

ISSN 1682—0525

*МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ*

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ЖУРНАЛ**

*M A T H E M A T I C A L J O U R N A L*

2007 том 7 № 4 (26)

ИЗДАЕТСЯ С 2001 ГОДА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ МО И Н РК  
АЛМАТЫ

*Министерство образования и науки Республики Казахстан*

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 7 № 4 (26) 2007

Периодичность — 4 номера в год

*Главный редактор*  
А.А.Женсыкбаев

*Заместители главного редактора:*  
М.Т.Дженалиев, М.И.Рахимбердиев

Редакционная коллегия:

М.Б.Айдарханов, Л.А.Алексеева, Г.И.Бижанова, Н.К.Блиев,  
В.Г.Войнов, Д.С.Джумабаев, А.С.Джумадилаев, В.П.Добрица,  
А.Ж.Найманова, М.К.Орунханов, И.Т.Пак, М.Г.Перетятыкин, С.Н.Харин,  
А.Т.Кулахметова (ответственный секретарь).

*Адрес редколлегии и редакции: 050010 г.Алматы ул.Пушкина, 125, к. 304*  
*Телефон 8-(3272)-91-20-03, journal@math.kz, http://www.math.kz*

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

©Институт математики МОН РК, 2007г.

## СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 7, № 4 (26), 2007

---

---

Об оценках наилучшего $M$ - членного приближения класса Бесова <i>Г. Акишев</i> .....	5
Преобразования Лоренца для одной модели электро-гравимагнитного поля. Законы сохранения <i>Л.А. Алексеева</i> .....	12
О корректной разрешимости двухточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений <i>Э. А. Бакирова</i> .....	25
Неравенство разных метрик в анизотропных пространствах Лоренца <i>Д.К. Дарбаева, Е.Д. Нурсултанов</i> .....	34
О существовании и единственности сильного решения периодической задачи для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом <i>Т.Ш. Кальменов, А.Ш. Шалданбаев, М.Т. Шоманбаева</i> .....	44
Численные методы мультифрактального формализма в задачах сегментации и текстурного анализа данных дистанционного зондирования <i>О.А. Круглуни, И.Н. Макаренко</i> .....	51
О фундаментальной матрице линейной разнотемповой системы управления, когда матричный коэффициент вектора состояния имеет кратные собственные значения <i>Дж. Мамытов, Ж. Шаршеналиев</i> .....	60
Процедура хэширования в нетрадиционном алгоритме формирования электронной цифровой подписи <i>С. Е. Нысанбаева</i> .....	69
О разрывных решениях задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе <i>А.В. Роговой</i> .....	75
К 75-летию профессора С.А.Теляковского. О методах Чезаро и Рисса <i>Л.П. Фалалеев</i> .....	82

---

---

## ХРОНИКА

---

---

К 75-Летию со дня рождения .....	87
Шмидт Мусаевич Айтиев .....	89
Махмет Беркутбаевич Айдарханов .....	93
Памяти Амангельды Искаковича Омарова .....	95
<hr/>	
Рефераты .....	97

---

---

УДК 517.518

## ОБ ОЦЕНКАХ НАИЛУЧШЕГО $M$ - ЧЛЕННОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ КЛАССА БЕСОВА

Г. АКИШЕВ

Карагандинский государственный университет им.Е.А. Букетова  
г. Караганда ул. Университетская, 28 akishev@ksu.kz

В статье изучен порядок наилучшего  $M$ - членного приближения классов Бесова в пространствах Лебега со смешанной нормой.

Пусть  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m) \in R^m$ ,  $I^m = [0, 2\pi]^m$ ,  $m \in N$  – множество натуральных чисел. Через  $L_{\bar{p}}(I^m)$  обозначим пространство измеримых по Лебегу, имеющих  $2\pi$  – период по каждой переменной функций  $f(\bar{x})$ , для которых

$$\|f\|_{\bar{p}} = \left[ \int_0^{2\pi} \left[ \dots \left[ \int_0^{2\pi} |f(\bar{x})|^{p_1} dx_1 \right]^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \right]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}} dx_m \right]^{\frac{1}{p_m}} < +\infty,$$

где  $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$ ,  $1 \leq p_j < +\infty$ ,  $j = 1, \dots, m$  (см. [1],[2]),  $\overset{\circ}{L}_{\bar{p}}(I^m)$  – множество всех функций  $f \in L_{\bar{p}}(I^m)$  таких, что

$$\int_0^{2\pi} f(\bar{x}) dx_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

Числовая последовательность  $\{a_{\bar{n}}\}_{\bar{n} \in Z^m} \in l_{\bar{p}}$ , если

$$\|\{a_{\bar{n}}\}_{\bar{n} \in Z^m}\|_{l_{\bar{p}}} = \left\{ \sum_{n_m=-\infty}^{\infty} \left[ \dots \left\{ \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} |a_{\bar{n}}|^{p_1} \right\}^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \right]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}} \right\}^{\frac{1}{p_m}} < +\infty,$$

где  $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$ ,  $1 \leq p_j < +\infty$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Пусть даны векторы  $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$ ,  $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$ ,  $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ ,  $1 \leq \theta_j, p_j < +\infty$ ,  $r_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Рассмотрим класс О.В. Бесова

$$B_{\bar{p}, \bar{\theta}}^{\bar{r}} = \left\{ f \in \overset{\circ}{L}_{\bar{p}}(I^m) : \|f\|_{B_{\bar{p}, \bar{\theta}}^{\bar{r}}} = \|f\|_{\bar{p}} + \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}} \right\}_{\bar{s} \in Z_+^m} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \leq 1 \right\}.$$

Keywords: approximation, Lebesgue space, Besov class

2000 Mathematics Subject Classification: 42A10

© Г. АКИШЕВ, 2007.

Здесь и в дальнейшем

$$\delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) = \sum_{\bar{n} \in \rho(\bar{s})} a_{\bar{n}}(f) e^{i\langle \bar{n}, \bar{x} \rangle},$$

где  $\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle = \sum_{j=1}^m y_j x_j$ ,  $\rho(\bar{s}) = \{\bar{k} = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m : 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, \dots, m\}$ ,  $a_{\bar{n}}(f)$  – коэффициенты Фурье функции  $f \in L_1(I^m)$  по кратной тригонометрической системе  $\{e^{i\langle \bar{n}, \bar{x} \rangle}\}_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^m}$ .

Пусть  $X, Y$  – нормированные пространства  $2\pi$  – периодических функций многих переменных. Для функции  $f \in X$  наилучшим  $M$ -членным приближением называется величина (см. [3],[4])

$$e_M(f)_X = \inf_{\bar{k}^j, b_j} \|f - \sum_{j=1}^M b_j e^{i\langle \bar{k}^j, \bar{x} \rangle}\|_X,$$

где  $\{\bar{k}^j\}_{j=1}^M$  – система векторов  $\bar{k}^j = (k_1^j, \dots, k_m^j)$  с целочисленными координатами,  $b_j$  – произвольные коэффициенты.

Если  $F$  – некоторый функциональный класс, то положим

$$e_M(F)_X = \sup_{f \in F} e_M(f)_X.$$

В случае  $X = L_2$  величина  $e_M(f)_{L_2}$  для функции одной переменной впервые была введена С. Б. Стечкиным [3] при формулировке критерия абсолютной сходимости рядов Фурье. Оценки порядка величины  $e_M(f)_X$  исследовали Р.С. Исмагилов, В.Е. Майоров, Э.С. Белинский, В.Н. Темляков, Р. Девор, Б.С. Кашин, А.И. Степанец, А.С. Романюк, Н. Н. Коневич (см. библиограф. в [5] – [8]).

Настоящая статья является продолжением [7], [8] по изучению порядка наилучшего  $M$ -членного приближения классов Бесова в пространствах Лебега со смешанной нормой.

Сначала приведем некоторые обозначения и вспомогательные утверждения. Положим

$$Y^m(n, \bar{\gamma}) = \{\bar{s} = (s_1, \dots, s_m) \in \mathbb{Z}_+^m : \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \geq n\}.$$

Через  $C(p, q, r, y)$  обозначим положительные величины, зависящие от указанных в скобках параметров, вообще говоря, различные в разных формулах.

Запись  $A(y) \asymp B(y)$  означает, что существуют положительные  $C_1, C_2$  такие, что  $C_1 \cdot A(y) \leq B(y) \leq C_2 \cdot A(y)$ .

**Лемма 1.** (см. [9], [10]). Пусть  $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ ,  $1 \leq \theta_j < +\infty$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ ,  $\bar{\gamma}' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_m)$  такие, что  $\gamma_1 = \dots = \gamma_\nu = \gamma'_1 = \dots = \gamma'_\nu = 1 < \gamma'_j < \gamma_j \forall j = \nu + 1, \dots, m$ , и  $b_{\bar{s}}(n, \bar{\gamma}, \bar{\gamma}') = 2^{-\alpha \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle}$ , если  $\bar{s} \in Y^m(n, \bar{\gamma}')$ , и  $b_{\bar{s}}(n, \bar{\gamma}, \bar{\gamma}') = 0 \forall \bar{s} \notin Y^m(n, \bar{\gamma}')$ ,  $\alpha > 0$ . Тогда имеет место следующее неравенство:

$$\|\{b_{\bar{s}}(n, \bar{\gamma}, \bar{\gamma}')\}\|_{l_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_+^m)} \leq C(\theta, \gamma, \gamma') \cdot 2^{-n\alpha} \cdot n^{\sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\theta_j}}.$$

**Замечание 1.** В случае  $\theta_1 = \dots = \theta_m$  лемма 1 доказана В.Н. Темляковым [5].

**Теорема 1.** Пусть  $\bar{q} = (q_1, \dots, q_m)$ ,  $1 < q_j < \infty$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $\beta = \min\{q_1, \dots, q_m, 2\}$ . Тогда для любой функции  $f \in L_{\bar{q}}(I^m)$  имеет место неравенство

$$\|f\|_{\bar{q}} \leq C(q, m) \left\{ \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{q}}^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}.$$

Эта теорема доказана в [11].

Теперь изложим основные результаты статьи. В дальнейшем положим  $Y_+ = \max\{0, Y\}$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$ ,  $\bar{q} = (q_1, \dots, q_m)$ ,  $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$ ,  $\bar{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_m)$ ,  $1 \leq p_j \leq 2 < q_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $1 \leq \tau_j < +\infty$ ,  $0 < r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} = \dots = r_\nu + \frac{1}{q_\nu} - \frac{1}{p_\nu} < r_{\nu+1} + \frac{1}{q_{\nu+1}} - \frac{1}{p_{\nu+1}} \leq \dots \leq r_m + \frac{1}{q_m} - \frac{1}{p_m}$ . Тогда

$$1) e_M(B_{\bar{p}, \bar{\tau}}^{\bar{r}})_{\bar{q}} \leq M^{-\left(r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{p_1}\right)} (\log M)^{(\nu-1)\left(r_1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{2}\right) + \sum_{j=2}^{\nu} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau_j}\right)_+}$$

если  $r_j > \frac{1}{p_j}$ ,  $j = 1, \dots, \nu$ ,  $(r_1 - \frac{1}{p_1})\frac{1}{q_j} < (r_j - \frac{1}{p_j})\frac{1}{q_1}$ ,  $j = \nu + 1, \dots, m$ .

2) Если  $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j < \frac{1}{p_j}$ ,  $q_j < \tau_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , то

$$e_M(B_{\bar{p}, \bar{\tau}}^{\bar{r}})_{\bar{q}} \leq M^{-\frac{q_1}{2}\left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)} (\log M)^{(q_1-1)(\nu-1)\left(r_1 - \frac{1}{p_1}\right) + \frac{q_1}{q_1} \sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\tau_j}}.$$

3) Если  $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q} < r_j < \frac{1}{p_j}$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $\tau \leq q$ , то

$$e_M(B_{\bar{p}, \bar{\tau}}^{\bar{r}})_{\bar{q}} \leq M^{-\frac{q}{2}\left(r_1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p_1}\right)} (\log M)^{(q-1)(\nu-1)\left(r_1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q} \frac{1}{\tau}\right)}$$

4) Если  $r_j = \frac{1}{p_j}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , то

$$e_M(B_{\bar{p}, \bar{\tau}}^{\bar{r}})_{\bar{q}} \asymp M^{-\frac{1}{2}} (\log M)^{\sum_{j=1}^m \frac{1}{\tau_j}}.$$

**Доказательство.** Доказательства пунктов 1-3 приведены в [8], а пункта 4 – [7].

**Теорема 3.** Пусть  $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$ ,  $\bar{q} = (q_1, \dots, q_m)$ ,  $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$ ,  $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ ,  $2 \leq p_j \leq q_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $1 \leq \theta_j < +\infty$ ,  $0 < r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} = \dots = r_\nu + \frac{1}{q_\nu} - \frac{1}{p_\nu} < r_{\nu+1} + \frac{1}{q_{\nu+1}} - \frac{1}{p_{\nu+1}} \leq \dots \leq r_m + \frac{1}{q_m} - \frac{1}{p_m}$ . Тогда

$$e_M(B_{\bar{p}, \bar{\theta}}^{\bar{r}})_{\bar{q}} \asymp M^{-r_1} (\log M)^{(\nu-1)r_1 + \sum_{j=2}^{\nu} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_j}\right)_+}.$$

**Доказательство.** Так как  $B_{\bar{p}, \bar{\theta}}^{\bar{r}} \subset B_{2, \bar{\theta}}^{\bar{r}}$  при  $2 \leq p_j < +\infty$ ,  $j = 1, \dots, m$ , то оценка сверху следует теоремы 2

$$e_M(B_{\bar{p}, \bar{\theta}}^{\bar{r}})_{\bar{q}} \leq e_M(B_{2, \bar{\theta}}^{\bar{r}})_{\bar{q}} \leq C(q, r, m, \theta) M^{-r_1} (\log M)^{(\nu-1)r_1 + \sum_{j=2}^{\nu} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_j}\right)_+}.$$

Докажем оценку снизу. Воспользуемся результатом Рудина - Шапиро: для каждого  $n \in \mathbb{N}$  найдется полином

$$R_n(\bar{x}) = \sum_{j=2^{n-1}}^{2^n-1} \epsilon_j e^{i \cdot jx}, \quad \epsilon_j = 1 \text{ or } \epsilon_j = -1,$$

такой что

$$\|R_n\|_\infty \leq C \cdot 2^{\frac{n}{2}}.$$

По заданному числу  $M$  выберем число  $l$  так, чтобы выполнялись соотношения  $M \asymp 2^l n^{l-1}$  и  $2 \cdot M < 2^l n^{l-1}$ . Рассмотрим функцию

$$f_0(\bar{x}) = 2^{-\frac{l}{2}} l^{-\sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\theta_j}} 2^{-l \cdot r_1} \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l} \prod_{j=1}^m R_{s_j}(x_j),$$

где  $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ ,  $\gamma_j = \frac{r_j}{r_1}$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Тогда  $f_0 \in L_{\bar{p}}$  и

$$\left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} \|\delta_{\bar{s}}(f_0)\|_{\bar{p}} \right\}_{\bar{s} \in Z_+^m} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \leq C \cdot l^{-\sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\theta_j}} 2^{-l \cdot r_1} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} \right\}_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l} \right\|_{l_{\bar{\theta}}}. \quad (1)$$

Учитывая неравенство

$$\sum_{k=1}^n k^{\tau-1} \leq C(\tau) \cdot n^{\tau}, \quad \tau > 0,$$

получим

$$\left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} \right\}_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \leq C(\theta, \tau) \cdot 2^{l \cdot r_1} l^{\sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\theta_j}}. \quad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) следует, что

$$\left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} \|\delta_{\bar{s}}(f_0)\|_{\bar{p}} \right\}_{\bar{s} \in Z_+^m} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \leq C_0.$$

Следовательно, функция  $C_0^{-1} \cdot f_0 \in B_{\bar{p}, \bar{\theta}}^{\bar{r}}$ .

Далее будем пользоваться двойственным соотношением, которое следует из более общего результата С.М. Никольского ([12], с. 25). Согласно этому соотношению для любой функции  $f \in L_{\bar{q}}(I^m)$  имеет место равенство

$$e_M(f)_{\bar{q}} = \inf_{\Omega_M} \sup_{P \in L^{\perp}} \left| \int_{I^m} f(\bar{x}) P(\bar{x}) d\bar{x} \right|. \quad (3)$$

Теперь функцию  $P_4(\bar{x})$ , которая удовлетворяла бы требованиям к  $P(\bar{x})$  из (3), построим следующим образом. Положим

$$v_2(\bar{x}) = \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l} \prod_{j=1}^m R_{s_j}(x_j) \quad u_2(\bar{x}) = \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l}^* \prod_{j=1}^m R_{s_j}(x_j),$$

где "\*" означает, что полином  $u_2(\bar{x})$  содержит только гармоники функции  $v_2$ , которые имеют "номера" из множества  $\Omega_M$ . Положим  $w_2(\bar{x}) = v_2(\bar{x}) - u_2(\bar{x})$ . В силу того, что  $1 < q'_j = \frac{q_j}{q_j-1} < 2$  и равенства Парсеваля будем иметь

$$\|w_2\|_{q'} \leq \|w_2\|_2 \leq C_0 \cdot 2^{\frac{l}{2}} l^{\frac{m-1}{2}}.$$

Поэтому для функции

$$P_4(\bar{x}) = C_0^{-1} \cdot 2^{-\frac{l}{2}} l^{-\frac{m-1}{2}}$$

имеет место неравенство

$$\|P_4\|_{\bar{q}'} = C_0^{-1} \cdot 2^{-\frac{l}{2}} l^{-\frac{m-1}{2}} \|w_2\|_{\bar{q}'} \leq 1.$$

Теперь, пользуясь формулой (3) и условием выбора числа  $l$ , получим

$$e_M \left( B_{\bar{p}, \bar{\theta}}^{\bar{r}} \right)_{\bar{q}} \geq e_M (f_0)_{\bar{q}} \geq C \cdot 2^{-l(r_1+1)} l^{-\frac{m-1}{2}} \cdot l^{-\sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\theta_j}}.$$

$$\cdot \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l}^* \sum_{\rho_{\bar{s}} \cap \Omega_M} 1 = C \cdot 2^{-l(r_1+1)} l^{-\frac{m-1}{2}} \cdot l^{-\sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\theta_j}} \cdot \left( 2^l \cdot l^{m-1} - M \right) \geq C \cdot 2^{-l(r_1+1)} \cdot l^{\frac{m-1}{2} - \sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\theta_j}}.$$

Этим теорема 3 доказана.

**Теорема 4.** Пусть  $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$ ,  $\bar{q} = (q_1, \dots, q_m)$ ,  $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$ ,  $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ ,  $1 < p_j < q_j \leq 2$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $1 \leq \theta_j < +\infty$ ,  $0 < r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} = \dots = r_\nu + \frac{1}{q_\nu} - \frac{1}{p_\nu} < r_{\nu+1} + \frac{1}{q_{\nu+1}} - \frac{1}{p_{\nu+1}} \leq \dots \leq r_m + \frac{1}{q_m} - \frac{1}{p_m}$ . Тогда

$$e_M \left( B_{\bar{p}, \bar{\theta}}^{\bar{r}} \right)_{\bar{q}} \leq C(q, p, r, m, \theta) M^{-(r_1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p_1})} (\log M)^{(\nu-1) \cdot (r_1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p_1}) + \sum_{j=2}^{\nu} \left( \frac{1}{q_j} - \frac{1}{\theta_j} \right)},$$

если  $q_j < \theta_j \leq \infty$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

**Доказательство.** Выберем натуральное число  $n$  такое, что  $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$ . Рассмотрим частичную сумму

$$S_n^{\bar{\gamma}'}(f, \bar{x}) = \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < n} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}),$$

где  $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ ,  $\bar{\gamma}' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_m)$ ,  $1 = \gamma_1 = \dots = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \leq \dots \leq \gamma_m$ ,  $\gamma_j = \left( r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j} \right) \cdot \left( r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} \right)^{-1}$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $\gamma'_j = \gamma_j = 1$ ,  $j = 1, \dots, \nu$  и  $\gamma'_j < \gamma_j$ ,  $j = \nu + 1, \dots, m$ . Тогда в силу неравенства (см. [13],[7])

$$\|f\|_{\bar{q}} \leq C(p, q, m) \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j \left( \frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} \right)} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}} \right\}_{\bar{s} \in Z_+^m} \right\|_{l_{\bar{q}}},$$

неравенства Гельдера с показателями  $\beta_j = \frac{\theta_j}{q_j}$ ,  $\frac{1}{\beta_j} + \frac{1}{\beta_j'} = 1$ ,  $j = 1, \dots, m$ , и леммы 1 имеем

$$\|f - S_n^{\bar{\gamma}'}(f)\|_{\bar{q}} \leq C(p, q, m, \theta) \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}} \right\}_{\bar{s} \in Z_+^m} \right\|_{l_{\bar{\theta}}}.$$

$$\cdot \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{-s_j \left( r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j} \right)} \right\}_{\bar{s} \in Y^m(n, \bar{\gamma}')} \right\|_{l_{\bar{\epsilon}}} \leq C(p, q, m, r) 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} n^{\sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\epsilon_j}} \leq$$

$$\leq C(p, q, m, r) 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} n^{\sum_{j=2}^{\nu} \left( \frac{1}{q_j} - \frac{1}{\theta_j} \right)}$$

для любой функции  $f \in B_{\bar{p}, \bar{\theta}}^{\bar{r}}$ , где  $\bar{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$ ,  $\frac{1}{\epsilon_j} = \frac{1}{q_j} - \frac{1}{\theta_j}$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} e_M(f)_{\bar{q}} &\leq C(p, q, m, r) 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} n^{\sum_{j=2}^{\nu} (\frac{1}{q_j} - \frac{1}{\theta_j})} \leq \\ &\leq C(p, q, m, r) M^{-(r_1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p_1})} (\log M)^{(\nu-1) \cdot (r_1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p_1}) + \sum_{j=2}^{\nu} (\frac{1}{q_j} - \frac{1}{\theta_j})}. \end{aligned}$$

Этим теорема доказана.

**Теорема 5.** Пусть  $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$ ,  $\bar{q} = (q_1, \dots, q_m)$ ,  $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$ ,  $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ ,  $1 < q_j \leq p_j < +\infty$ ,  $p_j \geq 2$ ,  $2 \leq \theta_j \leq \infty$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $0 < r_1 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_m$ . Тогда

$$e_M \left( B_{\bar{p}, \bar{\theta}}^{\bar{r}} \right)_{\bar{q}} \leq C(q, p, r, m, \theta) M^{-r_1} (\log M)^{(\nu-1)r_1 + \sum_{j=2}^{\nu} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_j} \right)}.$$

**Доказательство.** Так как  $q_j \leq p_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , то

$$e_M \left( B_{\bar{p}, \bar{\theta}}^{\bar{r}} \right)_{\bar{q}} \leq C(p, q, m) e_M \left( B_{\bar{p}, \bar{\theta}}^{\bar{r}} \right)_{\bar{p}}. \quad (4)$$

Следовательно, достаточно оценить  $e_M \left( B_{\bar{p}, \bar{\theta}}^{\bar{r}} \right)_{\bar{p}}$ . Пусть  $f \in B_{\bar{p}, \bar{\theta}}^{\bar{r}}$ . Тогда в силу теоремы 1 будем иметь

$$\|f - S_n^{\bar{\gamma}}(f)\|_{\bar{p}} \leq C(p, m) \left\{ \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle \geq n} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

Так как  $2 \leq \theta_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , то используя неравенство Гельдера и лемму 1, из (5) получим

$$\|f - S_n^{\bar{\gamma}}(f)\|_{\bar{p}} \leq C(p, m, \theta) 2^{-nr_1} \cdot n^{\sum_{j=2}^{\nu} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_j} \right)}$$

для любой функции  $f \in B_{\bar{p}, \bar{\theta}}^{\bar{r}}$ . Отсюда и из оценки (4) следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

**Замечание 2.** В случае  $q_1 = \dots = q_m = q$ ,  $p_1 = \dots = p_m = \theta_1 = \dots = \theta_m = p$  теоремы 3 – 5 ранее доказал А.С. Романюк [6].

## Цитированная литература

1. **Никольский С.М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1977.
2. **Аманов Т.И.** Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. Алма-ата, 1976.
3. **Стечкин С.Б.** // Докл. АН СССР. 1955. Т.102, № 1. С. 37 – 40.
4. **Исмагилов Р.С.** // Успехи матем. наук. 1974. Т.29, С. 161 – 173.
5. **Темляков В.Н.** // Труды МИАН СССР, 1986. Т.178, С. 3 – 112.
6. **Романюк А.С.** // Изв. РАН. Серия матем. 2003. Т.67, С. 61 – 100.
7. **Акишев Г.** // Евразийский мат. ж. 2006. № 3, С. 22 – 33.
8. **Акишев Г.** // Матем. журнал. Алматы, 2007, Т.7, № 1. С. 5 – 14.

9. Акишев Г. // Матем. сб. 2006. Т.197, № 8, С. 17 – 40.
10. Акишев Г. // Матем. замет. 2007. Т.81, № 1, С. 3 – 16.
11. Акишев Г. // Ученые записки Казанского гос. университета. Серия физ.- мат. 2006. Т.148, кн. 2. С. 5 – 17.
12. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения М., 1976.
13. Потапов М.К. // Труды МИАН СССР. 1980. Т.156, С. 143 – 156.

*Поступила в редакцию 12.10.2007г.*

УДК 519.6:537.12:531.1

## ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРО-ГРАВИМАГНИТНОГО ПОЛЯ. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Л.А.АЛЕКСЕЕВА

Институт математики МОН РК  
050010 Алматы ул.Пушкина, 125 alexeeva@math.kz

Развивается бикватернионный подход для построения уравнений взаимодействия электро-гравимагнитных полей, порождаемых различными зарядами и токами. Рассмотрены полевые аналоги трех законов Ньютона для свободных и взаимодействующих зарядов-токов, а также суммарного поля взаимодействий. Исследована инвариантность уравнений модели ЭГМ-поля при преобразованиях Лоренца, и, в частности, закона сохранения заряда-тока. Показано, что при взаимодействии полей, этот закон отличается от общеизвестного. Поэтому для замыкания уравнения трансформации зарядов-токов предложена новая модификация уравнений Максвелла с введением скалярного поля в бикватернион напряженности ЭГМ-поля. Построены релятивистские формулы преобразования плотностей масс и зарядов, токов, сил и их мощностей.

Рассматривается одна бикватернионная модель электро-гравимагнитного (ЭГМ) поля, для построения которой использовалась комплексная гамильтонова форма симметризованных уравнений Максвелла [1]. В [2] показано, что гамильтонова форма позволяет легко перейти к бикватернионной записи этих уравнений и законов сохранения. Следует отметить, что свои уравнения Д.К.Максвелл дал в кватернионной форме, а ныне принятая и широко используемая форма принадлежит О.Хевисайду [3]. Кватернионные формы уравнений Максвелла ранее получали и другие авторы [3-5]. Они различаются в зависимости от того, как вводятся кватернионы напряженности, зарядов и токов ЭМ-поля, а также операции на их алгебрах. Однако эти формы использовались, в основном, лишь для исследования решений уравнений Максвелла. Подобные формы также использовал В.В. Кассандров для построения своей модели поля [6].

---

Keywords: *Lorentz transformation electro-gravymagnetic field conservation law*

2000 Mathematics Subject Classification: 35Q60, 83C50

© Л.А.Алексеева, 2007.

Здесь используется скалярно-векторная запись бикватернионов, которая очень наглядна и удивительно приспособлена для записи физических величин и уравнений. Рассмотрена задача Коши для комплексных градиентов в пространстве бикватернионов и получены их решения.

С введением бикватерниона *силы-мощности* развивается бикватернионный подход для построения уравнений взаимодействия ЭГМ-полей, порождаемых различными зарядами и токами, и на их основе аналоги трех законов Ньютона для свободных и взаимодействующих зарядов-токов, а также суммарного поля взаимодействий. Рассмотрена связь полученных уравнений с известными для механики сплошной среды. Получены законы преобразования и сохранения энергии при взаимодействии.

Исследована инвариантность уравнений модели ЭГМ-поля при преобразованиях Лоренца и, в частности, закона сохранения заряда-тока. Показано, что при взаимодействии полей этот закон отличается от общеизвестного. Поэтому в отличие от ранее предложенной нами модели ЭГМ-поля в работах [7,8] для замыкания уравнения трансформации зарядов-токов предложена новая модификация уравнений Максвелла с введением скалярного поля в бикватернион напряженности ЭГМ-поля. Построены релятивистские формулы преобразования плотностей масс и зарядов, токов, сил и их мощностей.

**1. Гамильтонова форма уравнений Максвелла.** Симметризованные уравнения Максвелла для ЭМ-поля можно записать в виде одного векторного и одного скалярного уравнения. В пространстве Минковского  $\mathbf{M} = R^{1+3} = \{(\tau, x) = (ct, x_1, x_2, x_3)\}$  они имеют следующий вид [1]:

$$\partial_\tau A + i \operatorname{rot} A + J = 0, \quad (1)$$

$$\rho = \operatorname{div} A, \quad (2)$$

где  $A$  – комплексный вектор напряженности поля,

$$A = A^E + i A^H = \sqrt{\varepsilon} E + i \sqrt{\mu} H, \quad (3)$$

$E, H$  – напряженности электрического и магнитного полей,  $\varepsilon, \mu$  – константы, характеризующие электрическую проводимость и магнитную проницаемость среды,  $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$  – скорость ЭМ-волн. Плотность заряда  $\rho$  и  $J$ -ток выражаются через электрические и магнитные заряды и токи формулами:

$$\rho = \rho^E/\sqrt{\varepsilon} - i \rho^H/\sqrt{\mu}, \quad J = \sqrt{\mu} j^E - i \sqrt{\varepsilon} j^H, \quad (4)$$

$$\rho^E = \varepsilon \operatorname{div} E, \quad \rho^H = -\mu \operatorname{div} H. \quad (5)$$

Плотность энергии  $A$ -поля  $W$  и вектор Пойнтинга  $P$  определяются выражениями:

$$W = 0,5 (\varepsilon \|E\|^2 + \mu \|H\|^2) = 0,5(A, \bar{A}), \quad P = c^{-1} E \times H = 0,5i [A, \bar{A}], \quad (6)$$

где  $\bar{A} = \sqrt{\varepsilon} E - i \sqrt{\mu} H$  – комплексно-сопряженное  $A$ . Здесь всюду  $(a, b) = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$ ,  $[a, b] = a \times b = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} e_i a_j b_k$  – скалярное и векторное произведения  $a$  и  $b$  соответственно,  $\varepsilon_{ijk}$  – псевдотензор Леви-Чивита,  $e_i$  – орты декартовой системы координат. Как видим из (6), плотность энергии – это просто половина квадрата модуля комплексного вектора  $A$ .

В уравнениях Максвелла плотность магнитного заряда  $\rho^H = 0$ , т.к. магнитное поле – вихревое:  $\operatorname{div} H = 0$ . Известно, что гравитационное поле является скалярным, описывается скалярным гравитационным потенциалом, который зависит от распределения масс. Здесь предлагаем объединить эти два поля в одно – *гравимагнитное*, что можно сделать введением гравитационной плотности в уравнения Максвелла. В частности, предположим, что *плотность  $\rho^H$  эквивалентна плотности гравитационной массы*. Далее покажем, что эта гипотеза имеет теоретические подтверждения, приводящие к весьма правдоподобным следствиям.

Отсюда следует, что потенциальная часть вектора  $H$  описывает гравитационное поле, а вихревая – магнитное, поэтому  $H$ -поле – это гравимагнитное поле. Следовательно,  $A$ -поле является *электро-гравимагнитным*. Поскольку его размерность определяется плотностью энергии, его можно назвать *энергетическим*.

Будем называть  $j^H$  *гравимагнитным* током. При  $\rho^H = 0$  это чисто *магнитные* токи, при потенциальном  $H$  токи *массовые*.

Заметим, что все соотношения для  $A$ -поля (а не для  $E$  и  $H$ ) не содержат констант среды, в частности, скорость электромагнитных волн, которая во введенной системе координат безразмерна и равна 1.

Приведем здесь также некоторые известные утверждения для  $A$ -поля, которые являются следствием уравнений Максвелла [1].

**Теорема 1.1.** *При заданных токах и зарядах решение (1) является решением волнового уравнения:*

$$\square A = (\partial_\tau^2 - \Delta)A = i \operatorname{rot} J - \operatorname{grad} \rho - \partial_\tau J \quad (7)$$

*и удовлетворяет законам сохранения заряда и энергии:*

$$\partial_\tau \rho + \operatorname{div} J = 0, \quad (8)$$

$$\partial_\tau W + \operatorname{div} P = -\operatorname{Re}(J, \bar{A}) = c^{-1}(j^H H - j^E E). \quad (9)$$

Система уравнений Максвелла незамкнута. Она позволяет по заданным зарядам и токам определять поле и, наоборот, при заданном поле находить порождающие его заряды и токи. Если последние неизвестны, то для ее замыкания обычно используют уравнения механики сплошных сред. Однако здесь мы поступим иным образом, используя бикватернионную запись этих уравнений и законы Ньютона.

Для перехода к бикватернионной записи этих и последующих уравнений дадим краткое описание функционального пространства бикватернионов и операций на нем.

**2. Бикватернионы на  $\mathbf{M}$  и их комплексные градиенты.** Рассмотрим функциональное пространство бикватернионов – это пространство комплексных кватернионов:  $K(\mathbf{R}^{1+3}) = \{\mathbf{F} = f(\tau, x) + F(\tau, x)\}$ , где  $f$  – комплекснозначная функция, а  $F$  – трехмерная вектор-функция с комплексными компонентами,  $f$  и  $F$  локально интегрируемы и дифференцируемы на  $\mathbf{M}$ . Пространство  $K$  – ассоциативная, но некоммутативная алгебра со сложением:  $\mathbf{F} + \mathbf{G} = (f + g) + (F + G)$  и операцией кватернионного умножения ( $\circ$ ):

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{G} = (f + F) \circ (g + G) = (fg - (F, G)) + (fG + gF + [F, G]). \quad (10)$$

Бикватернион вида  $\bar{\mathbf{F}} = \bar{f} + \bar{F}$  называется *комплексно-сопряженным*, а  $\mathbf{F}^* = \bar{f} - \bar{F}$  называется *сопряженным*. Если  $\mathbf{F}^* = \mathbf{F}$ , бикватернион называется *самосопряженным*.

Скалярным произведением бикватернионов  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$  назовем билинейную операцию  $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) = f_1 f_2 + (F_1, F_2)$ . Норма бикватерниона  $\|\mathbf{F}\| = \sqrt{(\mathbf{F}, \bar{\mathbf{F}})} = \sqrt{f \cdot \bar{f} + (F, \bar{F})} = \sqrt{|f|^2 + \|F\|^2}$ , а псевдонормой бикватерниона назовем величину  $\langle \mathbf{F} \rangle = \sqrt{f \cdot \bar{f} - (F, \bar{F})} = \sqrt{|f|^2 - \|F\|^2}$ .

Далее используются дифференциальные операторы – взаимные комплексные градиенты:  $\mathbf{D}^+ = \partial_\tau + i\nabla$ ,  $\mathbf{D}^- = \partial_\tau - i\nabla$ , где  $\nabla = grad = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ . Их действие на  $\mathbf{K}$  определено как в алгебре кватернионов: (соответственно знакам)

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^\pm \mathbf{F} &= (\partial_\tau \pm i\nabla) \circ (f + F) = (\partial_\tau f \mp i(\nabla, F)) \pm \partial_\tau F \pm i\nabla f \pm i[\nabla, F] = \\ &= (\partial_\tau f \mp i div F) \pm \partial_\tau F \pm i grad f \pm i rot F. \end{aligned}$$

Заметим, что в смысле выше данных определений  $(\mathbf{D}^-)^* = \mathbf{D}^-$ ,  $(\mathbf{D}^+)^* = \mathbf{D}^+$ . Легко проверить, что волновой оператор представим в виде:

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \Delta = \mathbf{D}^- \circ \mathbf{D}^+ = \mathbf{D}^+ \circ \mathbf{D}^-.$$

Используя это свойство, можно строить частные решения дифференциальных уравнений на  $K(\mathbf{M})$  вида

$$\mathbf{D}^\pm \mathbf{K} = \mathbf{G}. \tag{11}$$

Отсюда следует, что  $\square \mathbf{K} = \mathbf{D}^\mp \mathbf{G}$ , его решением является следующая свертка (\*):

$$\mathbf{K} = \mathbf{D}^\mp \mathbf{G} * \psi, \tag{12}$$

где  $\psi(\tau, x)$  – фундаментальное решение волнового уравнения  $\square \psi = \delta(\tau)\delta(x)$ . Это решение является также и решением (11). Действительно, используя свойство дифференцирования свертки, получим

$$\mathbf{D}^\pm \mathbf{K} = \mathbf{D}^\pm \mathbf{D}^\mp (\mathbf{G} * \psi) = \square (\mathbf{G} * \psi) = (\mathbf{G} * \square \psi) = \mathbf{G} * \delta(\tau)\delta(x) = \mathbf{G}.$$

Фундаментальные решения определяются с точностью до решений однородного волнового уравнения. Для задач с начальными по времени условиями в качестве фундаментального решения удобно использовать простой слой на световом конусе  $\tau = \|x\|$ :

$$\psi = (4\pi \|x\|)^{-1} \delta(\tau - \|x\|),$$

которое назовем *волновой функцией*.

В этом случае, как легко показать, записав свертку в интегральном виде, решение (12) будет равно нулю при  $\tau = 0$ . Воспользуемся им для построения решений уравнения (13) с данными Коши.

*Задача Коши.* Пусть известны начальные условия:  $\mathbf{K}(0, x) = \mathbf{K}_0(x)$ . Требуется построить решение уравнения(11), удовлетворяющее этим данным.

Используем для этого аппарат теории обобщенных функций [9]. Рассмотрим регулярные обобщенные функции вида  $\widehat{\mathbf{G}} = H(\tau)\mathbf{G}(\tau, x)$ , где  $H(\tau)$  – функция Хевисайда. Используя дифференцирование обобщенных функций ( $\widehat{\mathbf{D}}^\pm$ ), получим  $\widehat{\mathbf{D}}^\pm \widehat{\mathbf{K}} = \widehat{\mathbf{G}} + \delta(\tau)\mathbf{K}_0(x)$ . Следовательно,

$$\mathbf{H}(\tau)\mathbf{K}(\tau, x) = \mathbf{D}^\mp \{H(\tau)\mathbf{G} * \psi\} + \mathbf{G}(0, x) * \psi + \mathbf{D}^\mp \{\mathbf{K}_0(x) * \psi\} \tag{13}$$

(здесь знак  $\underset{x}{*}$  означает, что свертка берется только по  $x$ ). Эта формула является обобщением формулы Кирхгофа для решения задачи Коши для волнового уравнения [9]. Ее интегральная запись легко выписывается с учетом вида полной и неполной сверток с  $\psi$ . А именно:

$$4\pi\mathbf{K}(\tau, x) = -\mathbf{D}^{\mp} \left\{ \int_{r \leq \tau} \frac{\mathbf{G}(\tau - r, y)}{r} dV(y) + \tau^{-1} \int_{r=\tau} \mathbf{K}_0(y) dS(y) \right\} - \tau^{-1} \int_{r=\tau} \mathbf{G}(0, y) dS(y), \quad (14)$$

где  $r = \|y - x\|$ ,  $dV(y) = dy_1 dy_2 dy_3$ ,  $dS(y)$  – дифференциал площади сферы.

Перейдем к бикватернионному представлению уравнений А-поля [2].

**3. Бикватернионы А-поля.** Вводятся бикватернионы: *потенциал*  $\Phi = i\phi - \Psi$ , *напряженность*  $\mathbf{A} = 0 + A$ , *плотность заряда-тока*  $\Theta = -i\rho - J$ , *плотность энергии-импульса*  $\Xi = 0, 5 \mathbf{A}^* \circ \mathbf{A} = W + iP$ .

Уравнения Максвелла (1) – (2) в пространстве бикватернионов имеют простой вид:

$$\mathbf{D}^+ \mathbf{A} = \Theta. \quad (15)$$

Если потенциал удовлетворяет лоренцевой калибровке:  $\partial_\tau \phi - \operatorname{div} \Psi = 0$ , то

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}^- \Phi.$$

Откуда, взяв соответствующий комплексный градиент, получаем волновые уравнения:

$$\square \Phi = \Theta, \quad (16)$$

$$\square \mathbf{A} = \mathbf{D}^- \Theta. \quad (17)$$

Отсюда следует, что просто последовательное (тройное) взятие комплексных градиентов от потенциала А-поля определяет бикватернионы, соответствующие напряженности поля, зарядам и токам. Скалярная часть комплексного градиента кватерниона энергии-импульса А-поля дает закон сохранения энергии [2].

Итак, заряды и токи – это просто *физическое проявление комплексного градиента напряженности ЭГМ-поля*.

*Задача Коши для уравнения Максвелла.* Как следует из уравнения (13), при известных зарядах-токах и начальных данных  $\mathbf{A}(0, x) = \mathbf{A}_0(x)$  решение (15) дается формулой:

$$4\pi\mathbf{A} = -\mathbf{D}^- \left\{ \int_{r \leq \tau} \frac{\Theta(\tau - r, y)}{r} dV(y) + \tau^{-1} \int_{r=\tau} \mathbf{A}_0(y) dS(y) \right\} - \tau^{-1} \int_{r=\tau} \Theta(0, y) dS(y). \quad (18)$$

Отсюда легко записать интегральные представления для векторов напряженности ЭГМ-поля  $E, H$ .

**4. Преобразование Лоренца К на М.** Преобразования Лоренца бикватернионов на пространстве Минковского удобно строить, используя алгебру кватернионов. Для этой цели кватернизируем  $\mathbf{M}$ , вводя комплексно-сопряженные бикватернионы:  $\mathbf{Z} = \tau + ix$ ,  $\bar{\mathbf{Z}} = \tau - ix$ . Легко видеть, что

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^*, \quad \bar{\mathbf{Z}} = \bar{\mathbf{Z}}^*, \quad \|\mathbf{Z}\|^2 = \|\bar{\mathbf{Z}}\|^2 = (\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}}), \quad \langle \mathbf{Z} \rangle^2 = \langle \bar{\mathbf{Z}} \rangle^2 = \mathbf{Z} \circ \bar{\mathbf{Z}}.$$

Введем самосопряженные бикватернионы  $\mathbf{U} = ch\theta + iesh\theta$ ,  $\bar{\mathbf{U}} = ch\theta - iesh\theta$ ,  $\|e\| = 1$ ,  $\theta$  – действительное число,  $\mathbf{U} \circ \bar{\mathbf{U}} = 1$ . Прямым вычислением доказываются следующие леммы.

