\pi R^2} - 2\lambda \varepsilon_\varphi(R, 0, t) \right) - \frac{1}{(\lambda + 2\mu) \pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} r dr d\varphi dz.$$

Величина последнего слагаемого в несколько тысяч раз меньше величин деформаций, если даже все материальные точки рассматриваемого объема имеют ускорение $1m/sec^2$ [2]. В виду этого последнее выражение без ущемления его точности можно представить в виде

$$\varepsilon_z(R, 0, t) = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{P(t)}{\pi R^2} - 2\lambda \varepsilon_\varphi(R, 0, t) \right). \quad (19)$$

Уравнение (19) назовем критерием Жакыпбека для проверки состоятельности обобщенного закона Гука. Этот критерий дает новое толкование диаграмме нагрузка-деформация (рис.1).

5. Изучение опытных данных на основе критерия Жакыпбека. Определение констант. Константы определим методом наименьших квадратов. Отклонение опытных данных от уравнения (19) представим в виде

$$\delta_i = 2\lambda \varepsilon_{\varphi_i} + (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{z1} - p_i.$$

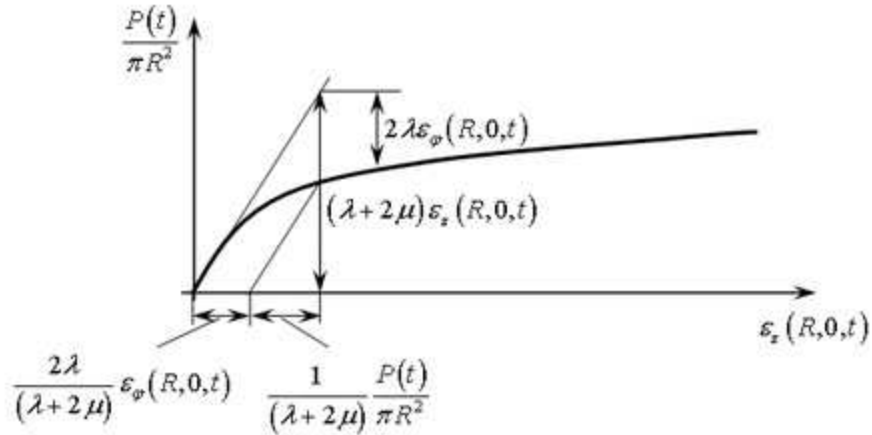


Рис. 1: Новое толкование диаграммы нагрузка-деформация (угловой коэффициент наклонных прямых равен $\lambda + 2\mu$).

Сумма квадратов отклонений равна

$$\delta_i \delta_i = (2\lambda \varepsilon_{\varphi_i} + (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{z_1} - p_i) \cdot (2\lambda \varepsilon_{\varphi_i} + (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{z_1} - p_i).$$

Константы должны иметь такие величины, при которых сумма квадратов будет минимальной

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\delta_i \delta_i)}{\partial (2\lambda)} &= (2\lambda \varepsilon_{\varphi_i} + (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{z_1} - p_i) \cdot \varepsilon_{\varphi_i} = 0, \\ \frac{\partial (\delta_i \delta_i)}{\partial (\lambda + 2\mu)} &= (2\lambda \varepsilon_{\varphi_i} + (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{z_1} - p_i) \cdot \varepsilon_{z_1} = 0. \end{aligned}$$

Запишем эти уравнения в виде

$$\varepsilon_{\varphi_i} \varepsilon_{\varphi_i} 2\lambda + \varepsilon_{z_1} \varepsilon_{\varphi_i} (\lambda + 2\mu) = p_i \varepsilon_{\varphi_i},$$

$$\varepsilon_{\varphi_i} \varepsilon_{z_1} 2\lambda + \varepsilon_{z_1} \varepsilon_{z_1} (\lambda + 2\mu) = p_i \varepsilon_{z_1}.$$

Здесь для определения двух констант имеются два уравнения, которые в матричной форме имеют вид

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{\varphi_i} \varepsilon_{z_1} & \varepsilon_{z_1} \varepsilon_{\varphi_i} \\ \varepsilon_{\varphi_i} \varepsilon_{z_1} & \varepsilon_{z_1} \varepsilon_{z_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\lambda \\ \lambda + 2\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_i \varepsilon_{\varphi_i} \\ p_i \varepsilon_{z_1} \end{pmatrix}.$$

Умножение обеих частей этого уравнения на обратную матрицу определяет искомые константы. Здесь в системе MathCad такое определение проводится следующими операторами

$$\varepsilon = \text{stack}(\varepsilon_{\varphi}, \varepsilon_z), \quad c = (\varepsilon \cdot \varepsilon^T)^{-1} \cdot \varepsilon \cdot p^T, \quad \lambda = \frac{c_0}{2}, \quad \mu = \frac{c_1 - \lambda}{2}, \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (20)$$

Определение радиальной деформации и напряжений на контуре центрального поперечного сечения цилиндра. То, что излагается в этом разделе, имеет только предположительный характер. Из граничного условия на боковой поверхности цилиндра теперь можно определить

радиальную деформацию в виде

$$\varepsilon_r(R, 0, t) = \frac{1}{\lambda + 2\mu} (\sigma_r(R, 0, t) - \lambda(\varepsilon_\varphi(R, 0, t) + \varepsilon_z(R, 0, t))), \quad (21)$$

а также расчетные величины осевой деформации (для сравнения с опытными ее величинами)

$$\varepsilon_{zc}(R, 0, t) = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{P(t)}{\pi R^2} - 2\lambda\varepsilon_\varphi(R, 0, t) \right). \quad (22)$$

Далее вычисляются кольцевое и осевое напряжения в точках контура поперечного сечения

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi(R, 0, t) &= \lambda\varepsilon_r(R, 0, t) + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_\varphi(R, 0, t) + \lambda\varepsilon_z(R, 0, t), \\ \sigma_z(R, 0, t) &= \lambda\varepsilon_r(R, 0, t) + \lambda\varepsilon_\varphi(R, 0, t) + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_z(R, 0, t). \end{aligned} \quad (23)$$

Обратимся к опытным данным, полученным Жуковым А.М. при испытаниях стали 30 и алюминия [3], которые широко используются в учебной и специальной литературе. Опытные данные указаны в столбцах 1, 3, 4, 6 таблиц 1, 2 (усилия в kgf/mm^2).

Сначала определим константы операторами (20). В столбцах 2, 5, 7, 8 этих таблиц приведены определенные уравнениями (21), (22), (23) расчетные величины $\varepsilon_r(R, 0, t)$, $\varepsilon_{zc}(R, 0, t)$, $\sigma_\varphi(R, 0, t)$, $\sigma_z(R, 0, t)$. Отметим, что константы имеют одни и те же величины на всех уровнях деформирования.

Таблица 1. **Сталь 30:** $\lambda = 4,309 \cdot 10^5$, $\mu = 1,38 \cdot 10^3$, $E = 4,096 \cdot 10^3$, $\nu = 0,484$

	$p_j \cdot 10^{-3}$	$\varepsilon_{r_j} \cdot 10^3$	$\varepsilon_{\varphi_j} \cdot 10^3$	$\varepsilon_{z_j} \cdot 10^3$	$\varepsilon_{zc_j} \cdot 10^3$	$\sigma_{r_j} \cdot 10^{-3}$	$\sigma_{\varphi_j} \cdot 10^{-3}$	$\sigma_{z_j} \cdot 10^{-3}$
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	10	-0,31	-0,13	0,47	0,47	0	0,49	2,16
3	15	-0,46	-0,20	0,7	0,7	0	0,72	3,22
4	20	-0,62	-0,27	0,94	0,94	0	0,97	4,32
5	25	-0,87	-0,38	1,31	1,26	0	1,36	6,02
6	30	-0,93	-0,42	1,41	1,44	0	1,40	6,45
7	32	-1,06	-0,46	1,6	1,57	0	1,66	7,36
8	33	-2,81	-2,6	5,6	5,62	0	0,60	23,23
9	35	-3,68	-3,6	7,52	7,54	0	0,23	30,91
10	38,4	-4,96	-5,12	10,4	10,46	0	-0,43	42,38
11	41,6	-7,12	-7,52	15,1	15,04	0	-1,09	61,32

При сравнении опытная $\varepsilon_z(R, 0, t)$ и расчетная $\varepsilon_z(R, 0, t)$ величины осевой деформации очень мало отличаются друг от друга. Такое же совпадение обнаруживается и для других материалов. В этом может убедиться каждый, написав свои или известные ему опытные данные в виде векторов (3) и определяя константы операторами (20).



Рис. 2: Диаграммы: нагрузка-деформация, деформация, напряжение-деформация (сталь 30).

Таблица 2. **Алюминий:** $\lambda = 1,232 \cdot 10^4$, $\mu = 487,256$, $E = 1,443 \cdot 10^3$, $\nu = 0,481$

	$p_j \cdot 10^{-3}$	$\varepsilon_{rj} \cdot 10^3$	$\varepsilon_{\varphi j} \cdot 10^3$	$\varepsilon_{zj} \cdot 10^3$	$\varepsilon_{zsj} \cdot 10^3$	$\sigma_{rj} \cdot 10^{-3}$	$\sigma_{\varphi j} \cdot 10^{-3}$	$\sigma_{zj} \cdot 10^{-3}$
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	3	-0,269	-0,13	0,42	0,467	0	1,135	0,671
3	4,5	-0,403	-0,195	0,63	0,7	0	0,203	1,007
4	6	-0,537	-0,26	0,84	0,933	0	0,27	1,342
5	7,5	-0,964	-0,46	1,5	1,417	0	0,491	2,401
6	8	-1,019	-0,5	1,6	1,528	0	0,506	2,553
7	9	-1,909	-1,7	3,76	3,82	0	0,204	5,525
8	10,5	-4,819	-5,2	10,4	10,427	0	-0,3710	14,831
9	12	-9,082	-10,4	20,2	20,178	0	-1,285	28,536

На рисунках 2, 3 показаны диаграммы "нагрузка-деформация" $(\varepsilon_z(R, 0, t), \frac{P}{\pi R^2})$ и "напряжение-деформация" $\varepsilon_z(R, 0, t), \sigma_z(R, 0, t)$. Как видим, эти диаграммы отличаются друг от друга.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Из таблиц 1, 2 следует, что напряженное состояние, вообще говоря, не одноосно ($\sigma_z(R, 0, t) \neq 0$) за исключением одной точки диаграммы "нагрузка-деформация". Эта точка расположена на пересечении диаграмм "нагрузка-деформация" и "напряжение-деформация". Здесь

$$\sigma_{\varphi}(R, 0, t) = 0, \quad \sigma_z(R, 0, t) = \frac{P(t)}{\pi R^2}, \quad \varepsilon_r(R, 0, t) = \varepsilon_{\varphi}(R, 0, t).$$

Соотношения Гука-Сен Венана имеют силу только в этой точке диаграммы. Здесь вычисления по уравнениям (17) дают те величины констант, которые определены ранее методом наименьших квадратов операторами (20).



Рис. 3: Диаграммы: "нагрузка-напряжение-деформация" (алюминий).

В таблице 3 даны величины $\varepsilon_\varphi(R, 0, t)$, $\varepsilon_z(R, 0, t)$, $\sigma_z(R, 0, t)$, $\frac{P(t)}{\pi R^2}$, соответствующие точке одноосности напряженного состояния.

Таблица 3.

1	2	3	4	5	6	7	8
Обозначение	$\varepsilon_\varphi(R, 0, t_n)$	$\varepsilon_z(R, 0, t_n)$	$\frac{P(t)}{\pi R^2}$	E	ν	E	ν
Сталь 30	-0,0043	0,009076	37,13	4091	0,485	4096	0,484
Алюминий	-0,0032	0,006716	9,668	1439	0,481	1443	0,481

Комментарии к таблице 3. В столбцах 2,3,4 приведены координаты точки одноосности. В столбцах 5 и 6 даны значения E и ν , определенные по показателям точки одноосности. В столбцах 7 и 8 даны значения E и ν , определенные из Критерия Жакыпбека.

6. О характере распределения деформаций и напряжений во внутренних точках цилиндра. Отметим, что на центральном поперечном сечении с очень малой погрешностью величину осевой деформации можно принять постоянной и равной $\frac{\partial w(r,0,t)}{\partial z} = \varepsilon_z(R, 0, t)$. Поясним это. Функция $w(r, z, t)$ из-за симметрии нагрузок при $z = 0$ не зависит от r , т.е. $w(r, 0, t) = 0$ (центральное поперечное сечение остается плоским). Тут можно полагать, что и при значениях, близких к нулю, функция $w(r, z, t)$ очень мало зависит от r , что позволяет сделать указанное выше представление. Таким образом, для центрального поперечного сечения осевое напряжение можно представить в виде

$$\sigma_z(r, 0, t) = \lambda \left(\frac{\partial u(r, 0, t)}{\partial r} + \frac{u(r, 0, t)}{r} \right) + (\lambda + 2\mu) \varepsilon_z(R, 0, t). \quad (24)$$

Из таблиц 1 и 2 видно, что вычисленные по формуле (21) величины радиальной деформации не равны величинам кольцевой деформации. Такое же неравенство обнаруживается и в опытах

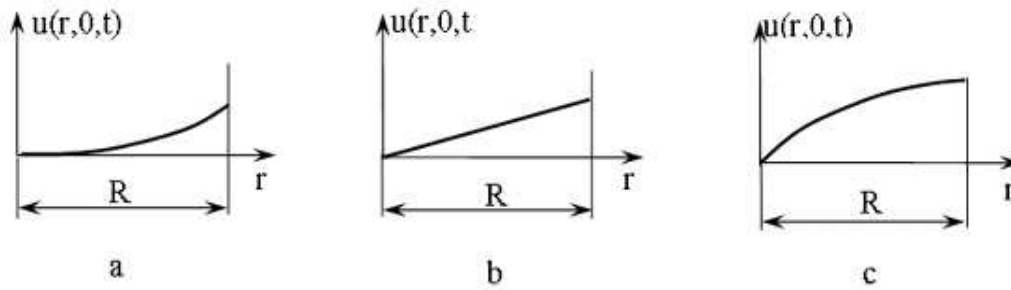


Рис. 4: Изменения функции радиального перемещения в процессе нагружения.

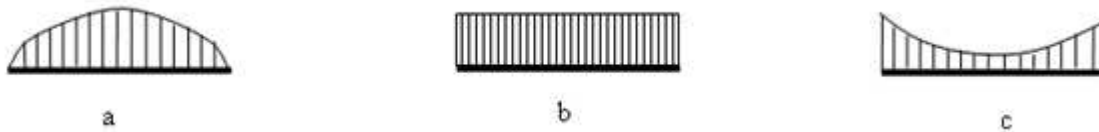


Рис. 5: Характер распределения осевого напряжения в процессе деформирования.

на осевое сжатие. Имея в виду такие опыты, приведем некоторые соображения о характере распределения осевых напряжений на поперечном сечении. В начальной части диаграммы имеет место неравенство $\varepsilon_r(R, 0, t) > \varepsilon_\varphi(R, 0, t)$. Преимущественное развитие радиальных деформаций в этой стадии — это то, что и должно происходить. Деформирование за боковую грань не имеет такого препятствия, какое встречает деформирование в кольцевом направлении. Предположим, что это неравенство сохраняется и во внутренних точках, т.е. $\frac{\partial u(r, 0, t)}{\partial r} > \frac{u(r, 0, t)}{r}$. Умножив обе части этого неравенства на r и продифференцировав по r , приходим к неравенству $\frac{\partial^2 u(r, 0, t)}{\partial r^2} > 0$ (знак неравенства здесь сохранен, что является также предположением). Неравенство говорит о том, что в этой стадии деформирования функция $u(r, 0, t)$ — вогнутая кверху кривая (рис. 4а). Для такой кривой сумма в круглой скобке правой части уравнения (24) возрастает с ростом r , что ведет к уменьшению величины осевого напряжения. В этой стадии распределение $\sigma_z(r, 0, t)$ имеет характер, указанный на рис. 5а. Далее наступает момент, когда $\varepsilon_r(R, 0, t) = \varepsilon_\varphi(R, 0, t)$. Если такое же равенство имеется и во внутренних точках, то $\frac{\partial u(r, 0, t)}{\partial r} = \frac{u(r, 0, t)}{r}$. Последнее имеет место, если функция $u(r, 0, t)$ прямолинейна (рис. 4б). Здесь сумма в круглой скобке правой части уравнения (24) постоянна, следовательно, постоянно и $\sigma_z(r, 0, t)$ (рис. 5б).

За точкой одноосности напряженного состояния $\varepsilon_r(R, 0, t) < \varepsilon_\varphi(R, 0, t)$. В этой стадии, видимо, усиливается выдавливающее действие внутренних частей тела, которые стремятся к расширению. Если такое неравенство имеет место и во внутренних точках, то $\frac{\partial u(r, 0, t)}{\partial r} < \frac{u(r, 0, t)}{r}$. Умножив обе части этого неравенства на r и продифференцировав по r , приходим к неравенству $\frac{\partial^2 u(r, 0, t)}{\partial r^2} < 0$. Неравенство говорит о том, что в этой стадии деформирования функция $u(r, 0, t)$ — вогнутая книзу кривая (рис. 4с). Для такой кривой сумма в круглой скобке правой части уравнения (24) убывает с ростом r , что ведет к возрастанию величины осевого напряжения. В этой стадии распределение $\sigma_z(r, 0, t)$ имеет характер, указанный на рис. 5с.

Еще раз отметим, что выводы, сделанные в этом разделе, являются предположительными.

7. Другие возможности нового критерия.

Используя замеренные (3) и определенные уравнениями (21), (23) величины деформаций

и напряжений, можно вычислить касательные напряжения $\tau(R, 0, t)$ и деформации сдвига $\gamma(R, 0, t)$ на октаэдрической площадке. Нанеся их на плоскость $\tau(R, 0, t)$, $\gamma(R, 0, t)$, видим, что они располагаются на прямой линии с угловым коэффициентом 2μ , что и предусматривается обобщенным законом Гука.

Уравнение (19) универсально. Оно сохраняет свой вид и при наличии бокового гидростатического давления. Математические операции, проведенные между выражениями (18) и (19), несколько не изменятся и при наличии такого давления. В виду этого уравнение должно описывать результаты испытаний материалов на трехосное сжатие. Разумеется, тут величины бокового давления должны быть внесены в выражения (3) и (21).

В табл. 4 приведены расчеты, сделанные на основе нового критерия (опыты Ставрогина А.Н. [4]). Здесь напряжения исчисляются в kg/cm^2 . В столбцах 4 и 5 размещены опытные и вычисленные уравнением (19) величины осевой деформации. Как видим, они близки.

Таблица 4. **Алевролит:** $\lambda = 2,615 \cdot 10^5$, $\mu = 9,05810^4$, $E = 2,484 \cdot 10^5$, $\nu = 0,371$.

	$p_j \cdot 10^{-3}$	$\varepsilon_{r_j} \cdot 10^3$	$\varepsilon_{\varphi_j} \cdot 10^3$	$\varepsilon_{z_j} \cdot 10^3$	$\varepsilon_{z_{c_j}} \cdot 10^3$	$\sigma_{r_j} \cdot 10^{-3}$	$\sigma_{\varphi_j} \cdot 10^{-3}$
1	0	0	0	0	0	0	0
2	-0,5	0,591	0,36	-1,36	-1,555	0	-0,042
3	-1,0	1,362	0,545	-2,850	-2,903	0	-0,148
4	-1,5	2,003	1,140	-4,530	-4,735	0	-0,156
5	-1,809	2,103	2,800	-6,360	-7,395	0	0,126
6	-1,0	0,943	0,230	-2,270	-2,531	-0,116	-0,245
7	-2,0	2,019	0,455	-4,760	-5,055	-0,232	-0,515
8	-3,0	3,249	1,270	-8,1	-8,277	-0,348	-0,707
9	-3,784	3,995	3,150	-11,590	-12,270	-0,439	-0,592
10	-2,0	1,612	-0,364	-4,1	-4,088	-0,454	-0,812
11	-4,0	3,183	-0,220	-8,640	-8,776	-0,908	-1,525
12	-5,0	4,018	0,000	-11,140	-11,294	-1,135	-1,863
13	-6,0	4,985	0,454	-14,100	-14,090	-1,362	-2,183
14	-7,0	5,562	0,910	-16,4	-16,887	-1,589	-2,432
15	-8,0	6,638	1,820	-20,0	-20,222	-1,816	-2,689
16	-9,0	7,898	3,360	-24,540	-24,300	-2,043	-2,865
17	-10,0	9,158	5,820	-30,0	-29,466	-2,270	-2,875
18	-10,340	9,468	6,9	-31,9	-31,510	-2,347	-2,812

На рис. 6 на октаэдрическую плоскость нанесены опытные и рассчитанные по обобщенному закону Гука величины октаэдрического касательного напряжения, полученные при трехосном сжатии алевролита.

Величины второго вектора (3) можно следящей системой подбирать так, чтобы вектор ε_{φ} имел нулевые элементы. Уравнение (19) здесь имеет вид $\varepsilon_z(R, 0, t) = \frac{1}{\lambda+2\mu} \frac{P(t)}{\pi R^2}$. Диаграмма "нагрузка-деформация" прямолинейна, что подтверждается опытными данными. Если же фиксируется не нулевая, а какая-то другая величина $\varepsilon_{\varphi}(R, 0, t_n) = c$ (следящая система не допускает дальнейшего бокового расширения образца), уравнение (19) при $t > t_n$ имеет вид $\varepsilon_z(R, 0, t) = \frac{1}{\lambda+2\mu} \left(\frac{P(t)}{\pi R^2} - 2\lambda c \right)$. Предусматриваемое этим уравнением выпрямление дальнейшей части диаграммы "нагрузка-деформация" подтверждается опытами.

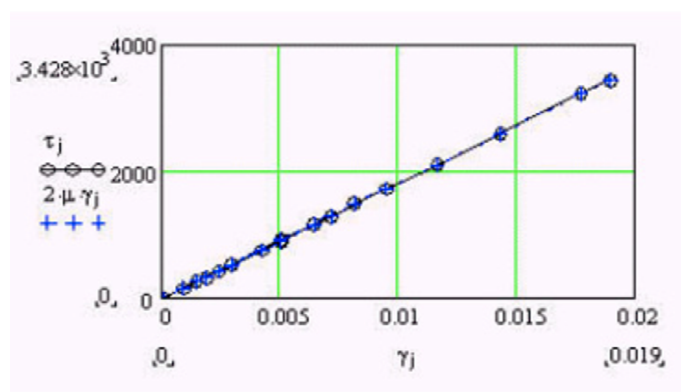


Рис. 6: Расположения опытных (кружочки) и теоретических (крестики) величин на октаэдрической площадке.

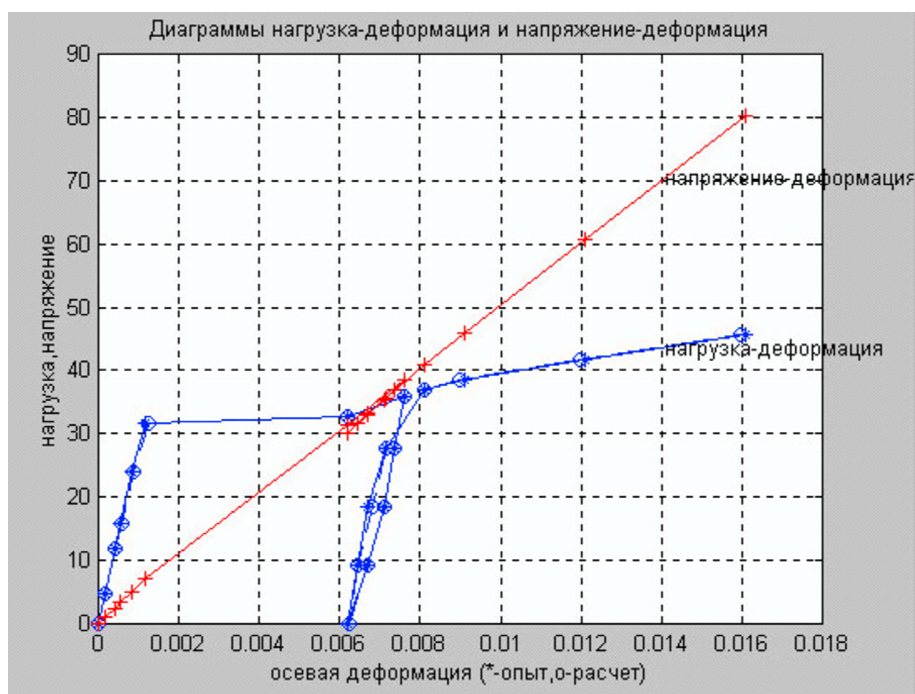


Рис. 7: Диаграммы: "нагрузка-деформация" и "напряжение-деформация" стали 3.

Критерий Жакыпбека хорошо описывает и результаты опытов с ветвями разгрузок. В табл. 5 приведено сравнение уравнения (19) с результатами испытания стали 3. Размерность напряжений — kg/mm^2 . Отметим, и здесь выведенное уравнение диаграммы с удивительной точностью прослеживает экспериментальные данные (рис. 7).

Таблица 5. **Сталь 3:** $\lambda = 3,576 \cdot 10^5$, $\mu = 1,654 \cdot 10^4$, $E = 4,888 \cdot 10^5$, $\nu = 0,478$.

	$p_j \cdot 10^{-3}$	$\varepsilon_{r_j} \cdot 10^3$	$\varepsilon_{\varphi_j} \cdot 10^3$	$\varepsilon_{z_j} \cdot 10^3$	$\varepsilon_{z_{c_j}} \cdot 10^3$	$\sigma_{r_j} \cdot 10^{-3}$	$\sigma_{\varphi_j} \cdot 10^{-3}$	$\sigma_{z_j} \cdot 10^{-3}$
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-4,820	0,124	0,031	-0,166	-0,180	0	-0,306	-0,958
3	-11,910	0,303	0,065	-0,396	-0,424	0	-0,787	-2,312
4	-15,9	0,421	0,095	-0,555	-0,581	0	-1,078	-3,228
5	-23,910	0,633	0,154	-0,846	-0,894	0	-1,586	-4,893
6	-31,790	0,872	0,230	-1,183	-1,235	0	-2,124	-6,798
7	-32,610	2,984	2,940	-6,200	-6,217	0	-0,145	-30,375
8	-36,0	3,616	3,670	-7,620	-7,640	0	0,180	-37,160
9	-27,760	3,387	3,650	-7,350	-7,393	0	0,871	-35,510
10	-18,500	3,167	3,640	-7,100	7,137	0	1,564	-33,957
11	-9,250	2,902	3,530	-6,7	-6,699	0	2,078	-31,756
12	0,000	2,563	3,410	-6,210	-6,243	0	2,802	-29,015
13	-9,250	2,773	3,410	-6,440	-6,479	0	2,105	-30,472
14	-18,5	2,957	3,480	-6,710	-6,844	0	1,731	-31,971
15	-27,760	3,286	3,540	-7,130	-7,191	0	0,840	-34,450
16	-37,01	3,817	3,930	-8,100	-8,142	0	0,374	-39,414
17	-38,41	4,311	4,390	-9,100	-9,020	0	0,261	-44,356
18	-41,6	5,611	5,970	-12,100	-11,994	0	1,187	-58,577
19	-45,62	7,304	8,120	-16,100	-16,033	0	2,698	-77,407

Как видно из двенадцатой строки таблицы при снятии нагрузки в рассматриваемой точке остаются деформации и напряжения. При разгрузке $P(t) = 0$, и уравнение (19) превращается в следующее соотношение между осевой и кольцевой деформациями:

$$\varepsilon_z(R, 0, t) = -\frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} \varepsilon_{\varphi}(R, 0, t). \quad (25)$$

Как известно, при снятии нагрузки процесс деформирования не прекращается. Есть такие понятия и явления, как упругие остаточные деформации и упругое последствие. Возможно, эти явления обусловлены процессом выравнивания напряженного состояния на поперечном сечении цилиндра. Если при этом кольцевая деформация уменьшается до нуля, образец восстанавливает начальную форму. Если же она уменьшается только до какого-то значения, то выражение (25) дает соотношение между остаточными деформациями. Как отмечает Жуков А.М. [3], остаточная осевая деформация почти в два раза больше кольцевой деформации, что согласуется с уравнением (25).

8. Заключение. Нелинейность диаграмм "нагрузка-деформация" должна обсуждаться как отклонение от соотношений Гука-Сен Венана (16), а не от обобщенного закона Гука (2а). Обобщенный закон Гука, освобожденный от бремени принципа Сен Венана, как показано выше, прекрасно описывает поведение тела на всем протяжении диаграмм.

Цитированная литература

1. **Борн М., Хуань Кунь.** Динамическая теория кристаллических решеток. М., 1958.
2. **Жакыпбек А.Б., Дуйшеналиев Т.Б.** Новое воззрение на некоторые основы механики деформируемого тела. Бишкек, 1999.
3. **Жуков А.М.** // Известия АН СССР, № 12. 1954.
4. **Ставрогин А.Н., Протосеня А.Г.** Пластичность горных пород. М., 1981.

Поступила в редакцию 15.03.2004г.

УДК 517.956

К СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Т.Ш.КАЛЬМЕНОВ, С.Т.АХМЕТОВА, А.Ш.ШАЛДАНБАЕВ

Южно - Казахстанский государственный университет
486050 г.Шымкент проспект Тауке - хана, 5 biblioteka@ukgu.kz

Исследованы спектральные свойства дифференциальных операторов с отклоняющимися аргументами. Результаты применяются к задаче Штурма-Лиувилля с дополнительным условием.

В работе Х.Виландта [1] указаны достаточные условия, обеспечивающие справедливость для рассматриваемого самосопряженного, вообще говоря, неограниченного оператора A теории Гильберта-Шмидта (существование собственного значения, разложение по Фурье для Af , формула Шмидта для решения уравнения $f - \lambda Af = g$, экстремальные свойства). Интерес к установлению такого рода условий, как указывает Виландт [1], возникает в связи с тем, что существуют задачи о собственных значениях, к которым теория Гильберта-Шмидта, развитая для вполне непрерывных эрмитовых операторов, не прилагается (например, самосопряженные граничные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений $My = \lambda Ny$). Результат Виландта [1] можно применить к последней задаче лишь в случае, когда M — оператор тождественного преобразования.

В связи с этим в работе [2] рассмотрен более широкий класс операторов и указаны легко проверяемые условия, обеспечивающие для таких операторов справедливость теории Гильберта-Шмидта. Из теоремы этой работы следует полный анализ задачи для дифференциального уравнения $My = \lambda Ny$ и, кроме того, ряд новых результатов, которые нельзя получить из теоремы Виландта [1].

Результат Х.Виландта [1] установлен с помощью методов теории аналитических функций, а результаты Д.Ф.Харазова получены вариационным методом, обычным для гильбертовых пространств.

Пусть X — линейное комплексное пространство, в котором задано скалярное произведение (f, g) , определяющее полуопределенную метрику

$$(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f, h) + \beta(g, h), \quad (g, f) = \overline{(f, g)}, \quad (f, f) \geq 0,$$

Keywords: *spectral theory, Sturm-Liouville problem, deflecting argument*

2000 Mathematics Subject Classification: 35L20

© Т.Ш.Кальменов, С.Т.Ахметова, А.Ш.Шалданбаев, 2004.

где $f, g, h \in X$, α, β — произвольные комплексные числа, X — вообще говоря, неполное пространство.

Рассмотрим линейный оператор A (аддитивный и однородный, вообще говоря, неограниченный) в X , симметризуемый линейным (вообще говоря, неограниченным) положительным оператором H :

$$(Hx, x) \geq 0, \quad (HAx, y) = (x, HAy), \quad x, y \in X.$$

Теорема 1. (Д.Ф.Харазов). Если: 1) спектр оператора A не содержит никаких точек, кроме, возможно, множества собственных значений конечной кратности, не имеющего предельных точек на конечном расстоянии; 2) $HA \neq 0$; 3) для любого собственного элемента x уравнения

$$x - \lambda Ax = 0 \tag{1}$$

$(Hx, x) \neq 0$, то для оператора A справедлива теория Гильберта-Шмидта:

- 1) существует по крайней мере одно собственное значение;
- 2) все собственные значения вещественны, а собственные элементы x_i и x_k , соответствующие различным собственным значениям, удовлетворяют условию $(Hx_k, x_i) = 0$;
- 3) множество собственных значений $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots |\lambda_n| \leq \dots$, которым соответствуют собственные элементы $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, нормированные условиями $(Hx_i, x_k) = \delta_{ik}$, обладает следующими элементарными свойствами: на множестве элементов $x \in X$, удовлетворяющих условиям $(Hx, x) = 1$, $(Hx_k, x) = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$), абсолютное значение функционала (HAx, x) достигает на элементе $x = x_n$ максимума, равного $\frac{1}{|\lambda_n|}$ ($n = 1, 2, \dots$);
- 4) для любого элемента $f \in X$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, Hx_k)}{\lambda_k} Hx_k$ сходится слабо к HAf ; этот ряд сходится по норме к HAf в X , если H — ограниченный в X оператор;
- 5) если λ не есть собственное значение, то для единственного решения x уравнения $x - \lambda Ax = y$ при любом $y \in X$ справедлива формула Шмидта

$$Hx = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(y, Hx_k)}{\lambda_k - \lambda} Hx_k + Hy,$$

где ряд сходится слабо в X ; этот ряд сходится по норме в X , если H — ограниченный в X оператор.