**Лемма 4.1.** *Классическое преобразование Лоренца  $L : Z \rightarrow Z'$  имеет вид:*

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{U} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{U}, \quad \mathbf{Z} = \bar{\mathbf{U}} \circ \mathbf{Z}' \circ \bar{\mathbf{U}}.$$

Если вести обозначения:  $ch2\theta = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ ,  $sh2\theta = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}$ ,  $|v| < 1$ , то скалярная и векторная части бикватернионов запишутся в виде известных релятивистских формул:

$$\begin{aligned} \tau' &= \frac{\tau + v(e, x)}{\sqrt{1-v^2}}, & x' &= (x - e(e, x)) + e \frac{(e, x) + v\tau}{\sqrt{1-v^2}}, \\ \tau &= \frac{\tau' - v(e, x)}{\sqrt{1-v^2}}, & x &= (x' - e(e, x')) + e \frac{(e, x') - v\tau'}{\sqrt{1-v^2}}, \end{aligned}$$

что соответствует движению системы координат  $X$  в направлении вектора  $e$  с безразмерной скоростью  $v$ . Легко видеть, что сохраняется псевдонорма:

$$\langle \mathbf{Z}' \rangle^2 = \mathbf{U} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{U} \circ \bar{\mathbf{U}} \circ \bar{\mathbf{Z}} \circ \bar{\mathbf{U}} = \langle \mathbf{Z} \rangle^2.$$

**Лемма 4.2.** *Сопряженные кватернионы  $\mathbf{W} = \cos \varphi + e \sin \varphi$ ,  $\mathbf{W}^* = \cos \varphi - e \sin \varphi$ ,  $\|e\| = 1$ , определяют группу преобразований на  $\mathbf{M}$ , ортогональных на векторной части  $Z : \mathbf{Z}' = \mathbf{W} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{W}^*$ ,  $\mathbf{Z} = \mathbf{W}^* \circ \mathbf{Z}' \circ \mathbf{W}$ .*

Это преобразование есть вращение вокруг вектора  $e$  на угол  $2\varphi$ . Следствием этих двух лемм является

**Лемма 4.3.** *Преобразование Лоренца на  $\mathbf{M}$  можно определить как преобразование вида:*

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{L} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{L}^*, \quad \mathbf{Z} = \mathbf{L}^* \circ \mathbf{Z}' \circ \mathbf{L}, \tag{19}$$

где  $\mathbf{L} = \mathbf{W} \circ \mathbf{U} = ch(\theta + i\varphi) + iesh(\theta + i\varphi)$ ,  $\mathbf{L}^* = \mathbf{U}^* \circ \mathbf{W}^* = ch(\theta - i\varphi) + iesh(\theta - i\varphi)$ . При этом  $\langle \mathbf{Z} \rangle = \langle \mathbf{Z}' \rangle$ .

Легко видеть, что  $\bar{\mathbf{L}} \circ \mathbf{L}^* = \mathbf{L}^* \circ \bar{\mathbf{L}} = 1$ , поэтому псевдонорма  $\mathbf{Z}$  сохраняется.

Взаимные комплексные градиенты при преобразованиях Лоренца  $\mathbf{L}$  преобразуются в соответствии со следующей леммой.

**Лемма 4.4.** *Если  $\mathbf{Z}' = \mathbf{L} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{L}^*$ , то  $\mathbf{D}' = \bar{\mathbf{L}}^* \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{L}$ ,  $\mathbf{D} = \mathbf{L} \circ \mathbf{D}' \circ \bar{\mathbf{L}}^*$ , где  $\mathbf{D} = \mathbf{D}^+$  или  $\mathbf{D} = \mathbf{D}^-$ .*

На основе этой леммы рассмотрим, как меняется уравнение типа (11) при преобразовании Лоренца.

**Теорема 4.1.** *При действии преобразования Лоренца на  $\mathbf{M}$  сохраняется вид уравнения*

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau'} \pm i\nabla' \right) \mathbf{K}' = \mathbf{G}',$$

где  $\mathbf{K}' = \bar{\mathbf{L}}^* \circ \mathbf{K} \circ \mathbf{L}$ ,  $\mathbf{G}' = \bar{\mathbf{L}}^* \circ \mathbf{G} \circ \mathbf{L}$ .

Действительно, используя ассоциативность произведения и свойства  $\mathbf{L}$ , получим

$$\mathbf{D}'\mathbf{K}' = (\bar{\mathbf{L}}^* \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{L}) (\bar{\mathbf{L}}^* \circ \mathbf{K} \circ \mathbf{L}) = \bar{\mathbf{L}}^* \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{K} \circ \mathbf{L} = \bar{\mathbf{L}}^* \circ \mathbf{G} \circ \mathbf{L} = \mathbf{G}'.$$

Ч.т.д.

Следовательно, преобразования Лоренца для уравнения Максвелла имеют вид:

$$\mathbf{D}^+ \mathbf{A}' = \Theta', \text{ где } \mathbf{A}' = \bar{\mathbf{L}}^* \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{L}, \quad \Theta' = \bar{\mathbf{L}}^* \circ \Theta \circ \mathbf{L}.$$

Расписывая эти формулы в подвижной системе координат ( $\varphi = 0$ ), получим  
*Релятивистские формулы для напряженности, зарядов и токов:*

$$A' = (A - e(e, A)) + e \frac{(e, A)}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (20)$$

$$\rho' = \frac{\rho - v(e, J)}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad J' = (J - e(e, J)) + e \frac{(e, J) - v\rho}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (21)$$

Как видим, напряженность  $A$ -поля здесь всегда увеличивается в направлении вектора  $e$ . В отсутствие токов происходит увеличение заряда-массы. При наличии токов, в зависимости от направления их движения заряд-масса может как увеличиваться, так и уменьшаться.

**5. Третий закон Ньютона. Мощность и плотность объемных сил.** Рассмотрим два ЭГМ-поля  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}'$ ,  $\Theta$  и  $\Theta'$  – соответствующие им (или порождающие их) заряды-токи. Назовем бикватернион

$$\mathbf{F} = M - iF = \Theta \circ \mathbf{A}' = -(i\rho + J) \circ A' = (A', J) - i\rho A' + [A', J] \quad (22)$$

*плотностью мощности-силы*, действующей со стороны поля  $A'$  на заряды и токи поля  $A$ . Действительно, с учетом (3),(4) скалярная часть имеет вид плотности мощности действующих сил:

$$M = (A', J) = c^{-1}((E', j^E) + (H', j^H)) + i((B', j^E) - (D', j^H)). \quad (23)$$

Выделяя действительную и мнимую части векторной составляющей бикватерниона, получим выражения для плотности объемных сил ( $F = F^H + iF^E$ ):

$$F^H = \rho^E E' + \rho^H H' + j^E \times B' - j^H \times D', \quad (24)$$

$$F^E = c(\rho^E B' - \rho^H D') + c^{-1}(E' \times j^E + H' \times j^H). \quad (25)$$

Здесь  $B = \mu H$  – аналог вектора магнитной индукции (в вихревой части совпадает с ним),  $D = \varepsilon E$  – вектор электрического смещения.

Напряженность гравитационного поля описывается потенциальной частью вектора  $H$ , а роторная часть этого вектора описывает магнитное поле. Тогда скалярная часть  $\Theta$ ,  $\Theta'$  содержит плотности электрического заряда и массы, а векторная – плотности электрического тока и тока массы (количество движения массы).

Исходя из этих предположений, в формуле (24) стоят известные массовые силы последовательно: кулоновская сила  $\rho^E E'$ , гравитационная сила  $\rho^H H'$  (точнее совпадает с ней в потенциальной части  $H'$ ), сила Лоренца  $j^E \times B'$  (точнее совпадает с ней в вихревой части  $B'$ ) и новая сила –  $D' \times j^H$ , которую назовем *электромассовой*. В действительной части мощности (23) стоит мощность кулоновских, гравитационных и магнитных сил. Мощность электромассовой силы в действительную часть (23) не входит, т.к. она не работает на перемещениях массы, поскольку перпендикулярна ее скорости.

Интересно, что мощность силы Лоренца в действительную часть (23) также не входит, что свидетельствует в пользу того, что эта сила перпендикулярна скорости массы, хотя непосредственно из уравнений Максвелла это не следует.

Естественно по аналогии предположить, что уравнения (25) описывают силы, вызывающие изменение электрических токов (электрические силы), а в мнимой части  $M$  стоят соответствующие им мощности.

В силу третьего закона Ньютона о действующих и противодействующих силах предположим, что должно выполняться:  $\mathbf{F}' = -\mathbf{F}$ . Отсюда получим

*Закон о действии и противодействии полей*

$$\Theta \circ \mathbf{A}' = -\Theta' \circ \mathbf{A}. \quad (26)$$

Интересно, что в скалярной части он требует равенства плотностей мощностей соответствующих сил, действующих на заряды и токи другого поля, т.е. подобен известному в механике сплошных сред тождеству взаимности Бетти, которое обычно записывается для работы сил.

**6. Второй закон Ньютона. Уравнение трансформации.** Поле зарядов и токов меняется под воздействием поля других зарядов и токов. Как известно, направление наиболее интенсивного изменения скалярного поля описывает его градиент. По аналогии предположим, что изменение поля зарядов-токов происходит наиболее интенсивно, условно говоря, в направлении его комплексного градиента. Естественно предположить, что это изменение должно происходить в направлении мощности-силы, действующей со стороны второго поля на первое. Поэтому закон изменения заряда-тока поля под действием другого, подобный второму закону Ньютона, предложен в виде следующих уравнений [7,8].

*Уравнения взаимодействия зарядов-токов (полей):*

$$\kappa \mathbf{D}^- \Theta = \mathbf{F} \equiv \Theta \circ \mathbf{A}', \quad \kappa \mathbf{D}^- \Theta' = \Theta' \circ \mathbf{A}, \quad (27)$$

$$\Theta \circ \mathbf{A}' = -\Theta' \circ \mathbf{A}, \quad (28)$$

$$\mathbf{D}^+ \mathbf{A} = \Theta, \quad \mathbf{D}^+ \mathbf{A}' = \Theta'. \quad (29)$$

Здесь уравнения (27) соответствуют второму закону Ньютона, записанному для зарядов-токов каждого из взаимодействующих полей, а уравнение (28) – третьему. Вместе с уравнениями Максвелла для этих полей (29) они дают замкнутую систему нелинейных дифференциальных уравнений для определения  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}'$ ,  $\Theta$ ,  $\Theta'$ . Введение константы взаимодействия  $\kappa$  связано с размерностью. Раскрывая скалярную и векторную части (27), запишем

*Уравнения трансформации зарядов-токов A-поля :*

$$i \kappa (\partial_\tau \rho + \operatorname{div} J) = M, \quad (30)$$

$$i \kappa (\partial_\tau J - i \operatorname{rot} J + \nabla \rho) = F. \quad (31)$$

Рассмотрим вначале второе уравнение. С учетом (2), (3), (4) получим

*Аналог второго закона Ньютона для зарядов-токов:*

$$\kappa (\sqrt{\varepsilon} \partial_\tau j^H + \sqrt{\mu} \operatorname{rot} j^E + \mu^{-0,5} \operatorname{grad} \rho^H) = \rho^E E' + \rho^H H' + j^E \times B' - j^H \times D', \quad (32)$$

$$\kappa (\sqrt{\mu} \partial_{\tau} j^E - \sqrt{\varepsilon} \operatorname{rot} j^H + \varepsilon^{-0,5} \operatorname{grad} \rho^E) = c (\rho^E B' - \rho^H D') + c^{-1} (E' \times j^E + H' \times j^H). \quad (33)$$

Аналогом количества движения массы здесь в (32) является  $\kappa \sqrt{\varepsilon} j^H$ . Уравнение (33) описывает воздействие внешнего поля на электрические токи, его аналог автору неизвестен.

Если одно поле намного сильнее второго, например, если  $W' \gg W$ , то можно изменением второго поля под воздействием зарядов и токов первого пренебречь. В этом случае получаем замкнутую систему уравнений для определения движения зарядов и токов первого поля под воздействием зарядов и токов второго:  $\kappa \mathbf{D}^- \Theta - \Theta \circ \mathbf{A}' = 0$ , где  $\mathbf{A}'$  известно. Соответствующее им А-поле определяется уравнениями Максвелла.

Рассмотрим первое уравнение (30). Очевидно, это закон сохранения для зарядов-токов, который в правой части содержит мощность внешних действующих сил  $M$ . Только при  $M=0$ , например, в отсутствии внешних полей и соответствующих им зарядов и токов справа будет стоять 0. Тогда этот закон принимает хорошо известный вид:  $\partial_{\tau} \rho + \operatorname{div} J = 0$ , который следовал из уравнений Максвелла (см. теорема 1.1.).

Значит, при взаимодействии ЭГМ-полей уравнения Максвелла несколько меняют вид, а именно: появляется скалярная часть у бикватерниона напряженности поля

$$\mathbf{A} = ia(\tau, x) + A(\tau, x).$$

Из системы уравнений (27) – (29) следует, что

$$\square \mathbf{A} = \mathbf{D}^- \Theta = \kappa^{-1} \mathbf{F}. \quad (34)$$

Откуда имеем

$$-i \kappa \square a = M. \quad (35)$$

Заметим, что в системе уравнений Максвелла (1) – (2) первое уравнение определяет токи, второе уравнение является определением заряда, а закон сохранения заряда является следствием этих двух уравнений. Его получаем, взяв дивергенцию в (1) с учетом (2). Однако, последовательный бикватернионный подход, как здесь показано, приводит к модификации системы уравнений Максвелла, которая, как следует из (29), имеет следующий вид:

*Модифицированные уравнения Максвелла*

$$J = -\partial_{\tau} A - i \operatorname{rot} A + \operatorname{grad} a, \quad (36)$$

$$\rho = \operatorname{div} A - \partial_{\tau} a. \quad (37)$$

Если заряды и токи известны, эта система уравнений для определения  $a$  и  $A$  замкнута. Только в замкнутых системах (при отсутствии внешних полей)  $a = 0$  и она приобретает вид (1) – (2).

*Задача Коши для уравнения трансформации.* Используя формулу (12), получим

$$\kappa \Theta(\tau, x) = \mathbf{D}^+ \{H(\tau) \mathbf{F}(\tau, x) * \psi\} + \mathbf{F}(0, x) * \psi + \kappa \mathbf{D}^+ \{\Theta(0, x) * \psi\}. \quad (38)$$

Уравнения дают систему интегральных уравнений для определения  $\Theta$ , поскольку правая часть содержит  $\Theta$  в  $\mathbf{F}$ .

*Преобразования Лоренца уравнения трансформации.* (Здесь штрих означает координаты в подвижной системе координат.) Согласно теореме 4.1 преобразования Лоренца для  $\mathbf{A}$ ,  $\Theta$ ,  $\mathbf{F}$  имеют следующий вид:

$$\mathbf{A}' = \bar{\mathbf{L}}^* \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{L}, \quad \Theta' = \bar{\mathbf{L}}^* \circ \Theta \circ \mathbf{L}, \quad \mathbf{F}' = \bar{\mathbf{L}}^* \circ \mathbf{F} \circ \mathbf{L}. \quad (39)$$

Заметим, что преобразование Лоренца для мощности-силы взаимодействия двух полей вида (22) имеет тот же вид:

$$\mathbf{F}' = \Theta'_1 \circ \mathbf{A}'_2 = \bar{\mathbf{L}}^* \circ \Theta_1 \circ \mathbf{L} \circ \bar{\mathbf{L}}^* \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{L} = \bar{\mathbf{L}}^* \circ \Theta_1 \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{L} = \bar{\mathbf{L}}^* \circ \mathbf{F} \circ \mathbf{L}.$$

Для  $\varphi = 0$  соотношения (39) эквивалентны равенствам (20)-(21) и

$$\mathbf{F}' = (Mch2\theta - (e, F)sh2\theta) + i\{F + 2e(e, F)sh^2\theta - Mesh2\theta\} \Rightarrow$$

*Релятивистские формулы для мощности и силы:*

$$M' = \frac{M + v(e, F)}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad F' = (F - e(e, F)) + e \frac{(e, F) - vM}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (40)$$

Итак, мощность также зависит от скорости системы координат. И если в исходной системе она равна нулю, то в другой будет равна нулю только в отсутствии внешних сил  $F = 0$ . Поэтому постулировать закон сохранения заряда в традиционном виде (8) для открытых систем (систем, подверженных внешним воздействиям) нельзя.

**8. Первый закон Ньютона. Свободное поле.** Рассмотрим  $\mathbf{A}$ -поле, порождаемое  $\Theta$  в отсутствии других зарядов-токов. Назовем такое поле *свободным*.

В этом случае  $\mathbf{F} = 0$ , поэтому аналогом первого закона Ньютона об инерции массы в отсутствии действующих на нее сил здесь, как следует из (27), естественно принять *Закон инерции для зарядов-токов  $\mathbf{A}$ -поля:*

$$\mathbf{D}^- \Theta = \mathbf{0}, \quad (41)$$

что эквивалентно равенствам:

$$\partial_\tau \rho + \text{div } J = 0, \quad \partial_\tau J - i \text{rot } J + \nabla \rho = 0,$$

или для исходных величин:

$$\partial_t \rho^E + \text{div } j^E = 0, \quad \partial_\tau j^E = \sqrt{\varepsilon/\mu} \text{rot } j^H - c \text{grad } \rho^E, \quad (42)$$

$$\partial_t \rho^H + \text{div } j^H = 0, \quad \partial_\tau j^H = -\sqrt{\mu/\varepsilon} \text{rot } j^E - c \text{grad } \rho^H. \quad (43)$$

Следовательно, закон сохранения заряда в виде (8) выполняется в отсутствии внешних полей. В этом случае решение задачи Коши имеет вид:

$$\kappa \Theta(\tau, x) = \kappa \mathbf{D}^- \left\{ \Theta_0(x) \underset{x}{*} \psi \right\} = -\frac{\kappa H(\tau)}{4\pi} \mathbf{D}^- \left\{ \tau^{-1} \int_{r=\tau} \Theta_0(y) dS(y) \right\}, \quad (44)$$

---

В [7,8] для сохранения этого закона было введено предположение:  $M=0$ . Как здесь показано, это было неверное предположение.

а напряженность А-поля определяется соотношениями (18).

**10. Первое начало термодинамики.** Аналогично плотности энергии-импульса А-поля введем плотность энергии-импульса поля зарядов-токов:

$$0,5\Theta \circ \Theta^* = \left( \frac{\|\rho^E\|^2}{\varepsilon} + \frac{\|\rho^H\|^2}{\mu} + Q \right) + i \left( P_J - \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \rho^E j^E - \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \rho^H j^H \right), \quad (45)$$

которая содержит плотность энергии токов

$$Q = 0,5 \|J\|^2 = 0,5 \left( \mu \|j^E\|^2 + \varepsilon \|j^H\|^2 \right),$$

где первое слагаемое включает джоулево тепло  $\|j^E\|^2$ , а второе – плотность кинетической энергии массовых токов  $\|j^H\|^2$ , но не только, т.к. в них входит и энергия вихревой части токов (магнитных токов). Здесь также введен вектор  $P_J$ , подобный вектору Пойнтинга, но для токов:

$$P_J = 0,5i J \times \bar{J} = c^{-1} [j^H, j^E].$$

Если гравимагнитный и электрический токи параллельны, либо один из них отсутствует (нулевой), то  $P_J = 0$ . В общем случае  $P_J \neq 0$ .

Умножим скалярно уравнение (31) на  $-i\bar{J}$ , сложим с соответствующим комплексно-сопряженным и поделим на 2. В результате получим

*Закон сохранения энергии зарядов-токов  $\Theta$ -поля:*

$$\kappa (\partial_\tau Q - \operatorname{div} P_J + \operatorname{Re} (\nabla \rho, \bar{J})) = \operatorname{Im} (F, \bar{J}) = c^{-1} ((F^H, j^H) + (F^E, j^E)), \quad (46)$$

аналогичный закону сохранения энергии для А-поля (теорема 1.1.). Однако в левой части появилось третье слагаемое. Нетрудно видеть, что этот закон подобен первому началу термодинамики. Здесь второй и третий члены в левой части обозначим  $-U$ .  
Функция

$$U = \operatorname{div} P_J - \sqrt{\mu/\varepsilon} (\nabla \rho^E, j^E) - \sqrt{\varepsilon/\mu} (\nabla \rho^H, j^H)$$

характеризует собственную скорость изменения плотности энергии токов  $\Theta$ -поля. Правая часть (46), зависящая от мощности действующих внешних сил, может увеличивать или уменьшать эту скорость.

Для свободного поля первое начало термодинамики имеет вид:

$$\partial_\tau Q = U.$$

Интегрируя (46) по пространственно-временному цилиндру  $\{(D^- + D) \times (0, t)\}$  и используя формулу Остроградского-Гаусса, получим интегральное представление первого начала термодинамики:

$$\begin{aligned} \int_{D^-} (Q(x, t) - Q(x, 0)) dV(x) &= \int_0^t dt \int_D (P_J, n) dD(x) - \\ &- \int_0^t dt \int_{D^-} \{ \varepsilon^{-1} (\nabla \rho^E, j^E) + \mu^{-1} (\nabla \rho^H, j^H) \} dV(x) + \end{aligned}$$

$$+c^{-1} \int_0^t dt \int_{D^-} \{(F^H, j^H) + (F^E, j^E)\} dV(x).$$

Здесь  $n(x)$  – вектор единичной нормали к границе  $D$  открытой области  $D^-$  в  $R^3$ .

**11. Уравнения суммарного поля и энергия взаимодействий.** Если есть несколько ( $N$ ) взаимодействующих полей, порождаемых различными зарядами и токами, то уравнения (27) примут вид:

$$\kappa \mathbf{D}^+ \Theta^k + \Theta^k \circ \sum_{m \neq k} \mathbf{A}^m = \mathbf{0}, \quad \mathbf{D}^+ \mathbf{A}^k + \Theta^k = \mathbf{0}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (47)$$

$$\mathbf{D}^+ \mathbf{A}^m \circ \mathbf{A}^k + \mathbf{D}^+ \mathbf{A}^k \circ \mathbf{A}^m = 0, \quad k \neq m. \quad (48)$$

Суммарное поле, как легко видеть (суммируя (47) по  $k$ ), в силу (47) является свободным, поскольку аналогично механике взаимодействующих тел, все действующие силы – внутренние.

Итак, взаимодействующие поля удовлетворяют аналогу второго закона Ньютона для полей (47), (48), а для суммарного заряда-тока выполняется равенство

$$\mathbf{D}^+ \Theta = \mathbf{D}^+ \sum_{m=1}^M \Theta^m = \mathbf{0}. \quad (49)$$

Уравнения суммарного поля являются следствием и дают первые интегралы взаимодействующих полей зарядов-токов. Если в начальный момент времени заряды-токи известны, система (45) -(46) позволяет определять создаваемые ими поля и их совместное изменение во времени и пространстве.

Рассмотрим законы преобразования энергии полей при взаимодействии различных зарядов-токов.

Энергия-импульс для суммарного поля зарядов-токов имеет вид:

$$\begin{aligned} \Xi_{\Theta} = 0,5 \Theta \circ \Theta^* = 0,5 \sum_{k=1}^N \Theta^k \circ \sum_{l=1}^N \Theta^{*l} = 0,5 \left( \sum_{k=1}^N \Theta^k \circ \Theta^{*k} + \sum_{k \neq l} \Theta^k \circ \Theta^{*l} \right) = \\ = \sum_{k=1}^N W_{\Theta}^{(k)} + i \sum_{k=1}^N P_{\Theta}^{(k)} + \delta \Xi_{\Theta}. \end{aligned}$$

Здесь первое слагаемое – это сумма энергий-импульсов взаимодействующих зарядов-токов.

Введем бикватернион *энергии-импульса взаимодействия*. Его действительная часть описывает энергию-импульс взаимодействия одноименных зарядов и токов, а мнимая часть – разноименных:

$$\delta \Xi_{\Theta} = \delta W_{\Theta} + i \delta P_{\Theta} = \sum_{k \neq l} \Xi_{\Theta}^{kl}, \quad \Xi_{\Theta}^{kl} = 0,5 (\Theta^k \circ \Theta^{*l} + \Theta^l \circ \Theta^{*k}),$$

$$\Xi_{\Theta}^{kl} = \text{Re} (\rho^k \rho^{*l} + (J^k, J^{*l})) - i \{ \text{Re} (\rho^k J^{*l} + \rho^{*l} J^k) + \text{Im} [J^k, J^{*l}] \}$$

или в исходных обозначениях

$$\begin{aligned} \Xi_{\Theta}^{kl} = & \frac{\rho^{E(k)}\rho^{E(l)}}{\sqrt{\varepsilon_k\varepsilon_l}} + \frac{\rho^{(k)H}\rho^{H(l)}}{\sqrt{\mu_k\mu_l}} + \sqrt{\mu_k\mu_l} (j^{(k)E}, j^{(l)E}) + \sqrt{\varepsilon_k\varepsilon_l} (j^{(k)H}, j^{(l)H}) - \\ & -i \left\{ \sqrt{\frac{\mu_l}{\varepsilon_k}} \rho^{(k)E} j^{(l)E} + \sqrt{\frac{\varepsilon_l}{\mu_k}} \rho^{(k)H} j^{(l)H} + \sqrt{\frac{\mu_k}{\varepsilon_l}} \rho^{(l)E} j^{(k)E} + \sqrt{\frac{\varepsilon_k}{\mu_l}} \rho^{(l)H} j^{(k)H} - \right. \\ & \left. - \sqrt{\varepsilon_k\mu_l} [j^{(l)E}, j^{(k)H}] + \sqrt{\varepsilon_l\mu_k} [j^{(k)E}, j^{(l)H}] \right\}. \end{aligned}$$

В результате получаем условия преобразования энергии при взаимодействии зарядов-токов: *выделение* энергии, если  $\delta W_{\Theta} > 0$ ; *поглощение* энергии, если  $\delta W_{\Theta} < 0$ ; *сохранение* энергии, если  $\delta \Xi_{\Theta} = 0$ .

**Заключение.** Предложенные здесь уравнения взаимодействия ЭГМ-полей основаны на гипотезе о магнитном заряде-массе, симметризирующем уравнения Максвелла. Это позволило назвать такие поля *электро-гравимагнитными* и построить законы их преобразования и взаимодействия, во многом аналогичные законам Ньютона для материальных тел. Исследование этих уравнений на инвариантность при преобразованиях Лоренца показало, что гипотезу об инвариантности закона сохранения заряда-массы для модели ЭГМ-поля, рассмотренной в [7,8], принимать нельзя. Здесь показано, что необходимо введение скалярного поля  $a(\tau, x)$  в бикватернион напряженности ЭГМ-поля. Это приводит к модификации уравнений Максвелла.

Заметим, что введение  $a(\tau, x)$  несколько видоизменит правую часть уравнения трансформации (31), которую нетрудно выписать, используя бикватернионную форму этого уравнения (27), вид которой не изменяется.

## Цитированная литература

1. Алексеева Л.А. // Дифференциальные уравнения. 2003, Т.39. №6. С.769 – 776.
2. Алексеева Л.А. // Математический журнал. 2003, Т.3. №4. С.20 – 24.
3. Rastall R. Quaternions in relativity. Review of modern physics. 1964. P.820 – 832.
4. Ефремов А.П. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2004, Т.1. №1. С.111 – 127.
5. Казанова Г. Векторная алгебра. М., 1979.
6. Kassandrov V.V. // Gravitation and cosmology. 1995, V.1. №3. P.216 – 222.
7. Алексеева Л.А. // Математический журнал. 2004, Т.4. №2. С.23 – 34.
8. Алексеева Л.А. // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. 2004. №3. С.45 – 53.
9. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М., 1976.
10. Matos C.J., Tajmar M. Advance of Mercury Perihelion Explained by Cogravity // <http://arxiv.org/ftp/gr-qc/papers/0304/0304104.pdf>.
11. Алексеева Л.А. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003, Т.43. №5. С.759 – 766.

Поступила в редакцию 25.11.2007г.

УДК 519.624

## О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Э. А. БАКИРОВА

Институт Математики МОН РК  
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 anar@math.kz, dzhumabaev@list.ru

Получены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости двухточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений на конечном интервале, где концы интервала являются точками нагрузки. Установлена взаимосвязь между константой корректной разрешимости исследуемой задачи и числом, ограничивающим сверху норму матрицы  $[\tilde{H}^{-1}Q_\nu(l)]^{-1}$ , где  $\tilde{H}$  – диагональная матрица, элементы матрицы  $Q_\nu(l)$  состояются по матрицам граничных условий и интегралам от матриц правой части нагруженного дифференциального уравнения.

На отрезке  $[0, T]$  рассматривается линейная двухточечная краевая задача для нагруженных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{i=0}^m K_i(t)x(\theta_i) + f(t), \quad t \in [0, T], \quad 0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{m-1} < \theta_m = T, \quad (1)$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in R^n, \quad \|x\| = \max_{k=\overline{1, n}} |x_k|, \quad (2)$$

где  $(n \times n)$  матрицы  $A(t)$ ,  $K_i(t)$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ , и  $n$ - вектор-функция  $f(t)$  непрерывны на  $[0, T]$ ,  $B, C$  –  $(n \times n)$  – матрицы.

Краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений встречаются в различных задачах приложения [1,2]. Такие задачи также возникают при аппроксимации краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений. Коэффициентные признаки однозначной разрешимости задачи (1),(2), когда  $\theta_m = T$  не входит в число точек нагрузок, на основе метода параметризации [3] получены в [4].

Пусть  $h_j = \theta_j - \theta_{j-1}$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Возьмем число  $l \in \mathbb{N}$  и по нему произведем разбиение  $[0, T) = \bigcup_{r=1}^{ml} [t_{r-1}, t_r)$ , где  $t_0 = \theta_0 = 0$ ,  $t_{il} = \theta_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $\frac{h_1}{l} = t_s - t_{s-1}$ ,  $s = \overline{1, l}$ ,  $\frac{h_2}{l} = t_s - t_{s-1}$ ,

---

Keywords: loaded ordinary differential equation, two-point boundary value problem, parameterization method, unique solvability

2000 Mathematics Subject Classification: 34B37

© Э. А. Бакирова, 2007.

$s = \overline{l+1, 2l}, \dots, \frac{lm}{l} = t_s - t_{s-1}, s = \overline{(m-1)l+1, ml}$ . Сужение функции  $x(t)$  на  $r$ -ый интервал  $[t_{r-1}, t_r)$  обозначим через  $x_r(t)$ . Введя дополнительные параметры  $\lambda_r = x_r(t_{r-1})$  и на каждом интервале  $[t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, ml}$ , произведя замену  $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$ , получим краевую задачу с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)[u_r(t) + \lambda_r] + \sum_{i=0}^{m-1} K_i(t)\lambda_{il+1} + K_m(t)\lambda_{ml} + K_m(t) \lim_{t \rightarrow T-0} u_{ml}(t) + f(t), \quad (3)$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, ml}, \quad (4)$$

$$B\lambda_1 + C\lambda_{ml} + C \lim_{t \rightarrow T-0} u_{ml}(t) = d, \quad (5)$$

$$\lambda_s + \lim_{t \rightarrow t_s-0} u_s(t) = \lambda_{s+1}, \quad s = \overline{1, ml-1}. \quad (6)$$

Если пара  $(\lambda, u[t])$ , где  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{ml})' \in R^{nml}$ ,  $u[t] = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_{ml}(t))'$  – решение задачи (3) – (6), то функция  $x(t)$ , определяемая равенствами  $x(t) = (\lambda_1 + u_1(t), \lambda_2 + u_2(t), \dots, \lambda_{ml} + u_{ml}(t))$ ,  $x(T) = \lambda_{ml} + \lim_{t \rightarrow T-0} u_{ml}(t)$ , является решением задачи (1),(2). И наоборот, если  $\tilde{x}(t)$  – решение задачи (1),(2), то пара  $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$ , где  $\tilde{\lambda} = (\tilde{x}(0), \tilde{x}(t_1), \dots, \tilde{x}(t_{ml-1}))$ ,  $\tilde{u}[t] = (\tilde{x}(t) - \tilde{x}(0), \tilde{x}(t) - \tilde{x}(t_1), \dots, \tilde{x}(t) - \tilde{x}(t_{ml-1}))$  будет решением задачи (3)-(6).

Появление начальных условий  $u_r(t_{r-1}), r = \overline{1, ml}$ , позволяют при фиксированных  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{ml})$  определить функции  $u_r(t), r = \overline{1, ml}$ , из интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$\begin{aligned} u_r(t) = & \int_{t_{r-1}}^t A(\tau)[u_r(\tau) + \lambda_r]d\tau + \int_{t_{r-1}}^t \sum_{i=0}^{m-1} K_i(\tau)\lambda_{il+1}d\tau + \int_{t_{r-1}}^t K_m(\tau)\lambda_{ml}d\tau + \\ & + \int_{t_{r-1}}^t K_m(\tau) \lim_{t \rightarrow T-0} u_{ml}(t)d\tau + \int_{t_{r-1}}^t f(\tau)d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, ml}. \end{aligned} \quad (7)$$

В уравнении (7) при  $r = ml$  вместо  $u_{ml}(\tau)$  подставляя соответствующую правую часть и повторив этот процесс  $\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) раз, затем переходя к пределу при  $t \rightarrow T - 0$ , имеем

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow T-0} u_{ml}(t) = & \int_{t_{ml-1}}^T A(\tau_1) \dots \int_{t_{ml-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu) u_{ml}(\tau_\nu) d\tau_\nu \dots d\tau_1 + \left[ \int_{t_{ml-1}}^T A(\tau_1) d\tau_1 + \dots + \int_{t_{ml-1}}^T A(\tau_1) \dots \right. \\ & \dots \int_{t_{ml-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu) d\tau_\nu \dots d\tau_1 \left. \right] \lambda_{ml} + \left[ \int_{t_{ml-1}}^T \sum_{i=0}^{m-1} K_i(\tau_1) d\tau_1 + \dots + \int_{t_{ml-1}}^T A(\tau_1) \dots \int_{t_{ml-1}}^{\tau_{\nu-1}} \sum_{i=0}^{m-1} K_i(\tau_\nu) d\tau_\nu \dots d\tau_1 \right] \times \\ & \times \lambda_{il+1} + \left[ \int_{t_{ml-1}}^T K_m(\tau_1) d\tau_1 + \dots + \int_{t_{ml-1}}^T A(\tau_1) \dots \int_{t_{ml-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int_{t_{ml-1}}^{\tau_{\nu-1}} K_m(\tau_\nu) d\tau_\nu \dots d\tau_1 \right] \lambda_{ml} + \\ & + \int_{t_{ml-1}}^T f(\tau_1) d\tau_1 + \dots + \int_{t_{ml-1}}^T A(\tau_1) \dots \int_{t_{ml-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int_{t_{ml-1}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu) d\tau_\nu \dots d\tau_1 + \end{aligned}$$

$$+ \left[ \int_{t_{ml-1}}^T K_m(\tau_1) d\tau_1 + \dots + \int_{t_{ml-1}}^T A(\tau_1) \dots \int_{t_{ml-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int_{t_{ml-1}}^{\tau_{\nu-1}} K_m(\tau_\nu) d\tau_\nu \dots d\tau_1 \right] \lim_{t \rightarrow T-0} u_{ml}(t).$$

Предполагая обратимость матрицы

$$P_\nu(l) = I - \int_{t_{ml-1}}^T K_m(\tau_1) d\tau_1 - \dots - \int_{t_{ml-1}}^T A(\tau_1) \dots \int_{t_{ml-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int_{t_{ml-1}}^{\tau_{\nu-1}} K_m(\tau_\nu) d\tau_\nu \dots d\tau_1,$$

здесь  $I$  – единичная матрица размерности  $(n \times n)$ , получим представление предельного значения функции  $u_{ml}(t)$  в следующем виде

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow T-0} u_{ml}(t) = \\ & = [P_\nu(l)]^{-1} \left[ G_{\nu ml}(u_{ml}, T) + D_{\nu ml}(T) \lambda_{ml} + \sum_{i=0}^{m-1} H_{\nu ml}^i(T) \lambda_{il+1} + H_{\nu ml}^m(T) \lambda_{ml} + F_{\nu ml}(T) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} D_{\nu r}(t) &= \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1) d\tau_1 + \dots + \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu) d\tau_\nu \dots d\tau_1, \\ H_{\nu r}^i(t) &= \int_{t_{r-1}}^t K_i(\tau_1) d\tau_1 + \dots + \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} K_i(\tau_\nu) d\tau_\nu \dots d\tau_1, \quad i = \overline{0, m}, \\ F_{\nu r}(t) &= \int_{t_{r-1}}^t f(\tau_1) d\tau_1 + \dots + \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu) d\tau_\nu \dots d\tau_1, \\ G_{\nu r}(u, t) &= \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu) u_r(\tau_\nu) d\tau_\nu \dots d\tau_1, \quad r = \overline{1, ml}. \end{aligned}$$

Снова в уравнении (7) вместо  $u_r(\tau)$  подставив соответствующую правую часть и повторив этот процесс  $\nu$  раз, с учетом (8) получим представление функции  $u_r(t)$  вида

$$\begin{aligned} u_r(t) &= D_{\nu r}(t) \lambda_r + \sum_{i=0}^{m-1} H_{\nu r}^i(t) \lambda_{il+1} + H_{\nu r}^m(t) \lambda_{ml} + F_{\nu r}(t) + G_{\nu r}(u, t) + H_{\nu r}^m(t) \times \\ & \times [P_\nu(l)]^{-1} \left[ G_{\nu ml}(u_{ml}, T) + D_{\nu ml}(T) \lambda_{ml} + \sum_{i=0}^{m-1} H_{\nu ml}^i(T) \lambda_{il+1} + H_{\nu ml}^m(T) \lambda_{ml} + F_{\nu ml}(T) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Переходя в правой части (9) к пределу при  $t \rightarrow t_r - 0$ , подставив соответствующие значения в условия (5), (6) и умножив (5) на  $\frac{h_m}{l}$ , получим систему уравнений относительно неизвестных параметров  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{ml})'$ :

$$\frac{h_m}{l} B \lambda_1 + \frac{h_m}{l} C \left[ I + D_{\nu ml}(T) + H_{\nu ml}^m(T) + H_{\nu ml}^m(T) [P_\nu(l)]^{-1} D_{\nu ml}(T) + H_{\nu ml}^m(T) [P_\nu(l)]^{-1} H_{\nu ml}(T) \right] \times$$

$$\begin{aligned} & \times \lambda_{ml} + \frac{h_m}{l} C \left[ I + H_{\nu ml}^m(T) [P_\nu(l)]^{-1} \right] \sum_{i=0}^{m-1} H_{\nu ml}^i(T) \lambda_{il+1} = \frac{h_m}{l} \left[ d - CF_{\nu ml}(T) - \right. \\ & \left. - CH_{\nu ml}^m(T) [P_\nu(l)]^{-1} F_{\nu ml}(T) - CG_{\nu ml}(u_{ml}, T) - CH_{\nu ml}^m(T) [P_\nu(l)]^{-1} G_{\nu ml}(u_{ml}, T) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \left[ I + D_{\nu s}(t_s) \right] \lambda_s + \left[ H_{\nu s}^m(t_s) + H_{\nu s}^m(t_s) [P_\nu(l)]^{-1} D_{\nu ml}(T) + H_{\nu s}^m(t_s) [P_\nu(l)]^{-1} H_{\nu ml}^m(T) \right] \lambda_{ml} + \\ & + \sum_{i=0}^{m-1} \left[ H_{\nu s}(t_s) + H_{\nu s}^m(t_s) [P_\nu(l)]^{-1} H_{\nu ml}^i(T) \right] \lambda_{il+1} - \lambda_{s+1} = -F_{\nu s}(t_s) - H_{\nu s}^m(t_s) \times \\ & \times [P_\nu(l)]^{-1} F_{\nu ml}(T) - G_{\nu s}(u_s, t_s) - H_{\nu s}^m(t_s) [P_\nu(l)]^{-1} G_{\nu ml}(u_{ml}, T), \quad s = \overline{1, ml-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Обозначив через  $Q_\nu(l)$  матрицу, соответствующую левой части системы (10), (11), и введя векторы

$$\begin{aligned} F_\nu(l) &= \left( -\frac{h_m}{l} d + \frac{h_m}{l} CF_{\nu ml}(T) + \frac{h_m}{l} CH_{\nu ml}^m [P_\nu(l)]^{-1} F_{\nu ml}(T), F_{\nu 1}(t_1) + H_{\nu 1}^m(t_1) \times \right. \\ & \left. \times [P_\nu(l)]^{-1} F_{\nu ml}(T), \dots, F_{\nu ml-1}(t_{ml-1}) + H_{\nu ml-1}^m(t_{ml-1}) [P_\nu(l)]^{-1} F_{\nu ml}(T) \right)', \\ G_\nu(u, l) &= \left( \frac{h_m}{l} CG_{\nu ml}(u_{ml}, T) + \frac{h_m}{l} CH_{\nu ml}^m(T) [P_\nu(l)]^{-1} G_{\nu ml}(u_{ml}, T), G_{\nu 1}(u_1, t_1) + H_{\nu 1}^m(t_1) \times \right. \\ & \left. \times [P_\nu(l)]^{-1} G_{\nu ml}(u_{ml}, T), \dots, G_{\nu ml-1}(u_{ml-1}, t_{ml-1}) + H_{\nu ml-1}^m(t_{ml-1}) [P_\nu(l)]^{-1} G_{\nu ml}(u_{ml}, T) \right)', \end{aligned}$$

запишем ее в виде

$$Q_\nu(l) \lambda = -F_\nu(l) - G_\nu(u, l), \quad \lambda \in R^{nml}. \quad (12)$$

Таким образом, для нахождения неизвестных пар  $(\lambda, u[t])$  – решения задачи (3) – (6) – имеем замкнутую систему уравнений (7), (12).

Следующее утверждение, устанавливающее достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2) и оценку ее решения, получено в [5].

**Теорема 1** ([5], с.29). Пусть при некоторых  $l \in \mathbb{N}$  и  $\nu \in \mathbb{N}$  матрицы  $P_\nu(l) : R^n \rightarrow R^n$ ,  $Q_\nu(l) : R^{nml} \rightarrow R^{nml}$  обратимы и выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} a) \quad \mu_\nu(T) &= \|[P_\nu(l)]^{-1}\| e^{\frac{\alpha h_m}{l}} \frac{h_m}{l} \left( \frac{\alpha h_m}{l} \right)^\nu \frac{1}{\nu!} \beta < 1, \quad б) \quad \|[Q_\nu(l)]^{-1}\| \leq \gamma_\nu(l), \\ в) \quad q_\nu(l) &= \gamma_\nu(l) \max \left( 1, \frac{h_m}{l} \|C\| \right) \left( 1 + \beta \frac{\bar{h}}{l} \sum_{j=0}^{\nu-1} \left( \frac{\alpha \bar{h}}{l} \right)^j \frac{1}{j!} \|[P_\nu(l)]^{-1}\| \right) \times \\ & \times \left\{ e^{\frac{\alpha \bar{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu} \left( \frac{\alpha \bar{h}}{l} \right)^j \frac{1}{j!} + (m+1) \beta \frac{\bar{h}}{l} \left( e^{\frac{\alpha \bar{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu-1} \left( \frac{\alpha \bar{h}}{l} \right)^j \frac{1}{j!} \right) + \beta \frac{\bar{h}}{l} \left( e^{\frac{\alpha \bar{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu-1} \left( \frac{\alpha \bar{h}}{l} \right)^j \frac{1}{j!} \right) \right\} \times \\ & \times \frac{1}{1 - \mu_\nu(T)} \left( e^{\frac{\alpha h_m}{l}} - 1 + e^{\frac{\alpha h_m}{l}} \frac{h_m}{l} (m+1) \beta + e^{\frac{\alpha h_m}{l}} \frac{h_m}{l} \beta \|[P_\nu(l)]^{-1}\| \sigma(T) \right) \Big\} < 1, \\ где \quad \bar{h} &= \max_{j=1, m} h_j, \quad \sigma(T) = \sum_{j=1}^{\nu} \left( \frac{\alpha h_m}{l} \right)^j \frac{1}{j!} + (m+1) \beta \frac{h_m}{l} \sum_{j=0}^{\nu-1} \left( \frac{\alpha h_m}{l} \right)^j \frac{1}{j!}, \end{aligned}$$

$\alpha, \beta$  – числа, ограничивающие сверху нормы матриц  $A(t)$ ,  $K_i(t)$ .