Заметим, что положительность оператора H этой теоремы вызвана потребностью вариационного метода, а не сутью проблемы. Спрашивается, что будет, если оператор H окажется знакопеременным.

В настоящей работе мы даем ответ на этот вопрос в менее общем, но более конкретном случае.

Пусть $H = L_2(0, \pi)$ — гильбертово пространство комплекснозначных функций, заданных на отрезке $[0, \pi]$. S — автоморфизм этого пространства, определенный формулой

$$Su(x) = u(\pi - x), \tag{2}$$

где $u(x)$ — элемент пространства $L_2(0, \pi)$. Тогда операторы $P = \frac{I-S}{2}$, $Q = \frac{I+S}{2}$ являются проекторами и имеет место разложение

$$H = PH \oplus QH \tag{3}$$

всего пространства H на ортогональную сумму двух подпространств. Оператор S имеет разные знаки в этих подпространствах

$$(SPf, Pf) = \left(\frac{S - S^2}{2} f, Pf \right) = \left(\frac{S - I}{2} f, Pf \right) = (-Pf, Pf) = -\|Pf\|^2;$$

$$(SQf, Qf) = \left(\frac{S+S^2}{2}f, Pf \right) = \left(\frac{S+I}{2}f, Pf \right) = (Pf, Pf) = \|Pf\|^2.$$

В качестве второго оператора возьмем оператор дифференцирования

$$A = \frac{d}{dx}, \quad D(K) = \{y(x) \in W_2^1, \quad \alpha y(0) + \beta y(\pi) = 0\}, \quad (4)$$

где α, β — комплексные числа, причем $|\alpha| + |\beta| \neq 0$.

Какими спектральными свойствами обладает оператор SA ? Каково влияние оператора S на спектральные свойства исходного оператора?

Рассмотрим спектральную задачу

$$Sy' = \lambda y(x), \quad (5)$$

$$\alpha y(0) + \beta y(\pi) = 0, \quad (6)$$

где $|\alpha| + |\beta| \neq 0$.

Принимая во внимание равенство $S^2 = I$ и действуя оператором S на равенство (5), получим следующую обобщенную спектральную задачу

$$y' = \lambda y(\pi - x), \quad (7)$$

$$\alpha y(0) + \beta y(\pi) = 0. \quad (8)$$

Продифференцировав равенство (7), имеем

$$y'' = -\lambda y'(\pi - x) = -\lambda^2 y(x). \quad (9)$$

Полагая $x = \pi$, затем $x = 0$, из равенства (7) получим $y'(\pi) = \lambda y(0)$, $y'(0) = \lambda y(\pi)$. Из этих равенств получим второе граничное условие

$$\alpha y'(\pi) + \beta y'(0) = 0. \quad (10)$$

Таким образом, спектральная задача (7)–(8) эквивалентна следующей задаче

$$-y'' = \lambda^2 y(x), \quad (11)$$

$$\begin{cases} \alpha y(0) + \beta y(\pi) = 0, \\ \alpha y'(\pi) + \beta y'(0) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

$$y' = \lambda y(\pi - x). \quad (13)$$

Задача (11)–(13) отличается от классической задачи Штурма-Лиувилля наличием дополнительного условия (13).

1. Определения, обозначения и вспомогательные предложения.

Пусть L — оператор Штурма-Лиувилля, определенный дифференциальным выражением

$$Lu = -y'' + q(x)y, \quad x \in [0, \pi] \quad (14)$$

и краевыми условиями

$$\begin{cases} a_{11}y(0) + a_{12}y'(0) + a_{13}y(\pi) + a_{14}y'(\pi) = 0, \\ a_{21}y(0) + a_{22}y'(0) + a_{23}y(\pi) + a_{24}y'(\pi) = 0, \end{cases} \quad (15)$$

где $q(x)$ непрерывна на отрезке $[0, \pi]$, а функция $y(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, \pi]$.

Определение 1. *Граничные условия (15) называются регулярными по Биркгофу при выполнении одного из трех условий*

$$1) a_{12}a_{24} - a_{14}a_{22} \neq 0;$$

$$2) a_{12}a_{24} - a_{14}a_{22} = 0, \quad |a_{12}| + |a_{14}| > 0, \quad a_{14}a_{21} + a_{12}a_{23} \neq 0;$$

$$3) a_{12} = a_{14} = a_{22} = a_{24} = 0, \quad a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \neq 0.$$

Теорема 2. (Биркгоф) [3]. Пусть L — оператор (14)–(15), порожденный регулярными краевыми условиями, а Δ — знаменатель его резольвенты. Пусть все его собственные значения суть простые нули функции Δ . Тогда всякая функция $f(x)$ из области определения оператора L разлагается в равномерно сходящийся ряд по его собственным функциям

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n y_n(x), \quad a_n = \int_0^{\pi} f(\xi) \overline{z_n(\xi)} d\xi,$$

где $y_n(x)$, $z_n(x)$ — собственные функции операторов L , L^* , отвечающие собственным значениям λ_n , $\bar{\lambda}_n$, соответственно.

Теорема 2 оставляет открытым вопрос о возможности разложения в ряд по собственным функциям оператора L функций, не принадлежащих области определения этого оператора. В случае самосопряженного оператора L каждая функция $f(x) \in L_2(0, \pi)$ разлагается в сходящийся в среднем квадратичном ряд по собственным функциям, причем в связи с ортогональностью собственных функций справедливо равенство Парсеваля. Для несамосопряженных операторов Г.М.Кесельманом [4] и В.П.Михайловым [5] был получен следующий результат.

Теорема 3. *Если оператор L порождается регулярными краевыми условиями, причем в случае четного n выполняется дополнительное условие $\theta_0^2 - 4\theta_1\theta_{-1} \neq 0$, то собственные и присоединенные функции оператора L образуют базис Рисса в $L_2(0, \pi)$.*

В рассматриваемом нами случае $n = 2$ и

$$1) \theta_0 = 0, \quad \theta_1 = -1, \quad \theta_{-1} = 1 \quad \text{при} \quad a_{12}a_{24} - a_{14}a_{22} \neq 0;$$

$$2) \theta_0 = 2i(a_{12}a_{21} + a_{14}a_{23}), \quad \theta_1 = \theta_{-1} = i(a_{14}a_{21} + a_{12}a_{23}) \quad \text{при} \quad a_{12}a_{24} - a_{14}a_{22} = 0, \quad |a_{12}| + |a_{14}| > 0, \quad a_{14}a_{21} + a_{12}a_{23} \neq 0;$$

$$3) \theta_0 = 0, \quad \theta_1 = -1, \quad \theta_{-1} = 1 \quad \text{при} \quad a_{12} = a_{14} = a_{22} = a_{24} = 0, \quad a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \neq 0.$$

Определение 2. *Граничные условия (15) называются вырожденными по Марченко, если имеют место следующие равенства: $\Delta_{42} = \Delta_{14} + \Delta_{32} = \Delta_{13} = 0$, где $\Delta_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{2i}a_{1j} = \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{1i} & a_{1j} \end{vmatrix}$ миноры, составленные из коэффициентов граничных условий.*

Структура спектра оператора Штурма-Лиувилля была детально исследована в работе [6]. Из результатов этой работы следуют теоремы 4 и 5.

Теорема 4. *Спектр оператора Штурма-Лиувилля пуст тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

$$1) |\Delta_{42}| + |\Delta_{14} + \Delta_{32}| + |\Delta_{13}| + (|\Delta_{14}| + |\Delta_{32}|) \left| \int_0^{\pi} D(t) \sin \lambda t dt \right| = 0,$$

$$2) \Delta_{12} + \Delta_{34} \neq 0,$$

где $D(t) = K'_x(\pi, t, \infty) + K'_t(\pi, t, 0)$, $K(x, t)$ — ядро оператора преобразования [см. 7].

Теорема 5. Спектром оператора Штурма-Лиувилля является вся комплексная плоскость тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$|\Delta_{42}| + |\Delta_{14} + \Delta_{32}| + |\Delta_{13}| + |\Delta_{12} + \Delta_{34}| + (|\Delta_{14}| + |\Delta_{32}|) \left| \int_0^\pi D(t) \sin \lambda t dt \right| = 0.$$

2. Основные результаты.

Теорема 6. Спектр обобщенной спектральной задачи

$$y' = \lambda y(\pi - x), \quad x \in (0, \pi), \quad (16)$$

$$\alpha y(0) + \beta y(\pi) = 0, \quad (17)$$

где α, β — комплексные числа, пусть тогда и только тогда, когда

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0 \quad \text{и} \quad \alpha \cdot \beta \neq 0. \quad (18)$$

Доказательство. Задача (1)–(2) эквивалентна неклассической задаче Штурма-Лиувилля

$$-y'' = \lambda^2 y(x), \quad (19)$$

$$\begin{cases} \alpha y(0) + \beta y(\pi) = 0, \\ \beta y'(0) + \alpha y'(\pi) = 0, \end{cases} \quad (20)$$

$$y' = \lambda y(\pi - x). \quad (21)$$

Граничная матрица этой задачи имеет вид $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}$. Следовательно, $\Delta_{12} = \alpha\beta$, $\Delta_{13} = 0$, $\Delta_{14} = \alpha^2$, $\Delta_{32} = \beta^2$, $\Delta_{34} = \beta\alpha$, $\Delta_{42} = 0$. Применим теорему 3. В нашей ситуации $q(x) \equiv 0$, поэтому $D(t) \equiv 0$ и

$$|\Delta_{42}| + |\Delta_{14} + \Delta_{32}| + |\Delta_{13}| = \alpha^2 + \beta^2, \quad \Delta_{12} + \Delta_{34} = \alpha\beta + \beta\alpha = 2\alpha\beta.$$

Утверждение теоремы следует из этих равенств и теоремы 3.

Теорема 7. Спектром обобщенной спектральной задачи (1)–(2) является вся комплексная плоскость тогда и только тогда, когда

$$|\alpha| + |\beta| = 0. \quad (22)$$

Доказательство. В силу теоремы 4 имеем, что утверждение этой теоремы верно тогда и только тогда, когда $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, $2\alpha\beta = 0$ или $(\alpha + \beta)^2 = 0$ и $(\alpha - \beta)^2 = 0$, то есть $\alpha = -\beta$, $\alpha = \beta$. Очевидно, последнее равенство имеет место лишь при выполнении условия (22).

Теорема 8. Если имеет место неравенство

$$(|\alpha| + |\beta|) \cdot (\alpha^4 - \beta^4) \neq 0, \quad (23)$$

то обобщенная спектральная задача (16)–(17) имеет счетное множество собственных значений

$$\lambda_n = \frac{1}{\pi i} \ln \left| \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} - i \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \right| + \frac{\varphi}{\pi} + 2n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (24)$$

$$\varphi = \arg \left[-\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} + i \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \right], \quad (25)$$

и соответствующих им собственных функций

$$y_n(x) = \alpha \sin \lambda_n x - \beta \sin \lambda_n(\pi - x). \quad (26)$$

Всякая функция $f(x)$ из области определения оператора Штурма-Лиувилля (19)–(20) разлагается в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям (26)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n y_n(x), \quad (27)$$

$$a_n = \int_0^{\pi} f(\xi) \bar{z}_n(\xi) d\xi, \quad (28)$$

где $y_n(x)$ — собственные функции оператора Штурма-Лиувилля (4)–(5), $z_n(x)$ — собственные функции сопряженного к оператору (19)–(20) оператора L^* .

Доказательство. Общее решение уравнения $-y'' = \lambda^2 y$ имеет вид $y(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$. Поэтому $y'(x) = -\lambda A \sin \lambda x + B \lambda \cos \lambda x$; $y(0) = A$; $y(\pi) = A \cos \lambda \pi + B \sin \lambda \pi$; $y'(\pi) = B \lambda$; $y'(\pi) = -\lambda A \sin \lambda \pi + B \lambda \cos \lambda \pi$.

Подставив эти выражения в граничные условия, получим

$$\begin{cases} \alpha A + \beta[A \cos \lambda \pi + B \sin \lambda \pi] = 0, \\ \beta B \lambda + \alpha[-\lambda A \sin \lambda \pi + B \lambda \cos \lambda \pi] = 0, \\ (\alpha + \beta \cos \lambda \pi)A + \beta \sin \lambda \pi B = 0, \\ -\alpha \lambda \sin \lambda \pi A + (\beta \lambda + \alpha \lambda \cos \lambda \pi)B = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет нетривиальное решение, если

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha + \beta \cos \lambda \pi & \beta \sin \lambda \pi \\ -\alpha \lambda \sin \lambda \pi & \lambda(\beta + \alpha \cos \lambda \pi) \end{vmatrix} = \lambda(\alpha + \beta \cos \lambda \pi)(\beta + \alpha \cos \lambda \pi) + \beta \alpha \lambda \sin^2 \lambda \pi =$$

$$= \lambda(\alpha \beta + \alpha^2 \cos \lambda \pi + \beta^2 \cos \lambda \pi + \beta \alpha \cos^2 \lambda \pi + \beta \alpha \sin^2 \lambda \pi) = \lambda[2\alpha \beta + (\alpha^2 + \beta^2) \cos \lambda \pi] = 0. \quad (29)$$

Корни этого уравнения являются собственными значениями обобщенной спектральной задачи (16)–(17), а их квадраты — собственными значениями оператора Штурма-Лиувилля (19)–(20). Из уравнения (29) находим $\lambda_0 = 0$, что невозможно в силу условия (8), или

$$\begin{aligned} \cos \lambda \pi &= -\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}, & \lambda_n \pi &= \pm \arccos \left(-\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right) + 2\pi n, \\ \lambda_n &= \pm \frac{1}{\pi} \arccos \left(-\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right) + 2n, & n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (30)$$

Полагая $A_n = -\beta \sin \lambda_n \pi$, $B_n = \alpha + \beta \cos \lambda_n \pi$, находим собственные функции

$$y_n(x) = -\beta \sin \lambda_n \pi \cos \lambda_n x + (\alpha + \beta \cos \lambda_n \pi) \sin \lambda_n x = \alpha \sin \lambda_n x - \beta \sin \lambda_n(\pi - x). \quad (31)$$

Мы до сих пор еще не воспользовались дополнительным условием (21). Полагая $x = 0$ в (21), получим $y'(0) = \lambda y(\pi)$. Подставляя в это равенство собственную функцию, имеем

$$\begin{aligned} y'_n(x) &= \lambda_n \alpha \cos \lambda_n x + \lambda_n \beta \cos \lambda_n(\pi - x), \\ y'_n(0) &= \lambda_n \alpha + \lambda_n \beta \cos \lambda_n \pi = \lambda_n(\alpha + \beta \cos \lambda_n \pi), \end{aligned} \quad (32)$$

$$y_n(\pi) = \alpha \sin \lambda_n \pi, \quad \lambda_n(\alpha + \beta \cos \lambda_n \pi) = \alpha \lambda_n \sin \lambda_n \pi.$$

Отсюда при $\alpha \neq 0$ имеем

$$\sin \lambda_n \pi = \frac{\alpha + \beta \cos \lambda_n \pi}{\alpha} = 1 + \frac{\beta}{\alpha} \cos \lambda_n \pi = 1 + \frac{\beta}{\alpha} \left(-\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right) = 1 - \frac{2\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Осталось проверить условие (21) при любом $x \in [0, \pi]$. Из (31), заменив x на $\pi - x$, получим

$$\begin{aligned} y_n(\pi - x) &= \alpha \sin \lambda_n(\pi - x) - \beta \sin \lambda_n x = \alpha(\sin \lambda_n \pi \cos \lambda_n x - \cos \lambda_n \pi \sin \lambda_n x) - \beta \sin \lambda_n x = \\ &= \alpha \sin \lambda_n \pi \cos \lambda_n x - (\alpha \cos \lambda_n \pi + \beta) \sin \lambda_n x = \alpha \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \cos \lambda_n x - \left(\beta - \alpha \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right) \sin \lambda_n x = \\ &= \alpha \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \cos \lambda_n x - \beta \left(1 - \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} \right) \sin \lambda_n x = \alpha \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \cos \lambda_n x - \beta \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} \sin \lambda_n x = \\ &= \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha \cos \lambda_n x + \beta \sin \lambda_n x). \end{aligned} \quad (33)$$

Преобразуем правую часть равенства (32)

$$\begin{aligned} y'_n(x) &= \lambda_n [\alpha \cos \lambda_n x + \beta \cos \lambda_n(\pi - x)] = \\ &= \lambda_n [\alpha \cos \lambda_n x + \beta \cos \lambda_n \pi \cos \lambda_n x + \beta \sin \lambda_n \pi \sin \lambda_n x] = \\ &= \lambda_n \left[\left(\alpha - \frac{2\alpha\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \right) \cos \lambda_n x + \beta \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \sin \lambda_n x \right] = \\ &= \lambda_n \left[\left(\alpha - \frac{2\alpha\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \right) \cos \lambda_n x + \beta \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \sin \lambda_n x \right] = \\ &= \lambda_n \left[\alpha \left(1 - \frac{2\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \right) \cos \lambda_n x + \beta \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \sin \lambda_n x \right] = \\ &= \lambda_n \left(\alpha \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \cos \lambda_n x + \beta \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \sin \lambda_n x \right) = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \lambda_n (\alpha \cos \lambda_n x + \beta \sin \lambda_n x). \end{aligned} \quad (34)$$

Справедливость (21) вытекает из равенств (33), (34). Из системы уравнений

$$\begin{cases} \cos \lambda_n \pi = -\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}, \\ \sin \lambda_n \pi = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \end{cases}$$

получим другое представление собственных значений (24).

Если $\alpha = 0$, то полагая $x = \pi$ в равенстве (21), получим $y'(\pi) = \lambda y(0)$. Подставив сюда собственную функцию, получим $y'_n(\pi) = \lambda_n - \beta = -\beta \sin \lambda_n \pi$.

Следовательно, собственные значения находятся из системы уравнений $\begin{cases} \sin \lambda_n \pi = -1, \\ \cos \lambda_n \pi = 0. \end{cases}$

В этом случае $\lambda_n = 2n - \frac{1}{2}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и $y_n(x) = -\beta \sin(2n - \frac{1}{2})(\pi - x)$, $n = 0, \pm 2, \dots$

Теперь определим кратности спектра оператора (19)–(20). Для этого вычислим значения производной характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ в точках спектра оператора (19)–(20)

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\lambda} \Delta(\lambda) \right|_{\lambda=\lambda_n} &= 2\alpha\beta + (\alpha^2 + \beta^2) \cos \lambda \pi - \alpha^2(\alpha^2 + \beta^2) \sin \lambda \pi = -\lambda_n^2(\alpha^2 + \beta^2) \sin \lambda_n \pi = \\ &= -\lambda_n^2(\alpha^2 + \beta^2) \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = -\lambda_n^2(\alpha^2 - \beta^2) \neq 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Если $\lambda_n = 0$, то из уравнения (16) имеем, что $y_n = Const \neq 0$. Из граничного условия (17) получим $\alpha + \beta = 0$, что невозможно в силу условия (23). Утверждение теоремы (3) следует из равенств (30), (31), (35) и теоремы Биркгофа.

Теорема 9. Если имеет место неравенство $(|\alpha| + |\beta|)(\alpha^4 - \beta^4) \neq 0$, то собственные функции обобщенной спектральной задачи (16)–(17) образуют базис Рисса, причем для углов между собственными векторами имеет место формула

$$(y_n, y_m) = \frac{\lambda_n \bar{\lambda}_m}{\lambda_n - \bar{\lambda}_m} (\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta}). \quad (36)$$

Доказательство. Достаточно проверить условия теоремы Г.М.Кесельмана-В.П.Михайлова для нашего оператора Штурма-Лиувилля (19)–(20).

а) Регулярность по Биркгофу: после перестановки строк матрица граничных условий оператора Штурма-Лиувилля (19)–(20) имеет вид $\begin{pmatrix} 0, & \beta, & 0, & \alpha \\ \alpha, & 0, & \beta, & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, $a_{12}a_{24} - a_{14}a_{22} = 0$, $|a_{12}| + |a_{14}| = |\beta| + |\alpha| > 0$, $a_{14}a_{21} + a_{12}a_{23} = \alpha \cdot \alpha + \beta \cdot \beta = \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, поэтому оператор (19)–(20) регулярен по Биркгофу.

б) Так как $n = 2$ — четное число, то надо проверить выполнение второго дополнительного условия $\theta_0^2 - 4\theta_1 \cdot \theta_{-1} \neq 0$, именно

$$\begin{aligned} \theta_0 &= 2i(a_{12}a_{21} + a_{14}a_{23}) = 2i(\beta \cdot \alpha + \alpha \cdot \beta) = 4\alpha \cdot \beta \cdot i, \\ \theta_{-1} &= i(a_{14}a_{21} + a_{12}a_{23}) = i(\alpha \cdot \alpha + \beta \cdot \beta) = i(\alpha^2 + \beta^2), \\ \theta_0^2 - 4\theta_1 \cdot \theta_{-1} &= -16\alpha^2\beta^2 - 4[i(\alpha^2 + \beta^2)]^2 = -16\alpha^2\beta^2 + 4(\alpha^2 + \beta^2)^2 = \\ &= 4[(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)] = 4(\alpha - \beta)^2(\alpha + \beta)^2 = 4(\alpha^2 - \beta^2)^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Формула (36) устанавливается прямым вычислением. Теорема 9 доказана.

Замечание. Если $(|\alpha| + |\beta|)(\alpha^2 + \beta^2) \neq 0$ и $\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} = 0$ то собственные функции (1)–(2) образуют ортогональный базис. В частности, при $\alpha^2 - \beta^2 = 0$ мы имеем дело с ортогональным базисом. Заметим также, что часть результатов теоремы 4 была получена другим методом в работе [8].

Цитированная литература

1. Wielandt Н. // Math. Nachr. 1950/51. V. 4, №1-6. P. 308–314.
2. Харазов Д.Ф. // УМН. 1957. Т. 12, вып. 4(76). С. 201–207.
3. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1969. С.52–100.
4. Кесельман Г.М. // Известия вузов СССР. Математика. 1964. №2. С. 82–93.
5. Михайлов В.П. // ДАН СССР. 1962. Т. 144, №5. С. 981–984.
6. Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. // Известия МОН РК. Серия физ.-мат. 2000. №3. С. 29–34.
7. Марченко В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев, 1977. С. 16–32.
8. Ахметова С.Т. // Труды межд. конф. "Современные проблемы математики". Астана. 3–5 октября 2002г., С. 10–12.

Поступила в редакцию 12.05.2004 г.

УДК 519.624

ПРИЗНАКИ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ РАЗБИЕНИИ ИНТЕРВАЛА

Е. В. КОКОТОВА

Актюбинский государственный университет им. К.Жубанова
463000 г.Актобе пр. А.Молдагуловой, 34 ruteshova@yandex.ru

Рассматривается линейная двухточечная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения. На основе метода параметризации с неравномерным шагом разбиения установлены коэффициентные необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости.

В данной работе на отрезке $[0, T]$ рассматривается задача

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad x \in R^n, \quad (1)$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad (2)$$

где $A(t)$, $f(t)$ непрерывны на $[0, T]$, B и C – $(n \times n)$ матрицы, $d \in R^n$, $\|x\| = \max_i |x_i|$, $\|A(t)\| = \max_i \sum_j |a_{ij}(t)| \leq \alpha(t)$, $i = \overline{1, n}$, $\alpha(t)$ непрерывна на $[0, T]$.

Через $C([0, T], R^n)$ обозначим пространство непрерывных на $[0, T]$ функций $x : [0, T] \rightarrow R^n$ с нормой

$$\|x\|_1 = \max_{t \in [0, T]} \|x(t)\|.$$

Линейная двухточечная краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений (1), (2) исследована многими авторами. В [1] имеется обзор работ, посвященных краевым задачам. В работе [2] для рассматриваемой задачи на основе метода параметризации (м.п.) получены коэффициентные признаки однозначной разрешимости. В настоящей работе задача (1), (2) исследуется м.п. с неравномерным шагом разбиения. Неравномерное разбиение $[0, T]$ целесообразно использовать в том случае, когда элементы матрицы $A(t)$ принимают большие значения в некоторых точках промежутка. В случае равномерного разбиения это обстоятельство ведет к росту числа N , так как шаг $h > 0$ приходится выбирать достаточно малым.

Keywords: *differential equation, two-point boundary-value problem, parameterization's method, non-uniform partition, unique solvability.*

2000 Mathematics Subject Classification: 34B40

© Е. В. Кокотова, 2004.

Возьмем числа $\delta_0 > 0$, $\mu \in [\frac{1}{2}, 1)$ и для заданного числа $\theta > 0$, выбирая точки t_r из соотношений $\mu\theta \leq \int_{t_{r-1}}^{t_r} \tilde{\alpha}(t)dt \leq \theta$, с $\tilde{\alpha}(t) = \max(\alpha(t), \delta_0)$, произведем разбиение $[0, T) = \bigcup_{r=1}^N [t_{r-1}, t_r)$.

Обозначим через $h_r = t_r - t_{r-1}$, $r = \overline{1, N}$, а через $x_r(t)$ — сужение функции $x(t)$ на r -й интервал $[t_{r-1}, t_r)$. При этом задача (1), (2) сводится к эквивалентной многоточечной краевой задаче

$$\frac{dx_r}{dt} = A(t)x_r + f(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, N}, \quad (3)$$

$$Bx_1(0) + C \lim_{t \rightarrow T-0} x_N(t) = d, \quad (4)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_s-0} x_s(t) = x_{s+1}(t_s), \quad s = \overline{1, N-1}, \quad (5)$$

где (5) — условия сшивания решения во внутренних точках разбиения. Если $x(t)$ — решение задачи (1), (2), то система его сужений есть решение многоточечной краевой задачи (3)–(5), и наоборот, если система вектор-функций $(\tilde{x}_r(t))$, $r = \overline{1, N}$ — решение задачи (3)–(5), то функция $\tilde{x}(t)$ определяемая равенствами $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_r(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, N}$, будет решением задачи (1), (2).

Через λ_r обозначим значение функции $x_r(t)$ в точке $t = t_{r-1}$ и на каждом интервале произведем замену $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$. Получим краевую задачу с параметром

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)u_r + A(t)\lambda_r + f(t), \quad u_r(t_{r-1}) = 0, \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, N}, \quad (6)$$

$$B\lambda_1 + C\lambda_N + C \lim_{t \rightarrow T-0} u_N(t) = d, \quad (7)$$

$$\lambda_s + \lim_{t \rightarrow t_s-0} u_s(t) = \lambda_{s+1}, \quad s = \overline{1, N-1}. \quad (8)$$

Если система функций $x_r(t)$ является решением (3)–(5), то система пар $(\lambda_r = x_r(t_{r-1}), u_r(t) = x_r(t) - x_r(t_{r-1}))$ будет решением задачи (6)–(8) и наоборот если $(\lambda_r, u_r(t))$ — решение (6)–(8), то $(\lambda_r + u_r(t))$, $r = \overline{1, N}$, — решение задачи (3)–(5).

Появление начального условия $u_r(t_{r-1}) = 0$, $r = \overline{1, N}$, позволяет при фиксированных $\lambda_r \in R^{nN}$ определить $u_r(t)$ из интегрального уравнения

$$u_r(t) = \int_{t_{r-1}}^t A(\tau)[\lambda_r + u_r(\tau)]d\tau + \int_{t_{r-1}}^t f(\tau)d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, N}. \quad (9)$$

Вместо $u_r(t)$ подставим соответствующую правую часть (9) и, повторяя этот процесс ν раз, получим

$$\begin{aligned} u_r(t) = & \left[\int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1)d\tau_1 + \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1) \int_{t_{r-1}}^{\tau_1} A(\tau_2)d\tau_2d\tau_1 + \dots + \right. \\ & \left. + \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1) \int_{t_{r-1}}^{\tau_1} A(\tau_2) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu) \dots d\tau_2d\tau_1 \right] \cdot \lambda_r + \\ & + \left[\int_{t_{r-1}}^t f(\tau_1)d\tau_1 + \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1) \int_{t_{r-1}}^{\tau_1} f(\tau_2)d\tau_2d\tau_1 + \dots + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1) \int_{t_{r-1}}^{\tau_1} A(\tau_2) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu) d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} \dots d\tau_2 d\tau_1 \Big] + \\
 & + \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1) \int_{t_{r-1}}^{\tau_1} A(\tau_2) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu) u_r(\tau_\nu) d\tau_\nu \dots d\tau_2 d\tau_1, \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad r = \overline{1, N}. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Находя $\lim_{t \rightarrow t_{r-0}} u_r(t)$, $r = \overline{1, N}$, подставляя соответствующие пределы выражения в (7), (8) и умножая обе части (7) на $h_N > 0$, получим систему nN уравнений относительно параметров λ_{ri} , $r = \overline{1, N}$, $i = \overline{1, n}$

$$Q_\nu(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta)) \cdot \lambda = -F_\nu(\theta) - G_\nu(u, \theta), \quad (11)$$

где $\lambda = (\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1n}, \dots, \lambda_{r1}, \dots, \lambda_{rn}, \dots, \lambda_{N1}, \dots, \lambda_{Nn})' \in R^{nN}$,

$$\begin{aligned}
 & Q_\nu(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta)) = \\
 & = \begin{pmatrix} Bh_N & 0 & 0 & \dots & 0 & h_N C[I + D_{\nu N}(h_N(\theta))] \\ I + D_{\nu 1}(h_1(\theta)) & -I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I + D_{\nu 2}(h_2(\theta)) & -I & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I + D_{\nu N-1}(h_{N-1}(\theta)) & -I \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{\nu r}(h_r(\theta)) & = \int_{t_{r-1}}^{t_r} A(\tau_1) d\tau_1 + \int_{t_{r-1}}^{t_r} A(\tau_1) \int_{t_{r-1}}^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \dots + \\
 & + \int_{t_{r-1}}^{t_r} A(\tau_1) \int_{t_{r-1}}^{\tau_1} A(\tau_2) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu) d\tau_\nu \dots d\tau_2 d\tau_1,
 \end{aligned}$$

$$Q_\nu(T) = T \left\{ B + C[I + D_\nu(T)] \right\},$$

$$F_\nu(\theta) = (-h_N(\theta)d + h_N C F_{\nu N}(h_N(\theta)), F_{\nu 1}(h_1(\theta)), F_{\nu 2}(h_2(\theta)), \dots, F_{\nu N-1}(h_{N-1}(\theta)))',$$

$$\begin{aligned}
 F_{\nu r}(h_r(\theta)) & = \int_{t_{r-1}}^{t_r} f(\tau_1) d\tau_1 + \int_{t_{r-1}}^{t_r} A(\tau_1) \int_{t_{r-1}}^{\tau_1} f(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \dots + \\
 & + \int_{t_{r-1}}^{t_r} A(\tau_1) \int_{t_{r-1}}^{\tau_1} A(\tau_2) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu) d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} \dots d\tau_2 d\tau_1,
 \end{aligned}$$

$$G_\nu(u, \theta) = (h_N C G_{\nu N}(u_N, h_N(\theta)), G_{\nu 1}(u_1, h_1(\theta)), G_{\nu 2}(u_2, h_2(\theta)), \dots, G_{\nu N-1}(u_{N-1}, h_{N-1}(\theta)))',$$

$$G_{\nu r}(u_r, h_r(\theta)) = \int_{t_{r-1}}^{t_r} A(\tau_1) \int_{t_{r-1}}^{\tau_1} A(\tau_2) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu) u_r(\tau_\nu) d\tau_\nu \dots d\tau_2 d\tau_1, \quad r = \overline{1, N}.$$

Итак, для нахождения nN пар $(\lambda_{ri}, u_{ri}(t))$ имеем замкнутую систему уравнений (9), (11). Решение задачи (6)–(8) найдем по следующему алгоритму.

0-шаг. Начальное приближение по параметру $\lambda^{(0)}$ определяем из уравнения

$$Q_\nu(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta)) \cdot \lambda = -F_\nu(\theta).$$

Решая задачу Коши (6) на $[t_{r-1}, t_r]$ при $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$ находим $u_r^{(0)}(t)$, $r = \overline{1, N}$.

1-шаг. Найденные $u_r^{(0)}(t)$ подставляем в правую часть (11) и из уравнения

$$Q_\nu(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta)) \cdot \lambda = -F_\nu(\theta) - G_\nu(u^{(0)}, \theta)$$

определяем $\lambda^{(1)}$. Решая задачу Коши (6) на $[t_{r-1}, t_r]$ при $\lambda_r = \lambda_r^{(1)}$, находим $u_r^{(1)}(t)$, $r = \overline{1, N}$ и так далее.

Продолжая процесс, на k -шаге получим систему пар $(\lambda_r^{(k)}, u_r^{(k)}(t))$, $r = \overline{1, N}$. Достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2) и сходимости алгоритма, а также оценку разности между точным и приближенным (полученным через k -шагов-итераций) решениями устанавливает

Теорема 1. Пусть при некоторых $\theta > 0$, $\nu \in \mathbb{N}$ матрица $Q_\nu(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta)) : R^{nN} \rightarrow R^{nN}$ обратима и выполняются неравенства

$$\| [Q_\nu(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta))]^{-1} \| \leq \gamma_\nu(\theta), \quad (12)$$

$$q_\nu(\theta) = \gamma_\nu(\theta) \max(1, h_N(\theta) \|C\|) \cdot \left[e^\theta - 1 - \theta - \dots - \frac{\theta^\nu}{\nu!} \right] < 1. \quad (13)$$

Тогда краевая задача (1), (2) имеет единственное решение $x^*(t)$ и справедлива следующая оценка

$$\|x^*(t) - x^{(k)}(t)\| \leq \gamma_\nu(\theta) \max(1, h_N(\theta) \|C\|) \cdot \frac{\theta^\nu}{\nu!} \cdot e^\theta \frac{[q_\nu(\theta)]^k}{1 - q_\nu(\theta)} \cdot M(\theta), \quad (14)$$

где

$$M(\theta) = \gamma_\nu(\theta) \cdot (e^\theta - 1) \cdot \max \left\{ 1 + h_N(\theta) \|C\| \cdot \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{\theta^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{\theta^j}{j!} \right\} \max \left\{ \|d\|, \|f(t)\|_1 \right\} \cdot \max_r h_r + e^\theta \cdot \|f(t)\|_1 \cdot \max_r h_r, \quad (15)$$

$x^{(k)}(t)$ — кусочно-непрерывно-дифференцируемая функция на $[0, T]$, для которой функция $\lambda_r^{(k)} + u_r^{(k)}(t)$ является сужением на $[t_{r-1}, t_r]$, $r = \overline{1, N}$.

Доказательство теоремы 1 проводится по схеме доказательства теоремы 1 из [2].

Следующие утверждения показывают, что выполнение неравенств (12), (13) и обратимость матрицы $Q_\nu(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta)) : R^{nN} \rightarrow R^{nN}$ не только достаточны, но и необходимы для однозначной разрешимости рассматриваемой задачи.

Теорема 2. Краевая задача (1), (2) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда для любого $\theta > 0$ существует $\nu = \nu(\theta) \in \mathbb{N}$, при котором матрица $Q_\nu(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta)) : R^{nN} \rightarrow R^{nN}$ обратима и выполняются неравенства (12), (13).

Доказательство. Необходимость. Пусть краевая задача (1), (2) однозначно разрешима. Тогда матрица $Q^*(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta)) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} Q_\nu(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta))$ обратима. Действительно, если предположить что $\det Q^*(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta)) = 0$, то существует $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_N)' \in R^{nN}$ такое, что $Q^* \tilde{\lambda} = 0$, $\|\tilde{\lambda}\| \neq 0$. Так как $\tilde{\lambda}$ есть решение уравнения (23) из [3] при $F^*(A, 0, 0, \theta) = 0$, являющегося точной разностной схемой краевой задачи (1),(2) при

$f = 0, d = 0$, то $\tilde{\lambda}_r$ совпадают со значениями в точках разбиения t_r решения соответствующей однородной задачи $r = \overline{1, N}$. Тогда по $\tilde{\lambda}_r$ найдем $\tilde{u}_r(t)$ — решение задачи Коши (6) на интервале $[t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, N}$ и, определив функцию $\tilde{x}(t)$ равенствами $\tilde{x}(t) = \tilde{\lambda}_r + \tilde{u}_r(t), t \in [(t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, N}, \tilde{x}(T) = \tilde{\lambda}_N + \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{u}_N(t)$, получим ненулевое решение краевой задачи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad x \in R^n, \tag{16}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = 0. \tag{17}$$

Пришли к противоречию с однозначной разрешимостью задачи (1), (2), так как задача (16), (17) имеет также и нулевое решение.

Поэтому матрица $Q^*(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta)) : R^{nN} \rightarrow R^{nN}$ обратима и

$$\| [Q^*(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta))]^{-1} \| \leq \gamma(\theta).$$

Так как

$$\begin{aligned} & \| Q^*(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta)) - Q_\nu(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta)) \| \leq \\ & \leq \max(1, h_N(\theta) \|C\|) \cdot \left(e^\theta - \sum_{j=0}^{\nu} \frac{\theta^j}{j!} \right) \end{aligned}$$

и правая часть неравенства стремится к нулю при $\nu \rightarrow \infty$, то по теореме о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов [5, с.142] найдется $\bar{\nu}$, при котором матрица $Q_{\bar{\nu}}(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta))$ будет обратимой и выполняются соотношения

$$\| [Q_{\bar{\nu}}(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta))]^{-1} \| \leq \gamma_{\bar{\nu}}(\theta),$$

$$q_{\bar{\nu}}(\theta) = \gamma_{\bar{\nu}}(\theta) \cdot \max(1, h_N(\theta) \|C\|) \left[e^\theta - 1 - \theta - \dots - \frac{\theta^{\bar{\nu}}}{\bar{\nu}!} \right] < 1.$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Краевая задача (1), (2) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда для любого $\nu \in \mathbb{N}$ существует $\theta = \theta(\nu) > 0$, при котором матрица $Q_\nu(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta))$ обратима и выполняются неравенства (12), (13).

Доказательство. Необходимость. Пусть задача (1), (2) однозначно разрешима. Тогда, как было показано выше, матрица $Q^*(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta))$ обратима при любых $\theta > 0$ и $\| [Q^*(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta))]^{-1} \| \leq \gamma(\theta)$.

В силу неравенств (14), (15) из [3, с. 85] имеют место следующие оценки

$$\begin{aligned} \| \lambda^* \| & \leq \| \lambda^* - \lambda^{(0)} \| + \| \lambda^{(0)} \| \leq \frac{\gamma_\nu(\theta)}{1 - q_\nu(\theta)} \cdot \max(1, h_N(\theta) \|C\|) \cdot \frac{\theta^\nu}{\nu!} M(\theta) + \\ & + \gamma_\nu(\theta) \cdot \max \left\{ 1 + h_N \|C\| \cdot \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{\theta^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{\theta^j}{j!} \right\} \cdot \max \left\{ \|d\|, \|f\|_1 \right\} \cdot \max_r h_r, \\ \| u^*[t] \|_2 & \leq \| u^*[t] - u^{(0)}[t] \|_2 + \| u^{(0)}[t] \|_2 \leq \\ & \leq \left(\frac{\gamma_\nu(\theta)}{1 - q_\nu(\theta)} \cdot (e^\theta - 1) \max(1, h_N(\theta) \|C\|) \cdot \frac{\theta^\nu}{\nu!} + 1 \right) M(\theta), \end{aligned} \tag{18}$$

где $\| u[t] \|_2 = \max_r \sup_{t \in [t_{r-1}, t_r)} \| u_r(t) \|$.

Отсюда получим, что

$$\|x^*\|_1 \leq \|\lambda^*\| + \|u^*[t]\|_2 \leq K \cdot \max\{\|d\|, \|f\|_1\}, \quad (19)$$

где K определяется по $\theta > 0$, $\nu \in \mathbb{N}$ и не зависит от d , $f(t)$.

Покажем теперь, что существует θ_0 , при котором для всех $\theta \in (0, \theta_0]$ справедлива оценка

$$\|[H^{-1}Q^*(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta))]^{-1}\| \leq \hat{\gamma}, \quad (20)$$

где $H = \text{diag}(h_N(\theta)I, h_1(\theta)I, \dots, h_{N-1}(\theta)I)$, I — $(n \times n)$ -мерная единичная матрица, а $\hat{\gamma}$ — константа, не зависящая от θ . С этой целью рассмотрим уравнение

$$H^{-1} \cdot Q^*(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta))\lambda = c, \quad \lambda, c \in R^{nN}. \quad (21)$$

Пусть $\varepsilon > 0$, а $\theta_0(\varepsilon)$ удовлетворяет неравенству

$$e^\theta - 1 \leq \frac{\varepsilon/2}{2(1 + \varepsilon/4)(1 + \varepsilon/2)}.$$

Теперь для всех $c = (c_1, c_2, \dots, c_N) \in R^{nN}$, используя лемму из [4], можно построить функцию $f_c(t) \in C([0, T], R^n)$, обладающую свойствами

$$\begin{aligned} F_r(A, f_c) &\equiv \frac{1}{h_r} \int_{t_{r-1}}^{t_r} f_c(t) dt + \frac{1}{h_r} \int_{t_{r-1}}^{t_r} A(t) \int_{t_{r-1}}^t f_c(\tau) d\tau dt + \\ &+ \frac{1}{h_r} \int_{t_{r-1}}^{t_r} A(t) \int_{t_{r-1}}^t A(\tau) \int_{t_{r-1}}^\tau f_c(\tau_1) d\tau_1 d\tau dt + \dots = c_{r+1}, \quad r = \overline{1, N-1}, \\ F_N(A, f_c) &= 0, \quad \|f_c\|_1 \leq (1 + \varepsilon/2)\|c\| \end{aligned}$$

(по c_{r+1} построим функции $f_{c_{r+1}}(t)$, определенные на $[t_{r-1}, t_r]$, $r = \overline{1, N-1}$, склеим их на $[0, T - t_{N-1}]$ и на $[T - t_{N-1}, T]$ продолжим нулем).

Далее рассмотрим уравнение, являющееся точной разностной схемой краевой задачи (1), (2) [3, с.92]

$$H^{-1} \cdot Q^*(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta))\lambda = -F^*(A, f, d, \theta), \quad (22)$$

где $F^*(A, f, d, \theta) = H^{-1} \lim_{\nu \rightarrow \infty} F_\nu(\theta)$.

Из однозначной разрешимости (1), (2) и неравенства (19) следует, что уравнение (20) при всех $d \in R^n$, $f(t) \in C([0, T], R^n)$ имеет единственное решение $\lambda \in R^{nN}$ и справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\lambda\| &= \|[H^{-1}Q^*(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta))]^{-1} \cdot F^*(A, f, d, \theta)\| = \\ &= \max_r \|x(t_{r-1})\| \leq \|x\|_1 \leq K \cdot \max(\|d\|, \|f\|_1). \end{aligned} \quad (23)$$

Учитывая, что $F^*(A, f_c, c_1, \theta) = -c$ и $\max(\|c_1\|, \|f_c\|_1) \leq (1 + \varepsilon/2)\|c\|$, получим, что уравнение (21) имеет единственное решение при всех $c \in R^{nN}$ и

$$\|\lambda\| = \|[H^{-1}Q^*(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta))]^{-1}\| \cdot \|c\| \leq K(1 + \varepsilon/2)\|c\|,$$

т.е.

$$\|[H^{-1}Q^*(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta))]^{-1}\| \leq K(1 + \varepsilon/2) \quad (24)$$

и оценка (20) справедлива с константой $\hat{\gamma} = (1 + \varepsilon/2)K$.

Далее, учитывая, что

$$\begin{aligned} & \|H^{-1}Q^*(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta)) - H^{-1}Q_\nu(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta))\| \leq \\ & \leq \|H^{-1}\| \cdot \|Q^*(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta)) - Q_\nu(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta))\| \leq \\ & \leq \frac{\delta_1}{\mu\theta} \cdot \max(1, h_N(\theta)\|C\|) \cdot \left[e^\theta - 1 - \theta - \dots - \frac{\theta^\nu}{\nu!} \right], \end{aligned}$$

где $\delta_1 = \max_{t \in [0, T]} \tilde{\alpha}(t)$, и выбирая $\theta \in (0, \theta_0(\varepsilon)]$, удовлетворяющим неравенству

$$K(1 + \varepsilon/2) \frac{\delta_1}{\mu\theta} \max(1, h_N(\theta)\|C\|) \left[e^\theta - 1 - \theta - \dots - \frac{\theta^\nu}{\nu!} \right] < \frac{\varepsilon}{2(1 + \varepsilon)},$$

по теореме о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов имеем

$$\|[H^{-1}Q_\nu(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta))]^{-1}\| \leq K(1 + \varepsilon).$$

Поэтому матрица $Q_\nu(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta))$ обратима и выполняются неравенства

$$\|[Q_\nu(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta))]^{-1}\| \leq \frac{\delta_1}{\mu\theta} (1 + \varepsilon)K,$$

$$q_\nu(\theta) = \frac{\delta_1}{\mu\theta} (1 + \varepsilon)K \cdot \max(1, h_N\|C\|) \left[e^\theta - 1 - \theta - \dots - \frac{\theta^\nu}{\nu!} \right] < \frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon} < 1.$$

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Краевая задача (1), (2) корректно разрешима тогда и только тогда, когда для любого $\nu \in N$ существует $\theta_0(\nu) > 0$ такое, что при всех $\theta \in (0, \theta_0(\nu)]$ матрица $H^{-1}Q_\nu(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta))$ обратима и выполнена оценка

$$\|[H^{-1}Q_\nu(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta))]^{-1}\| \leq \gamma, \tag{25}$$

где γ — константа, не зависящая от $h_i(\theta), i = \overline{1, N}$.

Если при этом известна константа корректной разрешимости K , то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\bar{\theta}(\varepsilon, \nu) > 0$ такое, что для всех $\theta \in (0, \bar{\theta}(\varepsilon, \nu)]$ оценка (25) выполняется с константой $\gamma = (1 + \varepsilon)K$ и, наоборот, если имеет место (25), то $K = \gamma$.

Доказательство. Необходимость. Пусть краевая задача (1),(2) корректно разрешима с константой K . Тогда, как было показано в теореме 3, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\theta_0(\varepsilon)$ такое, что при всех $\theta \in (0, \theta_0(\varepsilon)]$ матрица $H^{-1}Q_\nu(h_1(\theta), \dots, h_N(\theta))$ будет обратимой и справедлива следующая оценка

$$\|[H^{-1}Q_\nu(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta))]^{-1}\| \leq K(1 + \varepsilon),$$

то есть оценка (25) выполняется с константой $\gamma = (1 + \varepsilon)K$, когда $\bar{\theta}(\varepsilon, \nu) = \theta_0(\varepsilon)$.

Достаточность. Пусть выполняется оценка (25). Из обратимости матрицы $H^{-1}Q_\nu(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta))$ следует существование $\lambda^{(0)}$ и

$$\|\lambda^{(0)}\| \leq \gamma \cdot \|H^{-1}F_\nu(\theta)\| \leq \gamma \cdot \max\left(1 + h_N(\theta)\|C\| \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{\theta^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{\theta^j}{j!}\right) \max(\|f\|_1, \|d\|). \tag{26}$$

Задача Коши (6) при $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$, $r = \overline{1, N}$ имеет единственное решение $u_r^{(0)}(t)$, оценивая которое при помощи неравенства Гронуолла-Беллмана, получим

$$\|u_r^{(0)}(t)\| \leq (e^{\int_{t_{r-1}}^t \alpha(\tau) d\tau} - 1) \|\lambda_r^{(0)}\| + \sup_{t \in [t_{r-1}, t_r]} \|f(t)\| h_r e^{\int_{t_{r-1}}^t \alpha(\tau) d\tau}, \quad r = \overline{1, N}.$$

Далее определим $\lambda^{(1)}$ из уравнения

$$H^{-1}Q_\nu(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta))\lambda = -H^{-1}F_\nu(\theta) - H^{-1}G_\nu(u^{(0)}, \theta)$$

и оценим $\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|$

$$\begin{aligned} \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\| &\leq \gamma \cdot \|H^{-1}G_\nu(u^{(0)}, \theta)\| \leq \\ &\leq \gamma \cdot \frac{\delta_1}{\mu\theta} \max\{h_N(\theta)\|C\| \int_{t_{N-1}}^{t_N} \alpha(\tau_1) \int_{t_{N-1}}^{\tau_1} \alpha(\tau_2) \dots \int_{t_{N-1}}^{\tau_{\nu-1}} \alpha(\tau_\nu) u_N^{(0)}(\tau_\nu) d\tau_\nu \dots d\tau_2 d\tau_1, \\ &\quad \max_{s=\overline{1, N-1}} \int_{t_{N-1}}^{t_s} \alpha(\tau_1) \int_{t_{N-1}}^{\tau_1} \alpha(\tau_2) \dots \int_{t_{N-1}}^{\tau_{\nu-1}} \alpha(\tau_\nu) u_N^{(0)}(\tau_\nu) d\tau_\nu \dots d\tau_2 d\tau_1\} \leq \\ &\leq \gamma \frac{\delta_1}{\mu\theta} \max(1, h_N(\theta)\|C\|) \frac{\theta^\nu}{\nu!} \max_{r=\overline{1, N}} \sup_{t \in [t_{r-1}, t_r]} \|u_r^{(0)}(t)\|. \end{aligned} \quad (27)$$

Продолжая итерационный процесс, находим последовательность систем пар $(\lambda_r^{(k)}, u_r^{(k)}(t))$, $r = \overline{1, N}$, $k = 1, 2, \dots$

Снова воспользовавшись неравенством Гронуолла-Беллмана, при каждом r , $r = \overline{1, N}$ оценим разность решений задач Коши через разность параметров

$$\|u_r^{(k)}(t) - u_r^{(k-1)}(t)\| \leq (e^{\int_{t_{r-1}}^t \alpha(\tau) d\tau} - 1) \|\lambda_r^{(k)} - \lambda_r^{(k-1)}\|. \quad (28)$$

Так как $\lambda^{(k+1)}, \lambda^{(k)}$ являются решениями уравнения

$$H^{-1}Q_\nu(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_N(\theta))\lambda = -H^{-1}F_\nu(\theta) - H^{-1}G_\nu(u, \theta)$$

при $u = u^{(k)}, u = u^{(k-1)}$, то

$$\begin{aligned} \|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\| &\leq \gamma \cdot \|H^{-1}G_\nu(u^{(k)}, \theta) - H^{-1}G_\nu(u^{(k-1)}, \theta)\| \leq \\ &\leq \frac{\gamma\delta_1}{\mu\theta} \max(1, h_N(\theta)\|C\|) \cdot \left(e^\theta - \sum_{j=0}^{n\theta} \frac{\theta^j}{j!} \right) \|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\| = \\ &= \tilde{q}_\nu(\theta) \|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\|, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (29)$$

где $\tilde{q}_\nu(\theta) = \frac{\gamma\delta_1}{\mu\theta} \max(1, h_N(\theta)\|C\|) \left(e^\theta - 1 - \theta - \dots - \frac{\theta^\nu}{\nu!} \right)$.

Выбирая θ таким образом, чтобы $\tilde{q}_\nu(\theta) < 1$, в силу неравенств (28), (29) получим, что последовательность $(\lambda_r^{(k)}, u_r^{(k)}(t))$ сходится к решению задачи (6)–(8) $(\lambda_r^*, u_r^*(t))$, $r = \overline{1, N}$, единственность которого можно доказать методом от противного.

Аналогично [3] можно показать, что задача (1),(2) имеет единственное решение $x^*(t)$, для которого будет справедлива следующая оценка

$$\|x^*\|_1 \leq \|u^*[t] - u^{(0)}[t]\|_2 + \|u^{(0)}[t]\|_2 + \|\lambda^* - \lambda^{(0)}\| + \|\lambda^{(0)}\|.$$

Переходя к пределу при $\theta \rightarrow 0$ в правой части последнего неравенства, учитывая оценки (26), (27) и

$$\|\lambda^* - \lambda^{(0)}\| \leq \frac{1}{1 - \tilde{q}_\nu(\theta)} \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|,$$

$$\|u^*[t] - u^{(0)}[t]\|_2 \leq (e^\theta - 1) \|\lambda^* - \lambda^{(0)}\|,$$

установим, что

$$\|x^*\|_1 \leq \gamma \max\{\|f\|_1, \|d\|\},$$

т.е. $K = \gamma$. Теорема 4 доказана.

Цитированная литература

1. **Самойленко А. М., Ронто Н. И.** Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. Киев, 1986.
2. **Джумабаев Д. С.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50–66.
3. **Кокотова Е. В.** // Изв. МОН РК, НАН РК. Сер. физ.-матем. 2003. № 1. С. 84–92.
4. **Утешова Р. Е.** // Математический журнал. 2003. Т. 3, № 2 (8). С. 75–83.
5. **Треногин В. А.** Функциональный анализ. М., 1980.

Поступила в редакцию 01.06.2004г.

УДК 519.624

О корректности линейной двухточечной краевой задачи

К. Ж. НАЗАРОВА

Институт Математики МОиН РК
480100 г.Алматы ул. Пушкина, 12 anar@math.kz

Для одного варианта метода параметризации в терминах данных линейной двухточечной краевой задачи установлены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости.

На отрезке $[0, T]$ рассматривается линейная двухточечная краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in [0, T], \quad x \in R^n, \quad (1)$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in R^n, \quad \|x\| = \max_{i=1, n} |x_i|, \quad (2)$$

где матрица $A(t)$, вектор-функция $f(t)$ непрерывны на $[0, T]$, $\|A(t)\| \equiv \max_{i=1, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}(t)| \leq \alpha$, $\alpha - const$.

Исследованию двухточечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений посвящены работы многих авторов [1–5]. В работе [6] двухточечная краевая задача (1),(2) исследована методом параметризации, где после разбиения интервала $[0, T] = \bigcup_{r=1}^N [(r-1)h, rh]$ дополнительные параметры вводились, как значения искомой функции на левых концах интервалов $[(r-1)h, rh]$. Предложен алгоритм нахождения решения, основанный на сведении задачи (1),(2) к эквивалентной многоточечной краевой задаче с параметром. В терминах обратимости матрицы $Q_\nu(h)$, составляемой по исходным данным, получены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости. В работе [7] применяется вариант метода параметризации, где дополнительные параметры являются значениями искомого решения в серединах интервалов длины $2h > 0$. Получены достаточные условия сходимости алгоритма и однозначной разрешимости рассматриваемой задачи. В настоящей статье устанавливается, что эти условия являются также и необходимыми для корректной разрешимости задачи (1),(2).

Возьмем $h > 0 : 2Nh = T$ и произведем разбиение $[0, T] = \bigcup_{r=1}^N [2(r-1)h, 2rh]$. Сужение функции $x(t)$ на r -й интервал $[2(r-1)h, 2rh]$ обозначим через $x_r(t)$, $r = \overline{1, N}$, т.е. $x_r(t) -$

Keywords: *parametrization method, two-point boundary-value problem, ordinary differential equation*

2000 Mathematics Subject Classification: 34B05

© К. Ж. Назарова, 2004.

вектор-функция размерности n , определенная и совпадающая с $x(t)$ на $[2(r-1)h, 2rh)$. Задача (1),(2) сведется к эквивалентной многоточечной краевой задаче

$$\frac{dx_r}{dt} = A(t)x_r + f(t), \quad t \in [2(r-1)h, 2rh), \quad r = \overline{1, N}, \quad (3)$$

$$Bx_1(0) + C \lim_{t \rightarrow T-0} x_N(t) = d, \quad (4)$$

$$\lim_{t \rightarrow 2sh-0} x_s(t) = x_{s+1}(2sh), \quad s = \overline{1, N-1}, \quad (5)$$

где (5) — условия сшивания решения во внутренних точках разбиения интервала $[0, T)$. Если $x(t)$ — решение задачи (1),(2), то $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))'$ — система сужений функции $x(t)$ — является решением задачи (3)–(5). Действительно, каждая функция $x_r(t)$ системы сужений $x(t)$ удовлетворяет на $[2(r-1)h, 2rh), r = \overline{1, N}$ дифференциальному уравнению (3) в силу (1). Условия сшивания (5) имеют место ввиду непрерывности функции $x(t)$ на $[0, T]$, а соотношение (4) является следствием (2). Наоборот, пусть $\tilde{x}[t] = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_N(t))'$ — решение задачи (3)–(5). С помощью функции $\tilde{x}_r(t)$ на $[0, T]$ определим функцию $\tilde{x}(t)$ равенствами $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_r(t), t \in [2(r-1)h, 2rh), r = \overline{1, N}, \tilde{x}(T) = \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{x}_N(t)$. Ввиду (3)–(5) функция $\tilde{x}(t)$ непрерывна на $[0, T]$ и удовлетворяет краевому условию (2):

$$B\tilde{x}(0) + C\tilde{x}(T) = B\tilde{x}_1(0) + C \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{x}_N(t) = d.$$

В силу (3) $\tilde{x}(t)$ имеет непрерывную производную и удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) на $[2(r-1)h, 2rh), r = \overline{1, N}$

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} \equiv A(t)\tilde{x}(t) + f(t), \quad t \in [2(r-1)h, 2rh), \quad r = \overline{1, N}.$$

В точках $t = 2(r-1)h, r = \overline{1, N}$ функция $\tilde{x}(t)$ имеет правостороннюю производную. Из (3) и непрерывности $A(t), f(t), \tilde{x}(t)$ на $[0, T]$ следует, что функция $\tilde{x}(t)$ имеет непрерывную производную в точках $t = 2(r-1)h, r = \overline{2, N}$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) при всех $t \in [0, T]$. Через λ_r обозначим значение функции $x_r(t), r = \overline{1, N}$ в точке $t = (2r-1)h$ и на каждом интервале $[2(r-1)h, 2rh)$ произведем замену $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$. Тогда задача (3)–(5) сведется к эквивалентной многоточечной краевой задаче с параметром

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)[u_r + \lambda_r] + f(t), \quad u_r[(2r-1)h] = 0, \quad t \in [2(r-1)h, 2rh), \quad r = \overline{1, N}, \quad (6)$$

$$B[u_1(0) + \lambda_1] + C \lim_{t \rightarrow T-0} u_N(t) + C\lambda_N = d, \quad (7)$$

$$\lambda_s + \lim_{t \rightarrow 2sh-0} u_s(t) = \lambda_{s+1} + u_{s+1}(2sh), \quad s = \overline{1, N-1}. \quad (8)$$

Если пара $(\lambda, u[t])$, где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)' \in R^{nN}, u[t] = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t))'$ — решение задачи (6)–(8), то система функций $x[t] = (\lambda_1 + u_1(t), \lambda_2 + u_2(t), \dots, \lambda_N + u_N(t))'$ будет решением задачи (3)–(5). И, наоборот, если $\tilde{x}[t] = (\tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_N(t))'$ — решение задачи (3)–(5), то пара $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$, где $\tilde{\lambda} = (\tilde{x}_1(h), \dots, \tilde{x}_N((2N-1)h))', \tilde{u}[t] = (\tilde{x}_1(t) - \tilde{x}_1(h), \tilde{x}_2(t) - \tilde{x}_2(3h), \dots, \tilde{x}_N(t) - \tilde{x}_N((2N-1)h))'$, будет решением задачи (6)–(8). Однако задача (6)–(8) от задачи (3)–(5) отличается тем, что здесь появились начальные условия в точках $t = (2r-1)h, r = \overline{1, N}$, которые позволяют определить $u_r(t), t \in [2(r-1)h, 2rh), r = \overline{1, N}$ из интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$u_r(t) = \int_{(2r-1)h}^t A(\tau)[u_r(\tau) + \lambda_r]d\tau + \int_{(2r-1)h}^t f(\tau)d\tau. \quad (9)$$

На основе (9) получим представление функции $u_r(t)$ в виде

$$u_r(t) = D_{\nu,r}(t)\lambda_r + F_{\nu,r}(t) + G_{\nu,r}(u, t), \quad t \in [2(r-1)h, 2rh), \quad r = \overline{1, N}, \quad (10)$$

где

$$D_{\nu,r}(t) = \sum_{j=0}^{\nu-1} \int_{(2r-1)h}^t A(\tau_1) \dots \int_{(2r-1)h}^{\tau_j} A(\tau_{j+1}) d\tau_{j+1} \dots d\tau_1,$$

$$F_{\nu,r}(t) = \int_{(2r-1)h}^t f(\tau_1) d\tau_1 + \sum_{j=1}^{\nu-1} \int_{(2r-1)h}^t A(\tau_1) \dots \int_{(2r-1)h}^{\tau_{j-1}} A(\tau_j) \int_{(2r-1)h}^{\tau_j} f(\tau_{j+1}) d\tau_{j+1} \dots d\tau_1, \quad \tau_0 = t,$$

$$G_{\nu,r}(u, t) = \int_{(2r-1)h}^t A(\tau_1) \dots \int_{(2r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_{\nu}) u(\tau_{\nu}) d\tau_{\nu} \dots d\tau_1.$$

Используя (10), находим

$$\lim_{t \rightarrow 2rh-0} u_r(t) = D_{\nu,r}(2rh)\lambda_r + F_{\nu,r}(2rh) + G_{\nu,r}(u, 2rh), \quad r = 1, 2, \dots, N, \quad (11)$$

$$u_{s+1}(2sh) = D_{\nu,s+1}(2sh)\lambda_{s+1} + F_{\nu,s+1}(2sh) + G_{\nu,s+1}(u, 2sh), \quad s = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (12)$$

Подставляя в граничные условия (7) и условия склеивания (8) вместо $\lim_{t \rightarrow 2rh-0} u_r(t)$, $r = \overline{1, N}$ и $u_{s+1}(2sh)$ им соответствующие правые части (11), (12), получим линейную систему уравнений относительно неизвестных параметров $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$:

$$B[I + D_{\nu,1}(0)]\lambda_1 + C[I + D_{\nu,N}(2Nh)]\lambda_N =$$

$$= d - BF_{\nu,1}(0) - CF_{\nu,N}(2Nh) - BG_{\nu,1}(u, 0) - CG_{\nu,N}(u, 2Nh), \quad (13)$$

$$[I + D_{\nu,s}(2sh)]\lambda_s + [-I - D_{\nu,s+1}(2sh)]\lambda_{s+1} =$$

$$= -F_{\nu,s}(2sh) + F_{\nu,s+1}(2sh) - G_{\nu,s}(u, 2sh) + G_{\nu,s+1}(u, 2sh), \quad s = \overline{1, N-1}. \quad (14)$$

Умножая обе части (13) на $2h > 0$, перепишем полученную линейную систему уравнений для определения неизвестных параметров $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)' \in R^{nN}$ в виде

$$Q_{\nu}(2h)\lambda = -F_{\nu}(2h) - G_{\nu}(u, 2h), \quad \lambda \in R^{nN}, \quad (15)$$

где

$$Q_{\nu}(2h) =$$

$$= \begin{pmatrix} B[I + D_{\nu,1}(0)]2h & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C[I + D_{\nu,N}(2Nh)]2h \\ I + D_{\nu,1}(2h) & -I - D_{\nu,2}(2h) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I + D_{\nu,2}(4h) & -I - D_{\nu,2}(4h) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & I + D_{\nu,N-1}(2(N-1)h) & -I - D_{\nu,N}(2(N-1)h) \end{pmatrix},$$

$$F_{\nu}(2h) = (-2hd + 2hBF_{\nu,1}(0) + 2hCF_{\nu,N}(2Nh), F_{\nu,1}(2h) - F_{\nu,2}(2h), \dots, F_{\nu,N-1}(2(N-1)h) -$$

$$-F_{\nu,N}(2(N-1)h))' \in R^{nN},$$

$$G_\nu(u, 2h) = (2hBG_{\nu,1}(u, 0) + 2hCG_{\nu,N}(u, 2Nh), G_{\nu,1}(u, 2h) - G_{\nu,2}(u, 2h), \dots, G_{\nu,N-1}(u, 2(N-1)h) - G_{\nu,N}(u, 2(N-1)h))' \in R^{nN}.$$

Если известны параметры $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)'$, то систему функций $u[t] = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t))'$ определим из интегральных уравнений (9). И, наоборот, если известна система функций $u[t]$, то из уравнения (15) определим значения параметра $\lambda \in R^{nN}$. Однако неизвестными являются как λ , так и $u[t]$, поэтому для нахождения пары $(\lambda, u[t])$ — решение задач (6)–(8) — применяем метод последовательных приближений.

Шаг 0. Предполагая, что при некоторых $h > 0 : 2Nh = T, \nu (\nu = 1, 2, \dots)$ матрица $Q_\nu(2h) : R^{nN} \rightarrow R^{nN}$ обратима, находим нулевое приближение по параметру $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)})' \in R^{nN}$ из уравнения $Q_\nu(2h)\lambda = -F_\nu(2h)$, т.е. $\lambda^{(0)} = -[Q_\nu(2h)]^{-1}F_\nu(2h)$.

На интервалах $[2(r-1)h, 2rh)$, решая задачу Коши (6) при $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$, находим функции $u_r^{(0)}(t) \quad r = \overline{1, N}$.