Тогда двухточечная краевая задача для нагруженных дифференциальных уравнений (1),(2) имеет единственное решение  $x^*(t)$  и для него справедлива оценка

$$\|x^*\|_1 \leq M_\nu(l) \max(\|f\|_1, \|d\|) \tag{13}$$

$$\begin{aligned} c \quad M_\nu(l) = & \left\{ \gamma_\nu(l) \left[ e^{\frac{\alpha \bar{h}}{l}} - 1 + e^{\frac{\alpha \bar{h}}{l}} \frac{\bar{h}}{l} (m+1) \beta + e^{\frac{\alpha \bar{h}}{l}} \frac{\bar{h}}{l} \beta \frac{1}{1 - \mu_\nu(T)} \left( e^{\frac{\alpha h_m}{l}} - 1 + e^{\frac{\alpha h_m}{l}} \frac{h_m}{l} (m+1) \beta + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + e^{\frac{\alpha h_m}{l}} \frac{h_m}{l} \beta \| [P_\nu(l)]^{-1} \sigma(T) \right) \right] \max \left[ 1 + \|C\| \sum_{j=0}^{\nu-1} \left( \frac{\alpha h_m}{l} \right)^j \frac{1}{j!} \frac{h_m}{l} + \|C\| \beta \frac{h_m}{l} \sum_{j=0}^{\nu-1} \left( \frac{\alpha h_m}{l} \right)^j \frac{1}{j!} \times \right. \right. \\ & \times \| [P_\nu(l)]^{-1} \| \sum_{j=0}^{\nu-1} \left( \frac{\alpha h_m}{l} \right)^j \frac{1}{j!} \frac{h_m}{l}, \max_{i=1, ml-1} \left( \sum_{j=0}^{\nu-1} \left( \frac{\alpha h_i}{l} \right)^j \frac{1}{j!} + \beta \sum_{j=0}^{\nu-1} \left( \frac{\alpha h_i}{l} \right)^j \frac{1}{j!} \| [P_\nu(l)]^{-1} \| \times \right. \\ & \left. \left. \times \sum_{j=0}^{\nu-1} \left( \frac{\alpha h_m}{l} \right)^j \frac{1}{j!} \frac{h_m}{l} \right) \right] + e^{\frac{\alpha \bar{h}}{l}} + e^{\frac{\alpha \bar{h}}{l}} \frac{\beta}{1 - \mu_\nu(T)} \left[ e^{\frac{\alpha h_m}{l}} \frac{h_m}{l} + e^{\frac{\alpha h_m}{l}} \frac{h_m}{l} \beta \| [P_\nu(l)]^{-1} \| \sum_{j=0}^{\nu-1} \left( \frac{\alpha h_m}{l} \right)^j \frac{1}{j!} \frac{h_m}{l} \right] \times \\ & \times \frac{\bar{h}}{l} \left\{ \gamma_\nu(l) \left[ e^{\frac{\alpha \bar{h}}{l}} + e^{\frac{\alpha \bar{h}}{l}} \frac{\bar{h}}{l} (m+1) \beta + e^{\frac{\alpha \bar{h}}{l}} \frac{\bar{h}}{l} \frac{\beta}{1 - \mu_\nu(T)} \left( e^{\frac{\alpha h_m}{l}} - 1 + e^{\frac{\alpha h_m}{l}} \frac{h_m}{l} (m+1) \beta + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + e^{\frac{\alpha h_m}{l}} \frac{h_m}{l} \beta \| [P_\nu(l)]^{-1} \sigma(T) \right) \right] \max \left( 1, \frac{h_m}{l} \|C\| \right) \frac{1}{1 - q_\nu(l)} \left( 1 + \frac{\bar{h}}{l} \beta \sum_{j=0}^{\nu-1} \left( \frac{\alpha \bar{h}}{l} \right)^j \frac{1}{j!} \| [P_\nu(l)]^{-1} \| \right) \times \right. \\ & \left. \times \left( \frac{\alpha \bar{h}}{l} \right)^\nu \frac{1}{\nu!} + 1 \right\} + \gamma_\nu(l) \max \left\{ 1 + \|C\| \sum_{j=0}^{\nu-1} \left( \frac{\alpha h_m}{l} \right)^j \frac{1}{j!} \frac{h_m}{l} + \|C\| \beta \frac{h_m}{l} \sum_{j=0}^{\nu-1} \left( \frac{\alpha h_m}{l} \right)^j \frac{1}{j!} \| [P_\nu(l)]^{-1} \| \times \right. \\ & \left. \times \sum_{j=0}^{\nu-1} \left( \frac{\alpha h_m}{l} \right)^j \frac{1}{j!} \frac{h_m}{l}, \max_{i=1, ml-1} \left( \sum_{j=0}^{\nu-1} \left( \frac{\alpha h_i}{l} \right)^j \frac{1}{j!} + \beta \sum_{j=0}^{\nu-1} \left( \frac{\alpha h_i}{l} \right)^j \frac{1}{j!} \| [P_\nu(l)]^{-1} \| \sum_{j=0}^{\nu-1} \left( \frac{\alpha h_m}{l} \right)^j \frac{1}{j!} \frac{h_m}{l} \right) \right\} \frac{\bar{h}}{l}. \end{aligned}$$

**Определение.** Краевая задача (1),(2) называется корректно разрешимой, если для любых  $f(t)$ ,  $d$  существует единственное решение  $x^*(t)$  и для него справедлива оценка

$$\|x^*\|_1 = \max_{t \in [0, T]} \|x^*(t)\| \leq K \max(\|f\|_1, \|d\|),$$

где  $K$  – константа, независящая от  $f(t)$ ,  $d$ .

Число  $K$  называется константой корректной разрешимости задачи (1),(2).

**Теорема 2.** Краевая задача (1),(2) корректно разрешима тогда и только тогда, когда для любого  $\nu \in \mathbb{N}$ , существует  $l = l(\nu)$ , при котором матрицы  $P_\nu(l)$ ,  $Q_\nu(l)$  обратимы и выполняются неравенства а), б), в) теоремы 1.

**Доказательство.** Достаточность условий для корректной разрешимости задачи (1),(2) следует из теоремы 1. Докажем необходимость. Матрица  $P_*(l) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} P_\nu(l)$  имеет вид

$$P_*(l) = I - \int_{t_{ml-1}}^T K_m(\tau_1) d\tau_1 - \dots - \int_{t_{ml-1}}^T A(\tau_1) \dots \int_{t_{ml-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int_{t_{ml-1}}^{\tau_{\nu-1}} K_m(\tau_\nu) d\tau_\nu \dots d\tau_1 - \dots$$

Так как  $\|P_*(l) - I\| \leq \beta \frac{\alpha h_m}{l} e^{\frac{h_m}{l}}$ , то выбрав  $l_0$ , удовлетворяющим неравенству  $\beta \frac{\alpha h_m}{l} e^{\frac{h_m}{l}} \leq 1/2$ , и используя теорему о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов ([6], с.142), получим обратимость матрицы  $P_*(l)$  и оценку  $\| [P_*(l)]^{-1} \| \leq 2$  для всех  $l \geq l_0$ .

Возьмем  $\nu \in \mathbb{N}$ , а  $l_1 \geq l_0$  выберем, удовлетворяющим неравенствам

$$2\|P_*(l) - P_\nu(l)\| \leq 2\frac{h_m}{l}\beta\left(e^{\frac{\alpha h_m}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu-1}\left(\frac{\alpha h_m}{l}\right)^j \frac{1}{j!}\right) < \frac{1}{2},$$

$$\mu_\nu(T) = \|[P_\nu(l)]^{-1}\|e^{\frac{\alpha h_m}{l}}\frac{h_m}{l}\left(\frac{\alpha h_m}{l}\right)^\nu \frac{1}{\nu!}\beta < 1.$$

Тогда по теореме о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов получим обратимость матрицы  $P_\nu(l)$  и справедливость неравенств  $\|[P_\nu(l)]^{-1}\| \leq 4$ ,  $\mu_\nu(T) < 1$  для всех  $l \geq l_1$ .

Теперь покажем, что существует  $l_2 \geq l_1$ , при котором для всех  $l \geq l_2$  справедлива оценка

$$\|[\tilde{H}^{-1}Q_*(l)]^{-1}\| \leq \gamma, \quad (14)$$

$$\text{где } \tilde{H} = \frac{1}{l} \text{diag}\left(h_m I, \underbrace{h_1 I, \dots, h_1 I}_l, \underbrace{h_2 I, \dots, h_2 I}_l, \dots, \underbrace{h_{m-1} I, \dots, h_{m-1} I}_l, \underbrace{h_m I, \dots, h_m I}_{l-1}\right),$$

$\gamma$  – константа, не зависящая от  $l$ .

Для этого рассмотрим уравнение

$$\tilde{H}^{-1}Q_*(l)\lambda = c, \quad \lambda, c \in R^{nml}. \quad (15)$$

Возьмем  $\varepsilon > 0$ , а  $l_2$  выберем, удовлетворяющим неравенству

$$\frac{l_2}{\alpha \bar{h}} \left( e^{\frac{\alpha \bar{h}}{l_2}} - 1 - \alpha \bar{h}/l_2 \right) \leq \frac{2\varepsilon}{(4 + \varepsilon)(2 + \varepsilon)}.$$

Тогда согласно лемме [3] для любых  $l \geq l_2$  и  $c = (c_1, c_2, \dots, c_{ml}) \in R^{nml}$  можно построить непрерывную на  $[0, T]$  вектор-функцию  $f_c(t)$ , удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_s - t_{s-1}} F_{*s}(f_c, t_s) &\equiv \frac{1}{t_s - t_{s-1}} \int_{t_{s-1}}^{t_s} f_c(t) dt + \frac{1}{t_s - t_{s-1}} \int_{t_{s-1}}^{t_s} A(t) \int_{t_{s-1}}^t f_c(\tau) d\tau dt + \\ &+ \frac{1}{t_s - t_{s-1}} \int_{t_{s-1}}^{t_s} A(t) \int_{t_{s-1}}^t A(\tau) \int_{t_{s-1}}^\tau f_c(\tau_1) d\tau_1 d\tau dt + \dots = -c_{s+1}, \quad s = \overline{1, ml-1}, \\ \|f_c\|_1 &\leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \|c\|. \end{aligned}$$

Для этого по  $c_{s+1}$ ,  $s = \overline{1, ml-1}$ , по лемме [3] нужно построить непрерывные на  $[t_{s-1}, t_s]$ ,  $s = \overline{1, ml-1}$  функции  $f_{s+1}(t)$  такие, что  $f_{s+1}(t_{s-1}) = f_{s+1}(t_s) = 0$ ,  $\max_{t \in [t_{s-1}, t_s]} \|f_{s+1}(t)\| \leq (1 + \frac{\varepsilon}{2}) \|c_{s+1}\|$ ,  $\frac{1}{t_s - t_{s-1}} F_{*s}(f_c, t_s) = -c_{s+1}$ , и определить функцию  $f_c(t)$  равенствами

$$f_c(t) = f_{s+1}(t), \quad t \in [t_{s-1}, t_s], \quad s = \overline{1, ml-1},$$

$$f_c(t) = 0, \quad t \in [T - t_{ml-1}, T].$$

Взяв  $d_c = -c_1$ , имеем  $-F_*(f_c, d_c, l) = c$ . Тогда согласно лемме из ([5], с.31) вектор  $\lambda_c = (\lambda_1^c, \lambda_2^c, \dots, \lambda_{ml}^c)$  с координатами  $\lambda_r^c = x_c(t_{r-1})$ ,  $r = \overline{1, ml}$ , где  $x_c(t)$  – решение задачи (1),(2), при  $f(t) = f_c(t)$ ,  $d = d_c$  будет единственным решением систем уравнений и имеет место оценка

$$\|[\tilde{H}^{-1}Q_*(l)]^{-1}F_*(d_c, f_c, l)\| = \|\lambda_c\| =$$

$$= \max_{r=1, ml} \|x_c(t_{r-1})\| \leq \|x_c\|_1 \leq K \max(\|f_c\|_1, \|d_c\|). \quad (16)$$

Учитывая, что по построению функции  $f_c(t)$  и выбору вектора  $d_c$  имеет место неравенство

$$\max(\|f_c\|_1, \|d_c\|) \leq (1 + \frac{\varepsilon}{2})\|c\|,$$

из (16) получим оценку

$$\|[\tilde{H}^{-1}Q_*(l)]^{-1}c\| \leq K(1 + \frac{\varepsilon}{2})\|c\|.$$

Отсюда ввиду произвольности  $c \in R^{nm}$  получаем, что для всех  $l \geq l_2$  справедлива оценка

$$\|[\tilde{H}^{-1}Q_*(l)]^{-1}\| \leq (1 + \frac{\varepsilon}{2})K, \quad (17)$$

где  $K$  – константа корректной разрешимости задачи (1),(2) и не зависит от  $l$ , т.е. (14) справедлива с  $\gamma = (1 + \varepsilon/2)K$ .

Далее, используя оценку

$$\begin{aligned} \|\tilde{H}^{-1}Q_*(l) - \tilde{H}^{-1}Q_\nu(l)\| &\leq \|\tilde{H}^{-1}\| \cdot \|Q_*(l) - Q_\nu(l)\| \leq \frac{l}{\hat{h}} \max(1, \frac{h_m}{l}\|C\|) \left\{ e^{\frac{\alpha\bar{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu} \left(\frac{\alpha\bar{h}}{l}\right)^j \frac{1}{j!} + \right. \\ &+ (m+1)\beta\frac{\bar{h}}{l} \left( e^{\frac{\alpha\bar{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu-1} \left(\frac{\alpha\bar{h}}{l}\right)^j \frac{1}{j!} \right) + \|[P_*(l)]^{-1}\| \beta\frac{\bar{h}}{l} \left( e^{\frac{\alpha\bar{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu-1} \left(\frac{\alpha\bar{h}}{l}\right)^j \frac{1}{j!} \right) \left( e^{\frac{\alpha\bar{h}}{l}} - 1 \right) + \\ &+ \beta\frac{\bar{h}}{l} \sum_{j=0}^{\nu-1} \left(\frac{\alpha\bar{h}}{l}\right)^j \frac{1}{j!} \left( e^{\frac{\alpha\bar{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu-1} \left(\frac{\alpha\bar{h}}{l}\right)^j \frac{1}{j!} \right) \|[P_*(l)]^{-1}\| \beta\frac{\bar{h}}{l} \|[P_\nu(l)]^{-1}\| \left( e^{\frac{\alpha\bar{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu-1} \left(\frac{\alpha\bar{h}}{l}\right)^j \frac{1}{j!} \right) + \\ &+ \beta\frac{\bar{h}}{l} \left( e^{\frac{\alpha\bar{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu-1} \left(\frac{\alpha\bar{h}}{l}\right)^j \frac{1}{j!} \right) \|[P_*(l)]^{-1}\| (m+1)\beta\frac{\bar{h}}{l} e^{\frac{\alpha\bar{h}}{l}} + \beta\frac{\bar{h}}{l} \sum_{j=0}^{\nu-1} \left(\frac{\alpha\bar{h}}{l}\right)^j \frac{1}{j!} \|[P_*(l)]^{-1}\| \beta\frac{\bar{h}}{l} \times \\ &\times \left( e^{\frac{\alpha\bar{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu-1} \left(\frac{\alpha\bar{h}}{l}\right)^j \frac{1}{j!} \right) \|[P_\nu(l)]^{-1}\| (m+1)\beta\frac{\bar{h}}{l} \left( e^{\frac{\alpha\bar{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu-1} \left(\frac{\alpha\bar{h}}{l}\right)^j \frac{1}{j!} \right) \left. \right\}, \quad \hat{h} = \min_{j=1,m} h_j, \quad (18) \end{aligned}$$

при выборе  $l_3 \geq l_2$ , удовлетворяющим неравенству

$$\frac{K(1 + \varepsilon/2)l}{\hat{h}} \|Q_*(l) - Q_\nu(l)\| \leq \frac{\varepsilon}{2(1 + \varepsilon)},$$

по теореме о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов получим обратимость матрицы  $Q_\nu(l)$  для всех  $l \geq l_3$  и

$$\|[\tilde{H}^{-1}Q_\nu(l)]^{-1}\| \leq K(1 + \varepsilon).$$

Так как

$$\begin{aligned} q_\nu(l) &= \frac{K(1 + \varepsilon)l}{\hat{h}} \max(1, \frac{h_m}{l}\|C\|) \left( 1 + \beta\frac{\bar{h}}{l} \sum_{j=0}^{\nu-1} \left(\frac{\alpha\bar{h}}{l}\right)^j \frac{1}{j!} \|[P_\nu(l)]^{-1}\| \right) \times \\ &\times \left\{ e^{\frac{\alpha\bar{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu} \left(\frac{\alpha\bar{h}}{l}\right)^j \frac{1}{j!} + (m+1)\beta\frac{\bar{h}}{l} \left( e^{\frac{\alpha\bar{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu-1} \left(\frac{\alpha\bar{h}}{l}\right)^j \frac{1}{j!} \right) + \beta\frac{\bar{h}}{l} \left( e^{\frac{\alpha\bar{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu-1} \left(\frac{\alpha\bar{h}}{l}\right)^j \frac{1}{j!} \right) \right\} \times \\ &\times \frac{1}{1 - \mu_\nu(T)} \left( e^{\frac{\alpha\bar{h}m}{l}} - 1 + e^{\frac{\alpha\bar{h}m}{l}} \frac{h_m}{l} (m+1)\beta + e^{\frac{\alpha\bar{h}m}{l}} \frac{h_m}{l} \beta \|[P_\nu(l)]^{-1}\| \sigma(T) \right) \quad (19) \end{aligned}$$

и правая часть (19) стремится к нулю при  $l \rightarrow \infty$ , то найдется  $l_4 \geq l_3$  такое, что для всех  $l \geq l_4$  матрица  $Q_\nu(l)$  обратима и  $\| [Q_\nu(l)]^{-1} \| \leq \frac{l}{h} K(1 + \varepsilon) = \gamma_\nu(l)$ ,  $q_\nu(l) < 1$ . Теорема 2 доказана.

При обратимости матрицы  $P_*(l)$  для некоторого  $l \in \mathbb{N}$  необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1),(2) получены в [5].

В следующих утверждениях устанавливается взаимосвязь между константой корректной разрешимости  $K$  задачи (1),(2) и числом, ограничивающим сверху норму матрицы  $[\tilde{H}^{-1}Q_\nu(l)]^{-1}$ .

**Теорема 3.** *Если краевая задача (1),(2) корректно разрешима с константой  $K$ , то для любых  $\varepsilon > 0$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$  существует  $\bar{l} = \bar{l}(\varepsilon, \nu)$ , при котором матрицы  $P_\nu(l)$ ,  $Q_\nu(l)$  обратимы для всех  $l \geq \bar{l}(\varepsilon, \nu)$  и справедлива оценка*

$$\| [\tilde{H}^{-1}Q_\nu(l)]^{-1} \| \leq (1 + \varepsilon)K. \quad (20)$$

**Доказательство.** Пусть краевая задача (1),(2) корректно разрешима с константой  $K$ . Тогда, как было показано при доказательстве теоремы 2, для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $l_0 = l_0(\varepsilon) > 0$  такое, что при всех  $l \geq l_0(\varepsilon)$  матрица  $Q_*(l)$  обратима и для ее обратной справедлива оценка (17). Снова используя оценку (18) и для заданного  $\nu \in \mathbb{N}$  выбирая  $\bar{l} = \bar{l}(\varepsilon, \nu)$ , удовлетворяющее неравенству

$$\begin{aligned} & K \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) \frac{l}{h} \max(1, \frac{h_m}{l} \|C\|) \left\{ e^{\frac{\alpha \bar{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu} \left( \frac{\alpha \bar{h}}{l} \right)^j \frac{1}{j!} + (m+1) \beta \frac{\bar{h}}{l} \left( e^{\frac{\alpha \bar{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu-1} \left( \frac{\alpha \bar{h}}{l} \right)^j \frac{1}{j!} \right) + \| [P_*(l)]^{-1} \| \times \right. \\ & \times \beta \frac{\bar{h}}{l} \left( e^{\frac{\alpha \bar{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu-1} \left( \frac{\alpha \bar{h}}{l} \right)^j \frac{1}{j!} \right) \left( e^{\frac{\alpha \bar{h}}{l}} - 1 \right) + \beta \frac{\bar{h}}{l} \sum_{j=0}^{\nu-1} \left( \frac{\alpha \bar{h}}{l} \right)^j \frac{1}{j!} \left( e^{\frac{\alpha \bar{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu-1} \left( \frac{\alpha \bar{h}}{l} \right)^j \frac{1}{j!} \right) \| [P_*(l)]^{-1} \| \beta \frac{\bar{h}}{l} \| [P_\nu(l)]^{-1} \| \times \\ & \times \left( e^{\frac{\alpha \bar{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu-1} \left( \frac{\alpha \bar{h}}{l} \right)^j \frac{1}{j!} \right) + \beta \frac{\bar{h}}{l} \left( e^{\frac{\alpha \bar{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu-1} \left( \frac{\alpha \bar{h}}{l} \right)^j \frac{1}{j!} \right) \| [P_*(l)]^{-1} \| (m+1) \beta \frac{\bar{h}}{l} e^{\frac{\alpha \bar{h}}{l}} + \beta \frac{\bar{h}}{l} \sum_{j=0}^{\nu-1} \left( \frac{\alpha \bar{h}}{l} \right)^j \frac{1}{j!} \times \\ & \left. \times \| [P_*(l)]^{-1} \| \beta \frac{\bar{h}}{l} \left( e^{\frac{\alpha \bar{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu-1} \left( \frac{\alpha \bar{h}}{l} \right)^j \frac{1}{j!} \right) \| [P_\nu(l)]^{-1} \| (m+1) \beta \frac{\bar{h}}{l} \left( e^{\frac{\alpha \bar{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu-1} \left( \frac{\alpha \bar{h}}{l} \right)^j \frac{1}{j!} \right) \right\} < \frac{\varepsilon}{2(1 + \varepsilon)}, \end{aligned}$$

получим обратимость матрицы  $\tilde{H}^{-1}Q_\nu(l)$  для всех  $l \geq \bar{l}(\varepsilon, \nu)$  и справедливость оценки (20) с  $\gamma = (1 + \varepsilon)K$ . Теорема 3 доказана.

**Теорема 4.** *Пусть для некоторого  $\nu \in \mathbb{N}$  существует  $l_0 = l_0(\nu)$  такое, что всех  $l \geq l_0(\nu)$ , матрицы  $P_\nu(l)$ ,  $Q_\nu(l)$  обратимы и справедлива оценка*

$$\| [\tilde{H}^{-1}Q_\nu(l)]^{-1} \| \leq \gamma, \quad (21)$$

где  $\gamma - const$ , независящая от  $l$ .

Тогда краевая задача для нагруженных дифференциальных уравнений (1),(2) корректно разрешима с константой  $K = \gamma$ .

**Доказательство.** Возьмем  $\nu \in \mathbb{N}$  и ему соответствующее  $l_0 = l_0(\nu)$ . Так как  $Q_\nu(l) = \tilde{H} \cdot \tilde{H}^{-1} \cdot Q_\nu(l)$ , то согласно неравенству (21) справедлива оценка

$$\| [Q_\nu(l)]^{-1} \| \leq \| [\tilde{H}^{-1}Q_\nu(l)]^{-1} \| \cdot \| \tilde{H}^{-1} \| \leq \gamma \frac{l}{h}$$

для всех  $l \geq l_0(\nu)$ . Тогда, учитывая соотношение

$$q_\nu(l) = \gamma \frac{l}{\bar{h}} \max \left( 1, \frac{h_m}{l} \|C\| \right) \left( 1 + \beta \frac{\bar{h}}{l} \sum_{j=0}^{\nu-1} \left( \frac{\alpha \bar{h}}{l} \right)^j \frac{1}{j!} \| [P_\nu(l)]^{-1} \| \right) \times \\ \times \left\{ e^{\frac{\alpha \bar{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu} \left( \frac{\alpha \bar{h}}{l} \right)^j \frac{1}{j!} + (m+1) \beta \frac{\bar{h}}{l} \left( e^{\frac{\alpha \bar{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu-1} \left( \frac{\alpha \bar{h}}{l} \right)^j \frac{1}{j!} \right) + \beta \frac{\bar{h}}{l} \left( e^{\frac{\alpha \bar{h}}{l}} - \sum_{j=0}^{\nu-1} \left( \frac{\alpha \bar{h}}{l} \right)^j \frac{1}{j!} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{1 - \mu_\nu(T)} \left( e^{\frac{\alpha h_m}{l}} - 1 + e^{\frac{\alpha h_m}{l}} \frac{h_m}{l} (m+1) \beta + e^{\frac{\alpha h_m}{l}} \frac{h_m}{l} \beta \| [P_\nu(l)]^{-1} \| \sigma(T) \right) \right\}$$

и выбирая  $l_1 \geq l_0(\nu)$ , удовлетворяющим неравенству  $q_\nu(l) < 1$ , из теоремы 1 получим корректную разрешимость задачи (1),(2). При этом оценка (13) справедлива для всех  $l \geq l_1$ . Заменяя  $\gamma_\nu(l)$  на  $\gamma \frac{l}{\bar{h}}$  и переходя к пределу при  $l \rightarrow \infty$  в  $M_\nu(l)$ , имеем  $\|x^*\|_1 \leq \gamma \max(\|f\|_1, \|d\|)$ , т.е. задача (1),(2) корректно разрешима с константой  $K = \gamma$ . Теорема 4 доказана.

### Цитированная литература

1. Нахушев А. М. // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 1. С. 96 – 105.
2. Абдуллаев В. М., Айда-Заде К.Р. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44, № 9. С. 1585 – 1595.
3. Джумабаев Д. С. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50 – 66.
4. Бакирова Э. А. // Известия НАН РК. Сер. физ.-матем. 2005. № 3. С. 95 – 102.
5. Бакирова Э. А. // Математический журнал. 2005. Т. 5, № 3. С. 25-34.
6. Треногин В. А. // Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 496с.

*Поступила в редакцию 11.09.2007 г.*

УДК 517.5

## НЕРАВЕНСТВО РАЗНЫХ МЕТРИК В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

Д.К. ДАРБАЕВА, Е.Д. НУРСУЛТАНОВ

ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Казахстанский филиал МГУ им. М.В. Ломоносова  
010000 Астана ул. Мунайтпасова, 5 er-nurs@yandex.ru

В данной работе доказывается неравенство Бернштейна-Никольского для анизотропных пространств Лоренца  $L_{p,q^*}$ , что позволяет раскрыть зависимость константы от сильных и слабых параметров относительно каждой переменной.

### Введение.

Пусть  $1 \leq p \leq q \leq \infty$ ,  $\bar{k}^\alpha = \prod_{j=1}^n (\max(|k_j|, 1))^{\alpha_j}$ ,  $\alpha \in R$ ,

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{2\pi i k x}, \quad T_n^\alpha(x) = \sum_{k=-n}^n c_k |\bar{k}|^\alpha e^{2\pi i k x}$$

– тригонометрические полиномы  $n$ -го порядка. Верны классические неравенства для тригонометрических полиномов

$$\|T_n^\alpha\|_{L_\infty} \leq n^\alpha \|T_n\|_{L_\infty}, \quad (1)$$

$$\|T_n\|_{L_q} \leq c n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|T_n\|_{L_p}, \quad (2)$$

которые называются соответственно неравенствами Бернштейна и Никольского ([1]). Эти неравенства являются фундаментальным аппаратом исследования в теории приближения, теории функциональных пространств.

В пространствах с доминирующей смешанной производной наилучшие приближения реализуются на тригонометрических полиномах со спектром из гиперболических крестов, то есть на множествах вида

$$\Gamma_N = \{k \in Z^n : \bar{k} = \prod_{j=1}^n \max(|k_j|, 1) \leq N\}.$$

---

Keywords: *Lorentz space, anisotropic space, strong and weak parameters*

2000 Mathematics Subject Classification: 35L20

© Д.К. Дарбаева, Е.Д. Нурсултанов, 2007.

Следуя работе Темлякова [2], неравенство Бернштейна-Никольского примет следующий вид: пусть  $1 \leq p \leq r < \infty$ ,  $\alpha = \alpha_1 = \dots = \alpha_\nu > \alpha_{\nu+1} \geq \dots \geq \alpha_n$ ,  $\alpha + \frac{1}{p} > 0$ , тогда для тригонометрических полиномов

$$\begin{aligned} T_{\Gamma_N}(x) &= \sum_{k \in \Gamma_N} c_k e^{2\pi i k x}, \\ T_{\Gamma_N}^\alpha(x) &= \sum_{k \in \Gamma_N} c_k \prod_{j=1}^n \max(|k_j|)^{\alpha_j} e^{2\pi i k_j x_j} \\ \|T_{\Gamma_N}^{(\alpha)}\|_{L^\infty} &\leq c N^{\alpha + \frac{1}{p}} (\ln N)^{(1 - \frac{1}{p})(\nu - 1)} \|T_{\Gamma_N}\|_{L_p}. \end{aligned} \tag{3}$$

Если  $\alpha \geq 0$ , то

$$\|T_{\Gamma_N}^{(\alpha)}\|_{L_r} \leq c N^{\alpha + \frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \|T_{\Gamma_N}\|_{L_p}. \tag{4}$$

В данной работе мы рассматриваем неравенство Бернштейна-Никольского в анизотропных пространствах Лоренца  $L_{\mathbf{p}\mathbf{q}^*}$  [3],[4], это позволяет достаточно полностью раскрыть природу константы, а именно: ее зависимость от сильных и слабых параметров относительно каждой переменной.

Пусть  $f$  – функция, измеримая относительно  $n$  мерной меры Лебега  $\mu$ , определенная на  $[0, 1]^n$ ,

$$m(\sigma, f) = \mu\{x : |f(x)| > \sigma\}$$

– ее функция распределения. Функция

$$f^*(t) = \inf\{\sigma : m(\sigma, f) \leq t\}$$

называется невозрастающей перестановкой функции  $f$ .

Пусть векторы  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$  удовлетворяют условиям: если  $0 < q_j < \infty$ , то  $0 < p_j < \infty$ , если  $q_j = \infty$ , то  $0 < p_j \leq \infty$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Для произвольной перестановки  $*$  =  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$  последовательности  $(1, 2, \dots, n)$  и  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  определим соответствующий функционал

$$\Phi_{\mathbf{p}\mathbf{q}^*}(\varphi) = \left( \int_0^\infty \dots \left( \int_0^\infty \left| t_1^{\frac{1}{p_1}} \dots t_n^{\frac{1}{p_n}} \varphi(t_1, \dots, t_n) \right|^{q_{j_1}} \frac{dt_{j_1}}{t_{j_1}} \right)^{\frac{q_{j_2}}{q_{j_1}}} \dots \frac{dt_{j_n}}{t_{j_n}} \right)^{\frac{1}{q_n}},$$

здесь выражение  $(\int_0^\infty (G(s))^q \frac{ds}{s})^{1/q}$  при  $q = \infty$  понимается, как  $\sup_{s>0} G(s)$ .

Пусть  $f(x_1, \dots, x_n)$  – измеримая 1-периодическая функция, заданная в  $[0, 1]^n$ . Через  $f^{*1, \dots, *n}(t_1, \dots, t_n)$  обозначим функцию, полученную применением невозрастающей перестановки последовательно по переменным  $x_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, \dots, x_n \in \mathbb{R}^{m_n}$  при фиксированных остальных переменных. Данную функцию будем называть невозрастающей перестановкой функции  $f$  в  $[0, 1]^n$ .

Пространство  $L_{\mathbf{p}\mathbf{q}^*}[0, 1]^n$  определяется как множество функций, для которых

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}\mathbf{q}^*}[0, 1]^n} = \Phi_{\mathbf{p}\mathbf{q}^*}(f^{*1 \dots *n}(\cdot)) < \infty. \tag{5}$$

### 1. Вспомогательные леммы.

**Лемма 1.** Пусть  $\beta_0, \beta \in \mathbf{R}$ ,  $\beta > 0$ ,  $0 < q_i \leq \infty$ ,  $\gamma > 0$ ,

$$A_M = 2^{\beta_0 M} \left( \sum_{k_n=0}^M \dots \left( \sum_{k_1=0}^{M-k_2-\dots-k_n} \left( \prod_{j=1}^n 2^{(\beta-\beta_0)k_j} (M-k_1-\dots-k_n+1)^\gamma \right)^{q_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \dots \right)^{\frac{1}{q_n}}, \tag{6}$$

тогда при  $\beta_0 < \beta$  верно

$$A_M \sim 2^{\beta M} M^{\frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \dots + \frac{1}{q_n}}.$$

**Доказательство.** Пусть  $\beta_0 < \beta$ . Используя соотношение  $\sum_{k=0}^N 2^{\alpha k} (N-k)^\beta \sim 2^{\alpha N}$ , при  $\alpha > 0$  получим следующее:

$$\begin{aligned} A &= 2^{\beta_0 M} \left( \sum_{k_n=0}^M \dots \left( \sum_{k_1=0}^{M-k_2-\dots-k_n} \left( \prod_{j=1}^n 2^{(\beta-\beta_0)k_j} (M-k_1-\dots-k_n+1)^\gamma \right)^{q_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \dots \right)^{\frac{1}{q_n}} \\ &\sim 2^{\beta_0 M} \left( \sum_{k_n=0}^M \dots \left( \sum_{k_2=0}^{M-k_3-\dots-k_n} \left( \prod_{j=2}^n 2^{(\beta-\beta_0)k_j} 2^{(\beta-\beta_0)(M-k_2-\dots-k_n+1)} \right)^{q_2} \right)^{\frac{q_3}{q_2}} \dots \right)^{\frac{1}{q_n}} \\ &\sim 2^{\beta M} \left( \sum_{k_n=0}^M \dots \left( \sum_{k_2=0}^{M-k_2-\dots-k_n} (1)^{q_2} \right)^{\frac{q_3}{q_2}} \dots \right)^{\frac{1}{q_n}} \\ &\sim 2^{\beta M} \left( \sum_{k_n=0}^M \dots \left( \sum_{k_3=0}^{M-k_4-\dots-k_n} \left( (M-k_3-\dots-k_n+1)^{\frac{1}{q_2}} \right)^{q_3} \right)^{\frac{q_4}{q_3}} \dots \right)^{\frac{1}{q_n}} \\ &\sim 2^{\beta M} \left( \sum_{k_n=0}^M \dots \left( \sum_{k_4=0}^{M-k_5-\dots-k_n} \left( (M-k_4-\dots-k_n+1)^{\frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3}} \right)^{q_4} \right)^{\frac{q_5}{q_4}} \dots \right)^{\frac{1}{q_n}} \\ &\sim \dots \sim 2^{\beta M} M^{\frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \dots + \frac{1}{q_n}}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

**Лемма 2.** Пусть  $\beta_0, \beta \in \mathbf{R}$ ,  $\beta > 0$ ,  $0 < q_i \leq \infty$ ,  $\gamma > 0$ ,

$$A_M = 2^{\beta_0 M} \left( \sum_{k_n=0}^M \dots \left( \sum_{k_1=0}^{M-k_2-\dots-k_n} \left( \prod_{j=1}^n 2^{(\beta-\beta_0)k_j} (M-k_1-\dots-k_n+1)^\gamma \right)^{q_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \dots \right)^{\frac{1}{q_n}},$$

тогда при  $\beta_0 > \beta$  верно

$$A_m \sim c 2^{\beta_0 M} M^\gamma.$$

**Доказательство.** Пусть  $\beta_0 > \beta$ . Из соотношения  $\sum_{k=0}^N 2^{\alpha k} (N-k)^\beta \sim N^\beta$  при  $\alpha < 0$  вытекает

$$\begin{aligned} A &= 2^{\beta_0 M} \left( \sum_{k_n=0}^M \dots \left( \sum_{k_1=0}^{M-k_2-\dots-k_n} \left( \prod_{j=1}^n 2^{(\beta-\beta_0)k_j} (M-k_1-\dots-k_n+1)^\gamma \right)^{q_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \dots \right)^{\frac{1}{q_n}} \\ &\sim 2^{\beta_0 M} \left( \sum_{k_n=0}^M \dots \left( \sum_{k_2=0}^{M-k_3-\dots-k_n} \left( \prod_{j=2}^n 2^{(\beta_0-\beta)k_j} (M-k_2-\dots-k_n+1)^\gamma \right)^{q_2} \right)^{\frac{q_3}{q_2}} \dots \right)^{\frac{1}{q_n}} \end{aligned}$$

$$\sim 2^{\beta_0 M} \left( \sum_{k_n=0}^M \dots \left( \sum_{k_3=0}^{M-k_4-\dots-k_n} \left( \prod_{j=3}^n 2^{(\beta-\beta_0)k_j} (M-k_3-\dots-k_n+1)^\gamma \right)^{q_3} \right)^{\frac{q_4}{q_3}} \dots \right)^{\frac{1}{q_n}} \sim \dots \sim 2^{\beta_0 M} M^\gamma.$$

Лемма доказана.

**Лемма 3.** Пусть  $\beta_0, \beta \in \mathbf{R}$ ,  $\beta > 0$ ,  $0 < q_i \leq \infty$ ,  $\gamma > 0$ ,

$$A_M = 2^{\beta_0 M} \left( \sum_{k_n=0}^M \dots \left( \sum_{k_1=0}^{M-k_2-\dots-k_n} \left( \prod_{j=1}^n 2^{(\beta-\beta_0)k_j} (M-k_1-\dots-k_n+1)^\gamma \right)^{q_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \dots \right)^{\frac{1}{q_n}},$$

тогда при  $\beta_0 = \beta$  верно

$$A_M \sim 2^{\beta M} M^{\gamma + \sum_{i=1}^n \frac{1}{q_i}}.$$

**Доказательство.** Пусть  $\beta_0 = \beta$ . Для доказательства используем, что  $\sum_{k=0}^N (N-k)^\beta \sim N^{\beta+1}$ .  
Имеем

$$\begin{aligned} A &= 2^{\beta M} \left( \sum_{k_n=0}^M \dots \left( \sum_{k_1=0}^{M-k_2-\dots-k_n} ((M-k_1-\dots-k_n+1)^\gamma)^{q_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \dots \right)^{\frac{1}{q_n}} \\ &\sim 2^{\beta M} \left( \sum_{k_n=0}^M \dots \left( \sum_{k_2=0}^{M-k_3-\dots-k_n} ((M-k_2-\dots-k_n+1)^{\gamma+1})^{\frac{q_2}{q_1}} \right)^{\frac{q_3}{q_2}} \dots \right)^{\frac{1}{q_n}} \\ &\sim 2^{\beta M} \left( \sum_{k_n=0}^M \dots \left( \sum_{k_2=0}^{M-k_3-\dots-k_n} ((M-k_2-\dots-k_n+1)^{\gamma+\frac{1}{q_1}})^{q_2} \right)^{\frac{q_3}{q_2}} \dots \right)^{\frac{1}{q_n}} \\ &\sim 2^{\beta M} \left( \sum_{k_n=0}^M \dots \left( \sum_{k_3=0}^{M-k_4-\dots-k_n} ((M-k_3-\dots-k_n)^{\gamma+\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}})^{q_3} \right)^{\frac{q_4}{q_3}} \dots \right)^{\frac{1}{q_n}} \\ &\sim 2^{\beta M} \left( \sum_{k_n=0}^M \dots \left( \sum_{k_4=0}^{M-k_5-\dots-k_n} ((M-k_4-\dots-k_n)^{\gamma+\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}})^{q_4} \right)^{\frac{q_5}{q_4}} \dots \right)^{\frac{1}{q_n}} \\ &\dots \sim 2^{\beta M} M^{\gamma+\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\dots+\frac{1}{q_n}} = 2^{\beta M} M^{\gamma+\sum_{i=1}^n \frac{1}{q_i}}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

### 3. Неравенство разных метрик в анизотропных классах Лоренца.

Пусть  $\alpha \in R^n$ ,  $1 < \mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) < \infty$ ,  $0 < \mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \leq \infty$ ,  $*$  =  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$  – некоторая перестановка последовательности  $(1, 2, \dots, n)$ .

Пространство  $B_{\mathbf{p}\mathbf{q}*}^\alpha[0, 1]^n$  определяется, как множество рядов  $f = \sum_{k \in Z^n} a_k e^{2\pi i k x}$ , для которых конечна величина

$$\|f\|_{B_{\mathbf{p}\mathbf{q}*}^\alpha[0, 1]^n} =$$

$$= \left( \sum_{k_{j_n}=0}^{\infty} \dots \left( \sum_{k_{j_1}=0}^{\infty} \left( 2^{\sum_{j=1}^n \alpha_j k_j} \|\Delta_k(f)\|_{L_p} \right)^{q_{j_1}} \right)^{q_{j_2}} \dots \right)^{\frac{1}{q_{j_n}}},$$

где  $\Delta_k(f) = \sum_{2^{k_j-1} \leq |m_j| < 2^{k_j}} a_m e^{2\pi i m x}$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+^n$ .

Следующая лемма является следствием теоремы вложения из работы [5] (см. теорема 4).

**Лемма 4.** Пусть  $1 < \mathbf{p}_1 = (p_1^1, p_2^1, \dots, p_n^1) < \infty$ ,  $1 < \mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n) < \infty$ ,  $0 < \mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \leq \infty$ ,  $\frac{1}{\mathbf{p}_1} = \frac{1}{\mathbf{r}} - \gamma$ , тогда

$$B_{\mathbf{r}\mathbf{q}^*}^\gamma[0, 1]^n \hookrightarrow L_{\mathbf{p}_1\mathbf{q}^*}[0, 1]^n.$$

Для  $s \in \mathbb{N}^n$  введем множество  $Q_s$  такое, что

$$Q_s = \{k \in \mathbb{Z}^n : 0 \leq |k_j| \leq 2^{s_j}, j = 1, \dots, n\}.$$

Ступенчатым гиперболическим крестом назовем множество

$$\Lambda_m = \cup_{s_1+\dots+s_n=m} Q_s,$$

а гиперболическим крестом назовем множество

$$\Gamma_N = \{k \in \mathbb{Z}^n : \bar{k} = \prod_{j=1}^n \max(|k_j|, 1) \leq N\}.$$

Пусть  $T_{\Gamma_N}(x) = \sum_{k \in \Gamma_N} c_k e^{2\pi i k x}$ ,  $T_{\Lambda_m}(x) = \sum_{k \in \Lambda_m} c_k e^{2\pi i k x}$ ,  $kx = k_1 x_1 + \dots + k_n x_n$  – тригонометрические многочлены, соответствующие гиперболическому кресту  $\Gamma_N$  и ступенчатому гиперболическому кресту  $\Lambda_m$ .