Шаг 1. Подставляя найденное $u^{(0)}[t] = (u_1^{(0)}(t), u_2^{(0)}(t), \dots, u_N^{(0)}(t))'$ в правую часть (15), определяем первое приближение по параметру $\lambda^{(1)} = (\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_N^{(1)})' \in R^{nN}$ из уравнения $Q_\nu(2h)\lambda = -F_\nu(2h) - G_\nu(u^{(0)}, 2h)$. В силу обратимости матрицы $Q_\nu(2h)$ получим $\lambda^{(1)} = -[Q_\nu(2h)]^{-1} \times [F_\nu(2h) + G_\nu(u^{(0)}, 2h)]$. Решая задачу Коши (6) при $\lambda_r = \lambda_r^{(1)}$, на интервалах $[2(r-1)h, 2rh)$ находим функции $u_r^{(1)}(t), r = \overline{1, N}$. И т.д.

Через $C([0, T], R^n)$ обозначим пространство непрерывных функций $x : [0, T] \rightarrow R^n$ с нормой $\|x\|_1 = \max_{t \in [0, T]} |x(t)|$.

Достаточные условия осуществимости и сходимости алгоритма построения решения, а также оценка разности между точным и приближенным решением установлены в статье [7]. Из этих утверждений следует

Теорема 1. Пусть при некоторых $h > 0 : 2Nh = T$ и $\nu (\nu = 1, 2, \dots)$ матрица $Q_\nu(2h) : R^{nN} \rightarrow R^{nN}$ обратима и выполняются условия:

- а) $\|[Q_\nu(2h)]^{-1}\| \leq \gamma_\nu(h)$,
- б) $q_\nu(h) = \gamma_\nu(h) \cdot 2 \max(1, 2h \max(\|B\|, \|C\|)) [e^{\alpha h} - 1 - \alpha h - \dots - \frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!}] < 1$.

Тогда краевая задача (1),(2) имеет единственное решение $x^*(t)$ и для него справедлива оценка

$$\max \|x^*\|_1 \leq M_\nu(h) \max(\|d\|, \|f\|_1), \tag{16}$$

где

$$M_\nu(h) = \left\{ \gamma_\nu(h)(e^{\alpha h} - 1) \times 2 \max \left[1 + 2h \max(\|B\|, \|C\|) \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h)^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h)^j}{j!} \right] + e^{\alpha h} \right\} h \times \\ \times \frac{\gamma_\nu(h)}{1 - q_\nu(h)} \times 2 \max(1, 2h \max(\|B\|, \|C\|)) \frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!} (e^{\alpha h} + 1) + \\ + \gamma_\nu(h) \times 2 \max \left[1 + 2h \max(\|B\|, \|C\|) \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h)^j}{j!}; \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h)^j}{j!} \right] h.$$

Доказательство. Существование и единственность пары $(\lambda^*, u^*[t])$ — решения многоточечной краевой задачи с параметром (6)–(8) показано в статье [7]. Из эквивалентности задач (1),(2) и (6)–(8) следует, что краевая задача (1),(2) также имеет единственное решение

$x^*(t)$, полученное склеиванием систем функций $(\lambda_r^* + u_r^*(t))$ на $[0, T]$. Из неравенств $\|\lambda^*\| \leq \|\lambda^* - \lambda^{(0)}\| + \|\lambda^{(0)}\|$, $\|u^*\|_2 \leq \|u^* - u^{(0)}\|_2 + \|u^{(0)}\|_2$ и оценок (12),(13) (при $k = 0$), (14),(15) из [7], получим справедливость (16). Теорема доказана.

Чтобы доказать необходимость условий теоремы 1 для однозначной разрешимости задачи (1), (2), мы построим уравнение относительно параметров λ , решение которого совпадает со значениями точного решения задач (1), (2) в точках $t = (2r - 1)h$, $r = \overline{1, N}$. Из непрерывности матрицы $A(t)$, вектор-функций $f(t)$, $x(t)$ на $[0, T]$ следует, что $\|A(t)\| \leq \alpha$, $\|f(t)\| \leq \beta$, $\|x(t)\| \leq \beta_1$. Так как $\lambda_r = x[(2r - 1)h]$, то $\|\lambda\| \leq \beta_1$. Вектор-функцию $u_r(t)$ оценим по лемме Гронуолла-Беллмана: $\|u_r(t)\| \leq [e^{\alpha h} - 1]\beta_1 + h\beta e^{\alpha h} \leq \beta_2$. Нетрудно установить равномерную на $[2(r - 1)h, 2rh)$ сходимость $D_{\nu, r}(t)$, $F_{\nu, r}(t)$ при $\nu \rightarrow \infty$ к функциям

$$D_{*, r}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{(2r-1)h}^t A(\tau_1) \dots \int_{(2r-1)h}^{\tau_j} A(\tau_{j+1}) d\tau_{j+1} \dots d\tau_1, \quad t \in [2(r-1)h, 2rh), \quad r = \overline{1, N}, \quad (17)$$

$$F_{*, r}(t) = \int_{(2r-1)h}^t f(\tau_1) d\tau_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{(2r-1)h}^t A(\tau_1) \dots \int_{(2r-1)h}^{\tau_{j-1}} A(\tau_j) \int_{(2r-1)h}^{\tau_j} f(\tau_{j+1}) d\tau_{j+1} \dots d\tau_1, \\ t \in [(2r-1)h, 2rh), \quad r = \overline{1, N}. \quad (18)$$

Функция $G_{\nu, r}(u, 2h)$ стремится к нулю в силу оценки

$$\|G_{\nu, r}(u, 2h)\| \leq \max(1, 2h \max(\|B\|, \|C\|)) [\max_{r=1, N} \|G_{\nu, r}^-\| + \max_{r=1, N} \|G_{\nu, r}^+\|] \leq \\ \leq 2 \max\{1, 2h \max(\|B\|, \|C\|)\} \frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!} \beta_2. \quad (19)$$

Переходя к пределу при $\nu \rightarrow \infty$ в (10),(15) и разделив обе части (15) на $2h > 0$, получим

$$u_r(t) = D_{*, r}(t)\lambda_r + F_{*, r}(t), \quad t \in [2(r-1)h, 2rh), \quad r = \overline{1, N}, \quad (20)$$

$$\frac{1}{2h} Q_*(2h)\lambda = -F_*(A, B, C, f, d, h), \quad (21)$$

где $Q_*(2h) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} Q_\nu(2h)$, $F_*(A, B, C, f, d, h) = \frac{1}{2h} \lim_{\nu \rightarrow \infty} F_\nu(2h)$,

$$F_*(A, B, C, f, d, h) = (-d + BF_{*, 1}(0) + CF_{*, N}(2Nh), \dots, \frac{1}{2h} [F_{*, N-1}(2(N-1)h) - F_{*, N}(2(N-1)h)]).$$

Пусть $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_N)' \in R^{nN}$ — решение системы уравнений

$$B[I + D_{*, 1}(0)]\tilde{\lambda}_1 + C[I + D_{*, N}(2Nh)]\tilde{\lambda}_N = d - BF_{*, 1}(0) - CF_{*, N}(2Nh), \quad (22)$$

$$\frac{1}{2h} [I + D_{*, s}(2sh)]\tilde{\lambda}_s + \frac{1}{2h} [-I - D_{*, s+1}(2sh)]\tilde{\lambda}_{s+1} = \\ = -\frac{1}{2h} F_{*, s}(2sh) + \frac{1}{2h} F_{*, s+1}(2sh), \quad s = \overline{1, N-1}, \quad (23)$$

и $\tilde{u}[t] = (\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t), \dots, \tilde{u}_N(t))'$ — система решений задач Коши (6) на $[2(r-1)h, 2rh]$ при $\lambda_r = \tilde{\lambda}_r, r = \overline{1, N}$. Так как $\tilde{u}_r(t)$ — решение задачи Коши (6) на $[2(r-1)h, 2rh), r = \overline{1, N}$ при $\lambda_r = \tilde{\lambda}_r$, то из равенства (20) и единственности решения задачи Коши (6) при фиксированных значениях параметров λ_r следует, что

$$\tilde{u}_r(t) = D_{*,r}(t)\tilde{\lambda}_r + F_{*,r}(t), \quad t \in [2(r-1)h, 2rh), \quad r = \overline{1, N}. \quad (24)$$

Произведем преобразование в системе уравнений (22),(23) и перепишем систему с учетом равенства (24)

$$B\tilde{\lambda}_1 + B\tilde{u}_1(0) + C\tilde{\lambda}_N + C \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{u}_N(t) = d,$$

$$\tilde{\lambda}_s + \lim_{t \rightarrow 2sh-0} \tilde{u}_s(t) = \tilde{\lambda}_{s+1} + \tilde{u}_{s+1}(2sh), \quad s = \overline{1, N-1}.$$

Отсюда следует, что пара $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$ удовлетворяет краевому условию (7) и условию склеивания (8). Так как $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_N)$ — решение уравнения (21), а соответствующие им $\tilde{u}_r(t)$ — решения задач Коши (6) на $[2(r-1)h, 2rh)$ при $\lambda_r = \tilde{\lambda}_r, r = \overline{1, N}$, то, склеивая систему функции $(\tilde{\lambda}_r + \tilde{u}_r(t))$ на $[0, T]$, получаем $\tilde{x}(t)$ — решение краевой задачи (1),(2).

Теперь пусть $x^*(t)$ — решение краевой задачи (1),(2). Тогда пара $(\lambda^*, u^*[t])$ с элементами $\lambda_r^* = x^*[(2r-1)h], u_r^*(t) = x^* - x^*[(2r-1)h], t \in [(2r-1)h, 2rh]$ будет решением задачи (6)–(8) и, следовательно, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{du_r^*}{dt} = A(t)(u_r^* + \lambda_r^*) + f(t), \quad u_r^*[(2r-1)h] = 0, \quad t \in [2(r-1)h, 2rh), \quad r = \overline{1, N}, \quad (25)$$

краевому условию

$$B[u_1^*(0) + \lambda_1^*] + C \lim_{t \rightarrow T-0} u_N^*(t) + C\lambda_N^* = d \quad (26)$$

и условию склеивания

$$\lambda_s^* + \lim_{t \rightarrow 2sh-0} u_s^*(t) = \lambda_{s+1}^* + u_{s+1}^*(2sh), \quad s = \overline{1, N-1}. \quad (27)$$

Из (25) получаем

$$u_r^*(t) = \int_{(2r-1)h}^t A(\tau)[u_r^*(\tau) + \lambda_r^*]d\tau + \int_{(2r-1)h}^t f(\tau)d\tau, \quad t \in [2(r-1)h, 2rh), r = \overline{1, N}. \quad (28)$$

Вместо $u_r^*(\tau)$ подставляя соответствующую правую часть равенства (28) и повторяя этот процесс ν ($\nu = 1, 2, \dots$) раз, получим представление функции $u_r^*(t)$ вида

$$u_r^*(t) = D_{\nu,r}(t)\lambda_r^* + F_{\nu,r}(t) + G_{\nu,r}(u^*, t), \quad t \in [2(r-1)h, 2rh), \quad r = \overline{1, N}. \quad (29)$$

Определив значения функции $u_r^*(t), u_{s+1}^*(2sh)$ при $t \rightarrow 2rh - 0$, подставим их в граничное условие (26) и условия склеивания (27). Полученную систему уравнений относительно параметров $\lambda_r^*, r = \overline{1, N}$ запишем в виде

$$Q_\nu(2h)\lambda^* = -F_\nu(2h) - G_\nu(u^*, 2h), \quad \lambda^* \in R^{nN}. \quad (30)$$

Таким образом, пара $(\lambda^*, u^*[t])$ удовлетворяет уравнениям (29),(30) при любом ν ($\nu = 1, 2, \dots$). Так как

$$\|G_{\nu,r}(u^*, 2h)\| \leq 2 \max\{1, 2h \max(\|B\|, \|C\|)\} \frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!} \beta_2, \quad (31)$$

$D_{\nu,r}(t), F_{\nu,r}(t)$ равномерно сходятся на $[2(r-1)h, 2rh]$ к $D_{*,r}(t), F_{*,r}(t)$ из (17), (18), то переходя к пределу при $\nu \rightarrow \infty$ на $[2(r-1)h, 2rh]$ в равенствах (29), (30) и разделив обе части (30) на $2h > 0$, получим

$$u_r^*(t) = D_{*,r}(t)\lambda_r^* + F_{*,r}(t), \quad t \in [2(r-1)h, 2rh], \quad r = \overline{1, N}, \quad (32)$$

$$\frac{1}{2h}Q_*(2h)\lambda^* = -F_*(A, B, C, f, d, h), \quad (33)$$

где $Q_*(2h) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} Q_\nu(2h)$, $F_*(A, B, C, f, d, h) = \frac{1}{2h} \lim_{\nu \rightarrow \infty} F_\nu(2h)$.

Итак, мы показали, что существование решения задачи (1),(2) эквивалентно существованию решения уравнения (21) и при этом вектор $\lambda^* \in R^{nN}$, составленный из значений точного решения задачи (1),(2) в точках $t = (2r-1)h$, $r = \overline{1, N}$, является решением уравнения (21).

Следующее утверждение устанавливает необходимое и достаточное условия однозначной разрешимости при фиксированном $h > 0 : 2Nh = T$.

Теорема 2. *Краевая задача (1),(2) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда для любого $h > 0 : 2Nh = T$ существует $\nu = \nu(h)$, при котором матрица $Q_\nu(2h) : R^{nN} \rightarrow R^{nN}$ обратима и выполняются неравенства (а),(б) теоремы 1.*

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 1. Докажем необходимость условий теоремы. Пусть краевая задача (1),(2) однозначно разрешима. Возьмем шаг $h > 0 : 2Nh = T$. Рассмотрим матрицу $Q_*(2h) : R^{nN} \rightarrow R^{nN}$ и докажем ее обратимость. Для этого достаточно установить, что уравнение $Q_*(2h)\lambda = 0$ имеет только нулевое решение. Допустим обратное: найдется $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_N)' \in R^{nN}$ такой, что $\|\tilde{\lambda}\| \neq 0$, $Q_*(2h)\tilde{\lambda} = 0$. Так как $F_*(A, B, C, 0, 0, h) = 0$, то $\frac{1}{2h}Q_*(2h)\tilde{\lambda} = -F_*(A, B, C, 0, 0, h)$. Тогда, как было показано выше, система пар $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$, где $\tilde{u}[t]$ — система решений задач Коши (6) на $[2(r-1)h, 2rh]$ при $\lambda_r = \tilde{\lambda}_r$, $r = \overline{1, N}$, является ненулевым решением однородной многоточечной краевой задачи с параметром и функция $\tilde{x}(t)$, определяемая равенствами $\tilde{x}(t) = \tilde{\lambda}_r + \tilde{u}_r(t)$, $t \in [2(r-1)h, 2rh]$, $r = \overline{1, N}$, $\tilde{x}(T) = \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{u}_N(t) + \tilde{\lambda}_N$, $\|\tilde{x}(t)\| \neq 0$, $t \in [0, T]$, будет ненулевым решением двухточечной краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A(t)x, \quad t \in [0, T], \\ Bx(0) + Cx(T) &= 0, \end{aligned}$$

что противоречит однозначной разрешимости задачи (1), (2). Поэтому $Q_*(2h)$ обратима и $\|[Q_*(2h)]^{-1}\| \leq \gamma_*(h)$. Так как

$$\|Q_*(2h) - Q_\nu(2h)\| \leq 2 \max(1, 2h \max(\|B\|, \|C\|)) \left[e^{\alpha h} - 1 - \alpha h - \dots - \frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!} \right]$$

и правая часть неравенства стремится к нулю при $\nu \rightarrow \infty$, то по теореме о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов [7, с.142] найдется $\bar{\nu} = \bar{\nu}(h)$ такое, что

$$\gamma_*(h) \times 2 \max\{1, 2h \max(\|B\|, \|C\|)\} \left[e^{\alpha h} - 1 - \alpha h - \dots - \frac{(\alpha h)^{\bar{\nu}}}{\bar{\nu}!} \right] < \frac{1}{2},$$

матрица $Q_{\bar{\nu}}(2h)$ обратима и выполняются соотношения

$$\|[Q_{\bar{\nu}}(2h)]^{-1}\| \leq \frac{\gamma_*(h)}{1 - \gamma_*(h)\|Q_*(2h) - Q_{\bar{\nu}}(2h)\|} < \frac{\gamma_*(h)}{1 - \frac{1}{2}} = 2\gamma_*(h) = \gamma_{\bar{\nu}}(h)$$

и

$$q_{\bar{\nu}}(h) = \gamma_{\bar{\nu}}(h) \times 2 \max(1, 2h \max(\|B\|, \|C\|)) \left[e^{\alpha h} - 1 - \alpha h - \dots - \frac{(\alpha h)^{\bar{\nu}}}{\bar{\nu}!} \right] < 1.$$

Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е. *Задача (1),(2) называется корректно разрешимой, если для любых $f(t)$, d она имеет единственное решение $x^*(t)$ и для него справедливо неравенство*

$$\max \|x^*\|_1 \leq K \max(\|d\|, \|f\|_1), \tag{34}$$

где K — const, независящая от d , $f(t)$. Число K называется константой корректной разрешимости задачи (1),(2).

Из оценки (16) следует, что при выполнении условий теоремы 1 задача (1),(2) корректно разрешима с константой $K = M_\nu(h)$. В теореме 2 было доказано, что если задача (1),(2) однозначно разрешима, то для любого $h > 0 : 2Nh = T$ существует $\nu = \nu(h)$ такое, что при этих h , ν выполняются условия теоремы 1. Из этих утверждений следует, что однозначная разрешимость задачи (1),(2) эквивалентна ее корректной разрешимости. В следующем утверждении устанавливается влияние изменения $h > 0$ на обратимость матрицы $Q_\nu(2h)$ и на числа $\gamma_\nu(h)$, $q_\nu(h)$ при фиксированном ν , $\nu = 1, 2, \dots$

Т е о р е м а 3. *Краевая задача (1),(2) корректно разрешима тогда и только тогда, когда для любого ν ($\nu = 1, 2, \dots$) существует $h > 0 : 2Nh = T$, $N = 1, 2, \dots$, при которых матрица $Q_\nu(2h) : R^{nN} \rightarrow R^{nN}$ обратима и выполняются неравенства (а),(б) теоремы 1.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность условий корректной разрешимости задачи (1),(2) следует из теоремы 1. Докажем необходимость. Пусть задача (1),(2) корректно разрешима с константой K . Тогда, как показано в теореме 2, матрица $Q_*(2h) : R^{nN} \rightarrow R^{nN}$ обратима при всех $h > 0 : 2Nh = T$. Докажем, что существует $h_0 > 0$, при котором для всех $h \in (0, h_0] : 2Nh = T$ справедлива оценка

$$\|[Q_*(2h)]^{-1}\| \leq \frac{\gamma}{2h}, \tag{35}$$

где γ — const, независящая от h . Для этого рассмотрим уравнение

$$Q_h \lambda \equiv \frac{1}{2h} Q_*(2h) \lambda = c, \quad \lambda, c \in R^{nN}. \tag{36}$$

Задавая $\varepsilon > 0$, выберем $h_0 = h_0(\varepsilon) > 0$, удовлетворяющим неравенству

$$\frac{1}{\alpha h_0} [e^{\alpha h_0} - 1 - \alpha h_0] \leq \frac{2\varepsilon}{(4 + \varepsilon)(2 + \varepsilon)}.$$

Тогда для любых $h \in (0, h_0] : 2Nh = T$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_N)' \in R^{nN}$ можно построить функцию $f_c(t) \in C([0, T], R^n)$, обладающую свойствами

$$\frac{1}{2h} F_{*,s}(2sh) = -c_{s+1}, \quad \frac{1}{2h} F_{*,N}(2Nh) = 0, \quad \|f_{c_{s+1}}\|_1 \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \|c_{s+1}\|, \quad s = \overline{1, N-1}.$$

Для этого по c_{s+1} , $s = \overline{1, N-1}$, используя лемму из [6,с.57], следует построить непрерывные на $[(2s-1)h, 2sh]$ функции $f_{s+1}(t)$, удовлетворяющие условиям

$$f_{s+1}[(2s-1)h] = f_{s+1}[(2s+1)h] = 0, \quad \max_{t \in [(2s-1)h, (2s+1)h]} \|f_{s+1}(t)\| \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \|c_{s+1}\|,$$

$$F(A, f_c) \equiv \frac{1}{2h} \int_{(2s-1)h}^{2sh} f_{s+1}(\tau_1) d\tau_1 +$$

$$+\frac{1}{2h} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{(2s-1)h}^{2sh} A(\tau_1) \dots \int_{(2s-1)h}^{\tau_{j-1}} A(\tau_j) \int_{(2s-1)h}^{\tau_j} f_{s+1}(\tau_{j+1}) d\tau_{j+1} \dots d\tau_1 = -c_{s+1}, \quad s = \overline{1, N}$$

и функцию $f_c(t)$ определить равенствами $f_c(t) = f_{c_{s+1}}(t)$, $t \in [(2s-1)h, 2sh]$, $s = \overline{1, N-1}$, $f_c(t) = 0$, $t \in [2(s-1)h, (2s-1)h]$, $s = \overline{1, N}$, и $f_c(t) = 0$, $t \in [T-h, T]$. Если теперь взять $d_c = c_1$, то $F_*(A, B, C, f_c, d_c, h) = -c$.

Из обратимости матрицы Q_h следует, что для любого $c \in R^{nN}$ уравнение (36) имеет единственное решение

$$\lambda_c = Q_h^{-1} \cdot c = -Q_h^{-1} F(A, B, C, f_c, d_c, h). \quad (37)$$

Если $x_c(t)$ — решение задачи (1),(2) при $f(t) = f_c(t)$, $d = d_c$, то вектор $\lambda_c = (\lambda_1^c, \lambda_2^c, \dots, \lambda_N^c)' \in R^{nN}$, составленный из значений $x_c(t)$ в точках разбиения $t = [(2r-1)h]$, $r = \overline{1, N}$, т.е. $\lambda_r^c = x_c[(2r-1)h]$, $r = \overline{1, N}$ будет единственным решением уравнения (36) и

$$\|Q_h^{-1}c\| = \|\lambda_c\| = \max_{r=\overline{1, N}} \|x_c[2r-1]h\| \leq \max \|x_c\|_1 \leq K \max(\|d_c\|, \|f_c\|_1). \quad (38)$$

Последнее неравенство в (38) следует из корректной разрешимости задачи (1), (2). Так как по построению $f_c(t)$ и по выбору d_c имеет место неравенство $\max(\|d_c\|, \|f_c\|_1) \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \|c\|$, то из (38) получим оценку $\|Q_h^{-1}c\| \leq (1 + \frac{\varepsilon}{2})K \|c\|$. Отсюда ввиду произвольности $c \in R^{nN}$ следует, что $\|Q_h^{-1}\| \leq (1 + \frac{\varepsilon}{2})K$. Поэтому для любого $h \in (0, h_0(\varepsilon)] : 2Nh = T$ справедлива оценка

$$\|[Q_*(2h)]^{-1}\| = \frac{1}{2h} \|Q_h^{-1}\| \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{K}{2h},$$

где K — константа корректной разрешимости задачи (1),(2), независящая от h , т.е. оценка (35) справедлива с $\gamma = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)K$. Зная, что

$$\|Q_*(2h) - Q_\nu(2h)\| \leq 2 \max\{1, 2h \max(\|B\|, \|C\|)\} \left[e^{\alpha h} - 1 - \alpha h - \dots - \frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!} \right],$$

выбираем $\bar{h} = \bar{h}(\varepsilon, \nu) \in (0, h_0] : 2N\bar{h} = T$, удовлетворяющим неравенству

$$\frac{(1 + \frac{\varepsilon}{2})K}{2\bar{h}} \times 2 \max\{1, 2\bar{h} \max(\|B\|, \|C\|)\} \left[e^{\alpha \bar{h}} - 1 - \alpha \bar{h} - \dots - \frac{(\alpha \bar{h})^\nu}{\nu!} \right] < \frac{\varepsilon}{2(1 + \varepsilon)}, \quad (39).$$

Тогда по теореме о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов [8, с.142] получим, что матрица $Q_\nu(2h)$ обратима при всех $h \in (0, \bar{h}] : 2Nh = T$ и для обратной матрицы справедлива оценка

$$\|[Q_\nu(2\bar{h})]^{-1}\| \leq (1 + \varepsilon) \frac{K}{2\bar{h}}. \quad (40)$$

Таким образом, при $h = \bar{h}$ получим обратимость матрицы $Q_\nu(2\bar{h})$ и справедливость неравенств

а) $\|[Q_\nu(2\bar{h})]^{-1}\| \leq \gamma_\nu(\bar{h})$, где $\gamma_\nu(\bar{h}) = \frac{(1 + \varepsilon)K}{2\bar{h}}$.

б) $q_\nu(\bar{h}) = \gamma_\nu(\bar{h}) \times 2 \max(1, 2\bar{h} \max(\|B\|, \|C\|)) \left[e^{\alpha \bar{h}} - 1 - \alpha \bar{h} - \dots - \frac{(\alpha \bar{h})^\nu}{\nu!} \right] < \frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon} < 1$.

Теорема доказана.

Цитированная литература

1. Самойленко А. М., Ронто Н. И. Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. Киев, 1986.

2. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений Под ред. Холла Дж., Уатта Дж. М., 1979.
3. Кигурадзе И. Т. // "Современные проблемы математики. Новейшие достижения." Т.30. М., 1987. С.3–103.
4. Джумабаев Д. С. // Вестн.АН КазССР. 1988. № 1. С.48–52.
5. Джумабаев Д. С. // Изв.АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1982. № 3. С.1–5.
6. Джумабаев Д. С. // Ж.вычисл.матем.и матем.физ. 1989. Т.29, № 1. С.50–66.
7. Назарова К. Ж. // Изв. НАН РК. Сер. физ.-матем. 2003. № 5. С. 105–118.
8. Треногин В. В. // Функциональный анализ. М. 1980.

Поступила в редакцию 22.07.2004 г.

УДК 517.946

ОБ ОДНОЙ КОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ ТИПА А.В.БИЦАДЗЕ

К. Н. ОСПАНОВ

Евразийский национальный университет им.Л.Н.Гумилева
473028 г.Астана ул.Мунайтпасова, 6 ospanov_k@mail.ru

Устанавливаются существование, единственность и принадлежность классу С.Л.Соболева решения полупериодической задачи на полосе для системы типа А.В.Бицадзе с неограниченными коэффициентами.

В области $D = \{(x, y) : -\pi < x < \pi, -\infty < y < \infty\}$ рассмотрим систему

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} - 2v_{xy} + \varphi(y)u_x + a(y)u = f(x, y), \\ 2u_{xy} + v_{xx} - v_{yy} + \psi(y)v_x + d(y)v = g(x, y), \end{cases}$$

где $f, g \in L_2(D)$. Функции $\varphi(y), a(y), \psi(y), d(y)$ предполагаем непрерывными. Если ввести обозначения

$$B_{xy} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} & -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{pmatrix}, \quad P_x(y) = \begin{pmatrix} \varphi(y)\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \psi(y)\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix},$$

$$Q(y) = \begin{pmatrix} a(y) & 0 \\ 0 & d(y) \end{pmatrix}, \quad w = (u, v), \quad F = (f, g),$$

то эта система записывается в виде

$$L_0 w = B_{xy} w + P_x(y) w + Q(y) w = F(x, y). \quad (1)$$

Через $C_{\pi,0}^\infty(D, R^2)$ обозначим класс функций $w = (u, v)$, бесконечно дифференцируемых в области D , непрерывно дифференцируемых в $\bar{D} = \{(x, y) : -\pi \leq x \leq \pi, -\infty < y < \infty\}$, финитных по y и удовлетворяющих условиям

$$w(-\pi, y) = w(\pi, y), \quad w_x(-\pi, y) = w_x(\pi, y). \quad (2)$$

Оператор L_0 , заданный на $C_{\pi,0}^\infty(D, R^2)$, допускает замыкание в норме пространства $L_2(D, R^2)$, которое обозначим через L .

Keywords: *half-periodical problem, Bitsadze type singular system, operator, stripe*

2000 Mathematics Subject Classification: 35J20

© К. Н. Оспанов, 2004.

Функцию $w(x, y) \in L_2(D, R^2)$ назовем решением задачи (1), (2), если найдется последовательность $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ функций из $C_{\pi,0}^\infty(D, R^2)$ такая, что $\|w_n - w\|_{2,D} \rightarrow 0, \|L_0w - F\|_{2,D} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Здесь и в дальнейшем $\|\cdot\|_{2,D}$ — норма в пространстве $L_2(D, R^2)$.

Система (1) является эллиптической по Петровскому. Важность изучения краевых задач для систем и существенное отличие их теории от теории краевых задач для одного эллиптического уравнения отмечена в монографии [1, с.180]. Задача с условиями вида (2) в случае одного уравнения смешанного типа исследована в работах [2–5]. Известные до сих пор результаты по системе (1) относятся к случаю ограниченной области. Однако развитые при этом методы не всегда применимы к сингулярным краевым задачам типа (1), (2). В работе получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2) и установлена оценка Соболевской нормы с весом решения.

Через $C, C_0, C_1, C_2, C'_1, C'_2$ и т.д. будем обозначать положительные постоянные, вообще говоря, разные в разных местах.

Лемма 1. Пусть функции $\varphi(y), a(y), \psi(y), d(y)$ непрерывны и

$$\inf_{y \in R} \{-\varphi(y), a(y), \psi(y), d(y)\} \geq \delta > 0. \tag{3}$$

Тогда для решения w задачи (1)–(2) имеет место оценка

$$\|w\|_{W_2^1(D, R^2)}^2 = \|w_x\|_{2,D}^2 + \|w_y\|_{2,D}^2 + \|w\|_{2,D}^2 \leq C\|F\|_{2,D}^2. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $w = (u, v) \in C_{\pi,0}^\infty(D, R^2)$. Положим $(-u, v) = \bar{w}$. Справедливы следующие соотношения

$$(L_0w, w) = \int_D [|w_y|^2 + a(y)|u|^2 + d(y)|v|^2] dydx - \int_D |w_x|^2 dydx, \tag{5}$$

$$(L_0w, \bar{w}_x) = \int_D [-\varphi(y)|u_x|^2 + \psi(y)|v_x|^2] dydx. \tag{6}$$

Из (6), применяя "неравенство Коши с ε " и учитывая условие (3), имеем

$$\frac{1}{2\varepsilon} \|L_0w\|_{2,D}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|w_x\|_{2,D}^2 \geq \delta \|w_x\|_{2,D}^2.$$

Выбрав $\varepsilon > 0$ так, что $\delta - \varepsilon = \delta_0 > 0$, (5) сначала умножим на 0.5ε , затем сложим с последним неравенством. Получим

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} (L_0w, w) + \frac{1}{2\varepsilon} \|L_0w\|_{2,D}^2 &\geq \frac{\varepsilon}{2} \int_D [|w_y|^2 + a(y)|u|^2 + d(y)|v|^2] dydx + \delta_0 \|w_x\|_{2,D}^2 \geq \\ &\geq \frac{\varepsilon}{2} \|w_y\|_{2,D}^2 + \delta_0 \|w_x\|_{2,D}^2 + \delta \|w\|_{2,D}^2. \end{aligned}$$

Отсюда при некотором $\gamma > 0$ вытекает оценка

$$\frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1}{2\gamma} \|L_0w\|_{2,D}^2 + \frac{\gamma}{2} \|w\|_{2,D}^2 \right) + \frac{1}{2\varepsilon} \|L_0w\|_{2,D}^2 \geq \frac{\varepsilon}{2} \|w_y\|_{2,D}^2 + \delta_0 \|w_x\|_{2,D}^2 + \delta \|w\|_{2,D}^2,$$

из которой, полагая $\delta - 0.25\varepsilon\gamma > 0$, получим неравенство

$$\left(\frac{\varepsilon}{4\gamma} + \frac{1}{2\varepsilon} \right) \|L_0w\|_{2,D}^2 \geq C_0 \|w\|_{W_2^1(D, R^2)}^2.$$

Отсюда следует оценка (4), которая по непрерывности распространяется на любое решение задачи (1), (2). Лемма доказана.

Пусть функции f, g в системе (1) представлены в виде

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(y)e^{inx}, \quad g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n(y)e^{inx}.$$

Решение $w = (u, v)$ задачи (1)–(2) будем искать как предел при $N \rightarrow \infty$ в норме $L_2(D, R^2)$ элементов

$$\left(\sum_{k=-N}^N u_k(y)e^{ikx}, \sum_{k=-N}^N v_k(y)e^{ikx} \right).$$

Тогда для определения $w_n = (u_n(y), v_n(y))$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) получим следующую систему

$$\begin{cases} -u_n'' - 2inv_n' + (-n^2 + in\varphi(y) + a(y))u_n = f_n(y), \\ -v_n'' + 2inu_n' + (-n^2 + in\psi(y) + d(y))v_n = g_n(y). \end{cases} \quad (7)$$

Замыкание в норме $L_2 \equiv L_2(R, R^2)$ оператора, соответствующего системе (7) и определенного на множестве $C_0^\infty(R, R^2)$ бесконечно дифференцируемых и финитных в R вектор-функций, обозначим через l_n . Пусть $\lambda \geq 0$. Тогда оператор $l_n + \lambda E$ (E здесь и в дальнейшем — единичная 2×2 -матрица) соответствует системе (7), где коэффициенты $a(y)$ и $d(y)$ заменены, соответственно, на $a(y) + \lambda$ и $d(y) + \lambda$.

Лемма 2. Пусть выполнено условие (3) и $\lambda \geq 0$. Тогда для всех $w = (u(y), v(y)) \in D(l_n + \lambda E)$ имеет место оценка

$$\|(l_n + \lambda E)w\|_2^2 \geq C_0 \int_R [|w'|^2 + (1 + n^2 + \lambda)|w|^2] dy, \quad (8)$$

где $\|\cdot\|_2$ — норма в пространстве L_2 .

Доказательство. Пусть $u, v \in C_0^\infty(R)$, $w = (u, v)$. Тогда

$$Re((l_n + \lambda E)w, w) = Re[(f, u) + (g, v)] \geq \int_R [|w'|^2 + (-n^2 + \delta + \lambda)|w|^2] dy.$$

С другой стороны, учитывая условие (3), имеем

$$\frac{\delta + 1}{\delta} Im[(-f_n, nu) + (g_n, nv)] \geq n^2(\delta + 1)\|w\|_2^2.$$

Суммируем два последних соотношения. К полученному выражению применим "неравенство Коши с ε ". Тогда

$$\begin{aligned} \int_R [|w'|^2 + (\lambda + (n^2 + 1)\delta)|w|^2] dy &\leq \frac{\delta + 1}{2\gamma\delta} \int_R [|f_n(y)|^2 + |g_n(y)|^2] dy + \\ &+ \frac{(\delta + 1)\gamma}{2\delta} n^2 \int_R |w(y)|^2 dy + \frac{3}{4\delta} \int_R |(l_n + \lambda E)w|^2 dy + \frac{\delta}{3} \int_R |w|^2 dy, \end{aligned}$$

откуда, выбрав соответствующим образом число γ , получим оценку (8), которая остается справедливой и для всех $w = (u, v) \in D(l_n + \lambda E)$. Лемма доказана.

Пусть $\Delta_j = (j - 1, j + 1)$, $j \in Z$. Через $l_{n,j} + \lambda E$ ($\lambda \geq 0$) обозначим сужение оператора $l_n + \lambda E$ на интервал Δ_j , определенного на функциях $w = (u, v)$, удовлетворяющих краевым условиям

$$u(j - 1) = u(j + 1) = 0, \quad v(j - 1) = v(j + 1) = 0. \tag{9}$$

Совершенно аналогично тому, как была получена оценка (8), устанавливается неравенство

$$\|(l_{n,j} + \lambda E)w\|_{L_2(\Delta_j, R^2)}^2 \geq C_1 \int_{\Delta_j} [|w'|^2 + (1 + \lambda)|w|^2] dy, \quad w \in D(l_{n,j} + \lambda E), \tag{10}$$

где постоянная C_1 не зависит от j, w, λ .

Лемма 3. Пусть выполнено условие (3) и $\lambda \geq 0$. Тогда для оператора $l_{n,j} + \lambda E$ существует обратный $(l_{n,j} + \lambda E)^{-1}$, определенный на всем $L_2(\Delta_j, R^2)$.

Доказательство. Существование оператора $(l_{n,j} + \lambda E)^{-1}$ обеспечивается оценкой (10).

Предположим противное. Пусть множество $R(l_{n,j} + \lambda E)$ неплотно в $L_2(\Delta_j, R^2)$. Тогда согласно общей теории операторов найдется такой ненулевой элемент $U = (p, s)$ из $L_2(\Delta_j, R^2)$, что $((l_{n,j} + \lambda E)w, U) = 0$ для всех $w \in D(l_{n,j} + \lambda E)$. Поскольку $D(l_{n,j} + \lambda E)$ плотно в $L_2(\Delta_j, R^2)$, из последнего равенства имеем $(l_{n,j} + \lambda E)^*U = 0$, где $(l_{n,j} + \lambda E)^*$ – сопряженный к $l_{n,j} + \lambda E$ оператор, т.е.

$$\begin{cases} -p'' + 2ins' + (-n^2 - in\varphi(y) + a(y) + \lambda)p = 0, \\ -s'' - 2inp' + (-n^2 - in\psi(y) + d(y) + \lambda)s = 0, \end{cases} \quad y \in \Delta_j.$$

Отсюда нетрудно получить включения $p'', s'' \in L_2(\Delta_j)$. Поэтому $p, s \in W_2^2(\Delta_j)$. Покажем, что функции p и s удовлетворяют граничным условиям (9). В самом деле

$$\begin{aligned} 0 = (w, (l_{n,j} + \lambda E)^*U) &= u'(j + 1)\bar{p}(j + 1) - u'(j - 1)\bar{p}(j - 1) + \\ &+ v'(j + 1)\bar{s}(j + 1) - v'(j - 1)\bar{s}(j - 1) + ((l_{n,j} + \lambda E)w, U) \end{aligned}$$

для всех $w = (u, v) \in D(l_{n,j} + \lambda E)$. Если учесть, что

$$(w, (l_{n,j} + \lambda E)^*U) = ((l_{n,j} + \lambda E)w, U),$$

то последнее соотношение имеет место только тогда, когда $p(j - 1) = p(j + 1) = 0$, $s(j - 1) = s(j + 1) = 0$. Таким образом, функции p, s принадлежат пространству С.Л.Соболева $\overset{\circ}{W}_2(\Delta_j)$. Тогда $U \in D(l_{n,j} + \lambda E)$ и справедлива оценка

$$0 = \|(l_{n,j} + \lambda E)^*U\|_{L_2(\Delta_j, R^2)} \geq C_0 \|U\|_{L_2(\Delta_j, R^2)},$$

которая устанавливается аналогично неравенству (8). Следовательно, $U = 0$. Получено противоречие, которое доказывает лемму.

Лемма 4. Пусть выполнено условие (3) и $\lambda > 0$. Тогда имеют место оценки

$$\|(l_{n,j} + \lambda E)^{-1}\|_{L_2(\Delta_j, R^2) \rightarrow L_2(\Delta_j, R^2)} \leq \frac{C'_0}{\sqrt{\lambda}}, \tag{11}$$

$$\left\| \frac{d}{dy} (l_{n,j} + \lambda E)^{-1} \right\|_{L_2(\Delta_j, R^2) \rightarrow L_2(\Delta_j, R^2)} \leq \frac{C'_1}{\lambda^{1/4}}. \tag{12}$$

Доказательство. Оценка (11) есть следствие неравенства (10). Далее имеют место оценки

$$|((l_{n,j} + \lambda E)w, w)| \geq C_2 \int_{\Delta_j} (|w'|^2 + (1 + \lambda)|w|^2) dy - C_3 \int_{\Delta_j} n^2 |w|^2 dy,$$

$$|((l_{n,j} + \lambda E)w, w)| \geq n^2 \delta \|w\|_{L_2(\Delta_j, R^2)}^2, w \in D(l_{n,j} + \lambda E).$$

Из них легко следуют неравенства $\|(l_{n,j} + \lambda E)w\|_{L_2(\Delta_j, R^2)} \|w\|_{L_2(\Delta_j, R^2)} \geq C_4 \|w'\|_{L_2(\Delta_j, R^2)}^2$ и $\|(l_{n,j} + \lambda E)w\|_{L_2(\Delta_j, R^2)} \geq C_5 \sqrt{1 + \lambda} \|w\|_{L_2(\Delta_j, R^2)}$, а из последних — оценка (12). Лемма доказана.

Пусть $\theta_1, \theta_2, \dots$ — неотрицательные функции из $C_0^\infty(R)$ такие, что

$$\sum_j \theta_j^2(y) = 1, \text{supp } \theta_j \in \Delta_j.$$

Согласно лемме 3 введем оператор K по формуле

$$KF = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j(y) (l_{n,j} + \lambda E)^{-1} \theta_j F, \quad F \in L_2.$$

Правая часть этого выражения в силу свойств функций $\theta_1, \theta_2, \dots$ в каждой точке $x \in R$ состоит из конечного числа (не более двух) слагаемых. Пусть

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $l_{n,j}$ — сужение оператора l_n , то $KF \in D(l_n + \lambda E)$ и

$$\begin{aligned} (l_n + \lambda E)KF &= \sum_{j=1}^{\infty} (l_n + \lambda E)[\theta_j (l_{n,j} + \lambda E)^{-1} \theta_j F] = F - \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j'' (l_{n,j} + \lambda E)^{-1} \theta_j F - \\ &- \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j' T (l_{n,j} + \lambda E)^{-1} \theta_j F - 2 \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j' \frac{d}{dy} (l_{n,j} + \lambda E)^{-1} \theta_j F = \\ &= F + M_{1,n}(\lambda)F + M_{2,n}(\lambda)F + M_{3,n}(\lambda)F. \end{aligned}$$

Положим $C_5 = \max_{k \in N} \max_{y \in R} (|\theta_k(y)|, |\theta_k'(y)|, |\theta_k''(y)|)$. С учетом свойств функций θ_k ($k = 1, 2, \dots$) и лемм 2, 3 имеем

$$\begin{aligned} \|M_{1,n}(\lambda)F\|_2^2 &\leq 10 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Delta_k} |\theta_k''(y) (l_{n,k} + \lambda E)^{-1} \theta_k(y) F(y)|^2 dy \leq \\ &\leq \frac{C_6}{\sqrt{\lambda}} \sum_{k=1}^{\infty} \|\theta_k F\|_{L_2(\Delta_k, R^2)}^2 = \frac{C_6}{\sqrt{\lambda}} \|F\|_2^2, \\ \|M_{2,n}(\lambda)F\|_2^2 &\leq 10 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Delta_k} |\theta_k'(y) T (l_{n,k} + \lambda E)^{-1} \theta_k(y) F(y)|^2 dy \leq \frac{C_7}{\sqrt{\lambda}} \|F\|_2^2, \\ \|M_{3,n}(\lambda)F\|_2^2 &\leq 20 C_5 \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{d}{dy} (l_{n,k} + \lambda E)^{-1} \theta_k F \right\|_{L_2(\Delta_k, R^2)}^2 \leq \frac{C_8}{\lambda^{1/4}} \|F\|_2^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|M_{1,n}(\lambda) + M_{2,n}(\lambda) + M_{3,n}(\lambda)\|_{L_2 \rightarrow L_2} = \|S_n(\lambda)\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq \frac{C_9}{\lambda^{1/4}}, \quad \lambda > 1.$$

Поэтому найдется число $\lambda_0 > 1$ такое, что при всех $\lambda \geq \lambda_0$ имеют место оценки

$$\|S_n(\lambda)\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq \|E + S_n(\lambda)\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq \frac{3}{2}, \quad \|(E + S_n(\lambda))^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq 2,$$

откуда следует, что $E + S_n(\lambda) : L_2 \rightarrow L_2$ — взаимно однозначное отображение. Полагая $(E + S_n(\lambda))F = h$, имеем $(l_n + \lambda E)K(E + S_n(\lambda))^{-1}h = h$, $h \in L_2, \lambda \geq \lambda_0$. Таким образом, оператор $l_n + \lambda E$ обратим при всех $\lambda \geq \lambda_0$, а его обратный $K(E + S_n(\lambda))^{-1}$ определен на всем пространстве L_2 . Отсюда и из оценки (10) на основании общих утверждений теории линейных операторов вытекает

Лемма 5. *Если выполнено условие (3), то для оператора l_n существует обратный l_n^{-1} , определенный на всем пространстве $L_2(R, R^2)$.*

Следующий результат является основным в настоящей работе.

Теорема. *Если выполнено условие (3), то задача (1), (2) для каждой правой части $F = (f, g) \in L_2(D, R^2)$ имеет единственное решение $w = (u, v)$, принадлежащее пространству С.Л.Соболева $W_2^1(D, R^2)$.*

Доказательство. Пусть (u_n, v_n) ($n \in Z$) — решение системы (7). Тогда функция $w_N = (\sum_{k=-N}^N u_k(y)e^{ikx}, \sum_{k=-N}^N v_k(y)e^{ikx})$ является решением системы (1) с правой частью $F_N = (\sum_{k=-N}^N f_k(y)e^{ikx}, \sum_{k=-N}^N g_k(y)e^{ikx})$. Последовательность $\{F_N\}$, как сходящаяся к правой части $F(x, y)$ системы (1), является фундаментальной. Тогда согласно оценке (4) последовательность $\{w_N\}_{N=-\infty}^{\infty}$ также фундаментальна в $W_2^1(D, R^2)$ и в силу полноты $W_2^1(D, R^2)$ сходится при $N \rightarrow \infty$ к некоторой функции $w = (u, v) \in W_2^1(D, R^2)$. Согласно определению $w(x, y)$ — решение задачи (1), (2). Единственность решения вытекает из оценки (4). Теорема доказана.

Цитированная литература

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
2. Кальменов Т.Ш. // Дифференц. уравнения. 1978. Т.14, №3. С.546–547.
3. Муратбеков М.Б. // Дифференц. уравнения. 1991. Т.27, №12. С.2127–2137.
4. Кальменов Т.Ш., Муратбеков М.Б. Спектральные свойства оператора смешанного типа. Шымкент, 1997.
5. Муратбеков М.М. // Изв. НАН РК. Сер. физ. - мат. 2000. №5. С. 24–28.
6. Оспанов К.Н. // Труды межд. конф. "Современные проблемы математики". Астана. 2002. С.60.
7. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
8. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., 1966.

Поступила в редакцию 29.09.03г.

УДК 621.371.167; 621.372.81

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ЛЕНТЕ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ВОЛНОВОМ ВЕКТОРЕ

С. С. САУТБЕКОВ

КазНУ им. аль-Фараби
480100 г. Алматы пр. аль-Фараби, 71 sautbek@math.kz

К настоящему времени из числа строгих аналитических методов теории дифракции по существу известны всего два подхода. К ним относятся метод задачи Римана-Гильберта и метод Винера-Хопфа-Фока [1]. Следует отметить, что они автоматически удовлетворяют условию на остром крае или, так называемому условию Мейкснера, которое диктует характер бесконечного роста решения по мере приближения к острому краю, и в результате является ответственным за единственность решения краевой задачи. Однако круг задач, решаемых в замкнутой форме, исторически ограничивался полубесконечными структурами, хотя эти методы были мощными и играли роль исходных предпосылок при построении приближенных решений более сложных задач.

Метод Винера-Хопфа-Фока был развит для конечных структур в работах [2], [3], когда тангенциальная составляющая напряженности падающей плоской волны была параллельна кромкам полосково-щелевой структуры.

В данной работе в отличие от [2] рассматривается дифракция плоской волны на ленте при произвольном направлении волнового вектора.

1. Постановка задачи. Пусть на идеально проводящую ленту $|z| \leq a$, $y = 0$, $-\infty < x < \infty$ падает электромагнитная волна (рис. 1), распространяющаяся в произвольном направлении

$$\mathbf{E}^0 = \mathbf{e}_0 E, \quad \mathbf{H}^0 = \frac{[\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{e}_0]}{k_0} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E, \quad E = A \exp i(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - \omega t), \quad (1)$$

$$\mathbf{k}_0/k_0 = \mathbf{i} \cos \beta + \mathbf{j} \sin \beta \cos \psi_0 + \mathbf{k} \sin \beta \sin \psi_0,$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad k_0 = \omega/c,$$

где β — угол между осью x и направлением распространения волны, ψ_0 — угол между осью z и проекцией направления распространения на плоскость (y, z) , A — амплитуда поля.

Keywords: *value problem, integral equation, diffraction of a plane wave, boundary, electromagnetic field*

2000 Mathematics Subject Classification: 78A45

© С. С. Саутбеков, 2004.

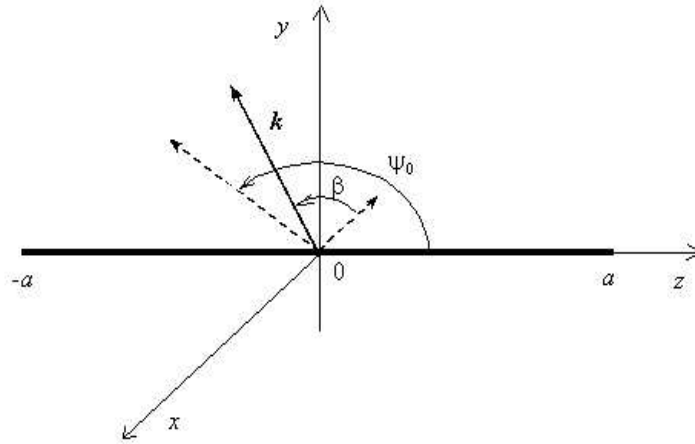


Рис. 1: Дифракция плоской волны на ленте.

Направление вектора напряженности электрического поля \mathbf{E}^0 задается с помощью произвольного вектора \mathbf{e}

$$\mathbf{e}_0 = [\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{e}] / |\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{e}|.$$

Гармонический множитель от времени $\exp(-i\omega t)$ далее всюду опускаем.

Поскольку в выражении (1) падающая волна зависит от x по гармоническому закону как $\exp(ixk_0 \cos \beta)$, дифракционные поля должны иметь такую же зависимость по координате x . Следовательно, электромагнитные поля можно представить в виде

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(y, z) \exp(ixk_0 \cos \beta), \quad \mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{H}(y, z) \exp(ixk_0 \cos \beta). \quad (2)$$

Электромагнитное поле представим как сумму полей падающей и дифрагированной волн

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^1, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^0 + \mathbf{H}^1.$$

Так как E_x, H_x направлены вдоль кромки ленты, электромагнитное поле будем выражать через них согласно представлению (2) и уравнениям Максвелла

$$E_x = \frac{i}{\omega \varepsilon} (\partial H_z / \partial y - \partial H_y / \partial z),$$

$$E_y = \frac{i}{\omega \varepsilon} (\partial H_x / \partial z - \partial H_z / \partial x),$$

$$E_z = \frac{i}{\omega \varepsilon} (\partial H_y / \partial x - \partial H_x / \partial y).$$

Отсюда легко получить

$$E_y = \frac{i}{k_0 \sin^2 \beta} \left(\cos \beta \frac{\partial}{\partial y} E_x + \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial z} H_x \right), \quad (3)$$

$$E_z = \frac{i}{k_0 \sin^2 \beta} \left(\cos \beta \frac{\partial}{\partial z} E_x - \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial y} H_x \right), \quad (4)$$

$$H_y = \frac{i}{k_0 \sin^2 \beta} \left(\cos \beta \frac{\partial}{\partial y} H_x - \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{\partial}{\partial z} E_x \right), \quad (5)$$

$$H_z = \frac{i}{k_0 \sin^2 \beta} \left(\cos \beta \frac{\partial}{\partial z} H_x + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{\partial}{\partial y} E_x \right). \quad (6)$$

Причем эти базовые составляющие электромагнитного поля удовлетворяют двумерному уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} E_x + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x + k_0^2 \sin^2 \beta E_x = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} H_x + \frac{\partial^2}{\partial z^2} H_x + k_0^2 \sin^2 \beta H_x = 0. \quad (8)$$

Уравнения (7) и (8) краевой задачи должны удовлетворять граничным условиям отсутствия тангенциальной составляющей напряженности электрического поля на ленте

$$E_x = E_z = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad z \leq |a|. \quad (9)$$

Таким образом, краевая задача разделилась на две краевые задачи.

1. Задача Дирихле. Уравнение (7) с граничным условием (9), которое назовем магнитной задачей.

2. Задача Неймана. Уравнение (8) с граничным условием

$$\frac{\partial}{\partial y} H_x = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad z \leq |a|, \quad (10)$$

которое следует из (9), так как на поверхности ленты справедливо выражение

$$\frac{\partial}{\partial y} E_x = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad z \leq |a|.$$

Эту задачу назовем электрической задачей.

Далее примем следующие обозначения

$$k \equiv k_0 \sin \beta, \quad h \equiv k \cos \psi_0. \quad (11)$$

2. Решение магнитной задачи. Общее решение уравнения (7) представим в виде

$$E_x(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i(wz + v|y|)\} \frac{F(w)}{v} dw + E_x^0(y, z), \quad v = \sqrt{k^2 - w^2}. \quad (12)$$

Запишем составляющую электрического поля падающей волны (1) на идеально проводящей ленте

$$E_x^0(0, z) = E_0 \exp(ihz), \quad E_0 \equiv e_{0x} A,$$

где e_{0x} — проекция единичного вектора \mathbf{e}_0 на ось x . Тогда, согласно граничному условию (12), из (9) получим следующее интегральное уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i wz\} \frac{F(w)}{v} dw + E_0 \exp(ihz) = 0 \quad \text{при} \quad |z| \leq a. \quad (13)$$

Для определенности h фиксируем в нижней полуплоскости (НП) комплексной переменной w .

Из-за непрерывности составляющей магнитного поля H_z на продолжении ленты необходимо выполнение следующего интегрального уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i w z\} F(w) dw = 0 \quad \text{при } |z| > a. \quad (14)$$

Решение системы сингулярных интегральных уравнений (13) и (14) построим методом краевых источников [3]

$$F(w) = F_1 + F_2, \quad (15)$$

где

$$F_2(w) = \sqrt{k-w} (A_2(w) + B^+(w)) \exp(i w a), \quad F_1(w) = \sqrt{k+w} (A_1(w) + B^-(w)) \exp(-i w a).$$

Искомые функции A_2 и A_1 соответствуют амплитуде плоской волны, а B^+ и B^- — амплитудам отраженных волн от кромок ленты. Физический смысл аналитических источников, расположенных на кромках, заключается в том, что они поглощают и переизлучают волны. Например, A_1 гасит падающую плоскую волну слева за первой кромкой ($z \leq a$), а A_2 — эту порожденную волну тока слева от второй кромки ($z < -a$), B^+ поглощает набегающие волны токов на неё справа в области $z < -a$, B^- — волны токов от источника F_2 справа от неё. Следовательно, A_1 и A_2 аналитичны во всей комплексной плоскости w за исключением простого полюса $w = h$.

Поскольку бегущим направо по оси z волнам соответствуют особые точки только в ВП комплексной переменной w , то B^- должна быть аналитичной в НП w , а B^+ — в ВП. Поэтому искомые функции B^- и B^+ можно представить в виде

$$B^-(w) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\varepsilon_1}^{\infty+i\varepsilon_1} \frac{\Psi_2(u)}{u-w} du, \quad B^+(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-i\varepsilon_1}^{\infty-i\varepsilon_1} \frac{\Psi_1(u)}{u-w} du, \quad (16)$$

где искомые функции Ψ_2 и Ψ_1 аналитичны в полосе $|\text{Im } u| < \text{Im } k$, $0 < \varepsilon_1 < \text{Im } k$.

С помощью теории вычета, компенсируя простой полюс в точке $w = h$ в НП w , из (3) определим

$$A_1(w) = \frac{E_0 \sqrt{k-h} \exp(i h a)}{2\pi i (w-h)}. \quad (17)$$

Аналогично из (14) при $z < -a$ получим

$$A_2(w) = \frac{E_0 \sqrt{k+h} \exp(-i h a)}{2\pi i (w-h)}. \quad (18)$$

(Следует отметить, что выражения (17) и (18) справедливы и при падении плоской волны слева.)

Подставив функцию $B^+(w)$ из (16) в (14), замкнув контур интегрирования (КИ) вдоль вещественной оси бесконечной полуокружностью в НП w при $z < -a$ и компенсируя точку ветвления подинтегральной функции, найдем

$$B^+(w) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-i\varepsilon}^{\infty-i\varepsilon} \frac{\exp(-i 2 a u)}{(u-w)} \sqrt{\frac{k+u}{k-u}} (A_1(u) + B^-(u)) du.$$

Поменяв знак переменной интегрирования, выражение удобно представить в виде

$$B^+(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} \frac{\exp(i2au)}{(u+w)} \sqrt{\frac{k-u}{k+u}} (A_1(-u) + B^-(-u)) du. \quad (19)$$

Аналогично при $z > a$ из (14), компенсируя точку ветвления в ВП w , получим

$$B^-(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} \frac{\exp(i2au)}{(u-w)} \sqrt{\frac{k-u}{k+u}} (A_2(u) + B^+(u)) du. \quad (20)$$

Таким образом, найдено решение системы уравнений (12) и (13), достоверность которого можно проверить непосредственно, подставив выражения (17)–(20) в систему и вычислив интегралы с помощью теории вычетов.

Заметим, что вместо системы сингулярных интегральных уравнений (12) и (13) получена система функциональных уравнений (19) и (20), которые являются интегральными уравнениями Фредгольма второго рода. Далее систему будем решать интегрированием по методу перевала с использованием эталонного интеграла

$$I(w, l) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{\exp(ilu)}{u-w} \sqrt{\frac{k-u}{k+u}} du,$$

где C^+ — контур интегрирования, который состоит из прямой, перенесенной параллельно вещественной оси на $i\varepsilon$, и узкой петли, огибающей точку $u = -h$ в верхней полуплоскости (ВП) сверху. Его можно выразить через специальные функции Ханкеля $H_0^{(1)}$ и Γ [2]:

$$I(w, l) = \frac{1}{2i} H_0^{(1)}(kl) - \sqrt{\frac{k-w}{k+w}} \exp(ilw) \Gamma(kl/2, w/k), \quad (21)$$

где

$$\Gamma(kl, w/k) = -\frac{\sqrt{k^2 - w^2}}{2\pi i} \exp(-i2lw) \int_{C_1} \frac{\exp(i2lu)}{(u-w)\sqrt{k^2 - u^2}} du$$

или

$$\Gamma(kl, \cos \beta) = \sin \beta \int_{\infty}^{kl} H_0^{(1)}(2t) \exp(-2it \cos \beta) dt.$$

Деформируя путь интегрирования в (19), (20) до берегов разреза C_1 , который целесообразно провести от точки $w_0 = k$ параллельно мнимой оси, что является линией спуска, и вычислив интеграл в коротковолновом приближении, систему (19), (20) приведем к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\begin{cases} B^+(k) = A_1(k) (I(-k, 2a) - I(-h, 2a)) + B^-(-k) I(-k, 2a), \\ B^-(-k) = A_2(-k) (I(-k, 2a) - I(h, 2a)) + B^+(k) I(-k, 2a). \end{cases} \quad (22)$$

Решая СЛАУ, получим значения функций

$$B^+(k) = \frac{A_1(k) (I(-k, 2a) - I(-h, 2a)) + A_2(-k) I(-k, 2a) (I(-k, 2a) - I(h, 2a))}{1 - I^2(-k, 2a)}, \quad (23)$$

$$B^{-}(-k) = \frac{A_1(k)I(-k, 2a) (I(-k, 2a) - I(-h, 2a)) + A_2(-k) (I(-k, 2a) - I(h, 2a))}{1 - I^2(-k, 2a)}, \quad (24)$$

где искомые функции определяются через значения в перевальной точке следующим образом

$$B^{+}(w) \cong A_1(w) (I(-w, 2a) - I(-h, 2a)) + B^{-}(-k)I(-w, 2a), \quad (25)$$

$$B^{-}(w) \cong A_2(w) (I(w, 2a) - I(h, 2a)) + B^{+}(k)I(w, 2a). \quad (26)$$

3. Расчет электрического поля. Подставляя выражение (15) в (12), вычислим дифракционное поле

$$E_x^1 = I_1 + I_2 \quad (27)$$

в виде следующих интегралов

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i(w(z-a) + v|y|)\} \frac{A_1(w) + B^{-}(w)}{\sqrt{k-w}} dw, \quad (28)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i(w(z+a) + v|y|)\} \frac{A_2(w) + B^{+}(w)}{\sqrt{k+w}} dw. \quad (29)$$

В полярной системе координат

$$z = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta; \quad w = k \sin \alpha, \quad v = k \cos \alpha$$

первый интеграл примет вид

$$\begin{aligned} I_1 = & \frac{E_0}{\pi i} \int_S \frac{\exp\{ikR_1 \sin(\alpha + \zeta)\}}{\sin \alpha - \cos \psi_0} \cos \frac{\alpha - \pi/2}{2} \left\{ \sin \frac{\psi_0}{2} \exp(ika \cos \psi_0) + \right. \\ & \left. + \cos \frac{\psi_0}{2} \exp(-ika \cos \psi_0) [I(k \sin \alpha, 2a) - I(k \cos \psi_0, 2a)] \right\} d\alpha + \\ & + \sqrt{2k} \int_S \exp\{ikR_1 \sin(\alpha + \zeta)\} \cos \frac{\alpha - \pi/2}{2} I(k \sin \alpha, 2a) B^{+}(k) d\alpha, \end{aligned}$$

где S — контур интегрирования на комплексной плоскости, следующий через начало координат сверху вниз по направлению вещественной оси. Здесь введены следующие обозначения, которые обусловлены переносом начала системы координат на край ленты,

$$R_1 = \sqrt{r^2 - 2ar \cos \theta + a^2} \simeq r - a \cos \theta, \quad \zeta = \theta + \arctg \left(\frac{a \sin \theta}{r - a \cos \theta} \right) \simeq \theta + \frac{a}{r} \sin \theta.$$

Делая замену переменной интегрирования $\tau = \alpha + \beta - \pi/2$ и учитывая формулу представления функции Ханкеля [2]

$$H_0^{(1)}(kR_1) = \frac{1}{\pi} \int_S \exp(iR_1 k \cos \tau) d\tau,$$

с помощью метода перевала получим

$$\begin{aligned}
 I_1 = & -iE_0 H_0^{(1)}(kR_1) \frac{\cos \frac{\zeta}{2}}{\cos \zeta - \cos \psi_0} \left\{ \sin \frac{\psi_0}{2} \exp(ika \cos \psi_0) + \right. \\
 & + \cos \frac{\psi_0}{2} \exp(-ika \cos \psi_0) [I(k \sin \zeta, 2a) - I(k \cos \psi_0, 2a)] \left. \right\} + \\
 & + \sqrt{2k\pi} H_0^{(1)}(kR_1) \cos \frac{\zeta}{2} I(k \cos \zeta, 2a) B^+(k).
 \end{aligned} \tag{30}$$

Аналогично вычисляется второй интеграл

$$\begin{aligned}
 I_2 = & -iE_0 H_0^{(1)}(kR_2) \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \gamma - \cos \psi_0} \left\{ \cos \frac{\psi_0}{2} \exp(-ika \cos \psi_0) + \right. \\
 & + \sin \frac{\psi_0}{2} \exp(ika \cos \psi_0) [I(-k \cos \gamma, 2a) - I(-k \cos \psi_0, 2a)] \left. \right\} + \\
 & + \sqrt{2k\pi} H_0^{(1)}(kR_2) \sin \frac{\gamma}{2} I(-k \cos \gamma, 2a) B^-(-k).
 \end{aligned} \tag{31}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned}
 R_2 = & \sqrt{r^2 + 2ra \cos \theta + a^2} \simeq r + a \cos \theta, \\
 \gamma = & \theta + \arccos \left(\frac{a \sin \theta}{r + a \cos \theta} \right) \simeq \theta - \frac{a}{r} \sin \theta.
 \end{aligned}$$

Отметим, что дифрагированные электромагнитные волны являются коническими.

4. Р е ш е н и е э л е к т р и ч е с к о й з а д а ч и. Теперь рассмотрим дифракцию плоской волны (1) с магнитной составляющей H_x^0 на ленте

$$H_x^0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{E}{k_0} (k_{0y} e_{0z} - k_{0z} e_{0y})$$

или

$$H_x^0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E \sqrt{\sin^2 \beta - e_{0x}^2}.$$

Общее решение уравнения (8) представим в виде

$$H_x(y, z) = \text{sign } y \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i(wz + v|y|)\} F(w) dw + H_x^0(y, z). \tag{32}$$

Тогда из условия непрерывности магнитного поля на продолжении ленты следует интегральное уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i wz\} F(w) dw = 0 \quad \text{при } |z| > a. \tag{33}$$

Согласно граничному условию (10) также получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i wz\} v F(w) dw + H_0 \exp(ihz) = 0 \quad \text{при } |z| \leq a, \tag{34}$$

$$H_0 \equiv \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} A \sqrt{\sin^2 \beta - e_{0x}^2} k \sin \psi_0.$$

Для определенности h фиксируем в НП комплексной переменной w . Решение системы сингулярных уравнений (33) и (34) строится аналогично магнитной задаче

$$F(w) = F_1 + F_2, \tag{35}$$

где

$$F_2(w) = \frac{1}{\sqrt{k-w}} (A_2(w) + B^+(w)) \exp(iwa),$$

$$F_1(w) = \frac{1}{\sqrt{k+w}} (A_1(w) + B^-(w)) \exp(-iwa),$$

A_2 и A_1 — аналитические функции на комплексной плоскости за исключением простого полюса в точке $w = h$ в НП w , B^- , B^+ — аналитические функции, соответственно, в НП и в ВП.