Пусть  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}$ ,  $\bar{k}^\alpha = \prod_{j=1}^n (\max(|k_j|, 1))^{\alpha_j}$ . Через  $T_{\Gamma_N}^\alpha$  и  $T_{\Lambda_m}^\alpha$  обозначим соответственно тригонометрические полиномы

$$\sum_{k \in \Gamma_N} c_k \bar{k}^\alpha e^{2\pi i k x},$$

$$\sum_{k \in \Lambda_m} c_k \bar{k}^\alpha e^{2\pi i k x}.$$

**Теорема 1.** Пусть  $N, m \in \mathbb{N}$ ,  $1 < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < \infty$ ,  $1 \leq \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\beta = \max_{1 \leq j \leq n} (\alpha_j + \frac{1}{p_j})$ ,  $\star = (j_1, \dots, j_n)$  – некоторая перестановка последовательности  $(1, 2, \dots, n)$ ,  $A = \{j : \alpha_j + \frac{1}{p_j} = \beta\}$ ,  $k_0 = \min\{k : j_k \in A\}$ .

Если  $\beta > 0$ , то

$$\|T_{\Gamma_N}^\alpha\|_{L_\infty[0,1]^n} \leq c_{\mathbf{p},\mathbf{q}} N^\beta (\ln(N+2))^{(\sum_{j \in A} \frac{1}{q_j}) - \frac{1}{q_{j_{k_0}}}} \|T_{\Gamma_N}\|_{L_{\mathbf{p}\mathbf{q}^*}[0,1]^n}. \quad (7)$$

Если  $\beta = 0$ , то

$$\|T_{\Gamma_N}^\alpha\|_{L_\infty[0,1]^n} \leq c_{\mathbf{p},\mathbf{q}} (\ln(N+2))^{\sum_{j \in A} \frac{1}{q_j}} \|T_{\Gamma_N}\|_{L_{\mathbf{p}\mathbf{q}^*}[0,1]^n}.$$

**Доказательство.** Пусть  $N \in \mathbb{N}$  и  $m \in \mathbb{N}$  такое, что  $2^{m-1} \leq N < 2^m$ , тогда  $\Lambda_m$  – минимальный ступенчатый гиперболический крест, содержащий  $\Gamma_N$ . Поэтому для полинома  $T_{\Gamma_N}^\alpha$  имеет место представление

$$T_{\Gamma_N}^\alpha(y) = \int_{[0,1]^n} U_{\Lambda_m}^\alpha(y-x) T_{\Gamma_N}(x) dx.$$

Тогда из неравенства Гельдера для пространств  $L_{\mathbf{p}\mathbf{q}^*}[0,1]^n$  имеем

$$\|T_{\Gamma_N}^\alpha(y)\|_{L_\infty} \leq c \|U_{\Lambda_m}^\alpha\|_{L_{\mathbf{p}'\mathbf{q}'^*}} \|T_{\Gamma_N}(x)\|_{L_{\mathbf{p}\mathbf{q}^*}}.$$

Рассмотрим  $U_{\Lambda_m}^\alpha(x) = \sum_{k \in \Lambda_m} c_k \bar{k}^\alpha e^{2\pi i k x}$ . Пусть  $\mathbf{q}'^* = \left( \begin{smallmatrix} q'_1, q'_2, \dots, q'_n \\ j_1, j_2, \dots, j_n \end{smallmatrix} \right)$ , где  $q'_i = \frac{q_i}{q_i-1}$ . Зафиксируем  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n : 1 < \mathbf{r} < \mathbf{p}'$ .

Согласно лемме 4 величина  $\|U_{\Lambda_m}^\alpha\|_{L_{\mathbf{p}'\mathbf{q}'^*}}$  оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} \|U_{\Lambda_m}^\alpha\|_{L_{\mathbf{p}'\mathbf{q}'^*}} &\leq c \left( \sum_{k_{j_n}=0}^\infty \dots \left( \sum_{k_{j_1}=0}^\infty \left( \prod_{j=1}^n 2^{\left(\frac{1}{r_j} - \frac{1}{p_j}\right)k_j} \|\Delta_k U_{\Lambda_m}^\alpha\|_r \right)^{q'_{j_1}} \right)^{\frac{q'_{j_2}}{q'_{j_1}}} \dots \right)^{\frac{1}{q'_{j_n}}} \\ &\sim c \left( \sum_{k_{j_n}=0}^m \dots \left( \sum_{k_{j_1}=0}^{m-k_{j_2}-\dots-k_{j_n}} \left( \prod_{j=1}^n 2^{\left(\frac{1}{r_j} - \frac{1}{p_j} + \alpha_j + \frac{1}{r_j}\right)k_j} \right)^{q'_{j_1}} \right)^{\frac{q'_{j_2}}{q'_{j_1}}} \dots \right)^{\frac{1}{q'_{j_n}}} = \\ &= c \left( \sum_{k_{j_n}=0}^m \dots \left( \sum_{k_{j_1}=0}^{m-k_{j_2}-\dots-k_{j_n}} \left( \prod_{j=1}^n 2^{\varphi_j k_j} \right)^{q'_{j_1}} \right)^{\frac{q'_{j_2}}{q'_{j_1}}} \dots \right)^{\frac{1}{q'_{j_n}}}, \end{aligned}$$

где  $\beta_j = \alpha_j + 1 - \frac{1}{p_j} = \alpha_j + \frac{1}{p_j}$ .

Пусть  $\beta_{j_1} = \beta_{j_2} = \dots = \beta_{j_{l_1}}$ , где  $1 \leq l_1 \leq n$ ,

$$\|U_{\Lambda_m}^\alpha\|_{\mathbf{p}'\mathbf{q}'^*} \leq c \left( \sum_{k_{j_n}=0}^m \dots \left( \sum_{k_{j_{l_1}}=0}^{m-k_{j_{l_1+1}}-\dots-k_{j_n}} \dots \left( \sum_{k_{j_1}=0}^{m-k_{j_2}-\dots-k_{j_n}} \left( \prod_{i=1}^n 2^{\beta_{j_i} k_{j_i}} \right)^{q'_{j_1}} \right)^{\frac{q'_{j_2}}{q'_{j_1}}} \dots \right)^{\frac{q'_{j_{l_1+1}}}{q'_{j_{l_1}}}} \dots \right)^{\frac{1}{q'_{j_n}}}.$$

Применяя лемму 3 к последнему выражению, получим следующее

$$c \left( \sum_{k_{j_n}=0}^m \dots \prod_{i=l_1+1}^n 2^{\varphi_{j_i} k_{j_i}} \left( \sum_{k_{j_{l_1}}=0}^{m-k_{j_{l_1+1}}-\dots-k_{j_n}} \dots \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
& \dots \left( \sum_{k_{j_2}=0}^{m-k_{j_3}-\dots-k_{j_n}} \left( \prod_{i=2}^{l_1} 2^{\beta_{j_i} k_{j_i}} 2^{\beta_{j_1} (m-k_{j_2}-\dots-k_{j_n}+1)} \right)^{q'_{j_2}} \right)^{\frac{q'_{j_3}}{q'_{j_2}}} \dots \right)^{\frac{1}{q'_{j_n}}} \sim \\
& \sim c 2^{\varphi_{j_1} m} \left( \sum_{k_{j_n}=0}^m \dots \prod_{i=l_1+1}^n 2^{\beta_{j_i} k_{j_i}} \left( \sum_{k_{j_{l_1}}=0}^{m-k_{j_{l_1+1}}-\dots-k_{j_n}} \dots \left( \sum_{k_{j_2}=0}^{m-k_{j_3}-\dots-k_{j_n}} (1)^{q'_{j_2}} \right)^{\frac{q'_{j_3}}{q'_{j_2}}} \dots \right)^{\frac{1}{q'_{j_n}}} \right) \sim \\
& \sim c 2^{\beta_{j_1} m} \left( \sum_{k_{j_n}=0}^m \dots \prod_{i=l_1+1}^n 2^{\beta_{j_i} k_{j_i}} \left( \sum_{k_{j_{l_1}}=0}^{m-k_{j_{l_1+1}}-\dots-k_{j_n}} \dots \right. \right. \\
& \left. \left. \left( \sum_{k_{j_3}=0}^{m-k_{j_4}-\dots-k_{j_n}} \left( (m-k_{j_3}-\dots-k_{j_n}+1)^{\frac{1}{q'_{j_2}}} \right)^{q'_{j_3}} \right)^{\frac{q'_{j_4}}{q'_{j_3}}} \dots \right)^{\frac{1}{q'_{j_n}}} \right) \sim \\
& \sim \dots \sim c 2^{\beta_{j_1} m} \left( \sum_{k_{j_n}=0}^m \dots \left( \sum_{k_{j_{l_1+1}}=0}^{m-k_{j_{l_1+2}}-\dots-k_{j_n}} \dots \right. \right. \\
& \left. \left. \prod_{i=l_1+1}^n \left( 2^{(\beta_{j_i}-\beta_{j_1}) k_{j_i}} (m-k_{j_{l_1+1}}-\dots-k_{j_n}+1)^{\frac{1}{q'_{j_2}}+\dots+\frac{1}{q'_{j_{l_1}}}} \right)^{q'_{j_{l_1+1}}} \right)^{\frac{q'_{j_{l_1+2}}}{q'_{j_{l_1+1}}}} \dots \right)^{\frac{1}{q'_{j_n}}} \quad (8)
\end{aligned}$$

Пусть  $\beta_{j_{l_1+1}} = \beta_{j_{l_1+2}} = \dots = \beta_{j_{l_2}}$ , где  $l_1 + 1 \leq l_2 \leq n$ , тогда выражение (8) будет равно

$$\begin{aligned}
& c 2^{\beta_{j_1} m} \left( \sum_{k_{j_n}=0}^m \dots \prod_{i=l_2+1}^n 2^{(\beta_{j_i}-\beta_{j_1}) k_{j_i}} \left[ \sum_{k_{j_{l_2}}=0}^{m-k_{j_{l_2+1}}-\dots-k_{j_n}} \dots \right. \right. \\
& \left. \left. \left( \sum_{k_{j_{l_1+1}}=0}^{m-k_{j_{l_1+2}}-\dots-k_{j_n}} \left( \prod_{i=l_1+1}^{l_2} 2^{(\beta_{j_i}-\beta_{j_1}) k_{j_i}} (m-k_{j_{l_1+1}}-\dots-k_{j_n}+1)^{\frac{1}{q'_{j_2}}+\dots+\frac{1}{q'_{j_{l_1}}}} \right)^{q'_{j_{l_1+1}}} \right)^{\frac{q'_{j_{l_1+2}}}{q'_{j_{l_1+1}}}} \dots \right] \right)^{\frac{1}{q'_{j_n}}}.
\end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках имеет форму (6) из леммы 1, где  $M = (m - k_{j_{l_2+1}} - \dots - k_{j_n})$ ,  $\gamma = \frac{1}{q'_{j_2}} + \frac{1}{q'_{j_3}} + \dots + \frac{1}{q'_{j_{l_1}}}$ .

Воспользовавшись этой леммой, получим

$$c2^{\beta_{j_{l_1+1}}m} \left( \sum_{k_{j_n}=0}^m \dots \left( \sum_{k_{j_{l_2+1}}=0}^{m-k_{j_{l_2+2}}-\dots-k_{j_n}} \left( \prod_{i=l_2+1}^n 2^{(\beta_{j_i}-\beta_{j_1})k_{j_i}} \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \left( m - k_{j_{l_1+1}} - \dots - k_{j_n} + 1 \right)^{\frac{1}{q_{j_{l_1+2}}} + \dots + \frac{1}{q_{j_{l_2}}}} \right)^{\frac{1}{q_{j_{l_2+1}}}} \right)^{\frac{q_{j_{l_2+2}}}{q_{j_{l_2+1}}}} \dots \right)^{\frac{1}{q_{j_n}}}.$$

А согласно лемме 2 имеем

$$c2^{\beta_{j_1}m} \left( \sum_{k_{j_n}=0}^m \dots \left( \sum_{k_{j_{l_2+1}}=0}^{m-k_{j_{l_2+2}}-\dots-k_{j_n}} \left( \prod_{i=l_2+1}^n 2^{(\beta_{j_i}-\beta_{j_1})k_{j_i}} \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \left( m - k_{j_{l_1+1}} - \dots - k_{j_n} + 1 \right)^{\frac{1}{q_{j_2}} + \dots + \frac{1}{q_{j_{l_1}}}} \right)^{\frac{1}{q_{j_{l_2+1}}}} \right)^{\frac{q_{j_{l_2+2}}}{q_{j_{l_2+1}}}} \dots \right)^{\frac{1}{q_{j_n}}}.$$

Повторяем этот процесс далее и как только дойдем до максимального, мы заметим, что возможны два случая, описываемые в леммах 2 и 3, то есть  $\beta_0 > \beta$ , либо  $\beta_0 = \beta$ . Если в первом согласно лемме 2 форма (6) сохраняется, то во втором согласно лемме 3 будет идти накопление в степенном показателе.

Таким образом, получили оценку при  $\beta > 0$

$$\|U_{\Lambda_m}^\alpha\|_{\mathbf{p}'\mathbf{q}'\star} \leq N^\beta (\ln N)^{(\sum_{j \in A} \frac{1}{q_j}) - \frac{1}{q_{j_{k_0}}}},$$

при  $\beta = 0$

$$\|U_{\Lambda_m}^\alpha\|_{\mathbf{p}'\mathbf{q}'\star} \leq N^{\sum_{j \in A} \frac{1}{q_j}}.$$

Теорема доказана.

В случае, когда  $\alpha = 0$ , из теоремы 1 следует результат из работы [6].

**Теорема 2.** Пусть  $N, m \in \mathbf{N}$ ,  $1 < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) < \infty$ ,  $0 < \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ ,  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n) \leq \infty$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\beta = \max_{1 \leq j \leq n} (\alpha_j - \frac{1}{p_j} + \frac{1}{r_j})$ ,  $\star = (j_1, \dots, j_n)$  некоторая перестановка последовательности  $(1, 2, \dots, n)$ ,  $A = \{j : \alpha_j - \frac{1}{p_j} + \frac{1}{r_j} = \beta\}$ ,  $k_0 = \min\{k : j_k \in A\}$ ,  $\frac{1}{\theta_i} = \left(\frac{1}{q_i} - \frac{1}{d_i}\right)_+$ .

Если  $\beta > 0$ , то

$$\|T_{\Gamma_N}^\alpha\|_{L_{\mathbf{p}\mathbf{q}'\star}[0,1]^n} \leq cN^\beta (\ln(N+2))^{(\sum_{j \in A} \frac{1}{\theta_j}) - \frac{1}{\theta_{j_{k_0}}}} \|T_{\Gamma_N}\|_{L_{\mathbf{r}\mathbf{d}'\star}[0,1]^n}. \tag{9}$$

Если  $\beta = 0$ , то

$$\|T_{\Gamma_N}^\alpha\|_{L_{pq^*}[0,1]^n} \leq c(\ln(N+2))^{\sum_{j \in A} \frac{1}{\theta_j}} \|T_{\Gamma_N}\|_{L_{rd^*}[0,1]^n}.$$

**Доказательство.** Пусть  $N \in \mathbb{N}$  и  $m \in \mathbb{N}$  такое, что  $2^{m-1} \leq N < 2^m$ , тогда  $\Lambda_m$  – минимальный ступенчатый гиперболический крест, содержащий  $\Gamma_N$ . Рассмотрим частичную сумму ряда Фурье  $T_{\Gamma_N}^\alpha$ , для которой заметим, что

$$T_{\Gamma_N}^\alpha(y) = U_{\Lambda_m}^\alpha * T_{\Gamma_N}.$$

Тогда из неравенства Юнга-О’Нейла для пространств  $L_{pq^*}[0,1]^n$  имеем [8]

$$\|T_{\Gamma_N}^\alpha(y)\|_{L_{pq^*}} \leq c \|U_{\Lambda_m}^\alpha\|_{L_{h\theta^*}} \|T_{\Gamma_N}(x)\|_{L_{rd^*}}.$$

Рассмотрим  $U_{\Lambda_m}^\alpha(x) = \sum_{k \in \Lambda_m} c_k \bar{k}^\alpha e^{2\pi i k x}$ . Пусть  $\theta^* = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ , где  $\frac{1}{h_i} = (1 + \frac{1}{p_i} - \frac{1}{r_i})$ . Зафиксируем  $\nu \in \mathbb{R}^n : 1 < \nu < h$ .

Для оценки  $\|U_{\Lambda_m}^\alpha\|_{h\theta^*}$  воспользуемся леммой 4:

$$\begin{aligned} \|U_{\Lambda_m}^\alpha\|_{h\theta^*} &\leq c \left( \sum_{k_{j_n}=0}^{\infty} \dots \left( \sum_{k_{j_1}=0}^{\infty} \left( \prod_{j=1}^n 2^{\frac{1}{\nu_j} - \frac{1}{h_j} k_j} \|\Delta_k U_{\Lambda_m}^\alpha\|_\nu \right)^{\theta_{j_1}} \right)^{\frac{\theta_{j_2}}{\theta_{j_1}}} \dots \right)^{\frac{1}{\theta_{j_n}}} \sim \\ &\sim c \left( \sum_{k_{j_n}=0}^m \dots \left( \sum_{k_{j_1}=0}^{m-k_{j_2}-\dots-k_{j_n}} \left( \prod_{j=1}^n 2^{(\frac{1}{\nu_j} - \frac{1}{h_j} + \alpha_j + \frac{1}{\nu_j}) \nu_j} \right)^{\theta_{j_1}} \right)^{\frac{\theta_{j_2}}{\theta_{j_1}}} \dots \right)^{\frac{1}{\theta_{j_n}}} = \\ &= c \left( \sum_{k_{j_n}=0}^m \dots \left( \sum_{k_{j_1}=0}^{m-k_{j_2}-\dots-k_{j_n}} \left( \prod_{j=1}^n 2^{\beta_j k_j} \right)^{\theta_{j_1}} \right)^{\frac{\theta_{j_2}}{\theta_{j_1}}} \dots \right)^{\frac{1}{\theta_{j_n}}}, \end{aligned}$$

где  $\beta_j = \alpha - \frac{1}{p_j} + \frac{1}{r_j}$ .

Далее, применив к величине  $\|U_{\Lambda_m}^\alpha\|_{h\theta^*}$  преобразования, аналогичные в теореме 1, получим следующую оценку:

при  $\beta > 0$

$$\|U_{\Lambda_m}^\alpha\|_{h\theta^*} \leq N^\beta (\ln N)^{(\sum_{j \in A} \frac{1}{\theta_j}) - \frac{1}{\theta_{j_{k_0}}}},$$

при  $\beta = 0$

$$\|U_{\Lambda_m}^\alpha\|_{h\theta^*} \leq N^{\sum_{j \in A} \frac{1}{\theta_j}}.$$

Теорема доказана.

Форма константы в неравенствах (7), (9) позволяет видеть „что за что“ отвечает. Так, логарифмическая компонента связана со слабыми параметрами, а именно: с теми слабыми, которые соответствуют сильным параметрам, реализующим  $\max(\alpha_i - \frac{1}{p_i})$ . Здесь также учитывается порядок интегрирования так, что из  $\sum_{i \in A} \frac{1}{q_i}$  вычитается компонента  $\frac{1}{q_{i_0}}$ , которая впервые встречается при интегрировании в норме  $\|\cdot\|_{L_{pq^*}}$ , то есть учитывается параметр  $*$  =  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ .

Данное наблюдение было невозможно увидеть в неравенстве (3)  
Далее, если рассматривать неравенство (2) в классе Лоренца, то имеем

$$\|T_n\|_{L_{qr}} \leq cn^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|T_n\|_{L_{pr}}. \quad (10)$$

Как видим, слабые параметры не играют никакой роли в неравенствах разных метрик Никольского. В то же время в неравенстве (4) слабые параметры вносят существенный вклад, что принципиально отличает это неравенство от классического случая.

### Цитированная литература

1. **Никольский С.М.** // Труды Матем. института АН СССР. 1951. Т.38. С. 244 – 278.
2. **Темляков В.Н.** // Труды МИАН СССР. 1986. Т.178. С. 1 – 112.
3. **А.Р. Blozinsky** Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms. // Trans.Amer.Math.Soc., 1981.
4. **Нурсултанов Е.Д.** // Известия РАН. 2000. Т.64, №1. С. 95 – 122.
5. **Нурсултанов Е.Д.** // Доклады РАН. 2004. Т.394, №1. С. 1 – 4.
6. **Нурсултанов Е.Д.** // Труды МИРАН. 2006. Т.255. С. 1 – 18.
7. **Нурсултанов Е.Д.** // Математический сборник. 1998. Т.189, №3. С. 83 – 102.
8. **Дарбаева Д.К., Нурсултанов Е.Д.** // Доклады межд. конф. „Конференция молодых ученых ЕНУ им. Л.Н.Гумилева“, 2006.

*Поступила в редакцию 17.10.2007 г.*

УДК 517.929

## О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ СИЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш., Шоманбаева М.Т.

Институт математики МОН РК  
160012 Шымкент пр.Тауке-Хана, 5 mtshomanbaeva@mail.ru

В настоящей работе получены условия существования и единственности сильного решения периодической задачи для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом и с младшим членом:

$$Lu = u_t(x, T - t) + u_{xx}(x, t) + au_x(x, t) = f(x, t),$$

$$u|_{t=0} = 0, u|_{x=0} - u|_{x=l} = u_x|_{x=0} - u_x|_{x=l} = 0,$$

где  $f(x, t) \in L^2(\Omega)$  и  $a - \text{const}$ .

**1. Постановка задачи.** Пусть  $\Omega \subset R^2$  - прямоугольник, ограниченный отрезками:  $AB : 0 \leq t \leq T, x = 0$ ;  $BC : 0 \leq x \leq l, t = T$ ;  $CD : 0 \leq t \leq T, x = l$ ;  $DA : 0 \leq x \leq l, t = 0$ .

Через  $C^{2,1}(\Omega)$  обозначим множество функций  $u(x, t)$ , дважды непрерывно дифференцируемых по  $x$  и единожды непрерывно дифференцируемых по  $t$  в области  $\Omega$ . Под границей области  $\Omega$  понимаем совокупность отрезков  $\Gamma = AB \cup AD \cup CD$ .

**Периодическая задача СМЧ.** Найти решение уравнения

$$Lu = u_t(x, T - t) + u_{xx}(x, t) + au_x(x, t) = f(x, t) \tag{1}$$

с условиями

$$u|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{x=0} - u|_{x=l} = u_x|_{x=0} - u_x|_{x=l} = 0, \tag{3}$$

где  $f(x, t) \in L^2(\Omega)$  и  $a - \text{const}$ .

**Определение 1.** Под регулярным решением задачи (1) – (3) будем понимать функцию  $u(x, t) \in C^{2,1}(\Omega) \cap C^{1,0}(\bar{\Omega})$ ,  $n=1,2,3,\dots$ , обращающую в тождество уравнение (1) и краевые условия (2) – (3).

---

Keywords: Heat conductivity equation, deviating argument.

2000 Mathematics Subject Classification: 42A16

© Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш., Шоманбаева М.Т., 2007.

**Определение 2.** Функцию  $u(x, t) \in L^2(\Omega)$  назовем сильным решением задачи (1) – (3), если существует последовательность функций  $\{u_n\} \in C^{2,1}(\Omega) \cap C^{1,0}(\bar{\Omega})$ , удовлетворяющая краевым условиям задачи такая, что  $\{u_n\}$  и  $\{Lu_n\}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , сходятся в  $L^2(\Omega)$  соответственно к  $u$  и  $f$ .

**Определение 3.** Краевая задача (1) – (3) называется сильно разрешимой, если сильное решение задачи существует для любой правой части  $f(x, t) \in L^2(\Omega)$  и единственно [1].

Целью настоящей работы является получение условий существования сильного решения краевой задачи (1) – (3) в пространстве  $L^2(\Omega)$ .

## 2. О спектре периодической задачи с младшим членом.

### 2.1. О симметричности.

**Лемма 2.1.** Оператор  $L$ , соответствующий краевой задаче (1) – (2), симметрический тогда и только тогда, когда  $a + \bar{a} = 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $u, v \in D(L)$ , т.е.  $u, v \in C^{2,1}(\Omega)$  и

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} - u|_{x=l} = u_x|_{x=0} - u_x|_{x=l} = 0;$$

$$v|_{t=0} = v|_{x=0} - v|_{x=l} = v_x|_{x=0} - v_x|_{x=l} = 0.$$

Тогда имеют место равенства

$$(Lu, v) = \int_0^l \int_0^T [u_t(x, T-t) + u_{xx}(x, t) + au_x(x, t)] \cdot \overline{v(x, t)} dx dt = J_1 + J_2 + J_3,$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^l \int_0^T u_t(x, T-t) \cdot \overline{v(x, t)} dx dt = \int_0^l dx \left[ - \int_0^T \overline{v(x, t)} du(x, T-t) \right] = \\ &= \int_0^l dx \left[ - \overline{v(x, t)} \cdot u(x, T-t) \Big|_0^T + \int_0^T [u(x, T-t) \dot{\overline{v}}(x, t) dt] \right] = \int_0^l \int_0^T u(x, t) \overline{\dot{v}(x, T-t)} dt dx, \\ J_2 &= \int_0^l \int_0^T u_{xx}(x, t) \cdot \overline{v(x, t)} dx dt = \int_0^T dt \int_0^l \overline{v(x, t)} du_x(x, t) = \\ &= \int_0^T \left[ u_x(x, t) \overline{v(x, t)} \Big|_0^l - \int_0^l \overline{v_x(x, t)} u_x(x, t) dx \right] dt = - \int_0^T \int_0^l \overline{v_x(x, t)} u_x(x, t) dx dt = \\ &= \int_0^T \left[ - \overline{v_x(x, t)} u(x, t) \Big|_0^l + \int_0^l \overline{v_{xx}(x, t)} u(x, t) dx \right] dt = \int_0^T \int_0^l u(x, t) \overline{v_{xx}(x, t)} dx dt, \\ J_3 &= \int_0^l \int_0^T au_x(x, t) \cdot \overline{v(x, t)} dx dt = \int_0^T dt \left[ \overline{av(x, t)} u(x, t) \Big|_0^l - \int_0^l u(x, t) \overline{av_x(x, t)} dx \right] = \\ &= - \int_0^T \int_0^l u(x, t) \overline{av_x(x, t)} dt dx = \int_0^T \int_0^l u(x, t) [-\overline{av_x(x, t)}] dt dx. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(Lu, v) = \int_0^l \int_0^T u(x, t) \cdot [\dot{\overline{v}}(x, T-t) + \overline{v_{xx}(x, t)} - \overline{av_x(x, t)}] = (u, L^*v).$$

Поэтому для симметричности оператора необходимо и достаточно выполнение равенства  $a = -\bar{a}$ ,  $a + \bar{a} = 0$ , т.е. чтобы величина  $a$  была чисто мнимой ( $Re\ a = 0$ ).

## 2.2. О базисности собственных векторов.

Рассмотрим спектральную задачу, соответствующую краевой задаче (1) – (3):

$$Lu = u_t(x, T - t) + u_{xx}(x, t) + au_x(x, t) = \lambda u(x, t), \quad (4)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad (5)$$

$$u|_{x=0} - u|_{x=l} = u_x|_{x=0} - u_x|_{x=l} = 0. \quad (6)$$

Для решения этой задачи воспользуемся методом разделения переменных. Полагая

$$u(x, t) = v(t) \cdot w(x), \quad (7)$$

имеем

$$u|_{t=0} = v(0) \cdot w(x) = 0 \Rightarrow v(0) = 0;$$

$$u|_{x=0} - u|_{x=l} = v(t) \cdot (w(0) - w(l)) = 0 \Rightarrow w(0) - w(l) = 0;$$

$$u_x|_{x=0} - u_x|_{x=l} = v(t) \cdot (w'(0) - w'(l)) = 0 \Rightarrow w'(0) - w'(l) = 0.$$

Подставив (7) в уравнение (4), получим

$$\dot{v}(T - t) \cdot w(x) + v(t) \cdot w''(x) + av(t)w'(x) = \lambda \cdot v(t) \cdot w(x),$$

$$\dot{v}(T - t) \cdot w(x) = v(t) \cdot [\lambda \cdot w(x) - w''(x) - a \cdot w'(x)],$$

$$\frac{\dot{v}(T - t)}{v(t)} = \frac{\lambda \cdot w(x) - w''(x) - a \cdot w'(x)}{w(x)} = \mu,$$

где  $\mu$  – некоторая постоянная. Таким образом, если решение задачи (4) – (6) имеет вид (7), то функции  $v(t)$  и  $w(x)$  являются решениями спектральных задач:

$$a) \begin{cases} -w''(x) - aw'(x) = \gamma \cdot w(x), \\ w(0) - w(l) = w'(0) - w'(l) = 0, \end{cases}$$

где  $\gamma = \mu - \lambda$ ,

$$b) \begin{cases} \dot{v}(T - t) = \mu \cdot v(t), \\ v(0) = 0, \end{cases}$$

где  $\mu$  – спектральный параметр.

### Лемма 2.2. Спектральная задача

$$\begin{cases} -w''(x) - aw'(x) = \gamma \cdot w(x), \\ w(0) - w(l) = w'(0) - w'(l) = 0, \end{cases} \quad (8), (9)$$

имеет бесконечное множество собственных значений:

$$\gamma_m = \left(\frac{2m\pi}{l}\right)^2 - \frac{2m\pi i}{l}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (10)$$

и соответствующих им собственных функций

$$w_n(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} e^{\frac{2m\pi i}{l}x}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (11)$$

которые образуют ортонормированный базис пространства  $L^2(0, l)$ .

**Доказательство.** Решение уравнения (8) ищем в виде  $w_m = A_m \cdot e^{\frac{2m\pi i}{l}x}$ , где  $A_m$  – нормированный множитель. Подставив это выражение в уравнение (8), имеем

$$A_m \left( \frac{2m\pi}{l} \right)^2 \cdot e^{\frac{2m\pi i}{l}x} - a \frac{2m\pi i}{l} \cdot e^{\frac{2m\pi i}{l}x} A_m = \gamma A_m e^{\frac{2m\pi i}{l}x}.$$

Сократив это равенство на  $A_m e^{\frac{2m\pi i}{l}x}$ , получим

$$\gamma = \left( \frac{2m\pi}{l} \right)^2 - a \frac{2m\pi i}{l}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Коэффициенты  $A_m$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , найдем из условия нормировки

$$\begin{aligned} \int_0^l |w(x)|^2 dx &= \int_0^l w(x) \cdot \overline{w(x)} dx = |A_m|^2 \int_0^l e^{\frac{2m\pi i}{l}x} \cdot e^{-\frac{2m\pi i}{l}x} dx = \\ &= |A_m|^2 \int_0^l 1 dx = l \cdot |A_m|^2 = 1, \Rightarrow A_m = \frac{1}{\sqrt{l}}. \end{aligned}$$

Покажем ортогональность и полноту полученной системы собственных функций  $\{w_x(x)\}$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

**Ортогональность.**

$$\begin{aligned} (w_m, w_n) &= \frac{1}{l} \int_0^l e^{\frac{2m\pi i}{l}x} \cdot e^{-\frac{2n\pi i}{l}x} dx = \frac{1}{l} \int_0^l e^{\frac{2\pi i(m-n)}{l}x} dx = \\ &= \frac{1}{l} \frac{l}{2\pi i(m-n)} e^{\frac{2\pi i(m-n)}{l}x} \Big|_0^l = \frac{e^{2\pi i(m-n)} - 1}{2\pi i(m-n)} = 0, \quad m \neq n. \end{aligned}$$

**Полнота.** Пусть для некоторой функции  $f(x)$  из  $L^2(0, l)$  имеет место равенство

$$\int_0^l f(x) w_m(x) dx = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_0^l f(x) e^{\frac{2m\pi i}{l}x} dx = 0, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Полагая  $t = \frac{2\pi}{l}x$ , сделаем замену переменных в этом интеграле, тогда

$$\int_0^{2\pi} f\left(\frac{tl}{2\pi}\right) e^{imt} dt = 0, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

В силу полноты системы  $\{e^{imt}\}$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , в пространстве  $L^2(0, 2\pi)$  имеем

$$f\left(\frac{tl}{2\pi}\right) = 0$$

почти всюду в  $(0, 2\pi)$ , тогда  $f(x) = 0$  почти всюду в  $(0, l)$ .

**Лемма 2.3.** *Спектральная задача*

$$\begin{cases} \dot{v}(T-t) = \mu \cdot v(t), \\ v(0) = 0 \end{cases} \quad (12), (13)$$

имеет бесконечное множество собственных значений

$$\mu = (-1)^n \left( n + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\pi}{T}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

и соответствующих им собственных функций

$$v_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{T}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (15)$$

которые образуют ортонормированный базис пространства  $L^2(0, T)$ .

**Лемма 2.4.** Если система функций  $\{\varphi_m(x)\}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , образует ортонормированный базис пространства  $L^2(0, l)$ , а система функций  $\{\psi_n(t)\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , образует ортонормированный базис пространства  $L^2(0, T)$ , то система функций  $u_{mn}(x, t) = \varphi_m(x) \cdot \psi_n(t)$ ,  $m, n = 1, 2, \dots$ , образует базис пространства  $L^2(\Omega)$ , где  $\Omega = [0, l] \times [0, T]$ .

Из формул (7), (11), (15) следует, что собственными функциями спектральной задачи (4)+(6) являются функции

$$u_{mn}(x, t) = \sqrt{\frac{2}{Tl}} \exp \left( \frac{2m\pi i}{l} x \right) \cdot \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{T}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

которые в силу леммы 2.4 образуют ортонормированный базис пространства  $L^2(\Omega)$ , где  $\Omega = [0, l] \times [0, T]$ . Собственные значения найдем по формуле  $\gamma = \mu - \lambda$ :  $\lambda = \mu - \gamma$ ,

$$\lambda_{mn} = \mu_n - \gamma_m = (-1)^n \left( n + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\pi}{T} - \left( \frac{2m\pi}{l} \right)^2 + a \frac{2m\pi i}{l}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Мы доказали следующую

**Теорема 2.1.** Спектральная задача

$$Lu = u_t(x, T - t) + u_{xx}(x, t) + au_x(x, t) = \lambda u(x, t),$$

$$u|_{t=0} = 0,$$

$$u|_{x=0} - u|_{x=l} = u_x|_{x=0} - u_x|_{x=l} = 0$$

имеет бесконечное множество собственных значений

$$\lambda_{mn} = \mu_n - \gamma_m = (-1)^n \left( n + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\pi}{T} - \left( \frac{2m\pi}{l} \right)^2 + a \frac{2m\pi i}{l}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

и соответствующих им собственных функций

$$u_{mn}(x, t) = \sqrt{\frac{2}{Tl}} \exp \left( \frac{2m\pi i}{l} x \right) \cdot \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{T}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

которые образуют ортонормированный базис пространства  $L^2(\Omega)$ , где  $\Omega = [0, l] \times [0, T]$ .

**3. О существовании и единственности сильного решения периодической задачи С.М.Ч.**

Рассмотрим линейный оператор, соответствующий краевой задаче (1) – (2):

$$Lu = u_t(x, T - t) + u_{xx}(x, t) + au_x(x, t),$$

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} - u|_{x=l} = u_x|_{x=0} - u_x|_{x=l} = 0.$$

Допустим, что при некотором  $u \in D(L)$ ,  $u \neq 0$ , имеет место равенство  $Lu = 0$ . Тогда имеет место равенство

$$0 = (Lu, u_{mn}) = (u, L^*u_{mn}) = (u, \overline{\lambda_{mn}}u_{mn}) = \lambda_{mn}(u, u_{mn}).$$

Если  $\lambda_{mn} \neq 0$ , то в силу полноты системы  $\{u_{mn}\}$  получим  $u = 0$ , что противоречит нашему предположению. Поэтому при некотором значении индексов имеет место равенство  $\lambda_{mn} = 0$ . Обратное, если среди собственных значений есть нулевое собственное значение, то при некотором  $u \neq 0$  имеет место равенство  $Lu = 0$ . Для существования обратного оператора  $L^{-1}$  необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство  $\ker L = 0$ . Для выполнения этого условия необходимо и достаточно выполнение условия  $\lambda_{mn} \neq 0 \forall m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots$ . Очевидно, что  $\lambda_{mn} \neq 0$  при  $\operatorname{Re} a \neq 0$ . Если  $\operatorname{Re} a = 0$ , то  $a = i \cdot \operatorname{Im} a$ , тогда

$$\lambda_{mn} = (-1)^n \left( n + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\pi}{T} - \left( \frac{2m\pi}{l} \right)^2 - \frac{2m\pi}{l} \cdot \operatorname{Im} a.$$

Следовательно, в этом случае  $\lambda_{mn} \neq 0$  тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Im} a \neq (-1)^n \left( n + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\pi l}{2m\pi T} - \frac{2m\pi}{l} \quad \forall m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots,$$

или после сокращения на  $\pi$

$$\operatorname{Im} a \neq (-1)^n \left( n + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{l}{2mT} - \frac{2m\pi}{l} \quad \forall m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots$$

Эти условия можно выразить по-другому, заметив, что  $\lambda_{mn}$  – комплексное число, имеем

$$|\lambda_{mn}|^2 = \left[ (-1)^n \left( n + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\pi}{T} - \left( \frac{2m\pi}{l} \right)^2 - \frac{2m\pi}{l} \cdot \operatorname{Im} a \right]^2 + \left( \frac{2m\pi}{l} \cdot \operatorname{Re} a \right)^2 \neq 0,$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots$$

При выполнении этого условия оператор  $L$  взаимно однозначно отображает множество  $D(L)$  на  $R(L)$ , но об ограниченности обратного оператора речь не идет. Теперь построим обратный оператор  $L^{-1}$ . Пусть  $u \in D(L)$ ,  $f \in R(L)$  и имеет место равенство  $Lu = f$ . Разложив в ряд Фурье по системе  $\{u_{mn}\}$  левую и правую части этого равенства, имеем [2]

$$\begin{aligned} Lu &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (Lu, u_{mn}) \cdot u_{mn}(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (u, L^*u_{mn}) \cdot u_{mn}(x, t) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (u, \overline{\lambda_{mn}}u_{mn}) \cdot u_{mn}(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_{mn}(u, u_{mn}) \cdot u_{mn}(x, t). \\ f(x, t) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (f, u_{mn}) \cdot u_{mn}(x, t). \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты этих разложений, получим

$$(u, u_{mn}) = \frac{(f, u_{mn})}{\lambda_{mn}}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots$$

Следовательно,

$$u(x, t) = L^{-1}f(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(f, u_{mn})}{\lambda_{mn}} \cdot u_{mn}(x, t).$$

Покажем, что это есть сильное решение. Пусть

$$f_{mn}(x, t) = \sum_{-m}^m \sum_{l=0}^n (f, u_{kl}) \cdot u_{kl}(x, t).$$

– частичная сумма ряда Фурье функции  $f(x, t)$ , тогда

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} f_{mn}(x, t) = f(x, t).$$

Этой правой части соответствует регулярное решение

$$u_{mn}(x, t) = \sum_{-m}^m \sum_{l=0}^n \frac{(f, u_{kl})}{\lambda_{kl}} \cdot u_{kl}(x, t),$$

причем

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} u_{mn}(x, t) = u(x, t).$$

Следовательно,  $u_{mn}(x, t) \rightarrow u(x, t)$  и  $Lu_{mn} = f_{mn} \rightarrow f$ , тогда по определению  $u(x, t)$  – сильное решение краевой задачи (1) – (2).

Для сильной разрешимости необходимо и достаточно выполнение условия  $R(\bar{L}) = L_2(\Omega)$ , т.е. область значения оператора  $\bar{L}$  совпадает со всем пространством  $L_2(\Omega)$  (разумеется, при существовании  $L^{-1}$ ).

**Теорема 3.1.** Для существования и единственности сильного решения краевой задачи

$$Lu = u_t(x, T - t) + u_{xx}(x, t) + a \cdot u_x(x, t) = f(x, t),$$

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} - u|_{x=l} = u_x|_{x=0} - u_x|_{x=l} = 0,$$

где  $f(x, t) \in L_2(\Omega)$  и  $a = \text{const}$ , необходимо и достаточно выполнение условия

$$|\lambda_{mn}|^2 = \left[ (-1)^n \left( n + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\pi}{T} - \left( \frac{2m\pi}{l} \right)^2 - \frac{2m\pi}{l} \cdot \text{Im}a \right]^2 + \left( \frac{2m\pi}{l} \cdot \text{Re}a \right)^2 \neq 0, \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots$$

При выполнении этого условия сильное решение задачи существует и имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(f, u_{mn})}{\lambda_{mn}} \cdot u_{mn}(x, t)$$

для всех  $f(x, t) \in L_2(\Omega)$ , удовлетворяющих условию

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{(f, u_{mn})}{\lambda_{mn}} \right|^2 < +\infty,$$

где

$$\lambda_{mn} = (-1)^n \left( n + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\pi}{T} - \left( \frac{2m\pi}{l} \right)^2 + \frac{2m\pi i}{l} \cdot a; \\ u_{mn}(x, t) = \sqrt{\frac{2}{Tl}} \exp\left(\frac{2m\pi i}{l} x\right) \cdot \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi t}{T}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots$$

### Цитированная литература

1. **Кальменов Т.Ш.** Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Шымкент, 1993. С. 28 – 56.
2. **Шилов Г.Е.** Математический анализ. Специальный курс. М., 1960. С. 187 – 189.

*Поступила в редакцию 18.10.2006г.*

УДК 523.98, 530.182

## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОГО ФОРМАЛИЗМА В ЗАДАЧАХ СЕГМЕНТАЦИИ И ТЕКСТУРНОГО АНАЛИЗА ДАННЫХ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

КРУГЛУН О. А., МАКАРЕНКО И. Н.

Институт Математики МОиН РК  
050010 г. Алматы ул. Пушкина, 125 chaos@math.kz

Работа посвящена разработке новых и модификации известных методов обработки данных дистанционного зондирования на основе фрактальной геометрии и мультифрактального формализма. Приводятся мультифрактальные описания реальных изображений для отдельных участков территории Казахстана, перспективных для применения технологий геологической разведки.

**Введение.** В последнее время применение космических технологий становится основным практическим и научным методом комплексного исследования Земных ландшафтов. Методы зондирования Земли из космоса широко используются при описании и классификации региональных структур, исследовании вулканической деятельности, мониторинге разлива нефти на поверхности водоемов, составлении схем линеаментов, поиске признаков минерализации, оценке трещиноватости льдов, составлении и обновлении геологических карт, обнаружении и анализе локальных и глобальных геоинформационных аномалий.

К настоящему моменту практически вся поверхность земной суши (и значительная часть водной поверхности) зафиксирована космосъемкой при различных условиях наблюдения (времени года, времени суток, облачности и т. д.) Пространственное разрешение современных сенсорных приемников космических аппаратов (КА) позволяет решать задачи, выполнимые ранее только дорогостоящими методами аэрофотосъемки или полевыми исследованиями.

Данные дистанционного зондирования (ДДЗ) получают с помощью КА в виде цифровых изображений в различных участках спектра. Современная мультиспектральная космосъемка дает уникальную возможность "видеть" один и тот же участок поверхности Земли в разных спектральных диапазонах от ультрафиолетового до теплового и радиоволн. Такие многоканальные снимки называют *гиперспектральными*.