Из интегрального уравнения (34), при $z \leq a$ замкнув контур интегрирования в НП, получим

$$A_1(w) = \frac{H_0 \sqrt{k+h} \exp(iha)}{2\pi i (w-h)}.$$

Компенсируя этот простой полюс в НП w при $z < -a$, из (33) имеем

$$A_2(w) = \frac{H_0 \sqrt{k-h} \exp(-iha)}{2\pi i (w-h)}.$$

Следует отметить, что выражения (17) и (18) справедливы и при падении плоской волны слева. Кроме того, в силу аналитичности подинтегральных функций в той полуплоскости w , где производится замыкание контура интегрирования, функция F удовлетворяет уравнению (34).

Представив функцию $B^+(w)$ в виде интеграла типа Коши, взяв вычет в точке $w = u$ и компенсируя точку ветвления в НП, из (33) получим искомую функцию

$$B^+(w) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-i\varepsilon}^{\infty-i\varepsilon} \frac{\exp(-i2au)}{(u-w)} \sqrt{\frac{k-u}{k+u}} (A_1(u) + B^-(u)) du.$$

Поменяв знак переменной интегрирования, данное выражение представим в виде

$$B^+(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} \frac{\exp(i2au)}{(u+w)} \sqrt{\frac{k+u}{k-u}} (A_1(-u) + B^-(-u)) du. \tag{36}$$

Аналогично, компенсируя точку ветвления в ВП w , при $z > a$ из (33) получим

$$B^-(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} \frac{\exp(i2au)}{(u-w)} \sqrt{\frac{k+u}{k-u}} (A_2(u) + B^+(u)) du. \tag{37}$$

Таким образом, краевая задача для электрической задачи также сведена к решению системы функциональных уравнений Фредгольма второго рода (36) и (37).

Для интегрирования системы (36) и (37) по методу перевала введем эталонный интеграл

$$J(w, l) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{\exp(ilu)}{u-w} \sqrt{\frac{k+u}{k-u}} du = \frac{1}{2i} H_0^{(1)}(kl) - \sqrt{\frac{k+w}{k-w}} \exp(ilw) \Gamma(kl/2, w/k),$$

где C^+ — контур интегрирования, состоящий из прямой, перенесенной параллельно вещественной оси на $i\varepsilon$, и узкой петли, огибающей простой полюс в верхней ВП u сверху. Отметим, что

$$J(-k, l) = \frac{i}{2} H_0^{(1)}(lk). \quad (38)$$

Решая СЛАУ

$$\begin{cases} B^+(k) = A_1(k) (J(-k, 2a) - J(-h, 2a)) + B^-(-k)J(-k, 2a), \\ B^-(-k) = A_2(-k) (J(-k, 2a) - J(h, 2a)) + B^+(k)J(-k, 2a), \end{cases}$$

получим значения функций

$$B^+(k) = \frac{A_1(k) (J(-k, 2a) - J(-h, 2a)) + A_2(-k)J(-k, 2a) (J(-k, 2a) - J(h, 2a))}{1 - J^2(-k, 2a)}, \quad (39)$$

$$B^-(-k) = \frac{A_1(k)J(-k, 2a) (J(-k, 2a) - J(-h, 2a)) + A_2(-k) (J(-k, 2a) - J(h, 2a))}{1 - J^2(-k, 2a)}, \quad (40)$$

где искомые функции определяются через значения в перевальной точке следующим образом

$$B^+(w) \cong A_1(w) (J(-w, 2a) - J(-h, 2a)) + B^-(-k)J(-w, 2a),$$

$$B^-(-k) \cong A_2(w) (J(w, 2a) - J(h, 2a)) + B^+(k)J(w, 2a).$$

Таким образом, все неизвестные функции системы интегральных уравнений определены. Остается лишь вычислить поле.

5. Расчет магнитного поля. Согласно формуле (32) в (12) вычислим составляющую магнитного поля конических волн

$$H_x^1 = I_1 + I_2$$

в виде суммы интегралов

$$I_1 = \operatorname{sign} y \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i(w(z-a) + v|y|)\} \frac{A_1(w) + B^-(-w)}{\sqrt{k+w}} dw,$$

$$I_2 = \operatorname{sign} y \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i(w(z+a) + v|y|)\} \frac{A_2(w) + B^+(w)}{\sqrt{k-w}} dw.$$

Проводя аналогичные (30) выкладки, вычислим первый интеграл

$$\begin{aligned} I_1 = & -iH_0 H_0^{(1)}(kR_1) \frac{\sin \frac{\zeta}{2}}{\cos \zeta - \cos \psi_0} \left\{ \cos \frac{\psi_0}{2} \exp(ika \cos \psi_0) + \right. \\ & \left. + \sin \frac{\psi_0}{2} \exp(-ika \cos \psi_0) [J(k \cos \zeta, 2a) - J(k \cos \psi_0, 2a)] \right\} + \\ & + \sqrt{2k\pi} H_0^{(1)}(kR_1) \sin \frac{\zeta}{2} J(k \cos \zeta, 2a) B^+(k), \end{aligned}$$

где

$$R_1 = \sqrt{r^2 - 2ar \cos \theta + a^2} \simeq r - a \cos \theta, \quad \zeta = \theta + \operatorname{arctg} \left(\frac{a \sin \theta}{r - a \cos \theta} \right) \simeq \theta + \frac{a}{r} \sin \theta.$$

Аналогично вычисляется второй интеграл

$$I_2 = -iH_0 H_0^{(1)}(kR_2) \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \gamma - \cos \psi_0} \left\{ \sin \frac{\psi_0}{2} \exp(ika \cos \psi_0) + \cos \frac{\psi_0}{2} \exp(-ika \cos \psi_0) \right\} \times \\ \times [J(-k \cos \gamma, 2a) - J(-k \cos \psi_0, 2a)] + \sqrt{2k\pi} H_0^{(1)}(kR_2) \sin \frac{\gamma}{2} J(-k \cos \gamma, 2a) B^-(-k).$$

Здесь введены следующие обозначения

$$R_2 = \sqrt{r^2 + 2ra \cos \theta + a^2} \simeq r + a \cos \theta, \quad \gamma = \theta + \arccos \left(\frac{a \sin \theta}{r + a \cos \theta} \right) \simeq \theta - \frac{a}{r} \sin \theta.$$

Дифракционные поля (2) также являются коническими. При $\beta = \pi/2$ они переходят в цилиндрические [1].

6. Резонанс на ленте. Ниже рассмотрим резонанс на ленте, который непосредственно следует из решения, полученного с помощью эталонного интеграла и метода перевала.

Приравняв знаменатель к нулю, из решения (23) и (24) получим характеристическое уравнение

$$1 - I^2(-k, 2a) = 0, \tag{41}$$

где

$$I(-k, 2a) = \frac{1}{2i} H_0^{(1)}(2ak) - 2ak(H_0^{(1)}(2ak) - i H_1^{(1)}(2ak)),$$

которое определяет комплексные резонансные частоты ленты, т. е. частоты собственных колебаний, происходящих при отсутствии внешних падающих волн и затухающих вследствие потерь на излучение.

Из решения (39) и (40), приравняв знаменатель к нулю, получим следующее характеристическое уравнение

$$1 - J^2(-k, 2a) = 0, \tag{42}$$

где

$$J(-k, 2a) = \frac{i}{2} H_0^{(1)}(2ak).$$

Заметим, что характеристические уравнения (41), (42) не имеют действительных корней и собственные частоты ленты являются комплексными.

Таким образом, резонанс на ленте определяется собственными частотами магнитных и электрических волн. Резонансные частоты электрических волн на ленте совпадают с резонансными частотами магнитных волн на щели такой же ширины.

Цитированная литература

1. **Вайнштейн Л.А.** Теория дифракции и метод факторизации. М., 1966.
2. **Саутбеков С.С.** // Радиотехника и электроника. 2000. Т.45, № 10. С.1202–1209.
3. **Саутбеков С.С.** Метод краевых источников в теории дифракции электромагнитных волн. Алматы, 2001.

Поступила в редакцию 17.05.2004г.

УДК 517.95

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ТЕОРИИ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ В L_p

Ш. САХАЕВ

КазНУ им. аль-Фараби
480012 г.Алматы ул.Масанчи, 39/49

Приводится обоснование одной задачи Коши, доказана её однозначная разрешимость и получена оценка решения в пространстве Соболева в случае, когда течение жидкости турбулентное (бездивергентное).

Магнитная гидродинамика изучает движение жидкости, обладающей электропроводностью, при наличии магнитного поля. Электрические токи, возникающие в жидкости при её движении, меняют внешнее поле; одновременно они обуславливают механическое воздействие магнитного поля на жидкость, приводящее к изменению состояния её движения. Эта взаимосвязь движения и поля является специфической особенностью и одновременно трудностью магнитной гидродинамики.

Уравнения магнитной гидродинамики — это обычные уравнения электродинамики и гидродинамики, в которых, однако, учтена связь между движением и магнитным полем. Как и в большинстве электродинамических задач, относящихся к проводникам, максвелловскими токами смещения можно пренебречь (если исключить случай быстрых колебаний). Дело в том, что Максвелл первоначально ввел токи смещения специально для того, чтобы обеспечить замкнутость полного тока в местах накопления заряда, например, на пластинках конденсатора. Таким образом, пренебрегая токами смещения, мы должны, чтобы быть последовательными, пренебречь разрывом линий тока, обусловленным накоплением электрического заряда. В соответствии с этим можно пренебречь накоплением заряда в уравнении непрерывности заряда и считать электрические токи замкнутыми. Это не означает, что электростатическое действие накапливающегося заряда несущественно; наоборот, оно играет весьма существенную роль. Но в уравнении непрерывности заряда отношение члена, характеризующего скорость изменения заряда, к другим членам обычно имеет величину порядка $\frac{\vec{v}^2}{c^2}$, где $\vec{v}(x, t)$ — скорость движения среды, а c — скорость света. Поэтому большей частью этим членом можно пренебречь.

Если \vec{j} — плотность тока, а \vec{H} — напряженность магнитного поля, то (по закону Ампера)

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 4\pi \vec{j} \quad (1)$$

и (1-й закон Кирхгофа) $\operatorname{div} \vec{j} = 0$.

Keywords: *magnetic hydrodynamics, Cauchy problem, a priori estimation*

2000 Mathematics Subject Classification: 76W05

© Ш. Сахаев, 2004.

Мы будем считать вещество немагнитным. В этом случае магнитная проницаемость μ равна единице; однако для облегчения перевода к другим единицам мы всюду в уравнениях сохраним μ . Таким образом, если \vec{E} — напряженность электрического поля, то (по закону Фарадея)

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0.$$

Если скорость движения вещества равна \vec{v} , то действующее электрическое поле равно $\vec{E} + \mu [\vec{v} \times \vec{H}]$, так что (по закону Ома без учета эффекта Холла)

$$\vec{j} = \sigma \left(\vec{E} + \mu [\vec{v} \times \vec{H}] \right), \quad (3)$$

где σ — электропроводность вещества.

Гидродинамическое уравнение непрерывности имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{v}) = 0, \quad (4)$$

где ρ — плотность вещества. В уравнение движения входит объемная сила $\mu [\vec{j} \times \vec{H}]$ электромагнитного происхождения. Если кроме неё единственной объемной силой является сила тяжести, характеризуемая ускорением силы тяжести \vec{g} , то уравнение движения имеет вид

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \rho \vec{g} + \vec{F} + \mu [\vec{j} \times \vec{H}]; \quad (5)$$

здесь p — давление, \vec{F} — сила вязкости (на единицу объема), а $\frac{d}{dt}$ означает материальную производную, т.е.

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{grad}. \quad (6)$$

Для жидкости сила \vec{F} определяется соотношением

$$\vec{F} = \rho \nu \Delta \vec{v}, \quad (7)$$

где ν — кинематический коэффициент вязкости. Во многих случаях, в частности, при движении больших масс силой вязкости \vec{F} можно пренебречь.

Для сжимаемой жидкости или газа уравнения (4) и (5) следует дополнить уравнением теплового баланса. Если обозначить через U тепловую энергию единицы массы, то это уравнение запишется в виде

$$\rho \frac{dU}{dt} = \frac{p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \varepsilon. \quad (8)$$

Здесь ε характеризует полное количество тепла (в единице объема), обусловленное теплопроводностью, вязкостью и электрическим током. Это

$$\varepsilon = \lambda \nabla^2 T, \quad (9)$$

где T — температура, а λ — коэффициент теплопроводности. Уравнения (1)–(5) и (8) представляют собой систему уравнений магнитной гидродинамики. Будем считать электропроводность σ во всех точках одинаковой.

Тогда из уравнений (1)–(3) получаем

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{rot} \left([\vec{v} \times \vec{H}] - \frac{1}{\sigma \mu} \vec{j} \right) = \text{rot} [\vec{v} \times \vec{H}] + \eta \nabla^2 \vec{H}, \quad (10)$$

где

$$\eta = \frac{1}{4\pi\mu\sigma}. \quad (11)$$

Уравнение (10) определяет изменение магнитного поля. Для покоящейся среды

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \vec{H}. \quad (12)$$

Это уравнение имеет вид уравнения диффузии; η можно считать коэффициентом диффузии магнитного поля.

Уравнение (12) показывает, что магнитное поле "просачивается" сквозь вещество от точки к точке. Затухание магнитного поля обусловлено тем, что противоположно направленные поля, просачивающиеся в различных точках, компенсируют друг друга. Учитывая размерность входящих в уравнение величин, можно утверждать, что время затухания поля имеет величину порядка $L^2\eta^{-1} = 4\pi\mu\sigma L^2$, где L — длина, порядка размеров области, занимаемой токами. Например, время затухания поля в однородной сфере радиуса a равно $\frac{4\pi\sigma a^2}{\pi}$, солнечного пятна — не менее 300 лет, солнца 10^{10} лет, межзвездного газа Галактики — еще много раз больше и т.д. Вообще для более проводящих масс линии магнитного поля очень медленно "просачиваются" сквозь вещества.

В качестве второго предельного случая рассмотрим движущиеся вещества с пренебрежимо малым электрическим сопротивлением. При этом уравнение (10) примет вид

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{rot} [\vec{v} \times \vec{H}]. \quad (13)$$

Это уравнение тождественно уравнению для вихря скорости в гидродинамике невязкой жидкости. Как известно, оно означает, что линии вихря движутся вместе с жидкостью. Таким образом, из уравнения (13) следует, что магнитное поле меняется так, как будто магнитные силовые линии жестко связаны с веществом.

Если ни одним из членов в правой части уравнения (10) нельзя пренебречь, то изменение магнитного поля во времени складывается из двух частей, определяемых уравнениями (12) и (13). Таким образом, силовые линии стремятся двигаться вместе с веществом и одновременно просачиваются сквозь вещества.

Пусть L — характерный размер области, занимаемой полем, а v — характерная скорость точек системы. Эффект переноса поля с веществом преобладает над просачиванием поля при $Lv \gg \eta$. По аналогии с определением обычного числа Рейнольдса $R = \frac{Lv}{\nu}$ можно определить магнитное число Рейнольдса $R_M = \frac{Lv}{\eta}$. Тогда перенос поля вместе с веществом преобладает над его просачиванием при $R_M \gg 1$.

Обычные магнитогидродинамические волны обусловлены жесткостью, которую магнитное поле придает веществу. Магнитная жесткость может вызвать также и колебательные движения в различных астрономических объектах. В частности, магнитная жесткость сказывается на неоднородном вращении звезд.

Таким образом, магнитная гидродинамика существенным образом включает в себя рассмотрение взаимодействия полей \vec{H} и \vec{v} . Распределение этих величин определяет все остальные

параметры, т.к. \vec{j} определяется через \vec{H} по закону Ампера (см. (1)) и после этого \vec{E} определяется по закону Ома (см. (3)). Этим объясняется практикуемое обычно в магнитной гидродинамике исключение переменных \vec{j} и \vec{E} из уравнения электродинамики; все внимание концентрируется на определении \vec{H} и \vec{v} . Изменение магнитного поля в турбулентном течении проводящей жидкости (или плазмы) принадлежит к числу классических вопросов магнитной гидродинамики. Несжимаемой жидкостью называется такая жидкость, при перемещении которой каждый жидкий элемент пренебрежимо мало изменяет свою плотность, причем величина ρ может быть и неоднородной. В этом случае $D\rho/Dt = 0$ и, следовательно, $div \vec{v} = 0$. С турбулентным течением связаны важные проблемы земного магнетизма, солнечных пятен, движение небесных тел, а также некоторые задачи, связанные с современной техникой космоса [1–3].

С математической точки зрения, если учесть что $div \vec{H} = 0$, $div \vec{v} = 0$ и действует внешняя сила \vec{f} , уравнение (10) переписывается в следующем виде

$$\frac{\partial \vec{H}(x, t)}{\partial t} = \eta \nabla \vec{H} + (\vec{H}, \nabla) \vec{v} - (\vec{v}, \nabla) \vec{H} + \vec{f}(x, t). \quad (14)$$

Мы изучим уравнение (14) со следующим начальным условием

$$\vec{H}(x, t)|_{t=0} = \vec{H}_0(x), \quad t \geq 0, \quad x \in R^3. \quad (15)$$

Если в уравнении (14) отбросить нелинейные слагаемые, то имеем линейную задачу Коши для определения магнитного поля

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2 \right) \vec{H}(x, t) = \vec{f}(x, t), \quad \vec{H}(x, t)|_{t=0} = \vec{H}_0(x). \quad (16)$$

Решение этой хорошо известной задачи Коши (при $\vec{f} = 0$) записывается в виде формулы Пуассона [4]

$$\vec{H}(x, t) = \int_{R^3} \vec{H}_0(\xi) \left(\frac{1}{2\sqrt{\eta\pi t}} \right)^3 e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\pi t}} d\xi, \quad (17)$$

для которого имеет место оценка [5]

$$\|\vec{H}\|_{W_p^{2,1}(R_T^3)} \leq C \|\vec{H}_0\|_{W_p^{2,2/p}(R^3)}. \quad (18)$$

Нелинейную задачу (14), (15) перепишем (для краткости) в следующем виде

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + A_0 \vec{v} + K(\vec{v}, \vec{v}) = \vec{f}(x, t), \quad \vec{v}|_{t=0} = \vec{H}_0(x), \quad (19)$$

где $U = (\vec{H}, \vec{v})$, $A_0 \vec{H} = \eta \nabla^2 \vec{H}$, $K(\vec{H}, \vec{v}) = \sum_{k=1}^3 (H_k \vec{v}_{x_k} - v_k \vec{H}_{x_k})$.

Имеет место следующее утверждение [5].

Т е о р е м а 1. Пусть $u(x, t) \in W_q^{2,1}(R_T^3)$. Если $p, r \geq q > 1$ таковы, что выполняется условие

$$\rho = 1 - \frac{5}{2q} + \frac{3}{2p} + \frac{1}{r} \geq 0 \quad (20)$$

или

$$\rho_1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2q} + \frac{3}{2p} + \frac{1}{r} \geq 0$$

(при $p = \infty$ или $r = \infty$ в этих соотношениях должно выполняться строгое неравенство), то, соответственно,

$$\|u\|_{p,r,R_T^3} \leq C \left(\varepsilon^\rho \|u\|_{q,R_T^3} + \varepsilon^{\rho-1} \|u\|_{q,R_T^3} \right) \quad (21)$$

или

$$\sum_{i=1}^3 \|u_{x_i}\|_{p,r,R_T^3} \leq C \left(\varepsilon^{\rho_1} \|u\|_{q,R_T^3} + \varepsilon^{\rho_1-1} \|u\|_{q,R_T^3} \right) \quad (22)$$

$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$; ε_0 зависит от R_T^3 . Кроме того, если $0 < \alpha < 2 - \frac{5}{q} < 1$, то

$$[u]_{R_T^3}^{(\alpha)} \leq C \left(\varepsilon^{1-\frac{5}{2q}-\frac{\alpha}{2}} \|u\|_{q,R_T^3} + \varepsilon^{\frac{5}{2q}-\frac{\alpha}{2}} \|u\|_{q,R_T^3} \right), \quad (23)$$

а при условии $0 < \alpha < 1 - \frac{5}{q}$

$$\sum_{i=1}^3 [u_{x_i}]_{R_T^3}^{(\alpha)} \leq C \left(\varepsilon^{1/2-\frac{5}{2q}-\frac{\alpha}{2}} \|u\|_{q,R_T^3} + \varepsilon^{\frac{5}{2q}-\frac{1+\alpha}{2}} \|u\|_{q,R_T^3} \right). \quad (24)$$

Т е о р е м а 2. При любом $q > \frac{5}{3}$ и любых $\vec{H}(x, t), \vec{v}(x, t) \in W_q^{2,1}(R_T^3)$ справедливо неравенство

$$\|K(\vec{H}, \vec{v})\|_{W_q^{2,1}(R_T^3)} \leq C \min(1, T^\omega) \left(\|\vec{H}\|_{W_q^{2,1}(R_T^3)} + \|\vec{H}\|_{q,R^3} \right) \left(\|\vec{v}\|_{W_q^{2,1}(R_T^3)} \right), \quad (25)$$

где C — постоянная, не зависящая от T , \vec{H} и \vec{v} ,

$$\omega = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{если } q \geq \frac{7}{3}, \\ \frac{3}{2} - \frac{5}{2q}, & \text{если } \frac{5}{3} \leq q \leq \frac{7}{3}. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\max\left(\frac{7}{2q} - \frac{3}{2}, 0\right) \leq \frac{1}{\sigma} \leq \frac{1}{q}$. Тогда $0 \leq \frac{1}{q} - \frac{1}{\sigma} \leq \omega$,

$$\|K(\vec{H}, \vec{v})\|_{q,R_T^3} \leq T^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\sigma}} \|K(\vec{H}, \vec{v})\|_{q,R_T^3}^{(\sigma)} \leq T^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\sigma}} \|\vec{H}\|_{L_{pq}(R_T^3)}^{(r,\sigma)} \sum_{i=1}^3 \|\vec{v}_{x_i}\|_{L_{p'q}(R_T^3)}^{(r',\sigma)}.$$

При $q > \frac{5}{3}$ можно подобрать числа $p, r \geq 1$ так, чтобы

$$\frac{3}{2pq} + \frac{1}{r\sigma} \geq \frac{5}{2q} - 1, \quad \frac{3}{2p'q} + \frac{1}{r'q} \geq \frac{5}{2q} - \frac{1}{2},$$

и оценить нормы \vec{H}, \vec{v} (см. (22)–(25)). Чтобы постоянная в (25) не зависела от T , продолжим векторы в области $\tilde{R}_T^3 = R^2 \times [-1, T]$ таким образом, чтобы

$$\|\vec{H}\|_{W_q^{2,1}(\tilde{R}_T^3 \setminus R_T^3)} \leq C \|\vec{H}_0\|_{q,\Omega}, \quad \|\vec{v}\|_{W_q^{2,1}(\tilde{R}_T^3 \setminus R_T^3)} \leq C$$

(если $T \geq 1$, то этого можно не делать).

Из неравенства (25) следует, что при всех $\vec{v}, \vec{v}' \in W_q^{2,1}(R_T^3)$

$$\|K(\vec{v})\|_{q,R_T^3} \leq C \min(1, T^\omega) \left(\|\vec{v}\|_{W_q^{2,1}(R_T^3)} + \|\vec{v}(x, 0)\|_{q,R^3} \right), \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \|K(\vec{v}) - K(\vec{v}')\|_{q,R_T^3} &\leq \|K(\vec{v} - \vec{v}', \vec{v})\|_{q,R_T^3} + \|K(\vec{v}', \vec{v} - \vec{v}')\|_{q,R_T^3} \leq \\ &\leq C \min(\|\vec{v}\|_{W_q^{2,1}(R_T^3)} + \|\vec{v}(x, 0)\|_{q,R^3} + \|\vec{v}'\|_{W_q^{2,1}(R_T^3)} + \|\vec{v}'(x, 0)\|_{q,R^3}) + \\ &+ \|\vec{v}(x, 0)\|_{q,R^3} \left(\|\vec{v} - \vec{v}'\|_{W_q^{2,1}(R_T^3)} + \|\vec{v}(x, 0) - \vec{v}'(x, 0)\|_{q,R^3} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Для доказательства разрешимости задачи (19) будем использовать метод последовательных приближений, для норм которых получим неравенства вида

$$\xi_{n+1} \leq a\xi_n^2 + b\xi_n + C. \quad (28)$$

Легко доказывается следующая

Л е м м а 1. Если в (28) $a, C > 0, 0 < b < 1, (1 - b)^2 > 4ac$ и если

$$\xi_0 \leq \xi = \frac{2C}{1 - b + \sqrt{(1 - b)^2 - 4ac}} \quad (29)$$

(ξ — минимальный корень квадратного уравнения $a\xi^2 + (b - 1)\xi + C = 0$), то при всех $n > 0$ $\xi_n \leq \xi$.

Т е о р е м а 3. Пусть $q \geq 5/3$. Если

$$\min(1, T^\omega) (1 + e^{\gamma T})^2 \left(\|f\|_{q,R^3} + 2 \|\vec{H}_0\|_{q,R_T^3} \right) \leq \frac{1}{4C_1^2 C_2},$$

где C_1, γ — постоянные из неравенства

$$\|\vec{v}\|_{q,R_T^3} \leq C_1(T) e^{\gamma T}, \quad (30)$$

полученного в [7, 8], а C_2, ω — постоянные из (25), то задача (19) разрешима в $W_q^{2,1}(R_T^3)$ и для ее решения справедлива оценка

$$\|\vec{v}\|_{W_q^{2,1}(R_T^3)} \leq \frac{2C_1 (1 + e^{\gamma T}) \left(\|f\|_{q,R_T^3} + 2 \|\vec{H}_0\|_{q,R^3} \right)}{1 + \sqrt{1 - 4C_1^2 C_2} \min(1, T^\omega) (1 + e^{\gamma T}) \left(\|f\|_{q,R_T^3} + \|\vec{H}_0\|_{q,R^3} \right)}. \quad (31)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Решим задачу (19) методом последовательных приближений, полагая $\vec{v}^{(0)} = \vec{H}_0$, а $\vec{v}^{(n)}$, $n \geq 1$ определяя рекуррентно как решение задач

$$\frac{d\vec{v}^{(n+1)}}{dt} + A_0 \vec{v}^{(n+1)} = \vec{f} - K(\vec{v}^{(n)}, \vec{U}^{(n)}), \quad \vec{v}^{(n+1)}|_{t=0} = \vec{H}_0.$$

Из неравенств (27) и (31) получим

$$\begin{aligned} \|\vec{v}^{(n+1)}\|_{W_q^{2,1}(R_T^3)} &\leq C_1 (1 + e^{\gamma T}) \left(\|f\|_{q,R_T^3} + \|\vec{H}_0\|_{q,R^3} \right) + \\ &+ C_1 C_2 (1 + e^{\gamma T}) \min(1, T^\omega) \left(\|\vec{v}^{(n)}\|_{W_q^{2,1}(R_T^3)} + \|\vec{H}_0\|_{q,R^3} \right)^2 \end{aligned} \quad (32)$$

и, следовательно, для величин $\xi_n = \|\vec{v}^{(n)}\|_{W_q^{2,1}(R_T^3)} + \|\vec{H}_0\|_{q,R^3}$ справедливы неравенства (29) с $C = C_1(1 + e^{\gamma T}) \left(\|\vec{f}\|_{q,R_T^3} + 2\|\vec{H}_0\|_{q,R^3} \right)$, $b = 0$, $a = C_1 C_2(1 + e^{\gamma T}) \min(1, T^\omega)$. В силу леммы 1 все ξ_n оцениваются через правую часть (31).

Для доказательства сходимости $\{\vec{v}^{(n)}\}$ в $W_q^{2,1}(R_T^3)$ заметим, что разность $\vec{u}^{(n+1)} = \vec{v}^{(n+1)} - \vec{v}^{(n)}$ является решением задачи

$$\frac{d\vec{u}^{(n+1)}}{dt} + A_0 \vec{u}^{(n+1)} = -K(\vec{v}^{(n)}, \vec{u}^{(n)}) - K(\vec{u}^{(n)}, \vec{v}^{(n+1)}), \quad \vec{u}^{(n+1)}|_{t=0} = 0$$

и в силу (32)

$$\begin{aligned} \|\vec{u}^{(n+1)}\|_{W_q^{2,1}(R_T^3)} &\leq C_1 \min(1, \tau^\omega) (1 + e^{\gamma T}) \left(\|\vec{v}^{(n)}\|_{W_q^{2,1}(R_T^3)} + \|\vec{v}^{(n+1)}\|_{W_q^{2,1}(R_T^3)} + \right. \\ &\quad \left. + 2\|\vec{H}_0\|_{q,R^3} \right) \|\vec{u}^{(n+1)}\|_{W_q^{2,1}(R_T^3)}. \end{aligned}$$

Так как ограниченность $\vec{v}^{(n)}$ уже доказана, то из этой оценки следует сходимость последовательности $\{\vec{v}^{(n)}\} = \left\{ \sum_{k=1}^n \vec{u}^{(k)} \right\}$ в норме $W_q^{2,1}(R_T^3)$ с некоторым $\tau \leq T$, зависящим от величины правой части (14). Таким же образом доказывается сходимость $\vec{v}^{(n)}$ в $W_q^{2,1}(R_{2\tau}^3)$ и т.д.

З а м е ч а н и е. Аналогичные результаты справедливы и в пространстве $C^{2+\alpha, 1+\frac{1}{\alpha}}(Q_T)$, $0 < \alpha < 1$.

Цитированная литература

1. Ferraro V.C.A. Month. Not. Roy. Astr. Soc. 1937. № 97.
2. Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Санчев А.И. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. М., 1990.
3. Бахтин Ю.Ю. // Мат. заметки. 1998. Т.64, вып. 6. С.812–823.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1977.
5. Сахаев Ш. // Вестник КазНУ им. аль-Фараби. 2002. № 1(29). Спец. выпуск. С.162–164
6. Солонников В.А. // Труды МИ АН СССР. 1964. Т. 70. С. 133–213.
7. Ладыженская О.А., Солонников В.А. // Записки науч.сем. ЛОМИ. 1973. Т.38. С. 46–93.
8. Сахаев Ш. // Изв. АН Каз ССР. Серия физ.-мат. 1982. №3. С.70–75.

Поступила в редакцию 09.06.2004г.

УДК 519.624

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Р. Е. УТЕШОВА

Актюбинский государственный университет им. К.Жубанова
463000 г.Актобе пр. А.Молдагуловой, 34 ruteshova@yandex.ru

Методом параметризации исследуется задача нахождения ограниченного на всей оси решения неоднородного дифференциального уравнения с предельно нулевой матрицей и ограниченной с весом правой частью. В терминах двусторонне-бесконечной матрицы специальной структуры получены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости рассматриваемой задачи.

Существование ограниченного решения неоднородного дифференциального уравнения и его связь с экспоненциальной дихотомичностью соответствующего однородного уравнения исследованы многими авторами [1–7]. В [8–10] эти вопросы изучены методом параметризации.

В настоящей статье на $R = (-\infty, \infty)$ рассматривается линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad x \in R^n, \quad \|x\| = \max_j |x_j| \quad (1)$$

с непрерывными $A(t)$ и $f(t)$ на R .

Предположим, что матрица $A(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\|A(t)\| \equiv \max_j \sum_{k=1}^n |a_{jk}(t)| \leq \alpha(t), \quad \alpha(t) > 0 \text{ — непрерывная на } R \text{ функция и } \lim_{t \rightarrow \mp\infty} \alpha(t) = 0.$$

Известно, что при этих предположениях уравнение (1) имеет ограниченное решение не при любых ограниченных на R функциях $f(t)$.

Поэтому здесь исследуются вопросы существования и единственности ограниченного на R решения уравнения (1) при дополнительных предположениях относительно правой части $f(t)$.

Введем пространство $\tilde{C}(R, R^n)$ непрерывных, ограниченных на R функций $x : R \rightarrow R^n$ с нормой $\|x\|_1 = \sup_{t \in R} \|x(t)\|$ и $\tilde{C}_{1/\alpha}(R, R^n)$ — непрерывных, ограниченных с весом $1/\alpha(t)$ функций $f : R \rightarrow R^n$ с нормой $\|f\|_\alpha = \sup_{t \in R} \|f(t)/\alpha(t)\|$.

Ограниченное на R решение уравнения (1), когда $f(t) \in \tilde{C}_{1/\alpha}(R, R^n)$, назовем решением задачи 1_α .

Keywords: *differential equation, singular problem, parameterization's method, non-uniform partition, correct solvability*
2000 Mathematics Subject Classification: 34B40

© Р. Е. Утешова, 2004.

Исследование задачи 1_α проведем на основе метода параметризации [8] с неравномерным шагом разбиения.

Выберем число $\theta > 0$ и произведем разбиение $R = \bigcup_{s=-\infty}^{\infty} [t_{s-1}, t_s)$, где точки $t_s \in R$, $s \in Z$

определим из соотношений $t_0 = 0$, $\int_{t_{s-1}}^{t_s} \alpha(t) dt = \theta$.

Двусторонне-бесконечную последовательность положительных чисел $h_s = t_s - t_{s-1}$, $s \in Z$ обозначим через $\tilde{h}(\theta)$, т.е. $\tilde{h}(\theta) = (\dots, h_s(\theta), h_{s+1}(\theta), \dots)$.

Введем следующие пространства:

m_n — пространство ограниченных двусторонне-бесконечных последовательностей $\lambda_s \in R^n$ с нормой

$$\|\lambda\|_2 = \|(\dots, \lambda_s, \lambda_{s+1}, \dots)\|_2 = \sup_s \|\lambda_s\|, \quad s \in Z;$$

$L(m_n)$ — пространство линейных ограниченных операторов, отображающих m_n в себя, с индуцированной нормой;

$m_n(\tilde{h}(\theta))$ — пространство ограниченных двусторонне-бесконечных последовательностей непрерывных и ограниченных на $[t_{s-1}, t_s)$ функций $x_s(t)$ с нормой

$$\|x[t]\|_3 = \|(\dots, x_s(t), x_{s+1}(t), \dots)\|_3 = \sup_s \sup_{t \in [t_{s-1}, t_s)} \|x_s(t)\|, \quad s \in Z.$$

Сужение функции $x(t) \in \tilde{C}(R, R^n)$ на интервал $[t_{s-1}, t_s)$, $s \in Z$ обозначим через $x_s(t)$, т.е. $x_s(t)$ — вектор-функция размерности n , определенная и совпадающая с $x(t)$ на $[t_{s-1}, t_s)$, $s \in Z$.

Разрешимость задачи 1_α эквивалентна существованию решения

$$x[t] = (\dots, x_s(t), x_{s+1}(t), \dots) \in m_n(\tilde{h}(\theta))$$

многоточечной краевой задачи для уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = A(t)x_s + f(t), \quad t \in [t_{s-1}, t_s)$$

с условиями сшивания решения в точках разбиения

$$\lim_{t \rightarrow t_s-0} x_s(t) = x_{s+1}(t_s), \quad s \in Z.$$

На каждом интервале $[t_{s-1}, t_s)$ произведем замену $u_s(t) = x_s(t) - \lambda_s$, где $\lambda_s = x_s(t_{s-1})$. Получим краевую задачу с параметром

$$\frac{du_s}{dt} = A(t)[u_s + \lambda_s] + f(t), \quad t \in [t_{s-1}, t_s), \quad (2)$$

$$u_s(t_{s-1}) = 0, \quad (3)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_s-0} u_s(t) + \lambda_s = \lambda_{s+1}, \quad s \in Z \quad (4)$$

$$(\lambda, u[t]) \in m_n \times m_n(\tilde{h}(\theta)), \quad (5)$$

Задача (2)–(5) эквивалентна задаче 1_α . Действительно, если пара $(\lambda^*, u^*[t]) \in m_n \times m_n(\tilde{h}(\theta))$ — решение задачи (2)–(5), то функция $x^*(t)$, полученная склеиванием систем функций $(\lambda_s^* + u_s^*(t))$, $s \in Z$, принадлежит пространству $\tilde{C}(R, R^n)$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) при всех $t \in R$. И, наоборот, если $x(t)$ — решение задачи 1_α , то пара $(\lambda, u[t])$, где $\lambda = (\dots, x_s(t_{s-1}), x_{s+1}(t_s), \dots)$, $u[t] = (\dots, x_s(t) - x_s(t_{s-1}), x_{s+1}(t) - x_{s+1}(t_s), \dots)$, принадлежит $m_n \times m_n(\tilde{h}(\theta))$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению (2) с начальным условием (3)

и условиями сшивания решения в точках разбиения (4). При фиксированных значениях параметра λ_s задача Коши (2)–(3) имеет единственное решение $u_s(t)$, представимое в виде

$$\begin{aligned}
 u_s(t) = & \left[\int_{t_{s-1}}^t A(\tau_1) d\tau_1 + \int_{t_{s-1}}^t A(\tau_1) \int_{t_{s-1}}^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \dots + \int_{t_{s-1}}^t A(\tau_1) \dots \int_{t_{s-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu) d\tau_\nu \dots d\tau_1 \right] \lambda_s + \\
 & + \int_{t_{s-1}}^t f(\tau_1) d\tau_1 + \int_{t_{s-1}}^t A(\tau_1) \int_{t_{s-1}}^{\tau_1} f(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \dots + \int_{t_{s-1}}^t A(\tau_1) \dots \int_{t_{s-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \times \\
 & \times \int_{t_{s-1}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu) d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} \dots d\tau_1 + \int_{t_{s-1}}^t A(\tau_1) \dots \int_{t_{s-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int_{t_{s-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu) u_s(\tau_\nu) d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} \dots d\tau_1. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
 D_{\nu,s}(h_s(\theta)) &= \int_{t_{s-1}}^{t_s} A(\tau_1) d\tau_1 + \dots + \int_{t_{s-1}}^{t_s} A(\tau_1) \dots \int_{t_{s-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu) d\tau_\nu \dots d\tau_1, \\
 F_{\nu,s}(h_s(\theta)) &= \int_{t_{s-1}}^{t_s} f(\tau_1) d\tau_1 + \int_{t_{s-1}}^{t_s} A(\tau_1) \int_{t_{s-1}}^{\tau_1} f(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \dots + \\
 & + \int_{t_{s-1}}^{t_s} A(\tau_1) \dots \int_{t_{s-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int_{t_{s-1}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu) d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} \dots d\tau_1, \\
 G_{\nu,s}(u, h_s(\theta)) &= \int_{t_{s-1}}^{t_s} A(\tau_1) \dots \int_{t_{s-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int_{t_{s-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu) u_s(\tau_\nu) d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} \dots d\tau_1.
 \end{aligned}$$

Из (6) найдя $\lim_{t \rightarrow t_{s-0}} u_s(t)$, $s \in Z$ и подставляя в (4) соответствующие пределы выражения, получим двусторонне-бесконечную систему уравнений относительно параметров λ_s

$$[I + D_{\nu,s}(h_s(\theta))] \lambda_s - \lambda_{s+1} = -F_{\nu,s}(h_s(\theta)) - G_{\nu,s}(u, h_s(\theta)), \quad s \in Z, \quad (7)$$

где I — единичная матрица порядка n .

Обозначим через $Q_{\nu, \tilde{h}(\theta)}$ блочно-ленточную двусторонне-бесконечную матрицу, соответствующую левой части системы (7). В каждой блочной строке матрицы $Q_{\nu, \tilde{h}(\theta)}$ ненулевыми являются лишь $I + D_{\nu,s}(h_s(\theta))$ и I . Поэтому для любой последовательности $\tilde{h}(\theta)$ матрица $Q_{\nu, \tilde{h}(\theta)}$ переводит элементы пространства m_n снова в m_n , причем

$$\|Q_{\nu, \tilde{h}(\theta)}\|_{L(m_n)} \leq 2 + \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\theta^j}{j!}.$$

Систему уравнений (7) запишем в виде

$$Q_{\nu, \tilde{h}(\theta)} \lambda = -F_\nu(\tilde{h}(\theta)) - G_\nu(u, \tilde{h}(\theta)), \quad \lambda \in m_n, \quad (8)$$

где $F_\nu(\tilde{h}(\theta)) = (\dots, F_{\nu,s}(h_s(\theta)), F_{\nu,s+1}(h_{s+1}(\theta)), \dots) \in m_n$,

$G_\nu(u, \tilde{h}(\theta)) = (\dots, G_{\nu,s}(u, h_s(\theta)), G_{\nu,s+1}(u, h_{s+1}(\theta)), \dots) \in m_n$ для любых $u[t] \in m_n(\tilde{h}(\theta))$ и θ .

Решение многоточечной краевой задачи (2)–(5) найдем, как предел последовательности пар $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$, определяемой по следующему алгоритму.

Шаг 0. В предположении, что матрица $Q_{\nu, \tilde{h}(\theta)} : m_n \rightarrow m_n$ ограниченно обратима, из уравнения $Q_{\nu, \tilde{h}(\theta)} \lambda = -F_\nu(\tilde{h}(\theta))$ определим начальное приближение по параметру $\lambda^{(0)} \in m_n$. На отрезках $[t_{s-1}, t_s]$ решая задачи Коши (2)–(3) при $\lambda_s = \lambda_s^{(0)}$, находим $u^{(0)}[t] = (\dots, u_s^{(0)}(t), u_{s+1}^{(0)}(t), \dots) \in m_n(\tilde{h}(\theta))$.

Шаг 1. Подставляя найденные $u_s^{(0)}(t)$, $s \in Z$ в правую часть (8), из уравнения $Q_{\nu, \tilde{h}(\theta)} \lambda = -F_\nu(\tilde{h}(\theta)) - G_\nu(u^{(0)}, \tilde{h}(\theta))$ определим $\lambda^{(1)} \in m_n$. На отрезках $[t_{s-1}, t_s]$ решая задачи Коши (2)–(3) при $\lambda_s = \lambda_s^{(1)}$, находим $u^{(1)}[t] = (\dots, u_s^{(0)}(t), u_{s+1}^{(0)}(t), \dots) \in m_n(\tilde{h}(\theta))$ и т.д.

Достаточные условия сходимости предложенного алгоритма, а также оценку решения задачи 1_α устанавливает

Теорема 1. Пусть для некоторой последовательности $\tilde{h}(\theta) = (\dots, h_s(\theta), h_{s+1}(\theta), \dots)$ и некоторого ν ($\nu = 1, 2, \dots$) матрица $Q_{\nu, \tilde{h}(\theta)} : m_n \rightarrow m_n$ обратима и выполняются следующие неравенства

$$\|Q_{\nu, \tilde{h}(\theta)}^{-1}\|_{L(m_n)} \leq \gamma_\nu(\tilde{h}(\theta)), \quad (9)$$

$$q_\nu(\tilde{h}(\theta)) = \gamma_\nu(\tilde{h}(\theta)) \left[e^\theta - 1 - \theta - \dots - \frac{\theta^\nu}{\nu!} \right] < 1. \quad (10)$$

Тогда задача 1_α имеет единственное решение $x^*(t) \in \tilde{C}(R, R^n)$ и справедлива оценка

$$\|x\|_1 \leq \gamma_\nu(\tilde{h}(\theta)) \left[e^\theta M(\tilde{h}(\theta)) \frac{1}{1 - q_\nu(\tilde{h}(\theta))} \frac{\theta^\nu}{\nu!} + \|f\|_\alpha \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\theta^j}{j!} \right] + M(\tilde{h}(\theta)), \quad (11)$$

$$\text{где } M(\tilde{h}(\theta)) = \|f\|_\alpha \left[\theta e^\theta + (e^\theta - 1) \gamma_\nu(\tilde{h}(\theta)) \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\theta^j}{j!} \right].$$

Доказательство. Из ограниченной обратимости матрицы $Q_{\nu, \tilde{h}(\theta)} : m_n \rightarrow m_n$ следует существование единственного $\lambda^{(0)} \in m_n$, причем

$$\|\lambda^{(0)}\|_2 \leq \gamma_\nu(\tilde{h}(\theta)) \|F_\nu(\tilde{h}(\theta))\|_2 \leq \gamma_\nu(\tilde{h}(\theta)) \|f\|_\alpha \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\theta^j}{j!}.$$

При $\lambda_s = \lambda_s^{(0)}$ задача Коши (2)–(3) имеет единственное решение $u_s^{(0)}(t)$. Применив неравенство Гронуолла-Беллмана, получим

$$\begin{aligned} \|u_s^{(0)}(t)\| &\leq \|f\|_\alpha \theta e^\theta + \|\lambda_s^{(0)}\| (e^\theta - 1), \quad s \in Z, \\ \|u^{(0)}[t]\|_3 &= \sup_s \sup_{t \in [t_{s-1}, t_s]} \|u_s^{(0)}(t)\| \leq M(\tilde{h}(\theta)). \end{aligned}$$

Далее по алгоритму найдем $\lambda^{(1)}$ и оценим $\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|_2$

$$\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|_2 \leq \gamma_\nu(\tilde{h}(\theta)) \|G_\nu(u^{(0)}, \tilde{h}(\theta))\|_2 \leq \gamma_\nu(\tilde{h}(\theta)) \frac{\theta^\nu}{\nu!} M(\tilde{h}(\theta)). \quad (12)$$

Продолжая итерационный процесс, найдем последовательность систем пар $(\lambda_s^{(k)}, u_s^{(k)}(t))$, $s \in Z$, $k = 1, 2, \dots$. Вновь используя неравенство Гронуолла-Беллмана, получим оценку разности решений задач Коши через разность параметров

$$\|u_s^k(t) - u_s^{(k-1)}(t)\| \leq \left(e^{\int_{t_{s-1}}^t \alpha(\tau) d\tau} - 1 \right) \|\lambda_s^{(k)} - \lambda_s^{(k-1)}\|, \quad t \in [t_{s-1}, t_s]. \quad (13)$$

Из уравнения (8) вытекает оценка

$$\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\|_2 \leq q_\nu(\tilde{h}(\theta)) \|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\|_2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (14)$$

В силу условия (10) и неравенств (12)–(14) последовательность $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$ при $k \rightarrow \infty$ сходится к $(\lambda^*, u^*[t])$, причем имеют место следующие оценки

$$\begin{aligned} \|\lambda^* - \lambda^{(k)}\|_2 &\leq \frac{[q_\nu(\tilde{h}(\theta))]^k}{1 - q_\nu(\tilde{h}(\theta))} \gamma_\nu(\tilde{h}(\theta)) \frac{\theta^\nu}{\nu!} M(\tilde{h}(\theta)), \\ \|u^*[t] - u^{(k)}[t]\|_3 &\leq (e^\theta - 1) \frac{[q_\nu(\tilde{h}(\theta))]^k}{1 - q_\nu(\tilde{h}(\theta))} \gamma_\nu(\tilde{h}(\theta)) \frac{\theta^\nu}{\nu!} M(\tilde{h}(\theta)). \end{aligned}$$

В силу того, что $(\lambda^*, u^*[t])$ является решением задачи (2)–(3), функция $x^*(t)$, полученная склеиванием систем функций $(\lambda_s^* + u_s^*(t))$, является решением задачи 1_α и справедлива оценка (11).

Покажем единственность. Предположим, что $x^*(t)$, $\tilde{x}(t)$ — два решения задачи 1_α . Тогда соответствующие им системы пар $(\lambda^*, u^*[t])$, $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$ являются решениями краевой задачи с параметром (2)–(5), причем

$$\begin{aligned} \|u^*[t] - \tilde{u}[t]\|_3 &\leq (e^\theta - 1) \|\lambda^* - \tilde{\lambda}\|_2, \\ \|\lambda^* - \tilde{\lambda}\|_2 &\leq q_\nu(\tilde{h}(\theta)) \|\lambda^* - \tilde{\lambda}\|_2, \quad q_\nu(\tilde{h}(\theta)) < 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $\lambda^* = \tilde{\lambda}$, $u^*[t] = \tilde{u}[t]$, т.е. $x^*(t) = \tilde{x}(t)$.

Теорема 1 доказана.

Перейдя в уравнении (8) к пределу при $\nu \rightarrow \infty$ и учитывая неравенство

$$\|G_\nu(u^*, \tilde{h}(\theta))\|_2 \leq \frac{\theta^\nu}{\nu!} \|u^*[t]\|_3,$$

получим, что $\lambda^* \in m_n$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{\theta} Q_{*, \tilde{h}(\theta)} \lambda = -F_*(A, f, \tilde{h}(\theta)), \quad \lambda \in m_n. \quad (15)$$

Здесь $Q_{*, \tilde{h}(\theta)} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} Q_{\nu, \tilde{h}(\theta)}$, $F_*(A, f, \tilde{h}(\theta)) = \frac{1}{\theta} \lim_{\nu \rightarrow \infty} F_\nu(\tilde{h})$.

Решение $\lambda = (\dots, \lambda_s, \lambda_{s+1}, \dots) \in m_n$ уравнения (15) совпадает в точках разбиения со значениями точного решения задачи 1_α . Действительно, если $\hat{\lambda} = (\dots, \hat{\lambda}_s, \hat{\lambda}_{s+1}, \dots) \in m_n$ — решение уравнения (15) при $f(t) = \hat{f}(t)$, то, решая задачи Коши на интервалах $[t_{s-1}, t_s]$ при соответствующих $\hat{\lambda}_s$, найдем функции $\hat{u}_s(t)$, $s \in Z$, представимые в виде суммы рядов

$$\begin{aligned} \hat{u}_s(t) &= \left[\int_{t_{s-1}}^t A(\tau_1) d\tau_1 + \int_{t_{s-1}}^t A(\tau_1) \int_{t_{s-1}}^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \dots \right] \hat{\lambda}_s + \\ &+ \int_{t_{s-1}}^t f(\tau_1) d\tau_1 + \int_{t_{s-1}}^t A(\tau_1) \int_{t_{s-1}}^{\tau_1} f(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \dots \end{aligned}$$

По теореме Вейерштрасса указанные ряды равномерно сходятся на $[t_{s-1}, t_s]$, $s \in Z$. Учитывая этот факт и оценку

$$\|\hat{u}_s[t]\| \leq (e^\theta - 1) \left[\|\hat{\lambda}\| + \sup_{t \in [t_{s-1}, t_s]} \left\| \frac{f(t)}{\alpha(t)} \right\| \right],$$

приходим к выводу:

а) функции $\widehat{u}_s(t)$ непрерывны и ограничены на $[t_{s-1}, t_s]$, $s \in Z$;

б) двусторонне-бесконечная последовательность $(\dots, \widehat{u}_s(t), \widehat{u}_{s+1}(t), \dots)$ ограничена.

Следовательно, $\widehat{u}[t] = (\dots, \widehat{u}_s(t), \widehat{u}_{s+1}(t), \dots) \in m_n(\widehat{h}(\theta))$. Функция $\widehat{x}(t)$, полученная склеиванием систем функций $(\widehat{\lambda}_s + \widehat{u}_s(t))$, $s \in Z$ является решением задачи 1_α при $f(t) = \widehat{f}(t)$. Обратное, если $\widetilde{x}(t)$ — решение задачи 1_α при $f(t) = \widetilde{f}(t)$, то $\widetilde{\lambda} = (\dots, \widetilde{\lambda}_s, \widetilde{\lambda}_{s+1}, \dots)$, где $\widetilde{\lambda}_s = \widetilde{x}(t_{s-1})$, принадлежит m_n и удовлетворяет уравнению (15) при $f(t) = \widetilde{f}(t)$.

О п р е д е л е н и е 1. Задача 1_α называется корректно разрешимой с константой K , если для любой функции $f(t) \in \widetilde{C}_{1/\alpha}(R, R^n)$ она имеет единственное решение $x(t) \in \widetilde{C}(R, R^n)$ и справедливо неравенство

$$\|x\|_1 \leq K \|f\|_\alpha,$$

где K — константа, не зависящая от $f(t)$.

Покажем, что для корректной разрешимости задачи 1_α при фиксированном ν условия теоремы 1 не только достаточны, но и необходимы.

Для этого нам понадобится вспомогательное утверждение.

Л е м м а 1. Пусть на $[t_{s-1}, t_s]$ задана непрерывная $(n \times n)$ — матрица $A(t)$ и $\|A(t)\| \leq \alpha(t)$, $\alpha(t) > 0$ непрерывна на $[t_{s-1}, t_s]$, $\int_{t_{s-1}}^{t_s} \alpha(t) dt = \theta$.

Тогда при любых $\varepsilon > 0$, $\theta > 0$, удовлетворяющих соотношению

$$\frac{1}{\theta}(e^\theta - 1 - \theta) < \frac{\varepsilon}{2(1 + \frac{\varepsilon}{2})(1 + \varepsilon)}, \quad (16)$$

для всякого $b_s \in R^n$ существует функция $f_{b_s}(t) \in C([t_{s-1}, t_s], R^n)$, обладающая следующими свойствами:

$$f_{b_s}(t_{s-1}) = 0, \quad f_{b_s}(t_s) = 0, \quad (17)$$

$$\max_{t \in [t_{s-1}, t_s]} \left\| \frac{f_{b_s}(t)}{\alpha(t)} \right\| \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \|b_s\|, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} F(A, f_{b_s}) &\equiv \frac{1}{\theta} \int_{t_{s-1}}^{t_s} f_{b_s}(t) dt + \frac{1}{\theta} \int_{t_{s-1}}^{t_s} A(t) \int_{t_{s-1}}^t f_{b_s}(\tau) d\tau dt + \\ &+ \frac{1}{\theta} \int_{t_{s-1}}^{t_s} A(t) \int_{t_{s-1}}^t A(\tau) \int_{t_{s-1}}^\tau f_{b_s}(\tau_1) d\tau_1 d\tau dt + \dots = b_s. \end{aligned} \quad (19)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. проводится по схеме доказательства леммы 1 статьи [10] (вектор $b \in R^n$ заменяем вектором $\frac{\theta}{h_s} \bar{b} \in R^n$).

Т е о р е м а 2. Задача 1_α корректно разрешима тогда и только тогда, когда для любого ν ($\nu = 1, 2, \dots$) найдется $\theta(\nu) > 0$ такое, что при всех $\widehat{h}(\theta) = (\dots, h_s(\theta), h_{s+1}(\theta), \dots)$ матрица $Q_{\nu, \widehat{h}(\theta)} : m_n \rightarrow m_n$ обратима и выполняются неравенства (9), (10).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Покажем обратимость матрицы $Q_{*, \widehat{h}(\theta)} : m_n \rightarrow m_n$ при всех $\theta \in (0, \theta_0]$. Для этого рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\theta} Q_{*, \widehat{h}(\theta)} = b, \quad \lambda, b \in m_n. \quad (20)$$

$\text{Ker } Q_{*,\tilde{h}(\theta)}$ состоит только из нулевого элемента пространства m_n . Действительно, предположим, что существует $\tilde{\lambda} \in m_n, \|\tilde{\lambda}\| \neq 0$, для которого $Q_{*,\tilde{h}(\theta)}\tilde{\lambda} = 0$. Решая задачи Коши (2)–(3) на интервалах $[t_{s-1}, t_s], s \in Z$, при $\lambda_s = \tilde{\lambda}_s$, получим последовательность $\tilde{u}[t] = (\dots, \tilde{u}_s(t), \tilde{u}_{s+1}(t), \dots) \in m_n(\tilde{h}(\theta)), s \in Z$.

Функция $\tilde{x}(t)$, полученная путем склеивания систем функций $(\tilde{\lambda}_s + \tilde{u}_s(t)), s \in Z$, принадлежит пространству $\tilde{C}(R, R^n)$ и удовлетворяет уравнению (1) с нулевой правой частью, причем $\|\tilde{x}\|_1 \neq 0$. Пришли к противоречию с корректной разрешимостью задачи 1_α , т.к. другим ее решением является $x(t) = 0$. Итак, матрица $Q_{*,\tilde{h}(\theta)} : m_n \rightarrow m_n$ обратима.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и выберем $\theta_0 = \theta_0(\varepsilon) > 0$, удовлетворяющее неравенству (16) леммы. Тогда согласно лемме для любых $b_s \in R^n, s \in Z$ можно построить функции $f_{b_s}(t) \in C([t_{s-1}, t_s], R^n), s \in Z$, обладающие свойствами (17)–(19). Функция $f_b(t)$, определяемая равенствами $f_b(t) = f_{b_s}(t), t \in [t_{s-1}, t_s], s \in Z$, принадлежит $\tilde{C}_{1/\alpha}(R, R^n)$ и удовлетворяет соотношениям $F_*(A, f_b, \tilde{h}(\theta_0)) = b$ и $\left\| \frac{f_b(t)}{\alpha(t)} \right\| \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \|b\|$.

Так как задача 1_α по условию корректно разрешима, то уравнение (15) при любой $f_b(t) \in \tilde{C}_{1/\alpha}(R, R^n)$ имеет единственное решение $\lambda_b = (\dots, \lambda_s^b, \lambda_{s+1}^b, \dots) \in m_n$, где $\lambda_s^b = x_b(t_{s-1})$, $x_b(t)$ – решение задачи 1_α при $f(t) = f_b(t)$, причем

$$\|\lambda_b\| = \sup_{s \in Z} \|x_b(t_{s-1})\| \leq \|x(t)\|_1 \leq K \|f_b(t)\|_\alpha \leq K \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \|b\|. \quad (21)$$

Так как уравнение (20) для любого $b \in m_n$ имеет единственное решение $\lambda_b \in m_n$ и справедлива оценка (21), получим, что

а) матрица $Q_{*,\tilde{h}(\theta)}^{-1}$ определена на всем пространстве m_n ,

б) по теореме Банаха матрица $Q_{*,\tilde{h}(\theta)}^{-1}$ ограничена, причем, учитывая, что

$$\|\lambda\| = \theta \|Q_{*,\tilde{h}(\theta)}^{-1} b\|_{L(m_n)} \leq K \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \|b\|,$$

имеем

$$\|Q_{*,\tilde{h}(\theta)}^{-1}\|_{L(m_n)} \leq \frac{(1 + \frac{\varepsilon}{2})K}{\theta}.$$

Принимая во внимание неравенство

$$\|Q_{*,\tilde{h}(\theta)} - Q_{\nu,\tilde{h}(\theta)}\|_{L(m_n)} \leq e^\theta - 1 - \theta - \dots - \frac{\theta^\nu}{\nu!}$$

и выбирая $\theta \in (0, \theta_0]$, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{(1 + \varepsilon/2)K}{\theta} \left[e^\theta - 1 - \theta - \dots - \frac{\theta^\nu}{\nu!} \right] < \frac{\varepsilon}{2(1 + \varepsilon)}, \quad (22)$$

по теореме о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов получим ограниченную обратимость $Q_{\nu,\tilde{h}(\theta)}$ и оценку

$$\|Q_{\nu,\tilde{h}(\theta)}^{-1}\|_{L(m_n)} \leq \frac{(1 + \varepsilon)K}{\theta}. \quad (23)$$

Тогда в силу неравенства (22) имеем

$$q_\nu(\tilde{h}(\theta)) = \frac{(1 + \varepsilon)K}{\theta} \left[e^\theta - 1 - \theta - \dots - \frac{\theta^\nu}{\nu!} \right] < \frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon} < 1.$$

Теорема 2 доказана.

Взаимосвязь между числом, ограничивающим сверху $\|Q_{\nu,\tilde{h}(\theta)}^{-1}\|_{L(m_n)}$, и константой корректной разрешимости K устанавливает

Теорема 3. Задача 1_α корректно разрешима тогда и только тогда, когда для любого ν найдется $\theta_0 = \theta_0(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой последовательности $\tilde{h}(\theta)$, $\theta \in (0, \theta_0]$ матрица $Q_{\nu, \tilde{h}(\theta)} : m_n \rightarrow m_n$ обратима, причем её обратная удовлетворяет оценке

$$\|Q_{\nu, \tilde{h}(\theta)}^{-1}\|_{L(m_n)} \leq \frac{\gamma}{\theta}, \quad (23)$$

где $\gamma - const$, не зависящая от $\tilde{h}(\theta)$.

Если при этом известна константа K корректной разрешимости задачи 1_α , то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\bar{\theta}(\varepsilon, \nu) > 0$, что оценка (23) выполняется с константой $\gamma = (1 + \varepsilon)K$ при $\theta \in (0, \bar{\theta}(\varepsilon, \nu)]$. Обратное, если имеет место (23), то $K = \gamma$.

Доказательство. Необходимость. Пусть задача 1_α корректно разрешима с константой K . Возьмем $\varepsilon > 0$ и выберем $\bar{\theta}(\varepsilon, \nu) \in (0, \theta_0(\varepsilon)]$, удовлетворяющее неравенству (22). Тогда, как было показано в теореме 2, матрица $Q_{\nu, \tilde{h}(\theta)}$ будет обратимой при всех $\theta \in (0, \bar{\theta}(\varepsilon, \nu)]$ и для ее обратной справедлива оценка (23), т.е. $\gamma = (1 + \varepsilon)K$.

Достаточность. Пусть выполняется оценка (23). Выберем θ , удовлетворяющее неравенству (10). Тогда согласно теореме 1 задача 1_α имеет единственное решение $x^*(t) \in \tilde{C}(R, R^n)$, для которого справедлива оценка (11). Перейдя в (11) к пределу при $\theta \rightarrow 0$, получим

$$\|x^*(t)\|_1 \leq \gamma \|f\|_\alpha,$$

т.е. задача 1_α корректно разрешима с константой γ . Теорема 3 доказана.

Цитированная литература

1. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1977.
2. Плисс В. А. Ограниченные решения неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений. В кн.: Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. Киев, 1977. С.168–173.
3. Мухамадиев Э. // Матем. заметки. 1981. Т. 30, № 3. С.443–460.
4. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., 1966.
5. Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л. Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функции Ляпунова. Киев, 1990.
6. Массера Х., Шеффер Х. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М., 1970.
7. Аносов Д. В. // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1967. Т. 90. С.1–210.
8. Джумабаев Д. С. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30, № 3. С. 388–404.
9. Утешова Р. Е. // Изв. МОН РК, НАН РК. Сер. физ.-матем. 2003. № 1. С. 101–108.
10. Утешова Р. Е. // Математический журнал. 2003. Т. 3, № 2(8). С. 75–83.

Поступила в редакцию 01.06.2004г.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.5

ТЕОРЕМА ЛИТТЛВУДА–ПЭЛИ ДЛЯ СМЕШАННОЙ НОРМЫ

Д. Б. БАЗАРХАНОВ

Институт математики МО и Н РК
г. Алматы ул.Пушкина, 125 dauren@math.kz

Получен вариант теоремы Литтлвуда–Пэли для смешанной нормы.

1. Введение. Обозначения и определения. В гармоническом анализе, теории функциональных пространств и теории приближений важную роль играют классическая теорема Литтлвуда–Пэли и различные ее обобщения (см., например, [1, 2, 3, 4, 5, 6] и указанную там библиографию, а также замечание 1 ниже). В настоящей заметке мы приводим вариант этой теоремы, важный при изучении функциональных пространств обобщенной смешанной гладкости.

Пусть $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ — множества натуральных, целых, вещественных и комплексных чисел, соответственно; $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $d \in \mathbb{N}$, \mathbb{R}^d и \mathbb{T}^d — d -мерные вещественное евклидово пространство и тор. Для $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ положим $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_1^d x_j y_j$, $|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$, $|\mathbf{x}|_\infty = \max_{1 \leq j \leq d} |x_j|$; для $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ положим $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$.

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$, $n \leq d$; для произвольных $e \subset e_d = \{1, \dots, d\}$ ($\emptyset \neq e = \{j_1, \dots, j_{|e|}\}$, $1 \leq j_1 < \dots < j_{|e|} \leq d$; здесь $|e|$ — количество элементов e) и $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ положим $\mathbf{x}(e) = (x_{j_1}, \dots, x_{j_{|e|}}) \in \mathbb{R}^{|e|}$. Далее фиксируем разбиение $\boldsymbol{\epsilon} = \{e^{(1)}, \dots, e^{(n)}\}$ множества e_d (т.е. $e_d = \cup_{i=1}^n e^{(i)}$, $e^{(i)} \cap e^{(k)} = \emptyset$ при $i \neq k$, $e^{(i)} \neq \emptyset$, $d_i := |e^{(i)}|$, $1 \leq i \leq n$, $\sum_{i=1}^n d_i = d$). Будем еще предполагать, что $\forall j \in e^{(k)}$ и $\forall l \in e^{(i)}$ $j < l$ при $1 \leq k < i \leq n$. Для удобства для $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ пишем $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$, где $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(e^{(i)}) \in \mathbb{R}^{d_i}$, $1 \leq i \leq n$, а также $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{\mathbf{d}} := \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_n}$, $\mathbb{N}_0^d = \mathbb{N}_0^{\mathbf{d}} := \mathbb{N}_0^{d_1} \times \dots \times \mathbb{N}_0^{d_n}$ ($\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$).