Гиперспектральные снимки ландшафтов представляют собой высокоразмерные данные. Так, типичный гиперспектральный снимок даже небольшого размера, состоящий, например, из  $10^3 \times 10^3$  пикселей, содержит в каждом пикселе до 300 копий (по числу каналов), каждая

---

Keywords: *Remote sensing image, image processing, multifractal analysis*

2000 Mathematics Subject Classification: 37N30

© Круглун О. А., Макаренко И. Н., 2007.

из которых кодирует контраст 256 градациями уровней серого. Очевидно, что моделирование таких данных представляет собой очень сложную задачу. Для анализа "облака" точек в пространстве признаков удобно использовать методы алгебраической топологии (комплексы Чеха, Рипса и гомологии на них). Попытка такого анализа для фрагментов  $3 \times 3$  пиксела в высококонтрастных изображениях привела к неожиданному результату: двумерные многообразия, локально аппроксимирующие такие данные, имеют топологию бутылки Клейна [1].

Кроме "проклятия размерности" обработка ДДЗ встречается и с другой трудностью. В последние годы удалось получить изображения с очень высоким пространственным разрешением; их называют High resolution (HR) images. Современные сенсоры КА позволяют достигать таких разрешений, как 2,5 м ("Spot"), 1 м ("Ikonos") или даже 0,7 м ("Quick Bird"). Такие изображения содержат качественно иную информацию о земных ландшафтах и их географических связях. Теперь стали доступны как мелкие объекты такие, как приусадебные участки, улицы, так и точные контуры больших объектов — текстурные поля. Поэтому автоматические методы для выделения таких объектов вызывают огромный интерес. Однако, HR-изображения демонстрируют высокую гетерогенность (неоднородность), и стандартные методы, применяемые для анализа и классификации данных, становятся все менее эффективными. Это обстоятельство привело к развитию новых подходов к обработке изображений, адаптированных к HR-снямкам (см., например, [2–5]).

**Сегментация изображений.** Первым шагом анализа изображений является выделение интересующих нас объектов из фона. Процедуры, с помощью которых можно проводить такое выделение, называют *сегментацией*. Сегментация крайне важна в таких областях, как рентгенография, дистанционное зондирование (ГИС — Geographic Information System), кодирование источника (при передаче образов) и т. п.

В последние десятилетия задачам сегментации уделяется много внимания и к настоящему моменту существует множество подходов к решению этой проблемы [6–8]. Однако, для многих случаев она все еще остается нерешенной, как, например, для сложных текстурных изображений. Во-первых, не существует универсальной техники сегментации, которая подходила бы для всех типов изображений, и, во-вторых, ни один из существующих способов сегментации не является идеальным. Выбор той или иной техники зависит от конкретной задачи, которую решает исследователь при анализе изображения.

Математически проблема сегментации формулируется следующим образом [9]. Для ограниченной гладкой и открытой области  $\Omega$  на изображении  $I \in Z \times Z$  разыскивается замкнутое "множество ребер"  $\Gamma$  и все компоненты связности  $\{\Omega_i\} \in \Omega \setminus \Gamma$ ,  $i = 1, 2, \dots, K$  такие, что подходящая визуальная (текстурная или фотометрическая) мера  $\mu : I \rightarrow R$  является гладкой, либо однородной на каждом  $\Omega_i$ , но терпит разрыв на  $\Gamma$ . Каждый фрагмент  $I_i = I|_{\Omega_i}$  называют паттерном на носителе  $\Omega_i$ .

Чаще всего имеют дело с так называемой *жесткой* сегментацией, т. е. разбиением  $\Omega$ , соответствующим *фиксированному* множеству  $\Gamma$ . На выходе такой схемы получаются непересекающиеся паттерны с носителями из  $\{\Omega_i\}$ . Формально жесткая сегментация соответствует разбиению единицы

$$\mathbf{I}_{\Omega}(x) = \sum_{i=1}^K \mathbf{I}_{\Omega_i}(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega,$$

где  $\mathbf{I}_A(x)$  — индикаторная функция множества  $A$ . На практике редко удается реализовать случай непересекающихся паттернов:  $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \forall i \neq j$ . Поэтому предпочитают использовать *мягкую* сегментацию с мягким разбиением единицы

$$\mathbf{I}_{\Omega}(x) = \sum_{i=1}^K p_i(x),$$

где  $p_i$  — непрерывные или гладкие функции, которые можно рассматривать как функции принадлежности для нечеткого аналога  $\mathbf{I}_\Omega(x)$ .

В стохастических подходах к моделированию изображений мягкая сегментация связана с так называемыми моделями *Гауссовских смесей* [10, 11], которые обобщают известную модель *Mumford–Shah* [12]. В ней неизвестный паттерн  $u$  находится из решения вариационной задачи с функционалом

$$\min_{\Gamma, u} E(u, \Gamma | I) = \mathcal{L}(\Gamma) + \alpha \int_{\Omega \setminus \Gamma} |\nabla u|^2 dx_1 \wedge dx_2 + \lambda \int_{\Omega} (u - I)^2 dx_1 \wedge dx_2,$$

где  $\mathcal{L}(\Gamma)$  — длина ребра  $\Gamma$ .

Предположим, что  $I$  допускает разложение на  $K$  паттернов:  $\omega = 1, \omega = 2, \dots, \omega = K$ , где переменная  $\omega$  нумерует паттерны и  $\omega(x)$  является случайной переменной для каждого пиксела  $x \in \Omega$ . В этом случае  $p_i(x) = \text{Prob}[\omega(x) = i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, K$ . Теперь в каждом пикселе могут присутствовать все паттерны, но с разной вероятностью.

Используя принцип *Максимального правдоподобия*, мягкую сегментацию легко свести к жесткой. В модели смеси полагают, что каждый паттерн можно представить Гауссовскими полями  $u_1, u_2, \dots, u_K$  так, что для данного пиксела  $(I|_{\Omega}(x) = i) \sim \mathcal{N}(u_i(x), \sigma^2)$ , где  $\mathcal{N}$  — нормальное распределение.

В рамках этих представлений задача сегментации сводится к вариационной задаче для обобщенного функционала *Mumford–Shah* [9], в котором учтены  $p_i$ . Эти модели до последнего времени с успехом применяются для сегментации изображений в разных областях знаний. Однако, приближение среднего поля, которое лежит в их основе, становится некорректным для цифровых изображений с высоким разрешением.

Суть трудностей заключается в следующем. При увеличении разрешения спектральная изменчивость внутри поля также возрастает и существенно влияет на точность дальнейшей классификации или схему сегментации [2]. Изображения содержат более сложные и детальные локальные текстуры; характерные объекты в изображениях (поля, здания, реки) уже не являются однородными. Поэтому классические подходы приводят к неполной, либо избыточной сегментации внутри отдельного кадра в зависимости от неоднородности рассматриваемых объектов и "затемняют" глобальную информацию. Как правило, требуется несколько шагов предварительной обработки, прежде чем могут быть использованы стандартные методы анализа изображений [5, 13].

На особенности статистики природных высококонтрастных изображений было указано в ряде работ (см., например, [14–16]). Гистограммы таких изображений, построенные в переменных

$$\ln |I(i, j)| \quad \text{vers.} \quad \langle \ln |I(i, j)| \rangle,$$

где  $I(i, j)$  — яркость пиксела в точке  $(i, j)$ , отличаются от распределения Гаусса [14]; они имеют вогнутые "хвосты" с асимметрией и эксцессом. Именно поэтому первоначальные усилия в моделировании изображений, которые ограничивались исследованием статистики второго порядка или оценками двухточечной корреляции, не привели к успеху. Так, например, Фурье спектры для природных ландшафтов демонстрируют асимптотически степенной закон, который фактически отражает свойство масштабной инвариантности. Это означает, что статистика второго порядка действительно фиксирует некоторые закономерности, однако большинство основных статистических структур остаются скрытыми.

Легко убедиться, что большинство корреляций в изображении остаются после "выбеливания", т. е. выравнивания спектра: контуры объектов после такой предобработки все еще легко распознаются [17]. Это приводит к заключению, что негауссовские статистические свойства краев являются крайне важными при описании природных изображений (гипотеза Мар-

ра [2, 17]); как раз на них опираются популярные в последнее время методы Марковского моделирования изображений [16, 18]. Упомянутое выше свойство масштабной инвариантности было подтверждено обнаружением мультифрактальных свойств HR-изображений [19, 20]. Именно поэтому мультифрактальный формализм, который создан для изучения произвольных сингулярных мер, позволяет успешно решать задачи классификации и распознавания образов для таких данных.

Основой этого подхода является выделение из снимка некоторых фундаментальных компонент — сингулярных многообразий. Эти компоненты обладают одинаковым показателем "интенсивности меры" и корректно учитывают локальные свойства различных участков изображения.

Далее мы приводим краткое описание современных методов мультифрактального формализма, адаптированных для анализа цифровых изображений. Результаты применения мультифрактального подхода к обработке данных дистанционного зондирования Земли показаны на примере HR-снимка одного из природных объектов Республики Казахстан — золоторудного месторождения Акбакай.

**Мультифрактальный формализм в применении к HR-изображениям.** Обозначим поле яркости цифрового черно-белого изображения как  $I(\vec{x})$ , где координаты пиксела принадлежат целочисленной решетке:  $\vec{x} \in Z^2$ . Ниже под точкой  $\vec{x}$ , в зависимости от контекста, понимаются либо координаты центра пиксела, либо сам пиксел. Удобнее работать с отклонениями от среднего значения уровня "серого подсчитанного для всего изображения, т. е. с глобальным полем контрастности, которое определяется как

$$c(\vec{x}) \equiv I(\vec{x}) - I_0, \quad (1)$$

где  $I_0$  — средняя яркость по всему изображению. Таким образом, среднее  $c(\vec{x})$  по всему изображению равно нулю.

Существуют несколько равнозначных путей для того, чтобы убедиться в существовании мультифрактальной структуры [21, 22]. Одна из возможностей состоит в построении меры  $\mu$  для каждого множества  $A$  [22, 23]. Ее можно определить через плотность  $d\mu(\vec{x})$  следующим образом:

$$\mu(A) \equiv \int_A d\mu(\vec{x}). \quad (2)$$

Мы будем определять меру, которая учитывает резкие вариации внутри каждой области изображения. Следуя [20, 24, 25], определим плотность меры как

$$d\mu(\vec{x}) \equiv |\nabla c|(\vec{x}) d\vec{x}, \quad (3)$$

где  $\nabla c$  — градиент контрастности (1), а знак модуля обеспечивает положительность меры. Заметим, что в некоторых случаях невозможно корректным образом определить значение градиента даже в классе обобщенных функций. Мера  $\mu$  дает представление о локальном распределении градиента  $c$  и его неоднородности в пределах изображения.

Можно использовать это обстоятельство для того, чтобы характеризовать содержание любого множества, включающего пиксел  $\vec{x}$ . Обозначим через  $B_r(\vec{x})$  шар радиуса  $r$  с центром в точке  $\vec{x}$ . Мера  $\mu$  является мультифрактальной, если для каждой точки  $\vec{x}$  в изображении ее можно охарактеризовать с помощью Гельдеровской экспоненты локальной особенности, как [26]

$$\mu(B_r(\vec{x})) = \alpha(\vec{x}) r^{d+h(\vec{x})} + o\left(r^{d+h(\vec{x})}\right), \quad (4)$$

где  $o\left(r^{d+h(\vec{x})}\right)$  обозначает члены более высокого порядка малости, чем  $r^{d+h(\vec{x})}$  для малых величин  $r$  и  $d = 2$  — топологическая размерность носителя изображения. Для мультифрактальной

меры уравнение (4) однозначно определяет коэффициент  $\alpha(\vec{x})$  и Гельдеровскую экспоненту  $h(\vec{x})$ : они могут быть получены с помощью линейной регрессии  $\log \mu(B_r(\vec{x}))$  versus  $\log r$ . Коэффициент  $\alpha(\vec{x})$  зависит от выбора метрики, используемой для определения шаров  $B_r$  и шкалы масштабов для  $r$ , и, таким образом, не несет никакой информации о масштабных зависимостях. Напротив, экспонента  $h(\vec{x})$  не зависит от метрики и дает всю информацию об эволюции при изменении масштаба  $r$ .

На практике получение оценок показателей сингулярности, основанное на формуле (4), весьма проблематично из-за невозможности непрерывного изменения величин радиуса  $r$  для дискретного изображения. Поэтому часто используют вейвлет проекцию меры [26, 27].

Пусть  $\psi$  — материнский вейвлет, удовлетворяющий условию допустимости [26]. Определим вейвлет преобразование  $T_\psi \mu(\vec{x}, r)$  меры  $\mu$  посредством функции  $\psi$  в точке  $\vec{x}$  и на масштабе  $r$ , как

$$T_\psi \mu(\vec{x}, r) \equiv \int d\mu(\vec{y}) \frac{1}{r^d} \psi\left(\frac{\vec{x} - \vec{y}}{r}\right). \quad (5)$$

Можно доказать [19–21], что для мультифрактальных мер вейвлет преобразования  $T_\psi \mu(\vec{x}, r)$  подчиняются степенным законам [26] в шаре  $B_r$ , а именно:

$$T_\psi \mu(\vec{x}, x) = \alpha_\psi(\vec{x}) r^{h(\vec{x})} + o\left(r^{h(\vec{x})}\right), \quad (6)$$

где  $h(\vec{x})$  то же самое, что в уравнении (4), а  $\alpha_\psi(\vec{x})$  зависит от выбора  $\psi$ . Теперь показатели степени  $h(\vec{x})$  получаются как наклон линейной регрессии  $\log T_\psi \mu(\vec{x}, x)$  versus  $\log r$ , где величины  $r$  меняются непрерывно.

Существование мультифрактальной меры влечет за собой определенную строгую иерархическую организацию в изображениях. Изображение расщепляется на различные компоненты мультифрактального разложения  $K_h$ , которые содержат точки, имеющие один и тот же показатель сингулярности  $h$ :

$$K_h = \{\vec{x} : h(\vec{x}) = h\}. \quad (7)$$

"Размер" каждой из компонент определяется ее Хаусдорфовой размерностью

$$f_H = \dim(K_h)$$

или мультифрактальным спектром.

В работах [2–4] для численных оценок размерности  $D(h) \approx f_H(h)$  компонент  $K_h$  предлагается использовать бокс-размерность, связанную с  $\log$ -Пуассоновским мультифракталом, для которого

$$D(h) = D_\infty + \frac{h - h_\infty}{\gamma} \left[ 1 - \log\left(\frac{h - h_\infty}{\gamma(2 - D_\infty)}\right) \right]. \quad (8)$$

Здесь  $\gamma = -\log\left[1 + h_\infty/(2 - D_\infty)\right]$ ,  $h_\infty$  — минимальное значение Гельдеровской экспоненты, полученное для изображения, и  $D_\infty = D(h_\infty)$ .

При использовании вейвлетов для оценки Гельдеровских экспонент величина  $h_\infty$  обычно отрицательна. В скейлинге для меры (4) показатель  $d + h_\infty = 2 + h_\infty \approx 1$ , так что  $D_\infty \approx 1$  соответствует точкам изображения, лежащим на контурах. Поэтому компоненты  $K_\infty = K_{h_\infty}$  называют *многообразием максимальной сингулярности (Most Singular Manifold — MSM)*. Оно играет большую роль в мультифрактальной реконструкции изображения [2, 30]: оказывается, что *MSM* является *скелетом изображения*, который позволяет восстановить исходную картину, если каждую точку скелета дополнить пикселями исходного изображения с помощью простого пропагатора [30]. Практически очевидно, что *MSM* является рафинированным вариантом мягкой сегментации.

Ниже приведены примеры использования мультифрактального подхода для реального изображения. Все вычисления проводились в пакете *MatLab 7.1* с использованием *Toolbox FracLab* [31].

**Численные эксперименты (золоторудное месторождение Акбакай).** Месторождение Акбакай — крупный золоторудный объект с высоким и средним содержанием благородного металла (18,5 г/т). Более 80% запасов промышленного золота концентрируется в шести пространственно сближенных кварцевых жилах, для которых характерны статистическое распределение и пространственная изменчивость концентраций. Схему размещения золото-сульфидно-кварцевых жил месторождения и структуру статистического распределения концентраций золота в жилах можно найти в работе [32].

На рис. 1 представлен HR-снимок района золоторудного месторождения Акбакай. Для обработки мы взяли изображение  $613 \times 613$  пикселей, поскольку инструмент *Toolbox FracLab* работает только с квадратными картами не слишком большого размера.

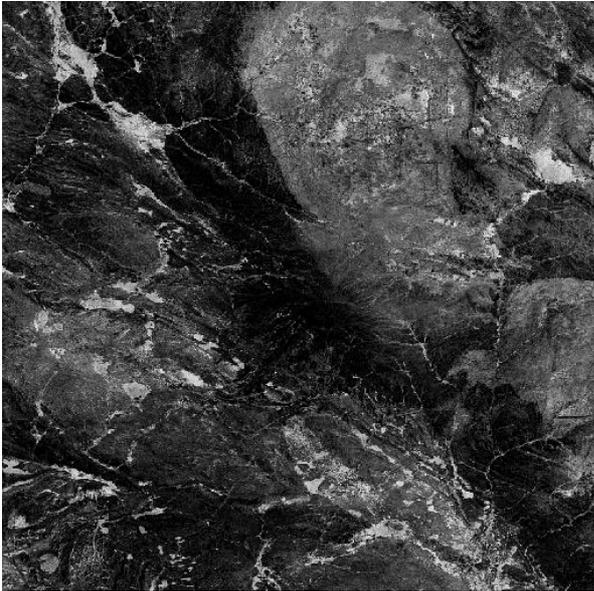


Рис. 1: Снимок района Акбакайского золоторудного месторождения.

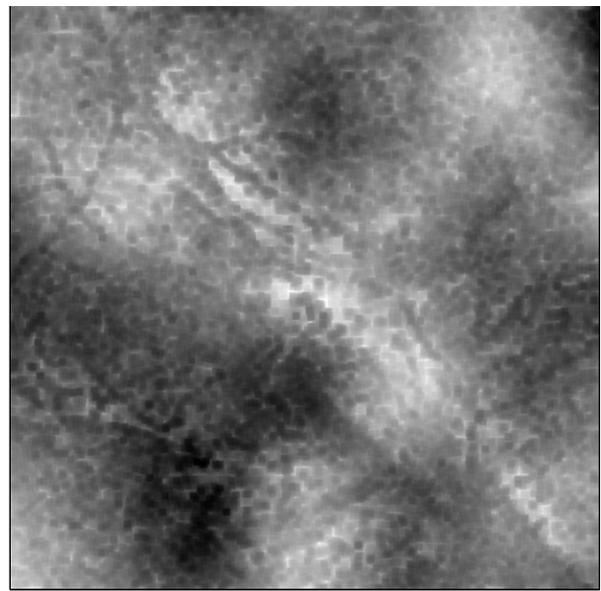


Рис. 2: Гельдеровские экспоненты для рис. 1 при  $k_2 = 5$ .

Для оценки Гельдеровской функции использовался метод обобщенных квадратичных вариаций. Формула для вариаций в точке  $t_i$  имеет следующий вид:

$$\nu_N(t_i) = \left\{ p_i : 0 \leq p_i \leq N - 2, \quad \left| t_i - \frac{p_i}{N^\delta} \right| \leq \frac{1}{N^\gamma} \right\}.$$

Свободными параметрами являлись величины  $\gamma$ ,  $\delta$ , принадлежащие интервалу  $[0, 1]$ , — параметры близости (соседства) в методе обобщенных квадратичных вариаций. Величины  $k_1$  и  $k_2$  связаны с выбором ширины окрестности  $\varepsilon$  при вычислении Гельдеровской экспоненты в каждой конкретной точке  $(x, y)$  изображения.

Для того, чтобы пояснить алгоритм вычисления Гельдеровской экспоненты в произвольной точке  $(x_0, y_0)$ , рассмотрим, к примеру, случай, когда  $k_2 = 10$ . В качестве точки выбираем один пиксел и постепенно расширяем окрестность этого пиксела от 1 до 10 единиц (пикселей). Каждой следующей окрестности приписываем некоторое число  $\tilde{I}$ . Таким числом может быть, например, разность между максимальной и минимальной интенсивностями (яркостями) пикселей в данной окрестности, или эта разность в квадрате. Затем строится график зависимости

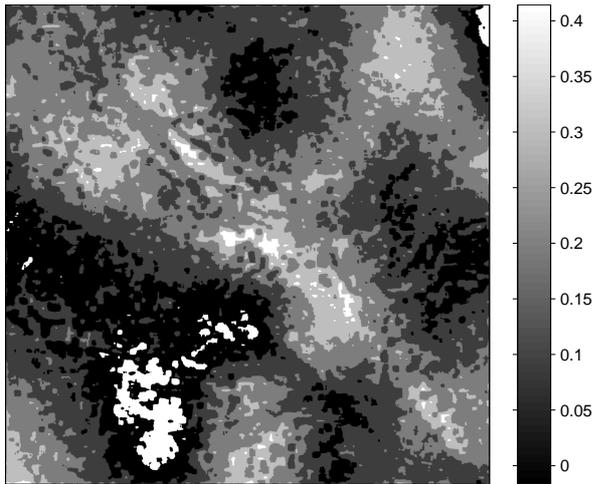


Рис. 3: Контурная карта Гельдеровских экспонент для Рис. 1 при  $k_2 = 5$ .

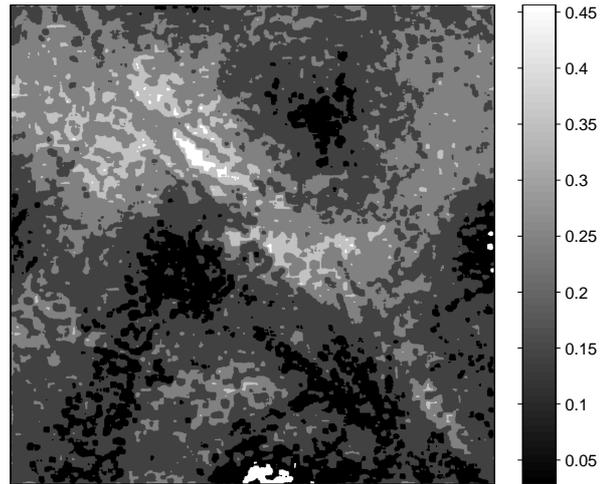


Рис. 4: Контурная карта Гельдеровских экспонент для Рис. 1 при  $k_2 = 10$ .

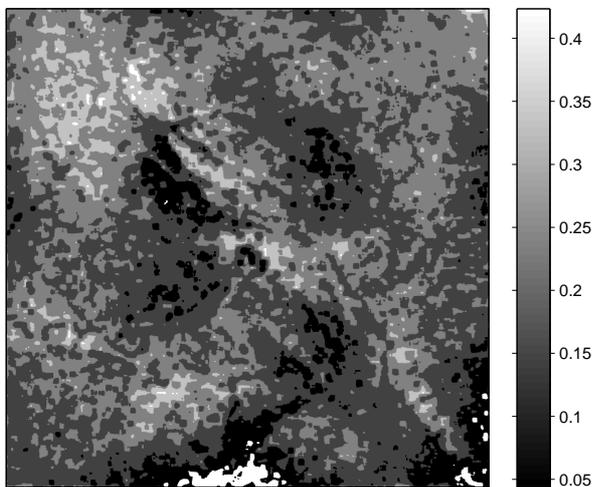


Рис. 5: Контурная карта Гельдеровских экспонент для Рис. 1 при  $k_2 = 20$ .

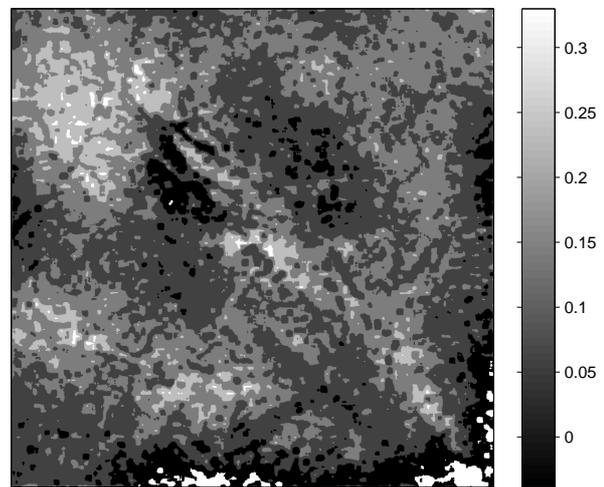


Рис. 6: Контурная карта Гельдеровских экспонент для Рис. 1 при  $k_2 = 30$ .

величины  $\tilde{I}$  от ширины окрестности  $\varepsilon$  в логарифмической шкале ( $\ln \tilde{I}$  в зависимости от  $\ln \varepsilon$ ). В нашем случае на графике мы будем иметь 10 точек, лежащих приблизительно на одной прямой. Наклон этой прямой дает значение показателя Гельдера  $h$  в точке  $(x_0, y_0)$ .

Мы проводили обработку снимка района Акбакайского месторождения (рис. 1), зафиксировав значения параметров следующим образом:  $\gamma = 0,8$ ,  $\delta = 1$ ,  $k_1 = 1$ . Параметр  $k_2$  при расчетах варьировался и принимал следующие значения: 5, 10, 20, 30, 50, 60. На рис. 2 приведен результат расчета Гельдеровских экспонент для случая  $k_2 = 5$ .

Более наглядное представление о выделении различных структур в исходном снимке с помощью вычисления показателя Гельдера дает построение множества линий уровня  $h$ , т. е. кривых, аппроксимирующих компоненты  $K_h$  в виде контурной карты. На рис. 3–8 показаны контурные карты Гельдеровских экспонент при различных значениях  $k_2$ . Белому цвету соответствуют максимальные значения показателя  $h$  и, следовательно, самые гладкие участки в изображении. Как видно из этих иллюстраций, с изменением ширины окрестности цветовая карта для Гельдеровских экспонент довольно сильно меняется.

Следует отметить, что одни и те же оттенки серого цвета на рис. 3–8 соответствуют разным

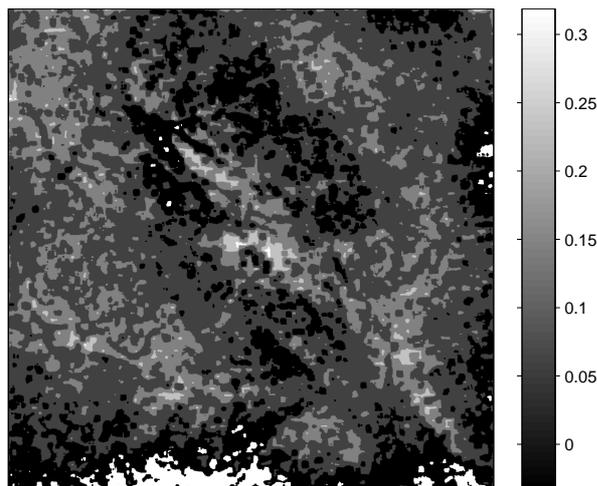


Рис. 7: Контурная карта Гельдеровских экспонент для Рис. 1 при  $k_2 = 50$ .

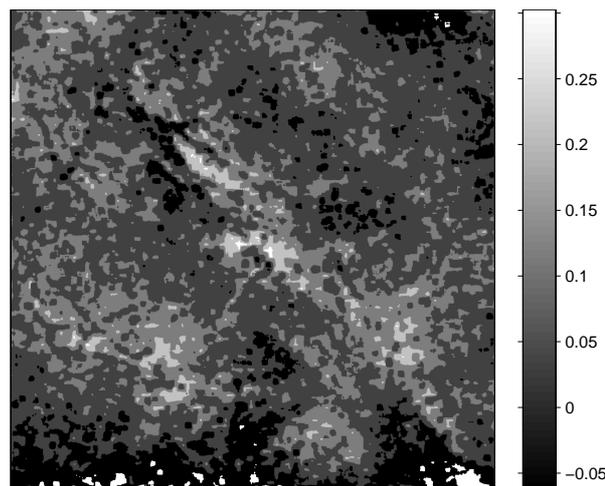


Рис. 8: Контурная карта Гельдеровских экспонент для Рис. 1 при  $k_2 = 60$ .

значениям Гельдеровских экспонент, поскольку при обработке снимка с разными значениями параметра  $k_2$  интервал изменения самих  $h$  также меняется. Поэтому рядом с каждой контурной картой приведена шкала соответствия интенсивности серого цвета и значений  $h$ .

Таким образом, изменяя ширину окрестности при вычислении показателя Гельдера, нам удалось получить карты (см. рис. 3–8), на которых явно выделяются участки различной гладкости, соответствующие выходу различных геологических пород и особенностей рельефа, т. е. сегментации исходного снимка (рис. 1).

Совершенно очевидно, что набор полученных контурных карт некоторым образом описывает текстуру исходного изображения на разных масштабах. Показатель Гельдера отслеживает различные объекты или породы при разных значениях ширины окрестности. Следующим шагом является оптимальный выбор таких параметров обработки снимка, чтобы Гельдеровской экспоненте соответствовали конкретные геологические породы в изображении. Однако, это относится к задаче распознавания, которая не рассматривается в нашей работе. Она должна решаться на основе более представительной выборки HR-снимков в разных каналах.

**Заключение.** Прделанные численные эксперименты демонстрируют успешность применения мультифрактального формализма для сегментации ДДЗ изображений. В дальнейшем разработанные алгоритмы могут быть использованы как основа для систем автоматического распознавания, представляющих интерес для задач геологической разведки. Топологические структуры *MSM* для ДДЗ изображений позволят создать обучающую выборку для поиска перспективных участков детальной геологической разведки на основе данных космического мониторинга.

### Благодарности

Авторы выражают благодарность Н. Г. Макаренко за интерес, проявленный к результатам исследования, и плодотворные дискуссии.

## Цитированная литература

1. Carlsson G., Ishkhanov T., de Silva V., and Zomorodian A. On the local behaviour of spaces of natural images. Preprint, 2006. <http://www.math.stanford.edu/comptop/preprints>

2. **Grazzini J., Turiel A., Yahia H., Herlin I.** // Proc. of ISPRS'04. 2004. P. 1125 – 1129.
3. **Turiel A., Parga N., Ruderman D., Cronin T. P.** // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. P. 1138 – 1148.
4. **Turiel A., Parga N.** // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85. P. 3325 – 3328.
5. **Grazzini J., Béréziat D., Herlin I.** // Proc. of IEEE ICIP'01. 2001. V. 3. P. 760 – 763.
6. **Levy Vehel J.** Texture analysis using fractal probability functions. Rapports de Resherche. 1992. № 1707.
7. **Scarpa G., Haindl M., Zerubia J.** Hierarchical Finite-State Modeling for Texture Segmentation with Application to Forest Classification. Rapports de Resherche. 2006. № 6066.
8. **Pichon E., Tannenbaum A., Kikinis R.** // Medical Image Anal. 2004. V. 8. P. 267 – 274.
9. **Shen J.** A stochastic-variational model for soft Mumford–Shah segmentation. IMA Preprint Series. 2005. № 2062.
10. **Geman S., Geman D.** // IEEE Trans. Pattern Anal. and Machine Intell. 1984. V. 6. P. 721 – 741.
11. **Jepson A. D., Black M. J.** Mixture models for image representation // PRECARN ARK Proj. Tech. Rep. ARK96-PUB-54, March 1996.
12. **Mumford D., Shah J.** // Comm. Pure Appl. Math. 1989. V. 42. P. 577 – 685.
13. **Laporyerie-Djean F., Lopez-Ornelas E., Flouzat G.** // Proc. of IGARSS. 2005. V. 3. P. 2042 – 2044.
14. **Huang J., Mumford D.** Statistics of natural images and models // Proc. of the ICCV. 1999. V. 1. P. 541 – 547.
15. **Huang J.** Statistics of natural images and models. Thesis. Brown Univ. 2000. <http://www.dam.brown.edu/people/mumford>
16. **Mumford D., Gidas B.** Stochastic Models for Generic Images <http://www.dam.brown.edu/people/mumford>
17. **Mallat St., Zhong S.** // IEEE Trans. On Pattern Anal. and Machine Intell. 1992. V. 14, № 2. P. 710 – 732.
18. **Corner M. L.** Multiresolution image processing techniques with applicatios in texture segmentation and nonlinear filtering. PhD Thesis. Purdue Univ. 1995.
19. **Turiel A., Mato G., Parga N., Nadal P.** // Neural Information Processing Systems. 1997 (NIPS-97). 1998. V. 10. P. 836 – 842.
20. **Turiel A., Mato G., Parga N., Nadal P.** // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80, №5. P. 1098 – 1101.
21. **Halsey T. C., Jensen M. H., et. al.** // Phys. Rev. A. 1986. V. 33, № 2. P. 1141 – 1151.
22. **Riedi R. H.** // Long range dependence: theory and applications, eds. Doukhan, Oppenheim and Taqqu, Birkhauser. 2002. P. 625 – 715.
23. **Falconer K.** Fractal geometry. Mathematical foundations and applications. J. Wiley & Sons. 1990.
24. **Turiel A., Parga N.** // Neural Computation. 2000. V. 12. P. 763 – 793.
25. **Nevado A., Turiel A., Parga N.** // Network. 2000. V. 11. P. 131 – 152.
26. **Mallat St.** A wavelet tour of signal processing. Academ. Press. 1999.
27. **Добешин И.** Десять лекций по вейвлетам. Москва, Ижевск, 2001.
28. **Mallat St., Hwang W. L.** // IEEE Trans. Inf. Thech. 1992. V. 38. P. 617 – 643.
29. **Jaffard S.** // SIAM J. of Math. Anal. 1997. V. 28, №4. P. 944 – 998.
30. **Turiel A. and del Pozo A.** // IEEE Trans. on Image Proces. 2002. V. 11, №4. P. 345 – 350.
31. <http://www.irccyn.ec-nantes.fr/hebergement/FracLab/>
32. **Рафаилович М. С., Лось В. Л.** // Руды и металлы. М. 2006. №2. С. 41 – 53.

*Поступила в редакцию 30.03.2007 г.*

УДК 681.5

## О ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТРИЦЕ ЛИНЕЙНОЙ РАЗНОТЕМПОВОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, КОГДА МАТРИЧНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ ИМЕЕТ КРАТНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Дж. Мамытов, Ж. Шаршеналиев

Институт автоматки Национальной академии наук  
Кыргызской Республики, 720071 Бишкек пр.Чуй, 265

Предложена методика построения фундаментальной матрицы линейной разнотемповой системы управления, когда заданный матричный коэффициент  $\mathbf{A}$  порядка  $n$  имеет  $k$  ( $k \leq n$ ) линейно независимых собственных векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{h}_1$ , соответствующих собственным значениям  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , явно зависящих от этих собственных значений и малого параметра  $\varepsilon > 0$ .

**Введение.** В классических работах Н.Н. Красовского [4] и В.И. Зубова [5] отмечена важность аналитического представления фундаментальной матрицы математических моделей систем управления для решения задач теории управления и колебаний. Рассмотрению этой проблемы были посвящены работы [1–3], в отличие от которых здесь мы отказываемся от предположений: матрица  $\mathbf{A}$  является матрицей простой структуры, имеет одно  $n$ -кратное собственное значение, а также, если характеристический многочлен матрицы  $\mathbf{A}$  имеет кратные корни, то минимальный многочлен имеет только простые корни [8, 10, 11].

Рассмотрим линейную разнотемповую систему управления

$$\mathbf{E}_\varepsilon \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{A} - n \times n$ ,  $\mathbf{B} - (n \times r)$ , ( $r \leq n$ ) – постоянные матрицы, элементы которых принадлежат некоторым алгебраически замкнутым полям  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{x} - (n \times 1)$  – вектор столбец, характеризующий состояние системы,  $\mathbf{U} - (r \times 1)$  – вектор столбец – управление,  $\mathbf{E}_\varepsilon - (n \times n)$  – квазидиагональная матрица вида

$$\mathbf{E}_\varepsilon = \{\mathbf{E}_p, \varepsilon\mathbf{E}_q\}, \quad p + q = n,$$

$\varepsilon > 0$  – малый параметр,  $\mathbf{E}_p$  и  $\mathbf{E}_q$  – единичные матрицы порядков  $p$  и  $q$  соответственно.

---

Keywords: *linear control system, fundamental function*

2000 Mathematics Subject Classification: 34A25, 34A30

© Дж. Мамытов, Ж. Шаршеналиев, 2007.

Целью данной работы является построение матрицы веса (фундаментальной матрицы) при  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  для (1), явно зависящей от  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  и  $\varepsilon$  с выделением регулярной и погранслошной частей.

Известно [6], что множество всех линейных ограниченных операторов, отображающих  $n$ -мерное векторное пространство  $\mathbf{R}^n$  в  $\mathbf{R}^n$ , образует пространство линейных ограниченных операторов  $\mathbf{L}(\mathbf{R}^n)$ . В некотором фиксированном базисе  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n \in \mathbf{R}^n$  матрицам  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{E}_\varepsilon$  отвечают некоторые линейные операторы  $\mathcal{A}$  и  $\Sigma_\varepsilon$  из  $\mathbf{L}(\mathbf{R}^n)$  и, наоборот [7–12].

Таким образом, выбор базиса устанавливает изоморфное соответствие между кольцом (группой невырожденных) линейных операторов из  $\mathbf{R}^n$  и кольцом (группой неособенных) квадратных матриц  $n$ -го порядка [7–12]:

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{E}_\varepsilon^{-1} \mathbf{A}x. \quad (1^*)$$

Очевидно, что фундаментальной матрицей (1<sup>\*</sup>) является  $\mathbf{e}^{\mathbf{E}_\varepsilon^{-1} \mathbf{A}t}$ , которая в таком виде не дает полную информацию о структуре и свойствах такой матрицы, пригодную для качественного и аналитического исследования вопросов, связанных с устойчивостью, управляемостью, наблюдаемостью, оптимальной стабилизируемостью, оптимальным управлением и др. [4, 5, 13].

**Постановка задачи и основные результаты.** Также, как в [9], будем предполагать, что у оператора  $\mathcal{A}$  имеется  $k$  ( $k \leq n$ ) линейно независимых собственных векторов  $e_1, f_1, \dots, h_1$ , соответствующих собственным значениям  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ . Тогда существует базис, состоящий из  $k$  групп векторов [9]

$$e_1, \dots, e_{p_1}; f_1, \dots, f_{p_2}; \dots; h_1, \dots, h_{p_k}, \quad (p_1 + p_2 + \dots + p_k = n), \quad (2)$$

в котором матрица  $\mathbf{A}$  оператора  $\mathcal{A}$  имеет следующую жорданову форму:

$$\mathbf{J} = \{\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \dots, \mathbf{J}_k\}, \quad (3)$$

где

$$\mathbf{J}_i = \lambda_i \mathbf{E}_{p_i} + \mathbf{H}_{p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (4)$$

– клетка жордана,  $\mathbf{E}_{p_i}$  – единичная матрица порядка  $p_i$ ,  $\mathbf{H}_{p_i}$  – нильпотентная матрица с индексом нильпотентности  $p_i$ .

В базисе (2) оператору  $\Sigma_\varepsilon$  соответствует диагональная матрица  $\mathbf{E}_\varepsilon$ , которая является неособенной, а следовательно, оператор  $\Sigma_\varepsilon$  является невырожденным.

Тогда в базисе (2) в  $\mathbf{R}^n$  существует изоморфное соответствие между группами невырожденных линейных операторов и группами неособенных квадратных матриц порядка  $n$  [7–12]. Поэтому оператору  $\Sigma_\varepsilon^{-1} \mathcal{A}$  изоморфно соответствует матрица  $\mathbf{E}_\varepsilon^{-1} \mathbf{J} = \bar{\mathbf{J}}_\varepsilon$ .

**Теорема 1.** Пусть оператор  $\mathcal{A}$  имеет  $k$  ( $k \leq n$ ) линейно независимых собственных векторов  $e_1, f_1, \dots, h_1$ , соответствующих собственным значениям  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ . Тогда существует базис, состоящий из  $k$  групп векторов (2), в котором матрица  $\mathbf{A}$  оператора  $\mathcal{A}$  имеет жорданову форму (3). Оператору  $\Sigma_\varepsilon^{-1} \mathcal{A}$  в этом базисе соответствует квадратная матрица  $\bar{\mathbf{J}}_\varepsilon = \mathbf{E}_\varepsilon^{-1} \mathbf{A}$  порядка  $n$ .

Для того, чтобы построить матрицу  $\mathbf{E}_\varepsilon^{-1} \mathbf{A}$ , сначала матрицу  $\mathbf{E}_\varepsilon^{-1}$  представим в квазидиагональном виде, состоящем из  $k$  клеток, причем размерность каждой клетки совпадает с размерностью соответствующих клеток матрицы  $\mathbf{J}$ . Тогда возможны следующие случаи.

1°. Если числа  $p, q$  и  $p_1, p_2, \dots, p_k$  такие, что имеет место представление  $p = p_1 + p_2 + \dots + p_\nu$  ( $q = p_{\nu+1} + p_{\nu+2} + \dots + p_k$ ), то матрицы  $\mathbf{E}_\varepsilon^{-1}$  и  $\mathbf{J}$  можно соответственно представить в виде квазидиагональных матриц

$$\mathbf{E}_\varepsilon^{-1} = \{\mathbf{E}_{p_1}, \mathbf{E}_{p_2}, \dots, \mathbf{E}_{p_\nu}, \varepsilon^{-1}\mathbf{E}_{p_{\nu+1}}, \varepsilon^{-1}\mathbf{E}_{p_{\nu+2}}, \dots, \varepsilon^{-1}\mathbf{E}_{p_k}\},$$

$$\mathbf{J} = \{\mathbf{J}_{p_1}, \mathbf{J}_{p_2}, \dots, \mathbf{J}_{p_\nu}, \mathbf{J}_{p_{\nu+1}}, \mathbf{J}_{p_k}\},$$

где  $\nu$  – некоторое целое число  $1 < \nu < k$ ,  $\mathbf{E}_\ell$  ( $\ell = \overline{1, k}$ ) – единичная матрица порядка  $\ell$ .

В этом случае отдельные клетки  $\mathbf{E}_p$  матрицы  $\mathbf{E}_\varepsilon^{-1}$  при их умножении на матрицу  $\mathbf{J}$  полностью совпадают с соответствующими отдельными клетками  $\mathbf{J}_{p_i}$  матрицы  $\mathbf{J}$  ( $i = \overline{1, k}$ ). Поэтому матрицу  $\mathbf{E}_\varepsilon^{-1}\mathbf{J}$  можно представить в виде

$$\bar{\mathbf{J}}_\varepsilon = \mathbf{E}_\varepsilon^{-1}\mathbf{J} = \{\mathbf{J}_{p_1}, \mathbf{J}_{p_2}, \dots, \mathbf{J}_{p_\nu}, \varepsilon^{-1}\mathbf{J}_{p_{\nu+1}}, \varepsilon^{-1}\mathbf{J}_{p_{\nu+2}}, \dots, \varepsilon^{-1}\mathbf{J}_{p_k}\}. \quad (5)$$

2°. Пусть теперь  $p_1 + \dots + p_\nu > p$ . Здесь  $\nu$  – такое целое число, что разность  $p_1 + \dots + p_\nu - p = \alpha$  принимает наименьшее возможное целое значение. Аналогично можно рассмотреть и случай, когда  $p_1 + \dots + p_\nu < p$  и  $\alpha = p - p_1 - \dots - p_\nu$ ; в этом случае  $\nu$  – такое целое число, что разность принимает наибольшее возможное значение.

В этом случае отдельные клетки  $\mathbf{E}_{p_i}$  ( $i = \overline{1, \nu-1}$ ) и  $\varepsilon^{-1}\mathbf{E}_{p_j}$  ( $j = \overline{\nu+1, k}$ ) при их умножении на матрицу  $\mathbf{J}$  полностью совпадают с соответствующими отдельными клетками  $\mathbf{J}_{p_i}$  ( $i = \overline{1, \nu-1}$ ) и  $\mathbf{J}_{p_j}$  ( $j = \overline{\nu+1, k}$ ) соответственно, а клетка  $\mathbf{J}_\nu$  умножается клеткой  $\mathbf{E}_\nu = \{\underbrace{1, \dots, 1}_\alpha, \underbrace{\varepsilon^{-1}, \dots, \varepsilon^{-1}}_{p_\nu - \alpha}\}$ . В результате матрица  $\bar{\mathbf{J}}_\varepsilon$  принимает следующий вид:

$$\bar{\mathbf{J}}_\varepsilon = \{\mathbf{J}_{p_1}, \dots, \mathbf{J}_{\nu-1}, \tilde{\mathbf{J}}_{p_\nu}, \varepsilon^{-1}\mathbf{J}_{\nu+1}, \varepsilon^{-1}\mathbf{J}_{\nu+2}, \dots, \varepsilon^{-1}\mathbf{J}_{p_k}\}, \quad (6)$$

где

$$\tilde{\mathbf{J}}_{p_\nu} = \{\underbrace{\lambda_\nu, \dots, \lambda_\nu}_\alpha, \underbrace{\varepsilon^{-1}\lambda_\nu, \dots, \varepsilon^{-1}\lambda_\nu}_{p_\nu - \alpha}\} + \tilde{\mathbf{H}}_{p_k}. \quad (7)$$

Здесь  $\tilde{\mathbf{H}}_{p_\nu}$  – квадратная матрица  $p_\nu$ -го порядка, у которой элементы, первые над диагональю равны  $\underbrace{1, \dots, 1}_\alpha, \underbrace{\varepsilon^{-1}, \dots, \varepsilon^{-1}}_{p_\nu - \alpha - 1}$ , а все остальные элементы равны нулю и она обладает свойством:

$\tilde{\mathbf{H}}^{p_\nu} = \mathbf{0}_{p_\nu}$  ( $\mathbf{0}_{p_\nu}$  – нулевая квадратная матрица порядка  $p_\nu$ ).

С л у ч а й 1°. Матрицу  $\bar{\mathbf{J}}_\varepsilon$  в силу соотношений (4), (5) можно представить в виде

$$\bar{\mathbf{J}}_\varepsilon = \{(\lambda_1\mathbf{E}_{p_1} + \mathbf{H}_{p_1}), \dots, (\lambda_\nu\mathbf{E}_{p_\nu} + \mathbf{H}_{p_\nu}), \varepsilon^{-1}(\lambda_{\nu+1}\mathbf{E}_{p_{\nu+1}} + \mathbf{H}_{p_{\nu+1}}) + \dots + \varepsilon^{-1}(\lambda_k\mathbf{E}_{p_k} + \mathbf{H}_{p_k})\}. \quad (8)$$

В базисе (2) систему (1\*) можно представить в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \bar{\mathbf{J}}_\varepsilon \mathbf{x}.$$

Теперь рассмотрим характеристическое уравнение матрицы  $\bar{\mathbf{J}}_\varepsilon$ . Согласно (5) имеем

$$\det(\bar{\mathbf{J}}_\varepsilon - \mu\mathbf{E}) = \det(\lambda_1\mathbf{E}_{p_1} + \mathbf{H}_{p_1}, \dots, \lambda_\nu\mathbf{E}_{p_\nu} + \mathbf{H}_{p_\nu}, \varepsilon^{-1}(\lambda_{\nu+1}\mathbf{E}_{p_{\nu+1}} + \mathbf{H}_{p_{\nu+1}}) + \dots + \varepsilon^{-1}(\lambda_k\mathbf{E}_{p_k} + \mathbf{H}_{p_k}) - \mu\{\mathbf{E}_{p_1}, \dots, \mathbf{E}_{p_\nu}, \mathbf{E}_{p_{\nu+1}}, \dots, \mathbf{E}_{p_k}\}) = 0, \quad (9)$$

где  $\{\mathbf{E}_{p_1}, \dots, \mathbf{E}_{p_\nu}, \mathbf{E}_{p_{\nu+1}}, \dots, \mathbf{E}_{p_k}\} = \mathbf{E}$  – единичная матрица порядка  $n$ , представленная в квазидиагональном виде,  $\mathbf{E}_r$  – единичная матрица  $r$ -порядка,  $p_1 + \dots + p_\nu + p_{\nu+1} + \dots + p_k = n$ .

Далее

$$\begin{aligned} \det(\bar{\mathbf{J}}_\varepsilon - \mu \mathbf{E}) &= \det((\lambda_1 - \mu)\mathbf{E}_{p_1} + \mathbf{H}_{p_1}, \dots, (\lambda_\nu - \mu)\mathbf{E}_{p_\nu} + \mathbf{H}_{p_\nu}, \\ &(\varepsilon^{-1}\lambda_{\nu+1} - \mu)\mathbf{E}_{p_{\nu+1}} + \varepsilon^{-1}\mathbf{H}_{p_{\nu+1}}, \dots, (\varepsilon^{-1}\lambda_k - \mu)\mathbf{E}_{p_k} + \varepsilon^{-1}\mathbf{H}_{p_k}) = \\ &= (\lambda_1 - \mu)^{p_1} \cdot \dots \cdot (\lambda_\nu - \mu)^{p_\nu} (\varepsilon^{-1}\lambda_{\nu+1} - \mu)^{p_{\nu+1}} \cdot \dots \cdot (\varepsilon^{-1}\lambda_k - \mu)^{p_k} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Отсюда следует, что характеристическое уравнение матрицы  $\bar{\mathbf{J}}_\varepsilon$  имеет  $k$  корней

$$\lambda_1, \dots, \lambda_\nu, \varepsilon^{-1}\lambda_{\nu+1}, \dots, \varepsilon^{-1}\lambda_k \quad (11)$$

с кратностью соответственно  $p_1, \dots, p_\nu, p_{\nu+1}, \dots, p_k$ .

Таким образом, доказана

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда в базисе (2) из  $R^n$  оператор  $\Sigma_\varepsilon^{-1}\mathcal{A}$  имеет  $k$  собственных значений  $\lambda_1, \dots, \lambda_\nu, \varepsilon^{-1}\lambda_{\nu+1}, \dots, \varepsilon^{-1}\lambda_k$  с кратностью  $p_1, \dots, p_\nu, p_{\nu+1}, \dots, p_k$  соответственно, если только числа  $p, q$  и  $p_1, \dots, p_k$  такие, что имеет место соотношение  $p = p_1 + \dots + p_\nu$  ( $q = p_{\nu+1}, \dots, p_k$ ).

Минимальный многочлен матрицы  $\bar{\mathbf{J}}_\varepsilon$  имеет следующий вид [8, 10, 11]:

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_\nu)^{p_\nu} (\lambda - \varepsilon^{-1}\lambda_{\nu+1})^{p_{\nu+1}} \cdot \dots \cdot (\lambda - \varepsilon^{-1}\lambda_k)^{p_k}$$

и матрица  $\bar{\mathbf{J}}_\varepsilon$  имеет  $k$  линейно независимых собственных векторов  $e^1, f^1, \dots, h^1$ , соответствующих собственным значениям (11).

Известно [7–11], что существует базис, состоящий из  $k$  групп векторов

$$e^1, \dots, e_i^p; f^1, \dots, f^{p_k}; \dots; h^1, \dots, h^{p_k}, \quad (12)$$

в котором матрица  $\bar{\mathbf{J}}_\varepsilon$  оператора  $\Sigma_\varepsilon^{-1}\mathcal{A}$  имеет следующую жорданову матрицу:

$$\mathbf{J}_\varepsilon = \{\mathbf{J}^{p_1}, \dots, \mathbf{J}^{p_\nu}, \mathbf{J}^{p_{\nu+1}}, \dots, \mathbf{J}^{p_k}\}, \quad (13)$$

где

$$\mathbf{J}^{p_i} = \lambda_i \mathbf{E}_{p_i} + \mathbf{H}_{p_i}, \quad (i = \overline{1, \nu}), \quad \mathbf{J}^{p_j} = \varepsilon^{-1}\lambda_j \mathbf{E}_{p_j} + \mathbf{H}_{p_j}, \quad (j = \overline{\nu+1, k}). \quad (14)$$

Зафиксируем в пространстве  $\mathbf{R}^n$  базис, состоящий из  $n$  векторов (12). В этом базисе система (1\*) запишется в виде

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{J}_\varepsilon x. \quad (15)$$

Итак, справедлива

**Теорема 3.** Пусть выполнены все условия теорем 1 и 2. Тогда в пространстве  $\mathbf{R}^n$  с базисом (12) система (1\*) запишется в виде (15).

Для системы (15) будем строить фундаментальную матрицу. Как в [8], представим правильно-дробную функцию  $\frac{r(\lambda)}{\varphi(\lambda)}$  в виде суммы простых дробей

$$\begin{aligned} \frac{r(\lambda)}{\varphi(\lambda)} &= \sum_{i=1}^{\nu} \left[ \frac{\alpha_{i,1}}{(\lambda - \lambda_i)^{p_i}} + \frac{\alpha_{i,2}}{(\lambda - \lambda_i)^{p_i-1}} + \dots + \frac{\alpha_{i,p_i}}{\lambda - \lambda_i} \right] + \\ &+ \sum_{j=\nu+1}^k \left[ \frac{\alpha_{j,1}}{(\lambda - \varepsilon^{-1}\lambda_j)^{p_j}} + \frac{\alpha_{j,2}}{(\lambda - \varepsilon^{-1}\lambda_j)^{p_j-1}} + \dots + \frac{\alpha_{j,p_j}}{\lambda - \varepsilon^{-1}\lambda_j} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\alpha_{ij}$  ( $j = 1, 2, \dots, p_i$ ;  $i = 1, 2, \dots, k$ ) – некоторые величины, которые будут уточнены ниже,  $r(\lambda)$  – интерполяционный полином Лагранжа–Сильвестра для заданной функции  $f(\lambda)$ , а  $\lambda_1, \dots, \lambda_\nu, \varepsilon^{-1}\lambda_{\nu+1}, \dots, \varepsilon^{-1}\lambda_k$  – нули минимального полинома  $\varphi(\lambda)$  матрицы  $\mathbf{J}_\varepsilon$ .

Соотношение (16) представим также в виде

$$\frac{r(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = \sum_{i=1}^{\nu} \left[ \frac{\alpha_{i,1}}{(\lambda - \lambda_i)^{p_i}} + \frac{\alpha_{i,2}}{(\lambda - \lambda_i)^{p_i-1}} + \dots + \frac{\alpha_{i,p_i}}{\lambda - \lambda_i} \right] + \sum_{j=\nu+1}^k \left[ \frac{\varepsilon^{p_j} \alpha_{j,1}}{(\varepsilon\lambda - \lambda_j)^{p_j}} + \frac{\varepsilon^{p_j-1} \alpha_{j,2}}{(\varepsilon\lambda - \lambda_j)^{p_j-1}} + \dots + \frac{\varepsilon \alpha_{j,p_j}}{\varepsilon\lambda - \lambda_j} \right].$$

В дальнейшем величины  $\alpha_{ij}$  определим по формулам [8]:

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{(j-1)!} \left[ \frac{f(\lambda)}{\varphi_i(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_i}^{(j-1)} \quad (j = 1, 2, \dots, p_i; \quad i = 1, 2, \dots, \nu) \quad (17)$$

и

$$\alpha_{rj} = \frac{1}{(j-1)!} \left[ \frac{f(\lambda)}{\varphi_r(\lambda)} \right]_{\lambda=\varepsilon^{-1}\lambda_r}^{(j-1)} \quad (j = 1, 2, \dots, p_r; \quad r = \nu+1, \nu+2, \dots, k), \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_i(\lambda) &= (\lambda - \lambda_i)^{-p_i} \varphi(\lambda), \quad (i = 1, 2, \dots, \nu); \\ \varphi_r(\lambda) &= (\lambda - \varepsilon^{-1}\lambda_r)^{-p_i} \varphi(\lambda), \quad (r = \nu+1, \nu+2, \dots, k). \end{aligned} \quad (19)$$

С учетом этих соотношений заметим, что

$$\varphi_i(\lambda) = \varepsilon^{-\sum_{l=\nu+1}^k p_l} \cdot \prod_{j=1, j \neq i}^{\nu} (\lambda - \lambda_j)^{p_j} \cdot \prod_{j=\nu+1}^k (\varepsilon\lambda - \lambda_j)^{p_j}, \quad i = 1, \dots, \nu, \quad (20)$$

а также

$$\varphi_i(\lambda) = \varepsilon^{-\sum_{l=\nu+1, l \neq i}^k p_l} \cdot \prod_{j=1}^{\nu} (\lambda - \lambda_j)^{p_j} \cdot \prod_{j=\nu+1, j \neq i}^k (\lambda - \lambda_j)^{p_j}, \quad i = \nu+1, \dots, k. \quad (21)$$

Далее введем следующую функцию  $\Psi_j(\lambda)$ , определяемую формулой

$$\Psi_j(\lambda) = \frac{\varphi'_j(\lambda)}{\varphi_j(\lambda)} \quad (j = 1, 2, \dots, k). \quad (22)$$

С учетом соотношений (20) и (21) функции  $\Psi_j(\lambda)$  (22) можно представить в виде:

$$\Psi_j(\lambda) = \sum_{i=1, i \neq j}^{\nu} \frac{p_i}{\lambda - \lambda_i} + \sum_{i=\nu+1}^k \frac{\varepsilon p_i}{\varepsilon\lambda - \lambda_i}, \quad j = 1, \dots, \nu, \quad (23)$$

$$\Psi_j(\lambda) = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{p_i}{\lambda - \lambda_i} + \sum_{i=\nu+1, i \neq j}^k \frac{\varepsilon p_i}{\varepsilon\lambda - \lambda_i}, \quad j = \nu+1, \dots, k. \quad (24)$$

Эти формулы показывают, что справедливы равенства

$$\left( \frac{1}{\Psi_j(\lambda)} \right)' = -\frac{1}{\varphi_j(\lambda)} \Psi_j(\lambda), \quad j = 1, \dots, k. \quad (25)$$

Отметим следующие свойства функций  $\Psi_j(\lambda)$ .

1°. Из (23) замечаем, что  $\Psi_j(\lambda)$  и ее все производные при  $\lambda = \lambda_j$  ( $j = 1, 2, \dots, \nu$ ) имеют конечные пределы при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

2°. Из (24) замечаем, что  $\Psi_r(\lambda)$  и ее производные при  $\lambda = \varepsilon^{-1}\lambda_r$  ( $r = \nu + 1, \dots, k$ ) имеют нулевые пределы при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

В силу формул (22), (23), (24), (25) из (17) и (18) получаем

$$\alpha_{ij}(\lambda) = \frac{1}{\varphi_i(\lambda)} \left[ f^{(j-1)}(\lambda) + \tau_{i,j-2}(\Psi_i, \Psi'_i, \dots, \Psi_i^{(j-2)}) \cdot f^{(j-2)}(\lambda) + \right. \\ \left. + \tau_{i,j-3}(\Psi_i, \Psi'_i, \dots, \Psi_i^{(i-2)}) \cdot f^{(j-3)} + \dots + \tau_{i,0}(\Psi_i, \Psi'_i, \dots, \Psi_i^{(j-2)}) f(\lambda) \right], \quad (26)$$

где  $j = 1, 2, \dots, p_i$ ;  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $\tau_{i,k}(\Psi_i, \Psi'_i, \dots, \Psi_i^{(j-2)})$ ,  $r = 0, 1, \dots, j - 2$  – вполне определенные целые рациональные функции от своих аргументов. Например,

$$\alpha_{i1}(\lambda) = \frac{1}{\Psi_i(\lambda)} f(\lambda),$$

$$\alpha_{i2}(\lambda) = \frac{1}{\Psi_i(\lambda)} [f'(\lambda) - \Psi_i(\lambda) f(\lambda)],$$

$$\alpha_{i3}(\lambda) = \frac{1}{\Psi_i(\lambda)} [f''(\lambda) - 2\Psi_i(\lambda) f'(\lambda) + (\Psi_i^{(2)}(\lambda) - \Psi_i^{(1)}) f(\lambda)],$$

$$\alpha_{i4}(\lambda) = \frac{1}{\Psi_i(\lambda)} [f'''(\lambda) - 3\Psi_i(\lambda) f''(\lambda) + 3(\Psi_i^{(2)} - \Psi_i^{(1)}) f' + ((\Psi_i^{(2)} - \Psi_i^{(1)})' - \Psi_k(\Psi_k^{(2)} - \Psi_k^{(1)})) f]$$

и т.д.

Если в равенстве (26) принять за  $f(\lambda) = e^{\lambda t}$ , то (26) запишется в виде

$$\alpha_{ij}(\lambda) = \frac{1}{\varphi_i(\lambda)} [t^{i-1} + \tau_{i,j-2}(\Psi_i, \Psi'_i, \dots, \Psi_i^{(j-2)}) t^{i-2} + \\ + \tau_{i,j-3}(\Psi_i, \Psi'_i, \dots, \Psi_i^{(j-2)}) t^{j-3} + \dots + \tau_{i,0}(\Psi_i, \Psi'_i, \dots, \Psi_i^{(j-2)})] e^{\lambda t}.$$

Отсюда следует, что

$$\alpha_{ij}(\lambda)|_{\lambda=\lambda_i} = \frac{1}{\varphi_i(\lambda)} [t^{j-1} + a_{i,j-2}(\varepsilon) t^{j-2} + a_{i,j-3}(\varepsilon) t^{j-3} + \dots + a_{i,1}(\varepsilon) t + a_{i,0}] e^{\lambda_i t}, \quad (27)$$

где  $a_{i,r}(\varepsilon) = \tau_{i,r}(\Psi_i, \Psi_i^{(1)} \dots, \Psi_i^{(j-2)})|_{\lambda=\lambda_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, \nu$ ;  $r = 0, 1, \dots, j - 2$ ).

Далее заметим, что в силу свойства 1° функций  $\Psi_i(\lambda)$  выражение в квадратной скобке из (27) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  превратится в неоднородный полином по  $t$  степени  $j - 1$ .

Аналогично имеем

$$\alpha_{ij}(\lambda)|_{\lambda=\varepsilon^{-1}\lambda_i} = \frac{1}{\varphi_i(\varepsilon^{-1}\lambda_i)} [t^{j-1} + a_{i,j-2}(\varepsilon) t^{j-2} + a_{i,j-3}(\varepsilon) t^{j-3} + \dots + a_{i,1}(\varepsilon) t + a_{i,0}] e^{\lambda_i t}, \quad (28)$$

где  $a_{i,r}(\varepsilon) = \tau(\Psi_i, \Psi_i^{(1)} \dots, \Psi_i^{(j-2)})|_{\lambda=\varepsilon^{-1}\lambda_i}$  ( $i = \nu + 1, \nu + 2, \dots, k$ ;  $r = 0, 1, \dots, j - 2$ ,  $\tau = \varepsilon^{-1}t$ ).

В силу свойства 2° функций  $\Psi_i(\lambda)$  выражение в квадратной скобке из (28) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  стремится к  $t^{j-1}$ .

Введем следующие обозначения

$$\bar{a}_{ij}(t, \varepsilon) \equiv t^{j-1} + a_{i,j-2}(\varepsilon) t^{j-2} + \dots + a_{i,1}(\varepsilon) t + a_{i,0}(\varepsilon) \quad (j = 1, 2, \dots, p_i; \quad i = 1, 2, \dots, k).$$

Отметим следующие свойства этого полинома. При  $\varepsilon \rightarrow 0$  выражение  $\bar{a}_{ij}(t, \varepsilon)$  представляет вполне определенный неоднородный полином по  $t$  степени  $j - 1$  для всех  $i = 1, 2, \dots, \nu$ , а при  $i = \nu + 1, \nu + 2, \dots, k$ , оно сходится к  $t^{j-1}$ .

Теперь формулы (27), (28) запишем соответственно в виде

$$\alpha_{ij}(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_i} = \frac{1}{\varphi_i(\lambda_i)} \bar{a}_{ij}(t, \varepsilon) e^{\lambda_i t} \quad (j = 1, 2, \dots, p_i; \quad i = 1, 2, \dots, \nu), \quad (29)$$

$$\alpha_{ij}(\lambda)\Big|_{\lambda=\varepsilon\lambda_i} = \frac{1}{\varphi_i(\varepsilon^{-1}\lambda_i)} \bar{a}_{ij}(t, \varepsilon) e^{\lambda_i \tau} \quad (j = 1, 2, \dots, p_i; \quad i = \nu + 1, \nu + 2, \dots, k). \quad (30)$$

Далее, подставляя (29) и (30) в (16), после несложных преобразований получим формулу вычисления полинома  $r(\lambda)$ :

$$r(\lambda) = \sum_{i=1}^{\nu} [\bar{a}_{i,1}(t, \varepsilon) + \bar{a}_{i,2}(t, \varepsilon)(\lambda - \lambda_i) + \dots + \bar{a}_{i,p_i}(t, \varepsilon)(\lambda - \lambda_i)^{p_i-1}] \frac{\varphi_i(\lambda)}{\varphi_i(\lambda_i)} e^{\lambda_i t} + \sum_{r=\nu+1}^k [\bar{a}_{r,1}(t, \varepsilon) + \bar{a}_{r,2}(t, \varepsilon)(\lambda - \lambda_r) + \dots + \bar{a}_{r,p_r}(t, \varepsilon)(\lambda - \lambda_r)^{p_r-1}] \frac{\varphi_r(\lambda)}{\varphi_r(\varepsilon^{-1}\lambda_r)} e^{\lambda_r t}.$$

Используя эту формулу, находим  $r(\mathbf{J}_\varepsilon) = e^{\mathbf{J}_\varepsilon t}$ :

$$r(\mathbf{J}_\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\nu} [\bar{a}_{i,1}(t, \varepsilon)\mathbf{E} + \bar{a}_{i,2}(t, \varepsilon)(\mathbf{J}_\varepsilon - \lambda_i\mathbf{E}) + \dots + \bar{a}_{i,p_i}(t, \varepsilon)(\mathbf{J}_\varepsilon - \lambda_i\mathbf{E})^{p_i-1}] \frac{\varphi_i(\mathbf{J}_\varepsilon)}{\varphi_i(\lambda_i)} e^{\lambda_i t} + \sum_{j=\nu+1}^k [\bar{a}_{j,1}(t, \varepsilon)\mathbf{E} + \bar{a}_{j,2}(t, \varepsilon)(\mathbf{J}_\varepsilon - \lambda_j\mathbf{E}) + \dots + \bar{a}_{j,p_j}(t, \varepsilon)(\mathbf{J}_\varepsilon - \lambda_j\mathbf{E})^{p_j-1}] \frac{\varphi_j(\mathbf{J}_\varepsilon)}{\varphi_j(\varepsilon^{-1}\lambda_j)} e^{\lambda_j \tau}, \quad (31)$$

где

$$(\mathbf{J}_\varepsilon - \lambda_i\mathbf{E}) = \{(\lambda_1 - \lambda_i)\mathbf{E}_{p_1} + \mathbf{H}_{p_1}, \dots, (\lambda_{i-1} - \lambda_i)\mathbf{E}_{p_{i-1}} + \mathbf{H}_{p_{i-1}}, \mathbf{H}_{p_i}, (\lambda_{i+1} - \lambda_i)\mathbf{E}_{p_{i+1}} + \mathbf{H}_{p_{i+1}}, \dots, (\varepsilon^{-1}\lambda_k - \lambda_i)\mathbf{E}_{p_k} + \mathbf{H}_{p_k}\} \quad (i = 1, 2, \dots, \nu), \quad (32)$$

$$(\mathbf{J}_\varepsilon - \lambda_j\mathbf{E}) = \{(\lambda_1 - \lambda_j)\mathbf{E}_{p_1} + \mathbf{H}_{p_1}, \dots, (\lambda_{j-1} - \lambda_j)\mathbf{E}_{p_{j-1}} + \mathbf{H}_{p_{j-1}}, \mathbf{H}_{p_j}, (\lambda_{j+1} - \lambda_j)\mathbf{E}_{p_{j+1}} + \mathbf{H}_{p_{j+1}}, \dots, (\varepsilon^{-1}\lambda_k - \lambda_j)\mathbf{E}_{p_k} + \mathbf{H}_{p_k}\} \quad (j = \nu + 1, \nu + 2, \dots, k). \quad (33)$$

Далее с учетом (14) и свойства функции от матрицы [8] несложно получить следующие формулы:

$$\frac{\varphi_i(\mathbf{J}_\varepsilon)}{\varphi_i(\lambda_i)} = \{0_{p_1}, \dots, 0_{p_{i-1}}, E_{p_i}, 0_{p_{i+1}}, \dots, 0_{p_k}\} \quad (i = 1, \dots, \nu), \quad (34)$$

$$\frac{\varphi_j(\mathbf{J}_\varepsilon)}{\varphi_j(\varepsilon^{-1}\lambda_j)} = \{0_{p_1}, \dots, 0_{p_{j-1}}, E_{p_j}, 0_{p_{j+1}}, \dots, 0_{p_k}\} \quad (j = \nu + 1, \dots, k). \quad (35)$$

Здесь  $0_{p_\alpha}$ ,  $\mathbf{E}_{p_\alpha}$  – нулевые, единичные квадратные матрицы порядка  $p_\alpha$ .

В первой сумме из (31) выражение, заключенное в квадратную скобку, в силу (32) можно представить в виде квазидиагональной матрицы

$$\begin{aligned} & \bar{\mathbf{a}}_{i,1}(t, \varepsilon)\mathbf{E} + \bar{\mathbf{a}}_{i,2}(\mathbf{J}_\varepsilon - \lambda_i\mathbf{E}) + \dots + \bar{\mathbf{a}}_{i,p_i}(\mathbf{J}_\varepsilon - \lambda_i\mathbf{E})^{p_i-1} = \\ & = \{\bar{\mathbf{a}}_{i,1}\mathbf{E}_{p_1} + \bar{\mathbf{a}}_{i,2}[(\lambda_1 - \lambda_i)\mathbf{E}_{p_1} + \mathbf{H}_{p_1}] + \dots + \bar{\mathbf{a}}_{i,p_i}[(\lambda_1 - \lambda_i)\mathbf{E}_{p_1} + \mathbf{H}_{p_1}]^{p_i-1}, \dots, \bar{\mathbf{a}}_{i,1}\mathbf{E}_{p_{i-1}} + \\ & \quad + \bar{\mathbf{a}}_{i,2}[(\lambda_{i-1} - \lambda_i)\mathbf{E}_{p_{i-1}} + \mathbf{H}_{p_{i-1}}] + \dots + \bar{\mathbf{a}}_{i,p_i}[(\lambda_{i-1} - \lambda_i)\mathbf{E}_{p_{i-1}} + \mathbf{H}_{p_{i-1}}]^{p_i-1}, \\ & \quad \bar{\mathbf{a}}_{i,1}\mathbf{E}_{p_i} + \bar{\mathbf{a}}_{i,2}\mathbf{H}_{p_i} + \dots + \bar{\mathbf{a}}_{i,p_i}\mathbf{H}_{p_i}^{p_i-1}, \bar{\mathbf{a}}_{i,1}\mathbf{E}_{p_{i+1}} + \bar{\mathbf{a}}_{i,2}[(\lambda_{i+1} - \lambda_i)\mathbf{E}_{p_{i+1}} + \mathbf{H}_{p_{i+1}}] + \dots \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \dots + \bar{\mathbf{a}}_{i,p_i} [(\lambda_{i+1} - \lambda_i) \mathbf{E}_{p_{i+1}} + \mathbf{H}_{p_{i+1}}]^{p_i-1}, \dots, \bar{\mathbf{a}}_{i,1} \mathbf{E}_{p_k} + \bar{\mathbf{a}}_{i,2} [(\varepsilon^{-1} \lambda_k - \lambda_i) \mathbf{E}_{p_k} + \mathbf{H}_{p_k}] + \\
 & + \dots + \bar{\mathbf{a}}_{i,p_i} [(\varepsilon^{-1} \lambda_k - \lambda_i) \mathbf{E}_{p_k} + \mathbf{H}_{p_k}]^{p_i-1} \} \quad (i = 1, 2, \dots, \nu). \quad (36)
 \end{aligned}$$

Аналогично во второй сумме из (31) выражение, заключенное в квадратную скобку, в силу (33) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 & \bar{\mathbf{a}}_{j,1}(t, \varepsilon) \mathbf{E} + \bar{\mathbf{a}}_{j,2}(\mathbf{J}_\varepsilon - \lambda_j \mathbf{E}) + \dots + \bar{\mathbf{a}}_{j,p_j}(\mathbf{J}_\varepsilon - \lambda_j \mathbf{E})^{p_j-1} = \\
 & = \{ \bar{\mathbf{a}}_{j,1} \mathbf{E}_{p_1} + \bar{\mathbf{a}}_{j,2} [(\lambda_1 - \lambda_j) \mathbf{E}_{p_1} + \mathbf{H}_{p_1}] + \dots + \bar{\mathbf{a}}_{j,p_j} [(\lambda_1 - \lambda_j) \mathbf{E}_{p_1} + \mathbf{H}_{p_1}]^{p_j-1}, \dots, \bar{\mathbf{a}}_{j,1} \mathbf{E}_{p_{j-1}} + \\
 & + \bar{\mathbf{a}}_{j,2} [(\lambda_{j-1} - \lambda_j) \mathbf{E}_{p_{j-1}} + \mathbf{H}_{p_{j-1}}] + \dots + \bar{\mathbf{a}}_{j,p_j} [(\lambda_{j-1} - \lambda_j) \mathbf{E}_{p_{j-1}} + \mathbf{H}_{p_{j-1}}]^{p_j-1}, \\
 & \bar{\mathbf{a}}_{j,1} \mathbf{E}_{p_j} + \bar{\mathbf{a}}_{j,2} \mathbf{H}_{p_j} + \dots + \bar{\mathbf{a}}_{j,p_j} \mathbf{H}_{p_j}^{p_j-1}, \bar{\mathbf{a}}_{j,1} \mathbf{E}_{p_{j+1}} + \bar{\mathbf{a}}_{j,2} [(\lambda_{j+1} - \lambda_j) \mathbf{E}_{p_{j+1}} + \mathbf{H}_{p_{j+1}}] + \\
 & + \dots + \bar{\mathbf{a}}_{j,p_j} [(\lambda_{j+1} - \lambda_j) \mathbf{E}_{p_{j+1}} + \mathbf{H}_{p_{j+1}}]^{p_j-1}, \dots, \bar{\mathbf{a}}_{j,1} \mathbf{E}_{p_k} + \bar{\mathbf{a}}_{j,2} [(\varepsilon^{-1} \lambda_k - \lambda_j) \mathbf{E}_{p_k} + \mathbf{H}_{p_k}] + \\
 & + \dots + \bar{\mathbf{a}}_{j,p_j} [(\varepsilon^{-1} \lambda_k - \lambda_j) \mathbf{E}_{p_k} + \mathbf{H}_{p_k}] \} \quad (j = \nu + 1, \nu + 2, \dots, k). \quad (37)
 \end{aligned}$$

Теперь, подставляя (34), (36) в первую сумму (31), а (35), (37) – во вторую сумму (31) и производя умножение соответствующих квазидиагональных матриц, получим

$$\begin{aligned}
 r(\mathbf{J}_\varepsilon) &= \sum_{i=1}^{\nu} [\{0_{p_1}, \dots, 0_{p_{j-1}}, \bar{a}_{i,1} \bar{E}_{p_i} + \bar{a}_{i,2} \mathbf{H}_{p_i} + \dots + \bar{a}_{i,p_i} \mathbf{H}_{p_i}^{p_i-1}, 0_{p_{i+1}}, \dots, 0_{p_k}\}] e^{\lambda_i t} + \\
 &+ \sum_{j=\nu+1}^k [\{0_{p_1}, \dots, 0_{p_{j-1}}, \bar{a}_{j,1} \bar{E}_{p_j} + \bar{a}_{j,2} \mathbf{H}_{p_j} + \dots + \bar{a}_{j,p_j} \mathbf{H}_{p_j}^{p_j-1}, 0_{p_{j+1}}, \dots, 0_{p_k}\}] e^{\lambda_j \tau}. \quad (38)
 \end{aligned}$$

Это и есть формула для вычисления функции  $f(t) = e^{\lambda t}$  от матрицы  $\mathbf{J}_\varepsilon$ . По свойствам нильпотентных матриц  $\mathbf{H}_{p_e}$  ( $e = 1, \dots, k$ ) порядка  $p_e$  матрицы  $r(\mathbf{J}_\varepsilon) = e^{\mathbf{J}_\varepsilon t}$  – верхняя треугольная квадратная матрица порядка  $n$ . Первое слагаемое в этой сумме есть регулярная, а вторая сумма – погранслоиная части матрицы  $e^{\mathbf{J}_\varepsilon t}$ .

*Пример.* Пусть в (38)  $k = 3$ ;  $\lambda_1, \lambda_2, \varepsilon^{-1} \lambda_3$  – нули минимального многочлена  $\varphi(\lambda)$  с кратностью соответственно  $p_1 = p_{m_1} = 1$ ,  $p_2 = p_{m_2} = 2$ ,  $p_3 = p_{m_3} = 3$  (то есть  $\nu = 2$ ). Тогда согласно этим данным и (38) выражение для  $e^{\mathbf{J}_\varepsilon t}$  можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 e^{\mathbf{J}_\varepsilon t} &= [\mathbf{a}_{11} \mathbf{E}_{p_1} + \mathbf{a}_{12} \mathbf{H}_{p_1}, 0_{p_2}, 0_{p_3}] e^{\lambda_1 t} + [0_{p_1}, \bar{\mathbf{a}}_{21} \mathbf{E}_{p_2} + \bar{\mathbf{a}}_{22} \mathbf{H}_{p_2}, 0_{p_3}] e^{\lambda_2 t} + \\
 &+ [0_{p_1}, 0_{p_2}, \mathbf{a}_{31} \mathbf{E}_{p_3} + \mathbf{a}_{32} \mathbf{H}_{p_3} + \bar{\mathbf{a}}_{33} \mathbf{H}_{p_3}^{p_3-1}] e^{\lambda_3 \tau} = [\bar{\mathbf{a}}_{11}, 0_2, 0_3] e^{\lambda_1 \tau} + \\
 &+ [0_1, \bar{\mathbf{a}}_{21} \mathbf{E}_2 + \bar{\mathbf{a}}_{22} \mathbf{H}_2, 0_3] e^{\lambda_2 \tau} + [0_1, 0_2, \mathbf{a}_{36} \mathbf{E}_3 + \mathbf{a}_{32} \mathbf{H}_3 + \bar{\mathbf{a}}_{33} \mathbf{H}_3^2] e^{\lambda_3 \tau}. \quad (39)
 \end{aligned}$$

Здесь  $0_\rho$  – нулевая,  $\mathbf{E}_\rho$  ( $\rho = 1, 2, 3$ ) – единичная матрица порядка  $\rho$ ,  $\bar{\mathbf{a}}_{11}$  – известная постоянная,  $\mathbf{a}_{21}$ ,  $\mathbf{a}_{22}$  – неоднородные линейные,  $\bar{\mathbf{a}}_{31}$ ,  $\bar{\mathbf{a}}_{32}$ ,  $\bar{\mathbf{a}}_{33}$  – неоднородные квадратные функции по  $t$  с коэффициентами, регулярно зависящими от  $\varepsilon$ . Теперь, учитывая (39),  $e^{\mathbf{J}_\varepsilon t}$  можно придать вид квазидиагональной матрицы

$$e^{\mathbf{J}_\varepsilon t} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}}_{11} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \mathbf{A}_{22} e^{\lambda_2 t} & \\ & & \mathbf{A}_{33} e^{\lambda_3 \tau} \end{pmatrix}.$$

Здесь  $e^{\lambda_1 t}$  множитель элемента  $\bar{\mathbf{a}}_{11}$ , а  $e^{\lambda_2 t}$  и  $e^{\lambda_3 t}$  множители соответственно матриц

$$\mathbf{A}_{22} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}}_{21} & \bar{\mathbf{a}}_{22} \\ 0 & \bar{\mathbf{a}}_{21} \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{A}_{33} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}}_{31} & \bar{\mathbf{a}}_{32} & \bar{\mathbf{a}}_{33} \\ 0 & \bar{\mathbf{a}}_{31} & \bar{\mathbf{a}}_{32} \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{a}}_{31} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, доказано следующая теорема.

**Теорема 4.** Пусть выполнены все условия теорем 1 и 2. Тогда система (15) имеет фундаментальную матрицу вида (38).

*С л у ч а й 2°.* В силу соотношений (6), (7) характеристическое уравнение матрицы  $\mathbf{J}_\varepsilon$ , составленное аналогично как (9) и (10), имеет  $k + 1$  корней

$$\lambda_1, \dots, \lambda_{v-1}, \lambda_v, \varepsilon^{-1}\lambda_v, \varepsilon^{-1}\lambda_{v+1}, \dots, \varepsilon^{-1}\lambda_k \quad (40)$$

с кратностью  $p_1, \dots, p_{v-1}, \alpha, p_v - \alpha, p_{v+1}, \dots, p_k$  соответственно.

Минимальный многочлен этой матрицы можно записать в виде

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} \dots (\lambda - \lambda_{v-1})^{p_{v-1}} (\lambda - \lambda_v)^\alpha (\lambda - \varepsilon^{-1}\lambda_v)^{p_v - \alpha} (\lambda - \varepsilon^{-1}\lambda_{v+1})^{p_{v+1}} \dots (\lambda - \varepsilon^{-1}\lambda_k)^{p_k}.$$

Матрица  $\mathbf{J}_\varepsilon$  имеет  $k + 1$  линейно независимых собственных векторов [9], соответствующих собственным значениям (40). Тогда существует базис, состоящий из  $k + 1$  групп векторов [9] в котором матрица  $\bar{\mathbf{J}}_\varepsilon$  оператора  $\Sigma_\varepsilon^{-1}\mathcal{A}$  имеет жорданову форму, аналогичную виду как (13) и т.д.

В дальнейшем, поступая также, как в случае 1°, удастся построить фундаментальную матрицу и в случае 2°.

Отметим, что фундаментальную матрицу для (1\*) в произвольно фиксированном базисе  $g_1, \dots, g_n$  можно построить точно также, как в [3, 8].

**З а к л ю ч е н и е .** Предложена методика построения фундаментальной матрицы с выделением регулярной и погранслойной частей для линейной разнотемповой системы управления, когда заданный матричный коэффициент порядка  $n$  имеет  $k$  ( $k \leq n$ ) линейно независимых собственных векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{h}_1$ , соответствующих собственным значениям  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , и минимальный многочлен  $\varphi(\lambda)$  этой матрицы имеет непростые корни, явно зависящие от этих собственных значений и малого параметра.

## Цитированная литература

1. Шаршеналиев Ж.Ш., Мамытов Дж. // Мехатроника, автоматизация, управление. 2004. №8. С. 12 – 16.
2. Шаршеналиев Ж.Ш., Мамытов Дж. // Мехатроника, автоматизация, управление. 2006. №4. С. 13 – 16.
3. Мамытов Дж., Шаршеналиев Ж.Ш. // Мехатроника, автоматизация, управление. 2006. №12. С. 8 – 12.
4. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М., 1968.
5. Зубов В.И. Лекции по теории управления. М., 1975.
6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1981.
7. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М., 1971.
8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1967.
9. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М., 1966.
10. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. М., 1970.
11. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М., 1980.
12. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М., 1989.
13. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М., 1978.

Поступила в редакцию 12.11.2007г.

УДК 004.056.5

## ПРОЦЕДУРА ХЭШИРОВАНИЯ В НЕТРАДИЦИОННОМ АЛГОРИТМЕ ФОРМИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННОЙ ЦИФРОВОЙ ПОДПИСИ

С. Е. НЫСАНБАЕВА

Институт проблем информатики и управления МОН РК  
050010 г. Алматы ул. Пушкина, 125 [nyssanbayeva@ipic.kz](mailto:nyssanbayeva@ipic.kz)

В статье описаны процедуры хэширования и шифрования хэш-значения алгоритма формирования электронной цифровой подписи, который позволяет обнаруживать и исправлять одиночные и выявлять многократные ошибки.

Одной из основных задач безопасности информации является проблема обеспечения ее целостности. Решение этой задачи возможно с помощью средств, позволяющих обнаруживать и исправлять не только случайные, но и преднамеренные искажения (ошибки). Разработка таких средств основана на внесении избыточности в передаваемую или хранимую информацию (или сообщение) по аналогии с методами кодирования. Главное отличие используемых для этого алгоритмов и методов состоит в том, что они являются криптографическими. Примером применения методов теории кодирования в криптографии является электронная цифровая подпись (ЭЦП). Избыточность в этом случае вводится за счет сжатия сообщения, результатом которого является более короткий текст. Сжатие или сворачиваемость информации осуществляется применением некоторой односторонней функции, называемой хэш-функцией. В результате шифрования короткого текста или хэш-значения некоторым криптографическим методом получаем ЭЦП.

В работе описываются процедуры хэширования и шифрования хэш-значения алгоритма формирования ЭЦП, построенного с использованием нетрадиционного подхода. Нетрадиционность означает использование непозиционной полиномиальной системы счисления (НПСС или системы остаточных классов, или модулярной арифметики), в которой основаниями являются не простые числа ([1], с.13), а неприводимые полиномы над полем  $GF(2)$  [2]. НПСС, позволяют повысить криптостойкость алгоритмов шифрования и сократить длину хэш-значений и цифровой подписи. В этом случае в качестве критерия используется не длина ключа, а криптостойкость алгоритма, зависящая от длины ключевой последовательности, выбранной системы

---

Keywords: *semiperiodic boundary value problem, nonlinear hyperbolic equation, isolated solution*

2000 Mathematics Subject Classification: 42A16

© С. Е. Нысанбаева, 2007.

полиномиальных оснований и их расположения, то есть от полного ключа [3-5]. Отличительной особенностью предложенного алгоритма является совмещение в нем процедуры создания ЭЦП с процедурой обнаружения и исправления одиночной ошибки и выявления многократных ошибок.