Для произвольных $\mathbf{e} \subset \mathbf{e}_n = \{1, \dots, n\}$ (включая \emptyset и само \mathbf{e}_n), $z \in (0, \infty)$, $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \in \mathbb{R}^{\mathbf{d}}$ положим $\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{e}_n \setminus \mathbf{e}$, $z^{\mathbf{t}} = (z^{t_1}, \dots, z^{t_n})$, $\mathbf{t}(\mathbf{e}) = (t_1(\mathbf{e}), \dots, t_n(\mathbf{e}))$, $\mathbf{x}(\mathbf{e}) = (\mathbf{x}_1(\mathbf{e}), \dots, \mathbf{x}_n(\mathbf{e}))$, где $t_i(\mathbf{e}) = t_i$, $\mathbf{x}_i(\mathbf{e}) = \mathbf{x}_i$ при $i \in \mathbf{e}$ и $t_i(\mathbf{e}) = 0$, $\mathbf{x}_i(\mathbf{e}) = \mathbf{0}$ ($\in \mathbb{R}^{d_i}$) при $i \in \bar{\mathbf{e}}$; иногда будет удобно считать $\mathbf{t}(\mathbf{e})$ точкой $(t_{i_1}, \dots, t_{i_{|e|}})$ пространства $\mathbb{R}^{|e|}$, а $\mathbf{x}(\mathbf{e})$ — точкой $(\mathbf{x}_{i_1}, \dots, \mathbf{x}_{i_{|e|}})$ из $\mathbb{R}^{d_{i_1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_{i_{|e|}}}$ ($=: \mathbb{R}^{\mathbf{d}(\mathbf{e})}$); аналогично определим $\mathbb{T}^{\mathbf{d}(\mathbf{e})}$, $\mathbb{N}^{\mathbf{d}(\mathbf{e})}$ и писать $\mathbf{t} = (\mathbf{t}(\mathbf{e}), \mathbf{t}(\bar{\mathbf{e}}))$, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}(\mathbf{e}), \mathbf{x}(\bar{\mathbf{e}}))$, $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{\mathbf{d}(\mathbf{e})} \times \mathbb{R}^{\mathbf{d}(\bar{\mathbf{e}})}$ (здесь $\mathbf{e} = \{i_1, \dots, i_{|e|}\}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_{|e|} \leq n$).

Keywords: Littlewood–Paley theorem, mixed norm

2000 Mathematics Subject Classification: 41A45, 26B40

© Д. Б. Базарханов, 2004.

Для $p \in [1, \infty]$ пусть, как обычно, $L_p(\mathbb{R})$ — пространство измеримых функций $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, суммируемых в p -й степени (при $p = \infty$ существенно ограниченных) на \mathbb{R} , со стандартной нормой

$$\|f | L_p(\mathbb{R})\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (p \in [1, \infty)),$$

$$\|f | L_\infty(\mathbb{R})\| = \text{ess sup } \{ |f(x)| : x \in \mathbb{R} \};$$

$L_p(\mathbb{T})$ — пространство измеримых 2π -периодических функций $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, суммируемых в p -й степени (при $p = \infty$ существенно ограниченных) на \mathbb{T} , со стандартной нормой

$$\|f | L_p(\mathbb{T})\| = \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (p \in [1, \infty)),$$

$$\|f | L_\infty(\mathbb{T})\| = \text{ess sup } \{ |f(x)| : x \in \mathbb{T} \}.$$

Для $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_d) \in [1, \infty]^d$ пусть $L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^d)$ ($L_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^d)$) — пространство измеримых (2π -периодических по каждой переменной) функций $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ с конечной нормой

$$\|f | L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^d)\| = \|(\dots \|f | L_{p_1}(\mathbb{R})\| \dots) | L_{p_d}(\mathbb{R})\|$$

(соответственно,

$$\|f | L_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^d)\| = \|(\dots \|f | L_{p_1}(\mathbb{T})\| \dots) | L_{p_d}(\mathbb{T})\|)$$

(здесь норма $\| \cdot | L_{p_j}(\mathbb{X})\|$ вычисляется по x_j ($j \in e_d$), $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ или \mathbb{T}). Если $p_1 = \dots = p_d =: p$, то положим $L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^d) := L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^d)$ и $L_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^d) := L_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^d)$.

Для $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_d) \in [1, \infty]^d$ и $\mathbf{e} \subset \mathbf{e}_n$ (\mathbf{e} может быть пустым или совпасть с \mathbf{e}_n) пусть $L_{\mathbf{p}, \mathbf{e}} = L_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}(\mathbf{e})}) \times \mathbb{R}^{\mathbf{d}(\bar{\mathbf{e}})}$ — пространство измеримых функций $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, 2π -периодических по \mathbf{x} (точнее, по всем переменным x_j с $j \in e^{(i)}$, $i \in \mathbf{e}$ с конечной нормой

$$\|f | L_{\mathbf{p}, \mathbf{e}}\| = \|f | L_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}(\mathbf{e})}) \times \mathbb{R}^{\mathbf{d}(\bar{\mathbf{e}})}\| = \|(\dots \|f | L_{p_1}(\mathbb{X}_1^{d_1})\| \dots) | L_{\mathbf{p}_n}(\mathbb{X}_n^{d_n})\|$$

(здесь $\mathbb{X}_i = \mathbb{T}$, если $i \in \mathbf{e}$, и $\mathbb{X}_i = \mathbb{R}$, если $i \in \bar{\mathbf{e}}$, а норма $\| \cdot | L_{p_i}(\mathbb{X}_i^{d_i})\|$ вычисляется по \mathbf{x}_i , $1 \leq i \leq n$). Ясно, что $L_{\mathbf{p}, \mathbf{e}_n} = L_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^d)$ и $L_{\mathbf{p}, \emptyset} = L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^d)$.

2. Теорема Литтлвуда–Пэли. Введем (d -мерные) ядра Дирихле $\mathcal{D}_N(\mathbf{x})$ и их непериодические аналоги $\mathcal{D}_R(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $N \in \mathbb{N}_0$, $R > 0$):

$$\mathcal{D}_N(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^d \sum_{k=-N}^N e^{ikx_j},$$

$$\mathcal{D}_R(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^d \frac{\sin Rx_j}{x_j}$$

и далее — ядра $\mathcal{F}_l(\mathbf{x})$ и $F_l(\mathbf{x})$ ($l \in \mathbb{N}_0$):

$$\mathcal{F}_0(\mathbf{x}) = \mathcal{D}_1(\mathbf{x}), \quad \mathcal{F}_l(\mathbf{x}) = \mathcal{D}_{2^l}(\mathbf{x}) - \mathcal{D}_{2^{l-1}}(\mathbf{x}) \quad (l \in \mathbb{N}),$$

$$F_0(\mathbf{x}) = \mathcal{D}_1(\mathbf{x}), \quad F_l(\mathbf{x}) = \mathcal{D}_{2^l}(\mathbf{x}) - \mathcal{D}_{2^{l-1}}(\mathbf{x}) \quad (l \in \mathbb{N}).$$

Наконец, определим "кратные" (\mathbf{d} -мерные) ядра $\mathcal{F}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{e}}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^n$, $\mathbf{e} \subset \mathbf{e}_n$):

$$\mathcal{F}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) = \prod_{i \in \mathbf{e}} \mathcal{F}_{m_i}(\mathbf{x}_i) \prod_{i \in \bar{\mathbf{e}}} F_{m_i}(\mathbf{x}_i)$$

и их свертки с функцией $f \in L_{\mathbf{p}, \mathbf{e}} : \mathcal{F}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{e}} * f(\mathbf{x})$.

Справедлива следующая

Теорема. Пусть $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_d) \in (1, \infty)^d$. Тогда существуют постоянные $A_{\mathbf{p}}, B_{\mathbf{p}}$ ($0 < A_{\mathbf{p}} < B_{\mathbf{p}}$) такие, что для всех функций $f \in L_{\mathbf{p}, \mathbf{e}}$ имеет место соотношение

$$A_{\mathbf{p}} \|f\|_{L_{\mathbf{p}, \mathbf{e}}} \leq \left\| \left(\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d} |\mathcal{F}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{e}} * f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_{\mathbf{p}, \mathbf{e}}} \leq B_{\mathbf{p}} \|f\|_{L_{\mathbf{p}, \mathbf{e}}}. \quad (1)$$

Замечание 1. Эта теорема совпадает с классической теоремой Литтлвуда–Пэли при $d = n = 1$, $\mathbf{e} = \{1\}$ (см. [1, гл. 15]). Для кратных рядов Фурье в случае пространств $L_p(\mathbb{T}^d)$ (т.е. при $d = n > 1$, $\mathbf{e} = \mathbf{e}_n$ и $p_1 = \dots = p_n = p$) она получена С.М.Никольским [2, с.65]. Для $L_p(\mathbb{R})$ неравенства (1) установлены Д.Гюи (1960г.), а для $L_p(\mathbb{R}^d)$ (при $d = n > 1$, $\mathbf{e} = \emptyset$ и $p_1 = \dots = p_n = p$) – П.И.Лизоркиным (1963г.), затем П.Крэ (с $d > n = 1$, 1964г.), для $L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^d)$ (с $d = n > 1$) – П.И.Лизоркиным (1970г.). Эти неравенства при $d = n > 1$, $e^{(i)} = \{i\}$, $i = 1, \dots, n$ и произвольном \mathbf{e} доказаны О.В.Бесовым [5] (в этой же работе см. подробный комментарий и ссылки на работы указанных авторов). Отметим еще, что в [4, с.162] приведен (с доказательством) вариант теоремы для $L_p(\mathbb{T}^d)$ при $d > n = 1$. Наконец, укажем, что в [6] доказана теорема Литтлвуда–Пэли для пространств $L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^d, H)$ функций со значениями в гильбертовом пространстве.

Замечание 2. Отметим, что доказательство теоремы в основном следует схеме работы [5]. Большая общность в сравнении с теоремой из [5] состоит в произвольности множеств $e^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$. Именно в таком виде теорема Литтлвуда–Пэли оказалась полезной при изучении пространств обобщенной смешанной гладкости в работах [7, 8].

Цитированная литература

1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М., 1965.
2. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1969; 2-е изд., 1977.
3. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., 1975; 2-е изд., 1996.
4. Schmeisser Н.-J., Triebel Н. Topics in Fourier analysis and function spaces. Wiley, 1987.
5. Бесов О.В. // Труды МИАН. 1984. Т. 170. С.31–36.
6. Лизоркин П.И. // Труды МИАН. 1986. Т. 173. С.149–163.
7. Базарханов Д.Б. // Матем. журнал. 2003. Т.3, №1 (7). С.33–41
8. Базарханов Д.Б. // Матем. журнал. 2003. Т.3, №2 (8). С.19–26

Поступила в редакцию 23.07.2004г.

УДК 517.946

ОЦЕНКИ ПОПЕРЕЧНИКОВ ПО КОЛМОГОРОВУ МНОЖЕСТВ, СВЯЗАННЫХ С ОБЛАСТЬЮ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

А.Б. ИМАНБАЕВА

ЮКГУ им. М.О.Ауезова
486001 г. Шымкент пр. Тауке-хана, 5

В работе исследованы некоторые аппроксимативные свойства нелинейного оператора смешанного типа и получены двухсторонние оценки поперечников по Колмогорову множества его решений, соответствующих правым частям уравнения из единичного шара.

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$Lu = -k(y)u_{xx} - u_{yy} + a \left(y, \int_{-\pi}^{\pi} u(x, y) dx \right) u_x + c \left(y, \int_{-\pi}^{\pi} u(x, y) dx \right) u = f, \quad (1)$$

где $k(y)$ — кусочно-непрерывная на отрезке $[-1; 1]$ функция, $yk(y) > 0$ при $y \neq 0$ и $k(0) = 0$.
Для уравнения (1) исследуется следующая задача:

$$u(-\pi, y) = u(\pi, y), u_x(-\pi, y) = u_x(\pi, y), \quad (2)$$

$$u(x, -1) = u(x, 1) = 0. \quad (3)$$

Через $C([-1; 1], L_2(-\pi; \pi))$ обозначим пространство функций, полученное пополнением относительно нормы

$$\|u(x, y)\|_{C([-1; 1], L_2)} = \sup_{y \in [-1; 1]} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |u(x, y)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sup_{y \in [-1; 1]} \|u(x, y)\|_{L_2(-\pi, \pi)},$$

а $W_2^1(\Omega)$ — пространство функций с нормой

$$\|u\|_{1,2,\Omega} = \left(\int_{\Omega} [|u|^2 + |u_x|^2 + |u_y|^2] dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

Keywords: *Nonlinear differential mixed type equation, Kolmogorov's width*

2000 Mathematics Subject Classification: 35M10, 35P15

© А.Б. Иманбаева, 2004.

В дальнейшем считаем, что функции $a(y, z), c(y, z)$ кусочно- непрерывны и ограничены по обоим аргументам и удовлетворяют условию:

$$i_0) |a(y, z)| \geq \delta_0 > 0, \quad c(y, z) \geq \delta > 0.$$

Теорема 1. Пусть выполнено условие i_0). Тогда существует решение задачи (1)–(3) такое, что

$$\sup_{y \in [-1; 1]} \|u(x, y)\|_{L_2(-\pi, \pi)} + \|u(x, y)\|_{1,2} \leq C \|f\|_2, \quad (4)$$

где $C > 0$ — постоянное число.

В [1] получены условия компактности резольвенты указанного оператора в пространстве $L_2(\Omega)$. Это означает, что множество $M = \{u \in D(L) : \|Lu\|_2 + \|u\|_2 \leq T\}$, являющееся частью области определения L , компактно в $L_2(\Omega)$. Для компактного множества, тем более, когда оно содержит решения дифференциального уравнения, содержательна задача об асимптотике их поперечников. По определению k -поперечником по Колмогорову множества M в пространстве $L_2(\Omega)$ называется величина

$$d_k = \inf_{\{\mathfrak{S}_k\}} \sup_{u \in M} \inf_{v \in \mathfrak{S}_k} \|u - v\|_2,$$

где $\{\mathfrak{S}_k\}$ — множество всех подпространств $L_2(\Omega)$, размерности которых не превосходят k . Оценки поперечников M могут быть использованы для определения скорости сходимости приближенных решений уравнения $Lu = f$ к точному. Тем самым, оценивая поперечники множеств, связанных с областью определения того или иного дифференциального оператора, мы не только получаем тонкие характеристики обратного к нему оператора, но и ближе соприкасаемся с вопросами приложения.

Теорема 2. Пусть выполнены условия i_0) и $i_0 i_0$) $\sup_{z \in \mathbf{C}} \sup_{y \in [-1; 1]} |a(y, z)| < \infty, \sup_{z \in \mathbf{C}} \sup_{y \in [-1; 1]} c(y, z) < \infty.$

Тогда для поперечников d_k по Колмогорову множества M справедливы оценки

$$c_0^{-1} \frac{1}{k} \leq d_k \leq c_0 \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

где $c_0 > 0$ не зависит от k .

Для доказательства теоремы нам необходимы некоторые леммы и оценки. Введем множества

$$\begin{aligned} \tilde{M}_s &= \{u \in C((-1; 1), L_2(-\pi, \pi)) : \|u_x\|_2^2 + \|u_y\|_2^2 + \|u\|_2^2 \leq s\}, \\ \dot{M}_p &= \{u \in L_2(\Omega) : \|u_{xx}\|_2^2 + \|u_{yy}\|_2^2 + \|u\|_2^2 \leq p\}. \end{aligned}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Пусть выполнены условия i_0), $i_0 i_0$). Тогда для некоторой постоянной $c_1 > 1$ справедливы включения

$$\dot{M}_{c_1^{-1}} \subseteq M \subseteq \tilde{M}_{c_1}.$$

Доказательство. Пусть $u(x, y) \in \dot{M}_{c_1^{-1}}$. Тогда с учетом известного вложения пространства С.Л.Соболева $W_2^2(\Omega)$ в пространство $C(\bar{\Omega})$ непрерывных функций получим

$$\|Lu\|_2^2 + \|u\|_2^2 = \left\| -k(y)u_{xx} - u_{yy} + a \left(y, \int_{-\pi}^{\pi} u(x, y) dx \right) u_x + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +c \left(y, \int_{-\pi}^{\pi} u(x, y) dx \right) u \|_2^2 + \|u\|_2^2 \leq \| -k(y)u_{xx} \|_2^2 + \| -u_{yy} \|_2^2 + \\
& + \|a \left(y, \int_{-\pi}^{\pi} u(x, y) dx \right) u_x \|_2^2 + \|c \left(y, \int_{-\pi}^{\pi} u(x, y) dx \right) u \|_2^2 + \|u\|_2^2 \leq \\
& \leq c_2 (\|u_{xx}\|_2^2 + \|u_{yy}\|_2^2 + \|u_x\|_2^2 + \|u\|_2^2) \leq c_3 (\|u_{xx}\|_2^2 + \|u_{yy}\|_2^2 + \|u\|_2^2) \leq \\
& \leq c_1^{-1} c_3.
\end{aligned}$$

Здесь $c_2 = \sup_{z \in \mathbf{C}} \max_{y \in [-1; 1]} \{|k(y)|, |a(y, z)|, |c(y, z)|\}$. Отсюда, c_1 выбрав таким, что $c_1^{-1} c_3 \leq 1$, имеем

$$\dot{M}_{c^{-1}} \subseteq M.$$

Пусть теперь $u \in M$. Тогда в силу теоремы [1] имеем

$$\|u_x\|_2^2 + \|u_y\|_2^2 + \|u\|_2^2 \leq c_1 (\|Lu\|_2^2 + \|u\|_2^2),$$

т.е.

$$M \subseteq \tilde{M}_{c_1}.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть выполнены условия $i_0, i_0 i_0$. Тогда справедливы оценки

$$c^{-1} \dot{d}_k \leq d_k \leq c \tilde{d}_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $c > 0$ — некоторая постоянная, \tilde{d}_k, \dot{d}_k — k -поперечники, соответственно, множеств $\tilde{M}_c, \dot{M}_{c^{-1}}$.

Справедливость неравенств следует из леммы 1 и свойств поперечников по Колмогорову. Введем функцию $N(\lambda) = \sum_{d_k > \lambda} 1$, равную количеству поперечников d_k , больших $\lambda > 0$.

Следующее утверждение доказано в работе [2].

Лемма 3. Пусть выполнены условия $i_0, i_0 i_0$. Тогда справедлива оценка

$$\dot{N}(c\lambda) \leq N(\lambda) \leq \tilde{N}(c^{-1}\lambda),$$

где $\tilde{N}(\lambda) = \sum_{\tilde{d}_k > \lambda} 1, \dot{N}(\lambda) = \sum_{\dot{d}_k > \lambda} 1$.

Доказательство теоремы 2. Для функций $\tilde{N}(\lambda)$ и $\dot{N}(\lambda)$ справедливы оценки [3]:

$$c^{-1} \lambda^{-2} \leq \tilde{N}(\lambda) \leq c \lambda^{-2}, \quad (5)$$

$$c^{-1} \lambda^{-1} \leq \dot{N}(\lambda) \leq c \lambda^{-1}. \quad (6)$$

Пусть $\lambda = \tilde{d}_k$, тогда $\tilde{N}(\tilde{d}_k) = k$. Из (5) и (6), соответственно, следуют неравенства

$$c^{-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \tilde{d}_k \leq c \frac{1}{\sqrt{k}},$$

$$c^{-1} \frac{1}{k} \leq \dot{d}_k \leq c \frac{1}{k}.$$

Отсюда с учетом оценок, полученных в лемме 2, получаем доказательство теоремы 2.

Цитированная литература

1. **Муратбеков М.Б., Оспанов К.Н., Иманбаева А.Б.** // Труды Межд. научной конф. "Совр. проблемы мат. физики и информац. технологии." Ташкент, 2003. Том II. С.263–264.
2. **Муратбеков М.Б.** // Дифференц. уравн. 1991. Т.27, №6. С.1034
3. **Мынбаев К.Т., Отелбаев М.О.** Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. М., 1988.

Поступила в редакцию 12.07.2004 г.

РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 517.938

2000 MSC: 34D08

Aldibekov T.M. **On generalized central exponent of linear system with unbounded coefficients** // Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 3 (13). P.5–11.

Representation of generalized central exponent of linear system of differential equations with unbounded coefficient is obtained.

References — 4.

УДК: 517.938

2000 MSC: 34D08

Әлдибеков Т.М. **Коэффициенттері шенелмеген сызықты жүйенің жалпылама - жоғары орталық көрсеткіші туралы**// Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 3 (13). Б.5–11.

Жұмыста коэффициенттік матрицасы шенелмеген сызықты дифференциалдық жүйенің жалпылама - жоғары орталық көрсеткіштің формуласы келтірілген.

Библ. — 4.

УДК: 517.95

2000 MSC: 34K06, 35D05, 35L20

Amangalieva M.M. **About solvability of the boundary value problems for the hyperbolic equation with means**// Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 3 (13). P. 12–15.

The unique strongly solvability of the two boundary value problems for hyperbolic equation with means.

References — 4.

УДК: 517.95

2000 MSC: 34K06, 35D05, 35L20

Аманғалиева М.М. **Орталанған мүшелі гипербодалық теңдеудің шекаралық есептерінің шешілімділігі туралы**// Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 3 (13). Б. 12–15.

Орталанған мүшелі гипербодалық теңдеу үшін екі шекаралық есептің жалғыз әлді шешілімділігі анықталған.

Библ. — 4.

УДК: 532.526

2000 MSC: 76F40

Beketaeva A.O. **Simulation of a jet injection into a supersonic air flow**// Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 3 (13). P. 16–21.

The supersonic compressible turbulent flow with perpendicular injection through a nozzle in a wall is numerically simulated. The governing equations are the two-dimensional Navier-Stokes equations. The influence of Mach number on lift increase at a jet injection into a supersonic air flow is determined.

References — 6.

УДК: 532.526

2000 MSC: 76F40

Бекетаева А.О. **Ағынша мен дыбыс жылдамдығынан жоғары ағынның әсерлеуін зерттеу**// Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 3 (13). Б. 16–21.

Қабырғадағы саңылау арқылы дыбыс жылдамдығынан жоғары ағынға ағып шығуы сандық зерттелді. Екі өлшемді толық Навье-Стокс теңдеулер жүйесінің шешімі айқын емес Бим-Уорминг схемасымен табылды. Теңдеулер жүйесі Болдуин-Ломакстың алгебралық турбуленттік моделімен тұйықталды. Үзілу аймағының ұзындығына негізгі параметрлердің әсері зерттелді. Ағынша мен ағынның әсерлесуінен пайда болатын көтерме күштің өсуіне Мах санының әсері анықталды

Библ. — 6.

УДК: 517.95

2000 MSC: 34K06, 35D05, 35K05

Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I. **On Cauchy problem for "essential" loaded parabolic equation** // Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 3 (13). P.22–26.

In this paper Cauchy problem for one-dimensional loaded heat conduction equation is under consideration. Dimension of kernel for corresponding operator and conditions of unique strong solvability are received.

References — 3.

УДК: 517.95

2000 MSC: 34K06, 35D05, 35K05

Жиенәлиев М.Т., Рамазанов М.И. **"Елеулі" жүктелген параболалық теңдеу үшін қойылған Коши есебі туралы**// Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 3 (13). Б.22–26.

Белгіленген уақыт айнымалысы бойынша жүктелген жылуөткізгіш теңдеу үшін қойылған Коши есебінің екі мәселесі қарастырылған. Біріншісі – аталған есепке сәйкес келетін оператордың ядросының өлшемі анықталады, екіншісі — аталған теңдеу үшін қойылған Коши есебінің жалғыз әлді шешілімділігі көрсетіледі.

Библ. — 3.

УДК: 539.3

2000 MSC: 74B20

Zjakupbekov A.B., Dujshenaliev T.B. **Load-deformation diagram equation**// Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 3 (13). P.27–40.

In this paper "load–deformation" diagram is considered without a hypothesis of monoaxial stress state during stretching (compressing) of cylindrical samples. The equation of diagram which gives another interpretation that standard one has got. The procedure of Lamé material constant specification has changed. Comparison of calculation and empirical data was carried out.

References — 4.

УДК: 539.3

2000 MSC: 74B20

Жакыпбеков А.Б., Дуйшеналиев Т.Б. **"Күш-деформациясының" диаграмма теңдеуі** // Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 3 (13). Б.27–40.

Бұл жұмыста гипотезасыз бір өсті кернеулі күйдегі цилиндрлік үлгінің созылған (сығылған) жағдайындағы күш деформациясы қарастырылған. Қалыптасқан түрінен ерекше түсіндірме беретін диаграмма теңдеуі тұрғызылған. Яғни материалдардағы Ламе тұрақтысының анықталу процедурасы өзгереді, ал шындығында деформацияланған үлгінің барлық аймақтарында Гук заңының әсер ету аумағын кеңейтеді. Алынған әртүрлі авторлардың тәжірибелі деректерімен келтірілген салыстыруларының шешімдері осы ұсынылып отырған теңдеудің дәлдігінің жоғары екенін көрсетеді.

Библ. — 4.

УДК: 517.956

2000 MSC: 35L20

Kalmenov T.Sh., Akhmetova S.T., Shaldanbaev A.Sh. **To spectral theory of equations with deflecting argument** // Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 3 (13). P.41–48.

Spectral properties of qualities of differential operators with deflecting arguments are studied and applied to Sturm-Liouville problem with additional condition.

References — 8.

УДК: 517.956

2000 MSC: 35L20

Калменов Т.Ш., Ахметова С.Т., Шалданбаев А.Ш. **Ауытқымалы аргументі бар теңдеулердің спектралды теориясына орай** // Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 3 (13). Б.41–48.

Бұл мақалада аргументі ауытқыйтын дифференциалдық оператордың спектралды қасиеттері зерттелген және оның нәтижелері қосымша шарты бар Штурм-Лиувилль есебіне қолданылған.

Библ. — 8.

УДК: 519.624

2000 MSC: 34B40

Kokotova E. V. **Criteria of unique solvability of two-point boundary-value problem with non-uniform internal partition** // Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 3 (13). P.49–57.

Two-point linear boundary-value problem for ordinary differential equation is considered. The necessary and sufficient coefficient conditions of unique solvability of problem are established by parameterization's method with non-uniform step of partition.

References — 5.

УДК: 519.624

2000 MSC: 34B40

Кокотова Е.В. **Аралықты бірқалыпты емес бөлгендегі қос нүктелі шеттік есептің бірмәнді шешілімдігінің белгілері** // Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 3 (13). Б.49–57.

Жәй дифференциалдық теңдеу үшін қос нүктелі шеттік есеп қарастырылады. Бөлшектеу қадамы бірқалыпты емес параметрлеу әдісімен есептің бір мәнді шешілімдігінің коэффициенттік қажетті және жеткілікті шарттары алынған.

Библ. — 5.

УДК: 519.624

2000 MSC: 34B05

Nazarova K.J. **On correctness of linear two point boundary value problem**// Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 3 (13). P.58–67.

Necessary and sufficient conditions of correct solvability of linear two point boundary value problem for one variant of parametrization method are established in data terms.

References — 8.

УДК: 519.624

2000 MSC: 34B05

Назарова К.Ж. **Сызықты екі нүктелі шеттік есептің корректілігі туралы** // Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 3 (13). Б.58–67.

Параметрлеу әдісінің бір варианты үшін берілген сызықтық екі нүктелі шеттік есеп терминінде корректі шешілімдіктің қажетті және жеткілікті шарттары тағайындалды.

Библ. — 8.

УДК: 517.946

2000 MSC: 35J20

Ospanov K.N. **On one correct problem for singular Bitsadze type system**// Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 3 (13). P.68–73.

The one-valued solvability in S.L.Sobolev class of half-periodical problem on the stripe for A.V.Bitsadze type system with unlimited coefficients is established.

References — 7.

УДК: 517.946

2000 MSC: 35J20

Оспанов Қ.Н. **Петровский бойынша эллипстік жүйе үшін бір корректі есеп туралы** // Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 3 (13). Б.68–73.

Коэффициенттері шектелмеген А.В.Бицадзе тектес жүйе үшін жолақтағы жартылай периодты есептің С.Л. Соболев класында бір мәнді шешілуі тағайындалған.

Библ. — 7.

УДК: 621.371.167; 621.372.81

2000 MSC: 78A45

Sautbekov S.S. **Diffraction of a plane wave on a strip AT with arbitrary wave vector**// Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 3 (13). P.74–83.

The diffraction of a plane wave on a strip with arbitrary wave vector is considered. The boundary value problem is divided to Dirichlet and Cauchy problems. Using Wiener-Hopf-Fock method this problems reduce to the system of Fredholm integral equations of second tape. And then this equations reduce to the system of linear algebraic equations using saddle point and standard integrals method. The calculation of electromagnetic field was carried out. Characteristic equation for obtaining of resonance on the strip has been got.

References — 3.

УДК: 621.371.167; 621.372.81

2000 MSC: 78A45

Саутбеков С.С. **Кез келген толқын векторы үшін жазық толқынның таспадағы дифракциясы** // Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 3 (13). Б.74–83.

Кез келген толқын векторы үшін жазық толқынның таспадағы дифракциясы қарастырылған. Шектік есеп Дирихле және Коши есептеріне бөлінген. Винер-Хопф-Фок әдісінің негізінде олардың әр қайсысы, сингулярлық интегралдық теңдеулерден бастап, екінші текті Фредгольм теңдеулер жүйесіне, әрі қарай асу әдісі және эталон интегралдары арқылы сызықтық теңдеулер жүйесіне келтірілген. Электромагниттік өрістің өрнектері алынған. Таспадағы резонанс үшін характеристикалық теңдеулер алынған.

Библ. — 3.

УДК: 517.95

2000 MSC: 76W05

Sakhaev Sh. **Estimstion of solution one Cauchy problem of magnetic hydrodynamics theory in L_p** // Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 3 (13). P.84–90.

One Cauchy problem foundation is given. Its unique solvability is proved and estimation of its solvability is proved and estimation of its solution in Sobolev space is obtained when liquid flow is turbulent (nondivergent).

References — 8.

УДК: 517.95

2000 MSC: 76W05

Сахаев Ш. **Магниттік гидродинамика теориясының бір есебінің L_p кеңістікте шешімін бағалау** // Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 3 (13). Б.84–90.

Сү йық қозғалысы турбуленттік жағдайда магнитті гидродинамиканың бір Коши есебіне енгізіп, ол есептің бірімәнді шешімі Соболев кеңістігінде бағаланды.

Библ. — 8.

УДК: 519.624

2000 MSC: 34B40

Uteshova R.E. **On correct solvability of singular problem for linear differential equation**// Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 3 (13). P.91–98.

A problem of finding of bounded on the whole axis solution of non-homogeneous differential equation with limitly zero-matrix and right part bounded with a weight is investigated by parameterization's method. Necessary and sufficient conditions of correct solvability of the problem are received in terms of bilaterally infinite matrix of special structure.

References — 10.

УДК: 519.624

2000 MSC: 34B40

Өтешова Р.Е. **Сызықты дифференциалдық теңдеу үшін сингулярлы есептің корректі шешілімдігі туралы** // Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 3 (13). Б.91–98.

Шегі нольдік матрица болатын және салмақты оң жағы бар бір текті емес дифференциалдық теңдеудің бүкіл осьте шектелген шешімін табу есебі параметрлеу әдісімен зерттелген. Арнайы құрылымды екі жақты шексіз матрица терминінде қарастырылып отырған есептің корректі шешілімдігінің қажетті және жеткілікті шарттары алынған.

Библ. — 10.

УДК: 517.5

2000 MSC: 41A45, 26B40

Bazarkhanov D.B. **Littlewood–Paley theorem for mixed norm**// Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 3 (13). P.99–101.

A version of the Littlewood–Paley theorem for mixed norm is obtained.

References — 8.

УДК: 517.5

2000 MSC: 41A45, 26B40

Базарханов Д.Б. **Аралас нормадағы Литтлвуд–Пэли теоремасы** // Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 3 (13). Б.99–101.

Аралас нормадағы Литтлвуд–Пэли теоремасының бір нұсқасы алынған.

Библ. — 8.

УДК: 517.946

2000 MSC: 35M10, 35P15

Иманбаева А.В. **Estimates of Kolmogorov’s widths of sets relating to domain of nonlinear mixed type equation** // Mathematical journal. 2004. Vol. 4. No. 3 (13). P.102–105.

In this paper some approximative properties of nonlinear mixed type operator are investigated. Two-sided estimates of Kolmogorov’s widths of solution set for the equation with right side from unit circle are obtained.

References — 3.

УДК: 517.946

2000 MSC: 35M10, 35P15

Иманбаева А.В. **Аралас типті сызықсыз теңдеудің анықталу облысымен байланысты жиындардың Колмогоров бойынша көлденеңдіктерінің бағалары** // Математикалық журнал. 2004. Т. 4. № 3 (13). Б.102–105.

Бұл жұмыста аралас типті сызықсыз оператордың кейбір аппроксимативтік қасиеттері зерттелген және бірлік шардан алынған теңдеудің оң жақ бөлігіне сәйкес келетін шешімдерінің жиынының Колмогоров бойынша көлденеңдіктерінің екі жақты бағалары алынды.

Библ. — 3.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в "Математический журнал", должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.
2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК**, далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту.
3. К статье прилагаются в двух экземплярах на казахском, русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.
4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в \LaTeX tex-файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в <http://www.math.kz/> в разделе "Математический журнал").
5. Объем статей (стандартный формат в \LaTeX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).
6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.
7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

Цитированная литература

- (a) **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)
 - (b) **Мельников А. В.**// Успехи матем.наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61 – 69.
 - (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.
8. Статья должна быть подписана всеми авторами. В конце статьи необходимо указать организацию, от которой направлена статья, и e-mail (при наличии).
 9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О.(полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.