Построение НПСС основано на великой китайской теореме об остатках и осуществляется следующим образом. Обозначим выбранные полиномиальные основания непозиционной системы счисления (рабочие, информационные) через  $p_1(x), p_2(x), \dots, p_S(x)$ , а их степени соответственно через  $m_1, m_2, \dots, m_S$ . Эти основания образуют одну систему оснований; если изменить порядок их расположения, то получим другую систему оснований. В соответствии с великой китайской теоремой об остатках эти основания должны быть различными, в том числе и для полиномов одной степени. В НПСС основным рабочим диапазоном является многочлен  $P_S(x) = p_1(x)p_2(x)\dots p_S(x)$  степени  $m = \sum_{i=1}^S m_i$  и любой многочлен  $F(x)$ , степень которого меньше  $m$ , записывается единственным образом в виде

$$F(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_S(x)), \quad (1)$$

где  $F(x) \equiv \alpha_i(x) \pmod{p_i(x)}$ . Восстановление позиционного представления полинома  $F(x)$  по его непозиционному виду (1) при хранении и передаче информации проводится по формуле [2]:

$$F(x) = \sum_{i=1}^S \alpha_i(x)P_i(x), \quad \text{где } P_i(x) = \frac{P_S(x)}{p_i(x)}. \quad (2)$$

Электронное сообщение длиной  $N$  бит интерпретируется в НПСС, как последовательность остатков от деления некоторого многочлена, обозначим его также  $F(x)$ , соответственно на рабочие основания  $p_1(x), p_2(x), \dots, p_S(x)$  степени не выше  $N$ , т.е. в виде (1). Система этих оснований выбирается из числа всех неприводимых полиномов степени от  $m_i$  до  $m_S$  из условия выполнения уравнения

$$k_1m_1 + k_2m_2 + \dots + k_Sm_S = N, \quad (3)$$

где  $k_i$ ,  $0 \leq k_i \leq n_i$  – неизвестные коэффициенты,  $n_i$  – количество всех неприводимых многочленов степени  $m_i$ ,  $1 \leq m_i \leq N$ ,  $S = k_1 + k_2 + \dots + k_S$  – число выбранных оснований. Уравнение (3) определяет количество  $S$  оснований, вычеты по которым покрывают длину заданного сообщения. Полные системы вычетов по модулям многочленов степени  $m_i$  включают в себя все полиномы степени не выше  $m_i - 1$ , для записи которых необходимы  $m_i$  бит ([6], с.192).

Количество неприводимых многочленов с увеличением их степени существенно возрастает (таблица 1), а из этого следует, что уравнение (3) имеет широкий спектр решений.

Таблица 1. Число неприводимых полиномов над полем  $GF(2)$

Степень полиномов	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Количество полиномов	1	1	2	3	6	9	18	30	56	120	124	488	972	1938	3876	7749

Формирование цифровой подписи на базе модулярной арифметики для электронного сообщения заданной длины  $N$  бит производится в три этапа:

1. из непозиционного вида (1) восстанавливается позиционное представление многочлена  $F(x)$  по формуле (2), в связи с этим выбирается система рабочих полиномиальных оснований для подписываемого сообщения в соответствии с уравнением (3);

2. осуществляется сжатие (хэширование) сообщения до длины  $N_k$ : для этого вводятся избыточные (дополнительные или контрольные) основания из множества всех неприводимых многочленов степени не выше  $N_k$  и определяются избыточные вычеты по модулям этих оснований;

3. шифрование полученного хэш-значения, результат которого – ЭЦП длиной  $N_k$  бит.

Начальный этап описывается процедурой выбора рабочих оснований в НПСС.

На втором этапе вычисляется собственно хэш-значение, которое составляется из избыточных вычетов.

При выполнении третьего этапа для шифрования хэш-значения выбирается система полиномиальных оснований степени не выше  $N_k$  и последовательность их расположения, а также генерируется ключевая последовательность длиной  $N_k$  [3].

На первом и третьем этапах основания, рабочие и для шифрования хэш-значения выбираются независимо друг от друга, но среди них могут быть и совпадающие. Процедура хэширования определяет выбор дополнительных оснований и соответственно различные алгоритмы формирования ЭЦП. В предлагаемом алгоритме выбирается только одно избыточное основание  $p_{S+1}(x)$  из числа всех неприводимых многочленов степени меньше  $N_k$ . Затем определяются три избыточных остатка (вычета)  $\alpha_{S+1}(x)$ ,  $\alpha_{S+2}(x)$ ,  $\alpha_{S+3}(x)$ . В этом указанном порядке из них составляется двоичная последовательность, которая и есть хэш-значение из  $N_k$  бит. Дополнительные вычеты используются не только для создания ЭЦП, но и для обнаружения и коррекции одиночной ошибки и выявления многократной ошибки и задаются следующим образом:

$$\alpha_{S+1}(x) = \sum_{i=1}^S |i\alpha_i(x)|_{p_{S+1}(x)}, \quad (4)$$

$$\alpha_{S+2}(x) = \sum_{i=1}^S \alpha_i(x), \quad (5)$$

$$\alpha_{S+3}(x) = \sum_{i=1}^S |\alpha_i(x)P_i(x)|_{p_{S+1}(x)}. \quad (6)$$

В формуле (4) – (6) и далее знак  $\sum$  означает сложение по модулю 2. В формуле (4) остаток берется по модулю дополнительного основания  $p_{S+1}(x)$  от суммы произведений рабочих вычетов на их порядковые номера,  $|i\alpha_i(x)|_{p_{S+1}(x)}$  – вычет указанного выражения по модулю избыточного основания (или вычет по модулю  $p_{S+1}(x)$ ). Выражение (5) определяет второй дополнительный вычет – это поразрядная сумма всех рабочих вычетов по модулю 2. По формуле (6) вычисляется третий избыточный вычет по модулю дополнительного основания от позиционного представления многочлена  $F(x)$  в соответствии с формулой (2). После введения избыточных вычетов выражение (2) будет иметь вид (расширение многочлена  $F(x)$  на избыточные вычеты):

$$F(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_j(x), \dots, \alpha_S(x), \alpha_{S+1}(x), \alpha_{S+2}(x), \alpha_{S+3}(x)).$$

Рассмотрим теперь процедуру обнаружения и исправления одиночной ошибки в сообщении, то есть в рабочих вычетах. Пусть она произошла, например, по  $j$ -му основанию  $p_j(x)$ . Тогда избыточные вычеты (4) – (6) изменят свои значения на  $\alpha_{S+1}^*(x)$ ,  $\alpha_{S+2}^*(x)$ ,  $\alpha_{S+3}^*(x)$ . Ошибка – это любое искажение вычета  $\alpha_j(x)$  по модулю  $p_j(x)$ , и ее величина может быть равна любому элементу из полной системы вычетов по модулю  $p_j(x)$ ,  $1 \leq j \leq S$ . Тогда  $F(x)$  представится в виде

$$F(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \bar{\alpha}_j(x), \dots, \alpha_S(x), \alpha_{S+1}^*(x), \alpha_{S+2}^*(x), \alpha_{S+3}^*(x)),$$

где  $\bar{\alpha}_j(x)$  принадлежит полной системе вычетов по модулю полинома  $p_j(x)$ .

Для выявления и коррекция одиночной ошибки используются два избыточных вычета [1,2]. В предлагаемом алгоритме это – вычеты (4) и (5). Представим искаженный вычет в виде суммы правильного вычета и ошибки  $\bar{\alpha}_j(x) = \alpha_j(x) + \Delta_j(x)$ , где  $\Delta_j(x)$  – величина ошибки. Если в хранимом или передаваемом сообщении обнаружена ошибка  $\Delta_j(x)$ , то система (4) – (5) запишется в виде

$$\alpha_{S+1}^*(x) = \sum_{i=1}^S |i\alpha_i(x)|_{p_{S+1}} \oplus |j\Delta_j(x)|_{p_{S+1}(x)}, \quad \alpha_{S+2}^*(x) = \sum_{i=1}^S \alpha_i(x) \oplus \Delta_j(x). \quad (7)$$

Вычтем (4) – (5) соответственно из первого и второго уравнений (7):

$$\alpha_{S+1}^*(x) \oplus \alpha_{S+1}(x) = |j\Delta_j(x)|_{p_{S+1}(x)}, \quad \alpha_{S+2}^*(x) \oplus \alpha_{S+2}(x) = \Delta_j(x). \quad (8)$$

Для полученных невязок введем обозначения:

$$\xi(x) = \alpha_{S+1}^*(x) \oplus \alpha_{S+1}(x), \quad \eta(x) = \alpha_{S+2}^*(x) \oplus \alpha_{S+2}(x). \quad (9)$$

Тогда система (8) переписывается в виде

$$\xi(x) = |j\Delta_j(x)|_{p_{S+1}(x)}, \quad \eta(x) = \Delta_j(x). \quad (10)$$

Как видно из системы (10), величина ошибки определяется вторым ее уравнением, а номер ошибочного основания находится из первого уравнения путем умножения его на инверсный многочлен  $\Delta_j^{-1}(x)$ .

Кратность ошибки проверяется по значению третьего вычета  $\alpha_{S+3}(x)$  до и после обнаружения и коррекции одиночной ошибки: если эти значения не совпадают, то выявленная ошибка многократна.

В работе [7] показана однозначность процедуры обнаружения и исправления ошибок: каждой ошибке  $\Delta_j(x)$  соответствует одна и только одна пара невязок (9).

Искаженными могут оказаться не только информационные вычеты. Для ошибок в контрольных вычетах возможны следующие варианты.

1. Ошибочным является один из двух первых вычетов  $\alpha_{S+1}(x)$  и  $\alpha_{S+2}(x)$ .

При проверке ЭЦП окажется отличной от нуля невязка по ошибочному вычету, другие две невязки будут равны нулю. После проверки ЭЦП ошибочный вычет исправляется заменой вновь вычисленным. Если в этом случае ошибка произошла также и в третьем контрольном вычете  $\alpha_{S+3}(x)$ , то ошибочные вычеты заменяются на вновь вычисленные.

2. Ошибочными являются оба первых вычета  $\alpha_{S+1}(x)$  и  $\alpha_{S+2}(x)$ .

Тогда по этим вычетам обе невязки отличны от нуля, а это – вариант ошибки в информационном вычете сообщения. Поэтому ищем ошибку, как одиночную, по информационному основанию и исправляем ее, то есть правильный вычет заменяется на неверный, и таким образом, вносится третья ошибка. Проверка третьего вычета  $\alpha_{S+3}(x)$  покажет, что невязка по вычету  $\alpha_{S+3}(x)$  отлична от нуля. Значит, ошибка неединична.

Неверными могут оказаться все три избыточных вычета  $\alpha_{S+1}(x)$ ,  $\alpha_{S+2}(x)$  и  $\alpha_{S+3}(x)$ . В этом случае поступаем также.

Таким образом, если ошибка произошла в одном из вычетов  $\alpha_{S+1}(x)$  и  $\alpha_{S+2}(x)$ , то она исправляется, как в пункте 1, если же ошибочны оба этих вычета, то поступаем также, как и в пункте 2.

При шифровании хэш-значения длины  $N_k$  формируется полный ключ из системы оснований  $r_1(x), r_2(x), \dots, r_W(x)$  с учетом их перестановок и ключа (сгенерированной псевдослучайной последовательности) [3]. Обозначим степени и число неприводимых многочленов, используемых при выборе оснований  $r_1(x), r_2(x), \dots, r_W(x)$ , соответственно  $b_1, b_2, \dots, b_W$  и  $l_1, l_2, \dots, l_W$ .

Из аналога уравнения (3)

$$v_1 b_1 + v_2 b_2 + \dots + v_W b_W = N_k \quad (11)$$

находятся  $W$  оснований системы, запись вычетов по которым покрывает шифруемое хэш-значение длины  $N_k$ . Здесь  $v_i$ ,  $0 \leq v_i \leq l_i$  – неизвестные коэффициенты,  $1 \leq b_i \leq N_k$ ,  $W = v_1 + v_2 + \dots + v_W$ .

Тогда хэш-значение интерпретируется как последовательность остатков  $\gamma_1(x)$ ,  $\gamma_2(x), \dots, \gamma_W(x)$  от деления некоторого многочлена  $F_1(x)$  на выбранные основания  $r_1(x)$ ,  $r_2(x), \dots, r_W(x)$ . Ключевая последовательность генерируется длиной  $N_k$  и интерпретируется как последовательность остатков  $\eta_1(x), \eta_2(x), \dots, \eta_W(x)$  от деления некоторого полинома  $G_1(x)$  на те же основания  $r_1(x), r_2(x), \dots, r_W(x)$ . Тогда полученная в результате шифрования криптограмма  $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_W(x)$  может быть представлена как некоторая функция  $H_1(F_1(x), G_1(x))$ . При реализации алгоритма шифрования используется конкретный метод шифрования на базе непозиционной полиномиальной системы счисления.

Поскольку ошибки могут произойти и в ЭЦП, то есть в избыточных вычетах, то основания для шифрования хэш-значения должны выбираться такими, чтобы длины вычетов по их модулям совпадали с длинами соответствующих контрольных остатков, то есть

1) оснований для шифрования хэш-значения будет три  $r_1(x), r_2(x), r_3(x)$ , удовлетворяющих уравнению (11);

2) каждая из пар элементов  $\alpha_{S+1}(x)$  и  $\gamma_1(x)$ ,  $\alpha_{S+2}(x)$  и  $\gamma_2(x)$ ,  $\alpha_{S+3}(x)$  и  $\gamma_3(x)$  должна принадлежать одной и той же полной системе вычетов.

В противном случае при произвольном выборе оснований  $r_1(x), r_2(x), r_3(x)$  при наличии одиночной ошибки в цифровой подписи она может быть идентифицирована как многократная. Проиллюстрируем это примером, приведенном на рисунке 1, в котором для шифрования выбраны четыре вычета  $r_1(x), r_2(x), r_3(x), r_4(x)$ . Тогда хэш-значение представляется соответствующими вычетами  $\gamma_1(x), \gamma_2(x), \gamma_3(x), \gamma_4(x)$ .

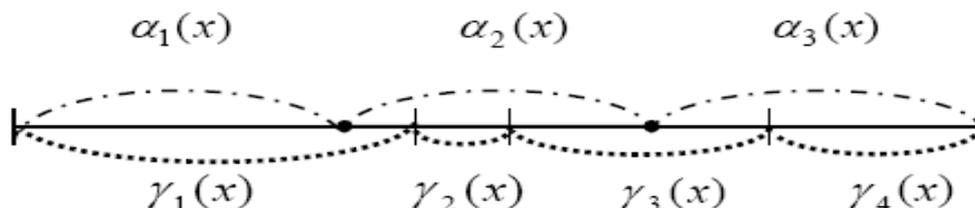


Рисунок 1. Пример хэширования и шифрования полученного хэш-значения.

Положение избыточных вычетов  $\alpha_{S+1}(x)$ ,  $\alpha_{S+2}(x)$ ,  $\alpha_{S+3}(x)$  на рис. 1 отмечено штрихпунктирной линией, а вычетов для шифрования  $\gamma_1(x)$ ,  $\gamma_2(x)$ ,  $\gamma_3(x)$ ,  $\gamma_4(x)$  – пунктирной линией. Если, например, ошибка произойдет по первому избыточному вычету, то при шифровании хэш-значения она попадет в вычет  $\gamma_1(x)$ , длина которого включает  $\alpha_{S+1}(x)$  и часть  $\alpha_{S+2}(x)$ . При проверке ЭЦП сравниваются два хэш-значения, полученные от 1) хэширования сообщения и 2) расшифрования подписи. Поэтому во втором хэш-значении или расшифрованной ЭЦП ошибочными могут стать первые два дополнительных вычета, то есть одиночность ошибки не будет подтверждена.

## Цитированная литература

1. Акушский И. Я., Юдицкий Д. И. Машинная арифметика в остаточных классах. М., 1968.

2. **Бияшев Р. Г.** Разработка и исследование методов сквозного повышения достоверности в системах обмена данными распределенных АСУ. Дис. на соиск. уч. степ. докт. тех. наук. М., 1985.
3. **Амербаев В. М., Бияшев Р. Г., Нысанбаева С. Е.** // Известия НАН РК. Сер. физ.-мат. 2005. № 3. С. 84 – 89.
4. **Бияшев Р. Г., Нысанбаева С. Е.** // Известия НАН РК. Сер. физ.-мат. 2006. № 5. С. 56 – 61.
5. **Бияшев Р. Г., Нысанбаева С. Е.** // Материалы VIII межд. научно-практ. конф. "Информационная безопасность". Таганрог, 2006. С. 66 – 69.
6. **Моисил Гр. К.** Алгебраическая теория дискретных автоматических устройств. М., 1963.
7. **Бияшев Р. Г., Нысанбаева С. Е.** // Комплексная защита информации. Материалы XI Межд.конф. Минск., 2007. С. 51 – 54.

*Поступила в редакцию 11.09.2007г.*

УДК 517.946

## О РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ

А. В. Роговой

Южно-Казахстанский гуманитарный институт им. М.Сапарбаева  
486001 Шымкент, ул. Мадели кожа, б/н, rog2005@list.ru

В работе рассмотрена однородная задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. Доказано существование разрывного решения этой задачи для широкого класса контуров. Изучены важные частные случаи задачи Трикоми.

В конечной области  $\Omega \subset R^2$ , ограниченной при  $y < 0$  характеристиками  $AC : x + y = 0$  и  $BC : x - y = 1$ , а при  $y > 0$  – кривой Ляпунова

$$\sigma_\delta = \left\{ (x, y) : \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + (y + \delta)^2 = \frac{1}{4} + \delta^2, y > 0 \right\},$$

рассмотрим однородную задачу Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе

$$\operatorname{sgn} y u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (1)$$

$$u|_{\sigma_\delta \cup AC} = 0, \quad (2)$$

причем должны выполняться следующие условия "склеивания" решения на линии изменения типа уравнения  $\{y = 0\}$ :

$$u(x, +0) = u(x, -0), \quad (3)$$

$$u_y(x, +0) = u_y(x, -0). \quad (4)$$

В работах [1]-[2] для более общего уравнения Геллерстедта

$$\operatorname{sgn} y |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0$$

было показано существование разрывного решения однородной задачи Трикоми в случае, если  $m > 2$ , а углы подхода кривой Ляпунова к линии изменения типа уравнения достаточно велики.

Оказалось, что этот результат можно значительно усилить, а существование разрывного решения задачи Трикоми имеет место даже для случая уравнения (1) (при  $m = 0$ ) и малых углах подхода.

---

Keywords: *mixed type equation, Tricomi problem, non continuous solution, complex functions theory*

2000 Mathematics Subject Classification: 35M10

© А. В. Роговой, 2007.

Отметим, что, очевидно, функция  $u_0 \equiv 0$  будет решением задачи (1) – (2), причем выполнены условия (3) – (4).

Покажем, что в случае тех контуров  $\sigma_\delta$ , для которых параметр  $\delta$  может быть представлен в виде

$$\delta = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left( \frac{4p-1}{4n} \cdot \pi \right), \quad n = 1, 2, \dots; \quad p = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

задача (1) – (2) будет, кроме того, иметь разрывное в точке  $B(1, 0)$  решение, причем выполнены условия (3) – (4).

Обозначим

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad (6)$$

$$u_y(x, 0) = \nu(x). \quad (7)$$

В гиперболической части области  $\Omega^-$  рассмотрим задачу Коши-Гурса (Дарбу)

$$u_{xx} - u_{yy} = 0,$$

$$u|_{AC} = 0,$$

$$u_y|_{AB} = \nu(x).$$

В характеристических переменных

$$\begin{cases} \xi = x + y, \\ \eta = x - y \end{cases}$$

задача Дарбу запишется следующим образом:

$$u_{\xi\eta} = 0,$$

$$u|_{\xi=0} = 0,$$

$$(u_\xi - u_\eta)|_{AB} = \nu(\xi).$$

Общее решение уравнения запишется в виде

$$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta).$$

Учитывая первое краевое условие, получим

$$u|_{\xi=0} = \varphi(0) + \psi(\eta) = 0 \Rightarrow \psi(\eta) = -\varphi(0) \Rightarrow u = \varphi(\xi) - \varphi(0).$$

Учитывая второе краевое условие, имеем

$$\varphi_\xi = \nu(\xi).$$

Таким образом, получим

$$u = \int_0^\xi \nu(t) dt = \int_0^{x+y} u_y(t, 0) dt. \quad (8)$$

На линии изменения типа уравнения  $\{y = 0\}$  имеем

$$u(x, 0) = \int_0^x u_y(t, 0) dt. \quad (9)$$

Таким образом, соотношение (9) представляет собой условие, эквивалентное условию  $u|_{AC} = 0$  в гиперболической части области.

В эллиптической части  $\Omega^+$  рассмотрим следующую задачу: найти решение уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (*)$$

удовлетворяющее, в силу постановки задачи Трикоми и полученному соотношению (9) краевым условиям

$$\begin{aligned} u|_{\sigma_\delta} &= 0, \\ u(x, 0) &= \int_0^x u_y(t, 0) dt. \end{aligned} \quad (**)$$

Сделаем следующую замену переменных

$$\begin{cases} 1 - x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x = 1 - r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases}$$

а также

$$\begin{cases} r = \sqrt{(1-x)^2 + y^2}, \\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{1-x}. \end{cases}$$

В результате уравнение контура  $\sigma_\delta$  запишется, как  $r = \cos \varphi - 2\delta \sin \varphi$ , а задача (\*) – (\*\*) преобразуется к виду

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0, \quad (10)$$

$$u(r, 0) = - \int_0^{\eta^r} \frac{u_\varphi(t, 0)}{t} dt, \quad (11)$$

$$u|_r = \cos \varphi - 2\delta \sin \varphi = 0. \quad (12)$$

Будем искать решение уравнения (10) в виде

$$u(r, \varphi) = r^k \Phi(\varphi).$$

Из уравнения (10) для определения функции  $\Phi(\varphi)$  получим

$$\Phi''(\varphi) + k^2 \Phi(\varphi) = 0,$$

откуда

$$\Phi(\varphi) = c_1 \cos k\varphi + c_2 \sin k\varphi.$$

Подставив решение

$$u(r, \varphi) = r^k (c_1 \cos k\varphi + c_2 \sin k\varphi)$$

в условие (11), получим

$$c_1 = -c_2 = c,$$

следовательно,

$$u(r, \varphi) = cr^k (\cos k\varphi - \sin k\varphi).$$

Таким образом, всякая функция вида

$$u_k(r, \varphi) = c_k r^k (\cos k\varphi - \sin k\varphi), \quad (13)$$

где  $k$  – любое вещественное число,  $c_k$  – константа, будет решением уравнения (10), удовлетворяющим краевому условию (11). В силу однородности уравнения (10) и условия (11), то же относится и к любой линейной комбинации функций вида (13).

Рассмотрим следующую функцию

$$u_n(r, \varphi) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \frac{\cos k\varphi + \sin k\varphi}{r^k}, \quad (14)$$

где

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

В силу сказанного выше, функция (14) удовлетворяет уравнению (1) и краевому условию (11) (вместо  $k$  рассматривается  $-k$ ). Покажем, что она удовлетворяет и краевому условию (12) для тех контуров, у которых параметр  $\delta$  определяется соотношением (5).

Для этого нам достаточно показать в силу представления (14) и краевого условия (12), что

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \frac{\cos k\varphi + \sin k\varphi}{(\cos \varphi - 2\delta \sin \varphi)^k} = 0, \quad (15)$$

где  $\delta$  определяется соотношением (5).

Рассмотрим предварительно следующее выражение

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \frac{\cos k\varphi + i \sin k\varphi}{(\cos \varphi - 2\delta \sin \varphi)^k} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k 1^{n-k} \left( \frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\cos \varphi - 2\delta \sin \varphi} \right)^k = \\ &= \left( 1 - \frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\cos \varphi - 2\delta \sin \varphi} \right)^n = \left( \frac{\cos \varphi - 2\delta \sin \varphi - \cos \varphi - i \sin \varphi}{\cos \varphi - 2\delta \sin \varphi} \right)^n = \\ &= (-1)^n \frac{(2\delta + i)^n \sin^n \varphi}{(\cos \varphi - 2\delta \sin \varphi)^n} = \left[ -\frac{(2\delta + i) \sin \varphi}{\cos \varphi - 2\delta \sin \varphi} \right]^n. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \frac{\cos k\varphi + \sin k\varphi}{(\cos \varphi - 2\delta \sin \varphi)^k} &= \operatorname{Re} \left( \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \frac{\cos k\varphi + i \sin k\varphi}{(\cos \varphi - 2\delta \sin \varphi)^k} \right) + \\ &+ \operatorname{Im} \left( \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \frac{\cos k\varphi + i \sin k\varphi}{(\cos \varphi - 2\delta \sin \varphi)^k} \right), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \frac{\cos k\varphi + \sin k\varphi}{(\cos \varphi - 2\delta \sin \varphi)^k} = \frac{(-1)^n}{(\cos \varphi - 2\delta \sin \varphi)^n} (\operatorname{Re}(2\delta + i)^n + \operatorname{Im}(2\delta + i)^n). \quad (16)$$

Так как  $\delta$  определяется из соотношения (5), то

$$(2\delta + i)^n = \left( \operatorname{ctg} \frac{4p-1}{4n} \pi + i \right)^n = \left( \frac{\cos \frac{4p-1}{4n} \pi + i \sin \frac{4p-1}{4n} \pi}{\sin \frac{4p-1}{4n} \pi} \right)^n =$$

$$= \frac{\cos(p\pi - \frac{\pi}{4}) + i \sin(p\pi - \frac{\pi}{4})}{\sin^n \frac{4p-1}{4n} \pi},$$

следовательно, учитывая что  $p = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(2\delta + i)^n + \operatorname{Im}(2\delta + i)^n &= \frac{\cos(p\pi - \frac{\pi}{4}) + \sin(p\pi - \frac{\pi}{4})}{\sin^n \frac{4p-1}{4n} \pi} = \\ &= \frac{(-1)^p \cos \frac{\pi}{4} + (-1)^{p+1} \sin \frac{\pi}{4}}{\sin^n \frac{4p-1}{4n} \pi} = (-1)^p \frac{\cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4}}{\sin^n \frac{4p-1}{4n} \pi} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в силу (16) получим, что соотношение (15) доказано, то есть в случае рассматриваемого класса контуров функция (14) будет решением задачи в эллиптической части области.

Переходя от переменных  $r, \varphi$  к исходным переменным  $x, y$ , получим представление решения однородной задачи Трикоми в эллиптической части области

$$y > 0: \quad u(x, y) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \frac{\cos(k \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{1-x}) + \sin(k \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{1-x})}{((1-x)^2 + y^2)^{\frac{k}{2}}}, \quad (17)$$

или, учитывая формулы [3, с. 41, 62]

$$\sin nx = C_n^1 \cos^{n-1} x \sin x - C_n^3 \cos^{n-3} x \sin^3 x + C_n^5 \cos^{n-5} x \sin^5 x - \dots,$$

$$\cos nx = C_n^0 \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} x \sin^4 x - \dots,$$

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\operatorname{arctg} x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

получим следующее представление

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \frac{(1-x)^k + k(1-x)^{k-1}y - C_k^2(1-x)^{k-2}y^2 - \dots}{((1-x)^2 + y^2)^k}. \quad (18)$$

Из представления (18) по формуле (8) восстановим значение функции  $u(x, y)$  в гиперболической части области. В результате получим

$$y < 0: \quad u(x, y) = \left(1 - \frac{1}{1-x-y}\right)^n = (-1)^n \left(\frac{x+y}{1-x-y}\right)^n. \quad (19)$$

В итоге, сопоставляя формулы (17), (18), (19) и обобщая проведенные выше рассуждения, получим, что функция

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \frac{(1-x)^k + k(1-x)^{k-1}y - C_k^2(1-x)^{k-2}y^2 - \dots}{((1-x)^2 + y^2)^k}, \quad y > 0, \quad (20)$$

является решением однородной задачи Трикоми (задачи (1) – (4)) для контуров, у которых параллель  $\delta$  удовлетворяет соотношению (5). Но, как легко видеть, функция (20) имеет разрыв в точке  $B(1, 0)$ . Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** В случае тех контуров  $\sigma_\delta$ , для которых параметр  $\delta$  может быть представлен в виде (5), существует ненулевое разрывное в точке  $B(1, 0)$  решение однородной задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе (задачи (1) – (4)), которое представляется по формуле (20).

Теорему 1 можно проиллюстрировать на следующих примерах, полагая  $n = 1$  (в этом случае  $p = 1$ ),  $n = 2$  ( $p = 1$  и  $p = 2$ ) и  $n = 3$  ( $p = 1$ ,  $p = 2$  и  $p = 3$ ).

**Пример 1.** При  $n = 1$  контур  $\sigma_\delta$  запишется в виде

$$\sigma_\delta = \left\{ (x, y) : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}, y > 0 \right\},$$

а решение

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{\frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y + \frac{1}{2}\right)^2}{(1-x)^2 + y^2}, & y > 0, \\ -\frac{x+y}{1-x-y}, & y < 0, \end{cases}$$

очевидно, удовлетворяет уравнению (1), краевым условиям (2) и условиям согласования (3) – (4), что можно показать простой подстановкой.

**Пример 2.** При  $n = 2$  решение

$$u(x, y) = \begin{cases} 1 - 2\frac{1-x+y}{(1-x)^2 + y^2} + \frac{(1-x)^2 + 2(1-x)y - y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2}, & y > 0, \\ 1 - 2\frac{1}{1-x-y} + \frac{1}{(1-x-y)^2}, & y < 0, \end{cases}$$

удовлетворяет однородной задаче Трикоми (1) – (4) сразу для двух контуров

$$\sigma_{\delta_1} = \left\{ (x, y) : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2, y > 0 \right\},$$

и

$$\sigma_{\delta_2} = \left\{ (x, y) : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2, y > 0 \right\}.$$

**Пример 3.** Наконец, при  $n = 3$  функция

$$u(x, y) = \begin{cases} 1 - 3\frac{1-x+y}{(1-x)^2 + y^2} + 3\frac{(1-x)^2 + 2(1-x)y - y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2} - \frac{(1-x)^3 + 3(1-x)^2y - 3(1-x)y^2 - y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3}, & y > 0, \\ 1 - 3\frac{1}{1-x-y} + 3\frac{1}{(1-x-y)^2} - \frac{1}{(1-x-y)^3}, & y < 0, \end{cases}$$

удовлетворяет однородной задаче Трикоми (1) – (4) для трех следующих контуров

$$\sigma_{\delta_1} = \left\{ (x, y) : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}, y > 0 \right\},$$

$$\sigma_{\delta_2} = \left\{ (x, y) : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2, y > 0 \right\},$$

и

$$\sigma_{\delta 3} = \left\{ (x, y) : \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( y - \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} + \left( \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right)^2, y > 0 \right\}.$$

Отметим, что, взяв достаточно большое  $n$  и полагая  $p = 1$  в соотношении (5), мы можем получить существование разрывного решения задачи (1) – (4) в случае тех контуров, угол подхода которых к линии изменения типа уравнения очень мал и даже близок к 0.

### Цитированная литература

1. **Роговой А. В.** // Вестник КазНУ им. Аль-Фараби. Серия математика, механика, информатика. 2002. № 5(33). С. 50 – 56.
2. **Роговой А. В.** Решение задачи Трикоми для уравнений смешанного типа методом преобразований Меллина. Автореферат канд. диссертации. Шымкент, 2004. С. 26
3. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962.

*Поступила в редакцию 26.06.2007г.*

УДК 517.51

## К 75-ЛЕТИЮ ПРОФЕССОРА С.А.ТЕЛЯКОВСКОГО. О МЕТОДАХ ЧЕЗАРО И РИССА

Л. П. ФАЛАЛЕЕВ

Институт математики МОН РК  
050010 г.Алматы ул.Пушкина, 125 flp@math.kz

Исследуется уклонение в равномерной метрике непрерывных функций и им тригонометрически сопряженных от сумм Чезаро и Рисса. В соответствующих асимптотических оценках найдены константы Колмогорова-Никольского высокого порядка на подклассах непрерывных функций.

Изучение асимптотического поведения величин

$$\Delta_n^\beta(M) = \sup_{f \in M} \|f(x) - \sigma_n^\beta(f, x)\|_{C_{2\pi}}, \quad (1)$$

где  $\sigma_n^\beta(f, x)$  – суммы Чезаро функции  $f(x)$  для различных функциональных классов  $M$ , берет свое начало в работах С.М.Никольского [1] ( $\beta = 1$ ) и было продолжено Б.Надем. Б.Секефальви-Надь доказал, что на классах  $W^{(r)}$  ( $r = 1, 2, \dots, \beta = 1, 2, \dots$ ) и  $\widetilde{W}^{(r)}$  ( $r = 2, 3, \dots, \beta = 1, 2, \dots; r = 1, \beta = 3, 4, \dots$ ) функция, реализующая экстремум величины уклонения (1), не зависит от  $n$  и высказал предположение, что на классе  $\widetilde{W}^{(1)}$  для  $\beta = 1$  и  $\beta = 2$  экстремальная функция от  $n$  зависит. Для  $\beta = 1$  эта гипотеза была подтверждена С.Б.Стечкиным, нашедшим главный член асимптотически соответствующих верхних граней:

$$\Delta'_n(\widetilde{W}^{(1)}) = \frac{2}{\pi n} \int_0^\infty \left| \int_x^\infty \frac{\sin t}{t^2} dt \right| dx + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

С.А.Теляковский показал, что для чисел  $n$  вида  $4m + 1$  и  $4m + 2$ ,  $m = 0, 1, \dots$ , верхняя грань

$$\widetilde{\Delta}_n^2(\widetilde{W}^{(1)}) = \sup_{f \in \widetilde{W}^{(1)}} \|\sigma_n^2(f, x) - f(x)\|_{C_{2\pi}}$$

достигается на функции

$$g(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\cos(2\nu + 1)x}{(2\nu + 1)^2}.$$

В остальных случаях экстремальная функция зависит от  $n$ , но

$$\widetilde{\Delta}_n^2(\widetilde{W}^{(1)}) = |g(0) - \sigma_n^2(g, 0)| + O\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

Keywords: *Asymptotical estimate, uniform metric, function trigonometrically conjugated to  $f(x)$ , Cesaro, Riesz sum*  
2000 Mathematics Subject Classification: 42A10

© Л. П. Фалалеев, 2007.

и, в частности, имеет место асимптотическое равенство

$$\tilde{\Delta}_n^2(\tilde{W}^{(1)}) = \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ранее автором в [2, 3] была рассмотрена задача (1) для произвольных  $\beta \geq 2$ . В настоящей заметке исследуется поведение величины

$$\tilde{\Delta}_n^\beta(W^r) = \sup_{f \in W^{(r)}} \|\tilde{\sigma}_n^\beta(f, x) - \tilde{f}(x)\|_{C_{2\pi}}$$

без учета точного порядка остаточного члена, сравнение аппроксимативных свойств средних Чезаро и Рисса.

**Теорема 1.** Если  $f \in W^{(r)}$ , то для  $\beta > 1, r = 2, 3, \dots$  при  $n \rightarrow \infty$  справедливо асимптотическое равенство

$$\tilde{f}(x) - \tilde{\sigma}_n^\beta(f, x) = \beta(\tilde{f}(x) - \sigma_n^1(f, x)) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

**Доказательство.** По определению сумм Чезаро

$$\tilde{f}(x) - \tilde{\sigma}_n(f, x) = \tilde{f}(x) - \sum_{\nu=0}^n \frac{A_{n-\nu}^{\beta-1}}{A_n^\beta} \tilde{S}_\nu(f, x) = \sum_{\nu=0}^n \frac{A_{n-\nu}^{\beta-1}}{A_n^\beta} (\tilde{f}(x) - \tilde{S}_\nu(f, x)).$$

Учитывая, что  $A_n^\beta = \frac{n+\beta}{\beta} A_n^{\beta-1}$ , получим

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) - \tilde{\sigma}_n^\beta(f, x) &= \frac{\beta}{n + \beta} \sum_{\nu=0}^n \frac{A_{n-\nu}^{\beta-1}}{A_n^{\beta-1}} (\tilde{f}(x) - \tilde{S}_\nu(f, x)) = \\ &= \frac{\beta}{n + \beta} \{ \tilde{f}(x) - \tilde{S}_\nu(f, x) + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{A_{n-\nu}^{\beta-1}}{A_n^{\beta-1}} (\tilde{f}(x) - \tilde{S}_\nu(f, x)) \} + \frac{1}{A_n^{\beta-1}} (\tilde{f}(x) - \tilde{S}_n(f, x)). \end{aligned} \quad (2)$$

Пользуясь асимптотикой чисел Чезаро, преобразуем сумму в (2). Имеем

$$\frac{A_{n-\nu}^{\beta-1}}{A_n^{\beta-1}} = \frac{(n-\nu)^{\beta-1} \{1 + O(\frac{1}{n-\nu})\}}{n^{\beta-1} \{1 + O(\frac{1}{n})\}} = \frac{(n-\nu)^{\beta-1}}{n^{\beta-1}} + \frac{(n-\nu)^{\beta-2}}{n^{\beta-1}} O\left(\frac{1}{n-\nu}\right).$$

Тогда

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{A_{n-\nu}^{\beta-1}}{A_n^{\beta-1}} (\tilde{f}(x) - \tilde{S}_\nu(f, x)) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \left\{ \frac{(n-\nu)^{\beta-1}}{n^{\beta-1}} + \frac{(n-\nu)^{\beta-1}}{n^{\beta-1}} O\left(\frac{1}{n-\nu}\right) \right\} (\tilde{f}(x) - \tilde{S}_\nu(f, x)).$$

Из результатов С.М.Никольского [1] следует, что для  $f \in W^{(r)}$  равномерно по  $x$

$$\tilde{f}(x) - \tilde{S}_\nu(f, x) = O\left(\frac{\ln \nu}{\nu^r}\right), \nu \rightarrow \infty.$$

Поэтому

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{(n-\nu)^{\beta-1}}{n^{\beta-1}} O\left(\frac{1}{n-\nu}\right) (\tilde{f}(x) - \tilde{S}_\nu(f, x)) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{(n-\nu)^{\beta-2} \ln \nu}{n^{\beta-1} \nu^r} = O\left(\frac{1}{n^{\beta-1}}\right), 1 < \beta \leq 2, r = 2, 3, \dots$$

Для  $\beta > 2$  воспользуемся неравенством Коши-Буняковского

$$\frac{1}{n^{\beta-1}} \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{(n-\nu)^{\beta-2} \ln \nu}{\nu^r} \leq \frac{1}{n^{\beta-1}} \left( \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu^{2(\beta-2)} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\ln^2 \nu}{\nu^{2r}} \right)^{\frac{1}{2}} = O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Если пренебречь точным порядком остаточных членов, то для  $\beta > 1$

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{(n-\nu)^{\beta-2}}{n^{\beta-1}} (\tilde{f}(x) - \tilde{S}_\nu(f, x)) = o(1).$$

Следовательно,

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{A_{n-\nu}^{\beta-1}}{A_n^\beta} (\tilde{f}(x) - \tilde{S}_\nu(f, x)) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{(n-\nu)^{\beta-1}}{n^{\beta-1}} (\tilde{f}(x) - \tilde{S}_\nu(f, x) + o(\frac{1}{n})). \quad (3)$$

Сумму в (3) представим следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{n-1} (1 - \frac{\nu}{n})^{\beta-1} (\tilde{f}(x) - \tilde{S}_\nu(f, x)) &= \sum_{\nu=1}^{n-1} \{1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{-\beta} (\frac{\nu}{n})^k\} (\tilde{f}(x) - \tilde{S}_\nu(f, x)) = \\ &= \sum_{\nu=1}^{n-1} (\tilde{f}(x) - \tilde{S}_\nu(f, x)) + \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{-\beta} (\frac{\nu}{n})^k (\tilde{f}(x) - \tilde{S}_\nu(f, x)). \end{aligned} \quad (4)$$

Так как при  $\beta > 1$  ряд  $\sum_k A_k^{-\beta}$  абсолютно сходится, то

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{-\beta} (\frac{\nu}{n})^k (\tilde{f}(x) - \tilde{S}_\nu(f, x)) &\leq C \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} |A_k^{-\beta}| (\frac{\nu}{n})^k \frac{\ln \nu}{\nu^r} \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|A_k^{-\beta}|}{n^k} n^{k-r+1} \ln n = \\ &= C \frac{\ln n}{n^{r-1}} \sum_{k=1}^{\infty} |A_k^{-\beta}| = o(1), n \rightarrow \infty, c > 0, c = const. \end{aligned}$$

Таким образом, при  $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{-\beta} (\frac{\nu}{n})^k (\tilde{f}(x) - \tilde{S}_\nu(f, x)) = o(1), \quad (5)$$

Учитывая еще оценку

$$\frac{1}{A_n^{\beta-1}} (\tilde{f}(x) - \tilde{S}_\nu(f, x)) = O(\frac{\ln n}{n^{r+\beta-1}}),$$

из (3) – (5) получим

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) - \tilde{\sigma}_n^\beta(f, x) &= \frac{\beta}{n+\beta} \{ \tilde{f}(x) - \tilde{S}_0(f, x) + \sum_{\nu=1}^n (\tilde{f}(x) - \tilde{S}_\nu(f, x)) + o(1) \} = \\ &= \frac{\beta}{n+\beta} \sum_{\nu=0}^n (\tilde{f}(x) - \tilde{S}_\nu(f, x)) + o(\frac{1}{n}) = \beta \frac{n+1}{n+\beta} \{ \tilde{f}(x) - \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n \tilde{S}_\nu(f, x) \} + o(\frac{1}{n}) = \beta (\tilde{f}(x) - \sigma_n^1(f, x)) + o(\frac{1}{n}), \end{aligned}$$

что и доказывает теорему.

В работе [1] С.М.Никольский получил известную оценку для  $r = 2, 3, \dots$ :

$$\sup_{f \in \tilde{W}^{(r)}} \|\tilde{f}(x) - \sigma_n^1(f, x)\|_{C_{2\pi}} = \frac{K_{r-1}}{n+1} + O(\frac{1}{n^r}),$$

$$K_r = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m(r+1)}}{(2m+1)^{r+1}}$$

– константы Фавара.

Используя доказанную теорему, получим

**Следствие.** При  $n \rightarrow \infty$  для  $\beta > 1, r = 2, 3, \dots$

$$\tilde{\Delta}_n^\beta(W^{(r)}) = \frac{\beta K_{r-1}}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Сингулярный интеграл Рисса задается сверткой ( $\gamma \geq 1$ )

$$R_n^\gamma(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^n \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^\gamma \cos \nu t \right\} dt, n = 1, 2, \dots$$

С помощью множителей суммирования  $(1 - \frac{\nu}{n})^\gamma$  строятся сопряженные суммы Рисса  $\tilde{R}_n^\gamma(f, x)$ . По аналогии с теоремой 1 доказывается

**Теорема 2.** Если  $f(x) \in \tilde{W}^{(r)}, r = 2, 3, \dots$ , то для  $\gamma > 1$  при  $n \rightarrow \infty$  справедливо асимптотическое равенство

$$\tilde{f}(x) - \tilde{R}_n^\gamma(f, x) = \beta(\tilde{f}(x) - \tilde{R}_n^1(f, x)) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Автором совместно с А.Джумагуловым и А.Абдыкалыковым в разные годы (см., например, [4]) получены результаты уклонений в равномерной метрике функций из класса *Lip1* от средних Чезаро  $\sigma_n^\beta(f, x)$  и Рисса  $\tilde{R}_n^\gamma(f, x)$ . В случае  $\beta = \gamma = 1$  (средние Фейера) указанному вопросу посвящены работы [5, 6]. Из результатов этих работ следовало, что коэффициенты при  $n^{-3}$  зависят от четности или нечетности  $n$ .

**Теорема 3.** Для  $\beta = 1, 2, 3, \dots$  при  $n \rightarrow \infty$  справедливо асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} E_1(\sigma_n^\beta) &= \sup_{f \in Lip1} \|f(x) - \sigma_n^\beta(f, x)\|_{C_{2\pi}} = \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \beta \frac{\ln n}{n} + \frac{\beta}{n} (1 + c + \ln 2 - \sum_{k=1}^{\beta-1} \frac{1}{k}) - \frac{\beta(\beta+1)}{2} \frac{\ln n}{n^2} + \right. \\ &\left. \frac{1}{n^2} \frac{\beta(\beta+1)}{2} \left( \sum_{k=1}^{\beta-1} \frac{1}{k} - \ln 2 - c \right) + \frac{\beta(\beta+1)(2\beta+1)}{6} \frac{\ln n}{n^3} + \frac{1}{n^3} \varphi(\beta) \right\} + o\left(\frac{1}{n^3}\right), \end{aligned}$$

где для  $\beta = 2, 3, 4, \dots$

$$\varphi(\beta) = \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{36} + \frac{\beta(\beta+1)}{12} \left\{ (4\beta+2)(\ln 2 + c - \sum_{k=1}^{\beta-1} \frac{1}{k}) - \frac{3\beta+2}{2} \right\},$$

$$\varphi(1) = \begin{cases} \ln 2 + c - \frac{2}{3} & \text{для нечетных } n, \\ \ln 2 + c - \frac{1}{6} & \text{для четных } n. \end{cases}$$

$c$  – постоянная Эйлера.

**Теорема 4.** Для  $\gamma = 1, 2, 3, \dots$  при  $n \rightarrow \infty$  справедливо асимптотическое равенство

$$E_1(R_n^\gamma) = \sup_{f \in Lip1} \|f(x) - R_n^\gamma(f, x)\|_{C_{2\pi}} = \frac{2}{\pi} \left\{ \gamma \frac{\ln n}{n} + \frac{\gamma}{n} (1 + c + \ln 2 - \sum_{k=1}^{\gamma-1} \frac{1}{k}) + \frac{1}{n^3} \varphi(\gamma) \right\} + o\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad (6)$$

$$\varphi(1) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{для нечетных } n, \\ -\frac{1}{6} & \text{для четных } n. \end{cases}$$

$$\varphi(\gamma) = \frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)}{36}, \gamma = 2, 3, \dots$$

Как видно из (6), коэффициенты при  $n^{-3}$ , начиная с  $\gamma = 2$ , не зависят от четности или нечетности  $n$ .

### Цитированная литература

1. **С.М. Никольский** // Труды математического института им. В.А. Стеклова. 1945. Т.15. С.1 – 76.
2. **Л.П. Фалалеев** // Математические заметки. 1980. Т.28. Вып.3. С.451 – 458.
3. **Л.П. Фалалеев** // Сибирский математический журнал. 1984. Т.25, № 4. С.199 – 205.
4. **Л.П. Фалалеев** Аппроксимативные свойства линейных средних рядов Фурье. Автореферат дисс.на соиск. уч. степени доктора физ.-мат. наук. Алматы. 1993. С.33.
5. **С.А. Теляковский** // Украинский математический журнал. 1969. № 3. Вып.21. С.334 – 343.
6. **P.L. Butzer, E.L. Stark** Mat. Nachr. 1969. V. 3. P.223 – 237.

*Поступила в редакцию 12.10.2007г.*

---

ХРОНИКА

---

К 75-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ



В 2007 году исполнилось бы 75 лет крупному ученому, известному специалисту в области теории колебаний дифференциальных уравнений, член-корреспонденту НАН РК, доктору физико-математических наук, профессору Умбетжанову Даулету Умбетжановичу.

Даулет Умбетжанович родился на разъезде № 68 "Ушкарай" Оренбургской ж.д., что находится на территории аула № 1 Шалкарского района Актюбинской области. В 1950 году после окончания Шалкарской казахской средней школы Д.У.Умбетжанов поступил на физико-математический факультет Казахского государственного университета им. С.М.Кирова. Успешно окончив его в 1955 г., Д.У.Умбетжанов поступил в аспирантуру Казахского педагогического института им. Абая, откуда был направлен в МГУ им. М.В.Ломоносова для непосредственной работы по теме кандидатской диссертации под руководством одного из учеников про-

фессора В.В.Немыцкого – Р.Э.Винограда. После аспирантуры он работал в КазГУ с 1959 по 1973 годы сначала старшим преподавателем, а с 1965 года – доцентом кафедры математического анализа. В 1964 году под руководством доктора физико-математических наук, профессора В.Х.Харасахала он защитил кандидатскую диссертацию на тему "О квазипериодических и почти периодических решениях нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр". С 1965 по 1967 был заместителем декана механико-математического факультета КазГУ по научной работе. С 1973 по 1985 годы работал в Казахском государственном женском педагогическом институте заведующим кафедрой математического анализа, а с 1982 года – одновременно деканом физико-математического факультета. С августа 1985 года Д.У.Умбетжанов работал в Институте математики и механики АН КазССР в должности заведующего лабораторией сначала прикладных методов анализа, затем с 1987 года – обыкновенных дифференциальных уравнений. С 1966 года после смерти В.Х.Харасахала его первый ученик Д.У.Умбетжанов возглавляет проводимую в Казахстане научно-исследовательскую работу по проблемам теории периодических и почти периодических решений дифференциальных уравнений. На основе метода малого параметра Пуанкаре им получены явные критерии существования квазипериодических решений неавтономных и автономных систем, которые были развиты и обобщены на счетные системы, интегро-дифференциальные уравнения, обыкновенные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Разработан аналитический аппарат исследования многопериодических и почти мно-

гопериодических решений систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, содержащих различные малые параметры. Эти результаты были опубликованы в монографии "Почти многопериодические решения дифференциальных уравнений в частных производных" (изд-во "Наука" КазССР, Алма-Ата, 1979) и легли в основу его докторской диссертации, успешно защищенной в 1983 г. в Институте математики УССР. В 1984 году ему присвоено ученое звание профессора. В последующие годы Д.У.Умбетжанов исследовал почти периодические решения интегро-дифференциальных уравнений переноса, параболических и гиперболических уравнений и краевых задач для них. Полученные здесь научные выводы положены в основу новой монографии "Почти периодические решения эволюционных уравнений", которая вышла в издательстве "Наука" КазССР в 1990 году. Последние годы жизни Д.У.Умбетжанов, исследуя почти периодические в смысле Степанова решения дифференциальных уравнений с эллиптическим оператором, ввел новое функциональное пространство функций дробной гладкости от многих переменных, имеющих интегральное представление в виде свертки с матричным ядром Бесселя-Макдональда и с потенциалами из класса Степанова. Были доказаны соответствующие теоремы вложения и на их основе получены достаточные условия существования и единственности почти периодических решений по Степанову системы с положительно-определенным эллиптическим оператором в дробной степени. Он опубликовал около 130 научных работ и две монографии. Ряд его работ увидел свет на страницах журналов "Доклады РАН", "Дифференциальные уравнения", "Украинский математический журнал", "Вестник МГУ. Серия матем.", "Доклады НАН РК", "Вестник НАН РК", "Известия НАН РК. Серия физ.-матем." и др. В периодической печати и энциклопедических изданиях опубликованы его статьи и очерки о математике и математиках старшего поколения (Ю.А.Митропольский, О.А.Жаутыков, Х.И.Ибрашев, А.К.Бедельбаев, В.Х.Харасахал, А.А.Ермеков). Он уделял большое внимание подготовке научных и научно-педагогических кадров. Под его непосредственным руководством защищены 1 докторская и 18 кандидатских диссертаций. Работая в КазГУ, КазГосЖенПИ, КИМЭП и Институте математики НАН РК, он показал себя как трудолюбивый, вдумчивый ученый и педагог, инициативный руководитель, заботливый товарищ и обаятельный человек. Его лекции отличались глубокой содержательностью, простотой и доходчивостью изложения теоретического материала. В 1994 году Д.У.Умбетжанов был избран членом-корреспондентом Национальной академии наук РК. Он был членом Проблемного научного совета по математике при ОФМН НАН РК, специализированных ученых советов по защите докторских и кандидатских диссертаций, редколлегии по физико-математическим наукам при Главной редакции КСЭ. Он являлся первым Председателем экспертного совета по математике и информатике ВАК РК. За успешную и добросовестную работу он был награжден нагрудными значками "За отличные успехи в работе" МинВУЗа СССР (1982), "Отличник народного просвещения КазССР" МинВУЗа КазССР (1985), Почетными грамотами. Вместе с супругой, Нарен Косжановной, Даулет Умбетжанович воспитал и вырастил четырех дочерей: Жумагуль, Алма, Шолпан и Раушан.

30 июля 1996 года Д.У.Умбетжанов после долгой продолжительной болезни ушел из жизни. В 1997 году были приняты меры по увековечению памяти Даулета Умбетжановича Умбетжанова. Установлена мемориальная доска на стене Шалкарской казахской средней школы № 1, где он учился и его именем названа улица г.Шалкар Актюбинской области, где он жил с родителями в детские и юношеские годы. В Актюбинском областном краеведческом музее в экспозицию деятелей культуры и науки внесен и его портрет с биографической надписью и музейными принадлежностями, которые украшают его две монографии.

*Редакционная коллегия*

ХРОНИКА

ШМИДТ МУСАЕВИЧ АЙТАЛИЕВ



22 июня 2007 года ушел из жизни академик Национальной Академии Наук Республики Казахстан, заслуженный деятель науки и техники, доктор технических наук, профессор Шмидт Мусаевич Айтиалиев.

Он родился 28 января 1935 года в г. Уральске Западно-Казахстанской области в семье служащего. В 1952 году окончил с золотой медалью Джаныбекскую казахскую среднюю школу и поступил на открытое в том году отделение механики физико-математического факультета Казахского государственного университета в г. Алма-Ате. После окончания КазГУ в 1957 году был направлен в Уральский педагогический институт, где проработал три года ассистентом кафедры высшей математики.

С 1960 года вся трудовая деятельность Ш.М. Айтиалиева связана с Академией наук КазССР и НАН РК, где он вырос от младшего научного сотрудника Секто-

ра математики и механики (1960—1965) до руководителя Отделения физико-математических наук (1997—1999). На протяжении более, чем 25 лет, был заведующим лаборатории теории (сейсмостойкости) подземных сооружений Института математики и механики (1966—1976, 1987—1991), сейсмологии (1976—1986), механики и машиноведения (1991—1992); с 2003 года заведовал лабораторией механики деформируемого твердого тела в Институте механики и машиноведения им. У.А.Джолдасбекова, работал академиком-секретарем Западного Отделения НАН РК (1992—1997). Активно занимался педагогической деятельностью на условиях совместительства в Казахском государственном, ныне Национальном, университете им. Аль-Фараби (1978—1992), Казахской академии транспорта и коммуникаций (с 2000г.).

Ш.М. Айтиалиев принимал активное участие в общественной работе: был членом Президиума НАН РК (1994—1996), Коллегии Министерства Науки-АН РК, Миннауки и высшего образования (1997—1999), председателем комиссии по Госпремиям РК (1995—1999), Президиума ВАК РК (1997—1999). Он был членом Международного союза инженеров-нефтяников, Международной и Казахстанской геотехнических ассоциаций, сопредседателем Национального комитета РК по теоретической и прикладной механике, председателем Объединенного докторского диссертационного совета по механике. Избирался депутатом Фрунзенского района г. Алма-Аты (1967—1969), Атырауского областного маслихата (1994—1997).

Кандидатская диссертация защищена им в 1965г. (АН КиргССР, г.Фрунзе), докторская — в 1974г. (СО АН СССР, г.Новосибирск). Профессорское звание ему присвоено в 1980г. В 1983г. он

был избран член-корреспондентом АН КазССР по специальности "Горное дело". В 1994г. стал академиком НАН РК по специальности "Механика". В 1995г. ему присвоено почетное звание "Заслуженный деятель науки и техники Казахстана".

Ш.М. Айталиев — крупный ученый в области механики подземных сооружений, механики грунтов и горных пород, механики деформируемого твердого тела. Он создал в Казахстане свою научную школу по механике и сейсмостойкости подземных сооружений, занимался разработкой фундаментальной базы по созданию геоинформационных технологий для освоения подземного пространства.

Проводимая в Казахстане с середины прошлого века интенсивная разработка месторождений полезных ископаемых, размещение горных выработок, хранилищ и объектов разного назначения под землей, проведение подземных транспортных тоннелей и коммуникаций, магистральных газо- и трубопроводов и др. требовало научного изучения поведения таких объектов для обеспечения их прочности и надежности. В связи с этим в 60—70-х годах в Академии Наук КазССР под руководством академика АН КазССР Ж.С.Ержанова начала создаваться школа механики горных пород и подземных сооружений. Ш.М.Айталиев — достойный представитель этой школы, ее первый доктор наук. Им совместно с его учениками на основе методов математического моделирования и моделей механики сплошных сред разработаны эффективные методы расчета напряженно-деформированного состояния, прочности и устойчивости подземных сооружений и конструкций различного назначения при статических, квазистатических и динамических (сейсмических) воздействиях с учетом реальных свойств геоматериалов в их естественном залегании.

Первые работы Ш.М.Айталиева посвящены изучению реологии горного давления на основе теории наследственной ползучести Больцмана-Вольтерра, которые явились существенным вкладом в математизацию такой описательной науки как горное дело. Дальнейшие его исследования связаны с изучением закономерностей проявления горного давления в горных выработках (штреках и квершлагах) в зависимости от пространственного положения поверхностей напластования пород. Этими работами было создано принципиально новое направление исследований напряженно-деформированного состояния и прочности разноориентированных подземных сооружений в массивах мелко- и крупнослоистых пород. Результаты этих исследований вошли в общие методические положения комплексного изучения проблем горного давления, в различные ведомственные рекомендации, монографии, учебники и учебные пособия. Участвуя в совместных исследованиях с Институтом безопасности горных работ ГДР (г.Лейпциг, 1974—1987гг.), были проведены исследования по устойчивости и надежности и при проектировании отходохранилищ в соляных шахтах Германии. В 1984 году вышла совместная монография — первая из серии "Международные связи науки Казахстана".

С образованием в 1976 году Института сейсмологии АН КазССР и переводом туда его лаборатории Айталиевым были начаты интенсивные исследования по сейсмостойкости подземных сооружений. Проведенные под его руководством в 1980—1990 годах работы входили в общесоюзную научно-техническую программу "Сейсмология и сейсмостойкое строительство" Госкомитета СССР по науке и технике. Были разработаны квазистатическая теория сейсмостойкости подземных сооружений на воздействие длинных сейсмических волн и волн от дальних очагов землетрясений, динамическая теория дифракции волн с учетом многократных отражений — преломлений на конструктивных элементах подземных сооружений, численно-аналитические методы расчета напряженно-деформированного состояния сооружений и окружающего массива при вынужденных колебаниях на базе методов граничных и конечных элементов с использованием синтезированных акселерограмм землетрясений. Практическая ценность этих методов проявилась в ходе проектирования и строительства метро в Алматы. Именно на базе комплекса этих методов и разработанных на их основе пакетов прикладных программ была проведена экспертиза сейсмостойкости запроектированных конструкций перегонных, станци-

онных и эскалаторных тоннелей Алматинского метрополитена на 9–10 балльные землетрясения при отсутствии соответствующих нормативов.

Им опубликовано более 300 научных статей и сообщений и написано 12 монографий, в том числе в соавторстве с коллегами и учениками, среди них: "Конструирование и расчет набрызг-бетонной крепи" (Москва, 1971), "Сейсмонапряженное состояние подземных сооружений в анизотропном слоистом массиве" (Алма-Ата, 1980), "Оптимальное проектирование протяженных подземных сооружений" (Алма-Ата, 1986), "Динамика тоннелей и подземных трубопроводов" (Алма-Ата, 1989), "МГИУ в задачах динамики упругих многосвязных тел" (Алма-Ата, 1992), "Механика прихвата бурильных колонн в нефтегазовых скважинах" (Атырау-Алматы, 1999), "Оболочечные покрытия станций метрополитена с разрывными параметрами: статика и устойчивость" (Алма-Ата, 2003).

Среди его учеников 15 докторов и 47 кандидатов наук, среди которых имеются члены НАН РК и отраслевых академий, лауреаты Госпремий республики, обладатели международных грантов и стипендий выдающихся ученых РК.

Особый этап в научной биографии Ш.М. Айталиева представляет его переезд в г.Атырау, где он в 1992–1997 годах возглавил впервые организованное Западное региональное отделение НАН РК. Деятельность Отделения проходила в условиях жесточайшего экономического кризиса. Несмотря на это, он развертывал собственную исследовательскую базу Отделения путем создания научных центров в областях, как компактных и гибких структур с целевым назначением на решение региональных проблем. Им был организован Западно-Казахстанский региональный фонд научных исследований, установлены достаточно тесные контакты и выполнены контрактные работы с СП "Тенгизшевройл", "Казахстан: Каспийшельф", проведен симпозиум по острой проблеме трансказахстанского нефтепровода "Западный Казахстан–Кумколь" и многое другое. Там им были подняты проблемы о необходимости фундаментальных исследований влияния интенсивной и крупномасштабной разработок нефтегазовых месторождений на геодинамику Прикаспия, формирования концепции обеспечения устойчивого функционирования прибрежной инфраструктуры и создания основ механики морских сооружений.

За время его многолетней и плодотворной работы у него установились тесные научные связи со многими известными учеными и научными школами из разных регионов Советского Союза, ныне СНГ, и зарубежных стран. Ш.М.Айталиев был одним из организаторов Казахстанской геотехнической ассоциации (КГА) и в качестве председателя Научного совета КГА, он, начиная с 1997 года, был организатором проведения ряда крупных международных форумов геомехаников – геотехников (1-я Казахская национальная геотехническая конференция, Акмола, 1997; 1-й Центрально-Азиатский геотехнический симпозиум, Астана, 2000; конференция по геотехнике Каспия, Атырау, 2002; Казахстанско-Японский (Астана, 2002) и Японо-Казахстанский (Токио, Тцукуба, 2003) симпозиумы, казахстанско-русские симпозиумы (С.-Петербург, 2003; Алматы, 2004) и др.). Он был членом оргкомитетов международных конференций по механике и математике, горному делу и др. в России (Новосибирск, 2001, 2003, 2004; С.-Петербург, 2003), Кыргызстане (Бишкек 2002), Узбекистане (Самарканд, 2002), Азербайджане (Баку, 2003). В 1998г. вошел от СНГ членом научного совета международной конференции по сложным грунтам (г. Сен-дай, Япония), в 2003г. читал лекции по приглашению в Токийском университете.

В последние годы академик Ш.М.Айталиев возглавлял программу фундаментальных исследований МОН РК "Теоретические проблемы механики тектонических процессов земной коры, разработки объектов нефтегазовой и горнорудной отраслей, подземного и транспортного строительства". Он также активно занимался экспертной и редакторской деятельностью, как член редколлегии научно-технических журналов ("Известия НАН РК", "Вестник КазАТК", "Нефть и газ", "Магистраль", "Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых СО РАН"), энциклопедий, был ответственным редактором ряда монографий и трудов крупных конференций. Он автор интересных очерков о жизни и деятельности некоторых казахстанских

математиков и механиков, острых газетных статей в защиту Алматинского метрополитена.

Шмидт Мусаевич был человеком с разносторонними интересами и духовно богатым внутренним миром. Большой любитель казахской домбровой музыки, сам прекрасно играл на этом народном инструменте и даже сочинял домбровые кюи и песни. Интеллигентен, скромнен, искренен, умел посмеяться и пошутить, души не чаял в своей семье, детях и внуках. Хорошая память об этом человеке навсегда останется в памяти его друзей, учеников и коллег.

*Редакционная коллегия*

ХРОНИКА

---

**МАХМЕТ БЕРКУТБАЕВИЧ АЙДАРХАНОВ**



24 сентября 2007 г. на 60-м году жизни скоропостижно скончался известный казахстанский ученый, директор Института проблем информатики и управления МОН РК, доктор физико-математических наук, профессор, академик Международной академии информатизации Айдарханов Махмет Беркутбаевич.

Айдарханов М.Б. родился 14 января 1948 года в г.Алматы в семье служащих. Его отец — Айдарханов Беркутбай Айдарханович — участник ВОВ, доктор медицинских наук, профессор, академик Международной академии наук о природе и обществе. Является почетным председателем Казахстанского общества эндокринологов. Мать — Айдарханова Халида Фатиковна с 1951 года до ухода на пенсию проработала научным сотрудником в Институте геологических наук им. К.И. Сатпаева НАН РК.

Айдарханов М.Б. в 1971 году окончил механико-математический факультет КазГУ им. С.М.Кирова по специальности математика. В 1977 году успешно окончил целевую аспирантуру Вычислительного центра АН СССР (г. Москва) с защитой диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 — "Математическая кибернетика". Там же, в ВЦ, окончил докторантуру и в 1992 году защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук (специальность 05.13.16 — "Применение вычислительной техники, математического моделирования и математических методов в научных исследованиях"). В течение 20 лет — с 1971 по 1991 год — проработал в Институте механики и математики Академии Наук КазССР с перерывом на стажировку (1972–1974 гг.), аспирантуру (1974–1977 гг.) и научную стажировку (докторантуру) (1983–1984) Вычислительного центра Академии наук СССР, г.Москва. В 1991 году переводом перешел на работу в Институт космических исследований НАН РК, где проработал до ноября 1993 года в должности заведующего лабораторией. С декабря 1993 г. по ноябрь 1994 г. являлся зам. директора ИПИУ НАН РК, а с декабря 1994 г. — директор ИПИУ. В 1998 г. ему было присвоено ученое звание профессора по специальности 05.13.00 — Информатика, вычислительная техника и автоматизация. В 1995 г. избран академиком Международной академии информатизации, а в 1997 г. — Международной академии наук о природе и обществе (по Московскому отделению). С 2000 г. являлся членом (представителем Казахстана) Международной ассоциации UNESCO ACCESS net (ассоциация поддержки

устойчивого развития компьютерных центров и институтов информационных технологий), зарегистрированной в г.Лионе (Франция).

Им опубликовано более 140 научных работ, в том числе 5 монографий. Многие из его научных трудов опубликованы в известных международных и российских журналах: "Pattern Recognition Letters", "Pattern Recognition and Image Analysis", "Журнал вычислительной математики и математической физики", "Кибернетики и системный анализ", "Дискретная математика и ее приложения". Под его научным руководством подготовлены четыре докторских и девять кандидатских диссертаций.

Разносторонний ученый, он получил существенные результаты в разных отраслях науки. Основной областью его научных интересов являлись математические модели распознавания образов и классификаций. На базе органичного соединения результатов из теории принятия решений, теории булевых алгебр, теории нечетких множеств им были разработаны метрический и структурный подходы для построения групповых (комитетных, коллективных) классификаций для конечных и континуальных множеств объектов, основанных на использовании метрических свойств пространств классификаций, а также на впервые введенных им координатных представлениях. Глубина полученных им результатов послужила введению среди специалистов термина "метрика Айдарханова". Результатом исследований Айдарханова М.Б. являются решения приоритетных задач распознавания образов, классификаций, анализа и представления данных, в частности, задач построения эффективных математических моделей и создания универсальных алгоритмов для разработки современных информационных технологий и систем.

Помимо подготовки кадров высшей квалификации Айдарханов М.Б. уделял большое внимание образовательной деятельности. В разные годы он читал специальные курсы по математической кибернетике и информатике в ведущих ВУЗах республики. Также, надо отметить, что с 1995 года он постоянно являлся председателем государственных аттестационных (экзаменационных) комиссий (КазНУ, КазНТУ, Казахско-американский университет, Международная академия бизнеса и др.).

Айдарханов М.Б. награжден Почетной грамотой ЦК ЛКСМ Казахстана (1980), Почетной грамотой Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (1998, 1999), Нагрудным знаком "За заслуги в развитии науки в Республике Казахстан", орденом "Курмет" (2006).

В лице Айдарханова Махмета Беркутбаевича наука Казахстана потеряла одного из своих самых ярких представителей. Память о нем еще долго будет согревать душу знавших его коллег и учеников.

*С глубоким уважением к светлой памяти  
Махмета Беркутбаевича его коллеги и ученики*

ХРОНИКА

---

ПАМЯТИ АМАНГЕЛЬДЫ ИСКАКОВИЧА ОМАРОВА



2007 года безвременно ушел из жизни известный казахстанский ученый, специалист в области математической логики, доктор физико-математических наук, профессор кафедры геометрии, алгебры и математической логики КазГУ имени Аль-Фараби Амангельды Искакович Омаров.

А.И. Омаров родился в городе Уш-Тобе Талды-Курганской области в большой крестьянской семье. Все четверо его братьев как и он с детства имели тягу к науке и впоследствии сделали научную карьеру. После окончания средней школы в 1958 году в Уш-Тобе он поступил на физико-математический факультет Усть-Каменогорского пединститута и в 1960 году после окончания 2-го курса перевелся для продолжения учебы на второй курс механико-математического факультета Новосибирского Государственного университета. Завершив учебу в университете в 1964 году, он продолжает обучение в аспирантуре Новосибирского госуни-

верситета под руководством академика АН Каз.ССР Асана Дабсовича Тайманова.

В 1967 году А.И. Омаров защитил кандидатскую диссертацию на тему "О некоторых применениях фильтрованных произведений в теории моделей" посвященную актуальным проблемам математической логики. Трудовая деятельность А.И. Омарова началась с 1 ноября 1967 года на механико-математическом факультете КазГУ вначале в должности старшего преподавателя, а с 1969г. в должности доцента кафедры алгебры и математической логики. С 1978 по 1998 годы он был заведующим этой кафедры, которая позднее была переименована в кафедру геометрии, алгебры и математической логики и до конца своих дней являлся профессором этой кафедры.

А.И. Омаров в 1992 году блестяще защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук на тему "Р-формулы и булевы конструкции в теории моделей и универсальной алгебре" по специальности 01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел в диссертационном совете Института математики СО АН СССР.

Научные интересы А.И. Омарова относятся к различным областям математической логики и универсальной алгебры. У истоков этого направления стояли академик АН СССР А.И. Мальцев и академик АН Каз.ССР А.Д. Тайманов. В его кандидатской диссертации с помощью техники ультрапроизведений получены заново и единообразным способом многие известные

результаты теории моделей (локальная теорема Мальцева и др.), найдено алгебраическое доказательство классической теоремы Эренфойхта-Мостовского (на важность упрощения доказательства этой теоремы указывал автор фундаментальной монографии "Группы автоморфизмов алгебраических систем" Б.И. Плоткин) и ряд новых результатов, усиливающих результаты М. Маккая.

Е.А. Палютин в своих исследованиях ввел новый класс формул, которые названы классом Р-формул. А.И. Омаров показал, что существует всего три класса фильтрующихся формул:

1. все формулы фильтруются по ультрафильтру (теорема Лося);
2. формулы, фильтрующиеся в декартовых произведениях - мультипликативные формулы;
3. формулы, фильтрующиеся по фильтрам, содержащим безатомный элемент – Р-формулы.

В докторской диссертации А.И. Омарава синтаксически описан наиболее сложно устроенный третий класс формул. Ему принадлежат более пятидесяти научных статей, большинство из которых опубликованы в центральных изданиях СССР и Казахстана. Под руководством А.И. Омарава защищены три кандидатские диссертации.

А.И. Омаровым получены фундаментальные результаты в исследовании различных конструкций, находящихся на стыке теории моделей и универсальной алгебры:

- ультрапроизведений, ультрапределов, фильтрованных произведений и степеней, обобщенных произведений, булевых произведений;
- исследовании насыщенности и эквациональной компактности моделей и связанном с ними изучении конкретных классов алгебраических систем - булевых алгебр и дистрибутивных решеток;
- исследовании хорновых классов алгебраических систем и синтаксическом описании класса фильтрующихся формул.

А.И. Омаров имеет большие заслуги в создании отечественной школы математической логики. После Новосибирского университета он вместе с Н.Г. Хисамиевым и Т.Г. Мустафиным начинает преподавание в Казахском госуниверситете. Молодые ученые смогли привлечь в новую область науки способную молодежь. Многие выпускники КазГУ - М.Г. Перетяткин, В.П. Добрица, А.Т. Нуртазин, Б.Н. Дроботун, М.И. Бекенов, М.М. Еримбетов, Б.С. Байжанов, К.А. Мейрембеков, Б. Омаров, К.Ж. Кудайбергенов и др. стали известными специалистами по математической логике и большую роль в их становлении сыграл А.И. Омаров. Сейчас отечественная школа математической логики получила международное признание и имеет связи с учеными Франции, Англии, США, Германии, Италии, подкрепленные совместными научными проектами, грантами, научным обменом, совместными научными конференциями.

А.И. Омаров много сил и энергии отдавал дальнейшему совершенствованию учебного процесса, улучшению преподавания дисциплин специализации и НИРС. Являлся ведущим лектором дисциплин "Алгебра и теория чисел" и "Математическая логика", научным руководителем студентов бакалавриата и магистратуры. Он являлся членом специализированного совета по защите кандидатских диссертаций по специальности 01.01.06 – алгебра, математическая логика и теория чисел при КазГУ им. аль-Фараби.

А.И. Омаров был доброжелательным и демократичным по отношению к сотрудникам и студентам. Он непосредственно участвовал во многих общественных мероприятиях факультета и университета. Амангельды Исакович был открытым, надежным другом, хорошим семьянином, прекрасным ученым, опытным наставником молодежи.

Светлый образ известного ученого, замечательного человека, доктора физико-математических наук, профессора Амангельды Исаковича Омарава сохранится в памяти и в сердцах его коллег, друзей и близких.

*Коллектив механико-математического факультета  
Казахского национального университета имени аль-Фараби*

РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 517.518

2000 MSC: 42A10

Ak ishev G. **On the estimate best  $M$ - term of approximation Besov's classes** // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 4 (26). P.5 – 11.

In this paper on order of the best  $M$ - term approximation of Besov classes in the Lebegues space with mixed norm is obtained.

References – 13.

УДК: 517.518

2000 MSC: 42A10

А қы ш е в Г. **Бесов класын  $M$ - мүшелі жуықтауынң бағалау** // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 4 (26). Б.5 – 11.

Мақалада О.В. Бесов класын аралас мөлшерлі Лебег кеңістігінде  $M$ - мүшелі жуықтаудың реті анықталған.

Библ. – 13.

УДК: 519.6:537.12:531.1

2000 MSC: 35Q60, 83C50

A l e x e y e v a L. A. **Lorentz transformations for one model of electro-gravymagnetic field. Conservation laws**// Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 4 (26). P.12 – 24.

The biquarenion approach is developed for building of the equations of the interaction of electro-gravymagnetic fields, generated different charges and currents. The field analogues of three Newton's laws are offered for free and interacting charge-currents, as well as total field of interaction. An invariance of the equations to models EGM-field at Lorentz transformation is investigated, and, in particular, law of the conservation of the charge-current. It is shown that at interaction by fields, this law differs from the well-known one. So for closing the equation of charge-currents transformations the new modification of the Maxwell's equations is offered with entering the scalar field in biquaternion of EGM-field tension Relative formula of the transformation of density of the masses and charge, current, forces and their powers are built.

References – 11.

УДК: 519.6:537.12:531.1

2000 MSC: 35Q60, 83C50

А л е к с е е в а Л . А . **ЭГМ өрістерінің бір модел үшін Лоренц өзгерістері. Сақтау заңдары** ЭГМ өрістерінің бір модел үшін Лоренц өзгерістері. Сақтау заңдары. // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 4 (26). Б.12 – 24.

Әртүрлі оқ-қырманмен жаралған ЭГМ өрістердің бикватерниондық әдісі сол өзара әсеретін өрістердің теңдеулер салу үшін дамыу. Ньютонның үш заңы бойынша бос және өзара

әсерететін оқ-қырмандарға өріс ұқсастықтар қаралған, сондайақ жалпы өзара әсерететін өріске ЭГМ өріс моделдің теңдеулер үшін Лоренц өзгертетін инварианттығы зерттелген, әсіресе оқ-қырман сақтау заңы үшін өзара әсерететін өрістердің заңы белгілі заңға ұқсамайды. Сондықтан оқ-қырман ауыстырылған теңдеулердің тұйықтау үшін Максвелл теңдеулеріне скалярдың өрісі кіргізілген, сонымен сол теңдеулердің жаңа түрі ұсынылған. Дененің оқ-қырманның тығыздығына және олардың қуатына релятивистік формулалар тұрғызылған.

Библ. – 11.

УДК: 519.624

2000 MSC: 34B37

**Bakirova E. A. On correct solvability of two points boundary value problem for loaded differential equations** // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 4 (26). P.25 – 33.

Necessary and sufficient conditions of correct solvability of two points boundary value problem for loaded differential equations on limited interval are received, where interval ends are loading points. Correlation between correct solvability constant of the problem and constant limiting norm of matrix  $[\tilde{H}^{-1}Q_\nu(l)]^{-1}$  over is established, where  $\tilde{H}$  is diagonal matrix, elements of matrix  $Q_\nu(l)$  are composed on boundary conditions and integrals from matrices of right part of loaded differential equations.

References – 6.

УДК: 519.624

2000 MSC: 34B37

**Бакирова Э. А. Жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін екі нүктелі шеттік есептің корректі шешілімділігі туралы** // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 4 (26). Б.25 – 33.

Интервалдың ұштары жүктелу нүктелері болып табылатын шектеулі интервалда жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін екі нүктелі шеттік есептің корректі шешілімділігінің қажетті және жеткілікті шарттары алынған. Зерттеліп отырған есептің корректі шешілімділігінің тұрақтысымен  $[\tilde{H}^{-1}Q_\nu(l)]^{-1}$  матрицасының нормасын жоғарыдан шектейтін сан арасындағы өзара байланыс тағайындалған, мұнда  $\tilde{H}$  - диагоналды матрица,  $Q_\nu(l)$  матрицасының элементтері шеттік шарттармен жүктелген дифференциалдық теңдеудің оң жағындағы матрицаларынан алынған интегралдардан құрылған.

Библ. – 6.

УДК: 517.5

2000 MSC: 35L20

**Darbaeva D. K., Nursultanov E. D. Inequality for different metrics in anisotropic Lorentz space.** // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 4 (26). P.34 – 43.

In this paper inequality for anisotropic Lorentz spaces is proved, which allows to get a constant dependence on strong and weak parameters concerning each variable.

References – 8.

УДК: 517.5

2000 MSC: 35L20

**Дарбаева Д. Л., Нурсултанов Е. Д. Анизотропты Лоренц кеңістігіндегі әр-түрлі метрикалық теңсіздік.** // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 4 (26). Б.34 – 43.

$L_{pq}^*$  анизотропты Лоренц кеңістігінде Бернштейн-Никольский теңсіздігі дәлелденеді. Дәлелденген теңсіздік әр айнаымалыға сәйкес күшті және әлсіз параметрлерінің тұрақтыға тәуелділігін анықтайды.

Библ. – 8.

УДК: 517.929

2000 MSC: 42A16

Kalmenov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh., Shomanbaeva M.T. **On the existence and uniqueness of the solution of periodic value problem for the heat equation with divergent argument**// Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 4 (26). P.44 – 50.

In present work we received condition of existence and unique of strong solution of periodic problem for heat conductivity equation with deviating argument and minorterm:

$$Lu = u_t(x, T - t) + u_{xx}(x, t) + au_x(x, t) = f(x, t),$$

$$u|_{t=0} = 0, u|_{x=0} - u|_{x=l} = u_x|_{x=0} - u_x|_{x=l} = 0,$$

where  $f(x, t) \in L^2(\Omega)$  and  $a$  is const.

References – 2.

УДК: 517.929

2000 MSC: 42A16

Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш., Шоманбаева М.Т. **Ауытқыған аргументті жылуөткізгіш теңдеуі үшін периодтық есебінің өлді шешімінің бар және жалғыз екендігі туралы**// Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 4 (26). Б.44 – 50.

Бұл еңбекте аргументі ауытқыйтын кіші мүшесі бар жылу өткізгіш теңдеудің

$$Lu = u_t(x, T - t) + u_{xx}(x, t) + au_x(x, t) = f(x, t),$$

$$u|_{t=0} = 0, u|_{x=0} - u|_{x=l} = u_x|_{x=0} - u_x|_{x=l} = 0,$$

аралас есебі күшті шешілетінің шарттары көрсетілген. Бұл жерде  $f(x, t) \in L^2(\Omega)$  және  $a$  - const.

Библ. – 2.

УДК: 523.98, 530.182

2000 MSC: 37N30

Kruglun O.A., Makarenko I.N. **Numerical methods of multifractal formalism for segmentation and texture analysis of remote-sensed data** // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 4 (26). P.51 – 59.

Some new methods of remote-sensed data processing based on fractal geometry and multifractal formalism are developed. Well-known multifractal methods are modified in this work to analyze real high-resolution images of Kazakhstan area that seems to have great potential for geological exploration.

References – 32.

УДК: 523.98, 530.182

2000 MSC: 37N30

Круглун О.А., Макаренко И.Н. **Жер серігінің бейнелерін сегменттеу және текстуралық талдау есептеріндегі мультифракталды формализмнің есептеу әдістері**// Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 4 (26). Б.51 – 59.

Жұмыс фракталды геометрия мен мультифракталды формализм негізінде қашықтан зондтау мәліметтерін өңдеудің белгілі әдістерін модификациялауға және жаңа әдістер жасауға арналған. Қазақстан территориясының геологиялық барлау технологияларын қолдануға болашағы бар жөнелеген аймақтары үшін нақты бейнелердің мультифракталды сипаттаулары келтірілген.

Библ. – 32.

УДК: 681.5

2000 MSC: 34A25, 34A30

Мамытов Д. Ж., Шаршеналиев З. Ж. **On the fundamental matrix of the linear different-tempo control system as the state-vector matrix coefficient has multiple eigenvalues** // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 4 (26). P. 60 – 68.

If the given matrix coefficient has a linear independent eigenfunctions that depend from the small parameter, then for the linear different-tempo control system the fundamental matrix is constructed.

References – 13.

УДК: 681.5

2000 MSC: 34A25, 34A30

Мамытов Ж., Шаршеналиев Ж. **Меншікті мәндері еселі матрицалық коэффициентті әртүрлі жылдамдықты басқару жүйесінің іргелі матрицасы туралы** // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 4 (26). Б.60 – 68.

Кіші параметрге тәуелді сызықты тәуелсіз меншікті векторлы берілген матрицалық коэффициентті сызықты әртүрлі жылдамдықты басқару жүйесі үшін іргелі матрицасы құрылған.

Библ. – 13.

УДК: 004.056.5

2000 MSC: 42A16

Нысанбаева С. Е. **Hash Procedure in Non-Traditional Algorithm of Formation of Electronic Digital Signature** // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 4 (26). P. 69 – 74.

In article procedures of hash and encryptions of hash-value of algorithm formation of the electronic digital signature which permits discovering and correcting solitary error and reveals frequent ones are described.

References – 7.

УДК: 004.056.5

2000 MSC: 42A16

Нысанбаева С. Е. **Дәстүрлі емес электрондық сандық қлотаңба қалыптастыру алгоритмінде хэширлеу процедурасы** // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 4 (26). Б.69 – 74.

Мақалада жалғыз қателерді табу мен түзетуге және қат-қабат қателерді айқындауға мүмкіндік беретін электрондық сандық қлотаңба қалыптастыру алгоритмінің хэширлеу және хэш-мәндерін шифрлеу процедурасы сипатталған.

Библ. – 7.

УДК: 517.946

2000 MSC: 35M10

Роговой А. В. **On non continuous solutions of Tricomi problem for Lavrentjev-Bitsadze equation** // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 4 (26). P. 75 – 81.

Homogeneous Tricomi problem for Lavrentjev-Bitsadze equation has been considered in this paper. Existence of non continuous solution of this problem for wide class of contours has been proved. Important special cases of Tricomi problem have been studied.

References – 3.

УДК: 517.946

2000 MSC: 35M10

Роговой А. В. Трикоми есебінде Лаврентьев-Бицадзе теңдеуіне арналған үзілісті шешім // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 4 (26). Б. 75 – 81.

Бұл жұмыста Лаврентьев-Бицадзе теңдеуіндегі біртекті Трикоми есебі қарастырылады. Қисық түріндегі бұл есепте үзілісті шешім барлығы дәлелденген. Трикоми есебінде дербес жағдайларда қарастырылды.

Библ. – 3.

УДК: 517.51

2000 MSC: 42A10

Falaleev L. P. To the 75-th anniversary of professor S.A. Teljakovsky. On methods of Cesaro and Riesz. // Mathematical journal. 2007. Vol. 7. № 4 (26). P.82 – 86.

Deviations in a uniform metric of continuous functions and in their trigonometrically conjugated to Cesaro and Riesz sums are studied. High-order constants of Kolmogorov-Nicolsky on continuous functions subclasses are found in the corresponding asymptotical estimates.

References – 6.

УДК: 517.51

2000 MSC: 42A10

Фалалеев Л. П. Чезаро және Рисс тәсілдері // Математикалық журнал. 2007. Т. 7. № 4 (26). Б. 82 – 86.

Үзіліссіз және оларға тригонометриялық түйіндес функциялардың Чезаро және Рисс қосындыларынан бірқалыпты метрикалық ауытқулары зерттеледі. Үзіліссіз функциялардың ішкі класында сәйкес асимптотикалық бағалауларының жоғарғы ретті Колмогоров-Никольский тұрақтылары табылған.

Библ. – 6.

## ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в "Математический журнал", должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.
2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК**, далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту.
3. К статье прилагаются в двух экземплярах на казахском, русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2000 Mathematics Subject Classification**.
4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в  $\text{\LaTeX}$ -файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в <http://www.math.kz/> в разделе "Математический журнал").
5. Объем статей (стандартный формат в  $\text{\LaTeX}$ ) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).
6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.
7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

### Цитированная литература

- (a) **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985. (для монографий)
  - (b) **Мельников А. В.**// Успехи матем.наук. 1996. Т 51, вып. (или №) 8. С. 61 – 69.
  - (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.
8. Статья должна быть подписана всеми авторами. В конце статьи необходимо указать организацию, от которой направлена статья, и e-mail (при наличии).
  9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О. (полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 7 № 4 (26) 2007

*Главный редактор:*

А.А.Женсыкбаев

*Заместители главного редактора:*

М.Т.Дженалиев, М.И.Рахимбердиев

*Редакционная коллегия:*

М.Б.Айдарханов, Л.А.Алексеева, Г.И.Бижанова, Н.К.Блиев,  
В.Г.Войнов, Д.С.Джумабаев, А.С.Джумадилаев, В.П.Добрица,  
А.Ж.Найманова, М.К.Орунханов, И.Т.Пак, М.Г.Перетягкин, С.Н.Харин,  
А.Т.Кулахметова (ответственный секретарь),  
И.Н.Панкратова (технический секретарь)

*Адрес редколлегии и редакции:*

050010 Алматы, ул.Пушкина, 125, к.304

тел.: 8(3272)-91-20-03, [journal@math.kz](mailto:journal@math.kz), <http://www.math.kz>

Подписано в печать 27.12.2007г.

Тираж 300 экз. Объем 113 стр.

Формат 62 94/16 см

Бумага офсетная № 1

г.Алматы, ул.Мауленова, 129

Тел./факс: 8(3272) 675047, 675053

e-mail: [print\\_express@bk.ru](mailto:print_express@bk.ru)