ISSN 1682—0525

*МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ*

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

*MATHEMATICAL JOURNAL*

2010 том 10 № 3 (37)
Издается с 2001 года

Институт математики МО и Н РК
Алматы

*Министерство образования и науки Республики Казахстан*

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 10 № 3 (37) 2010

Периодичность — 4 номера в год



*Адрес редколлегии и редакции: 050010 г.Алматы ул.Пушкина, 125, к. 311*
*Телефон 8-(727)2-72-43-93*, journal@math.kz, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан: Свидетельство № 1915-Ж от 17 апреля 2001г.

# СОДЕРЖАНИЕ

**Том 10, № 3 (37), 2010**

Математический журнал. *Алматы. 2010. Том 10. № 3 (37) . С. 5—13*

*УДК 517*

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ АЛГЕБРА БИКВАТЕРНИОНОВ. ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ БИВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ.2

Л. А. Алексеева

Институт Математики МОиН РК
050010 Алматы Пушкина, 125 alexeeva@math.kz

Рассматривается функциональное пространство бикватернионов на пространстве Минковского. С введением дифференциальных операторов – биградиентов рассмотрены бикватернионные волновые (*биволновые*) уравнения и их обобщенные решения. Рассмотрены ударные волны и условия на их фронтах. Построены обобщенные решения уравнения в случаях стационарных колебаний и статическом, характерном для задач теории поля. В качестве примера рассмотрены биволновое уравнение, эквивалентное системе уравнений Максвелла, и его обобщенные решения.

**1. Биградиенты и биволновое уравнение.** Рассмотрим частные случаи дифференциальных операторов, характерные для задач математической физики, но будем рассматривать их на пространстве обобщенных бикватернионов $\widehat{B}(M)$ на пространстве Минковского $M$ [1].

В [1] введены дифференциальные операторы – взаимные комплексные градиенты (*биградиенты*):

$$\nabla^{+} = \partial_\tau + i\nabla, \quad \nabla^{-} = \partial_\tau - i\nabla,$$

где $\partial_\tau = \partial/\partial_\tau,\ \nabla = grad = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ . Их действие на K определено как в алгебре кватернионов: (соответственно знакам)

$$\nabla^{\pm}\mathbf{F} = (\partial_\tau \pm i\nabla) \circ (f + F) = (\partial_\tau f \mp i\,(\nabla, F)) \pm \partial_\tau F \pm i\nabla f \pm i[\nabla, F]$$

или в традиционной записи:

$$\nabla^{\pm}\mathbf{F} = (\partial_\tau f \mp i\,div\,F) \pm \partial_\tau F \pm igrad\,f \pm i\,rot\,F.$$

Легко проверить, что волновой оператор $\Box$ представим в виде суперпозиции:

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \triangle = \nabla^{-} \circ \nabla^{+} = \nabla^{+} \circ \nabla^{-}.$$

Keywords: *Algebra, biquaternion, bigradient, biwave equation, generalized solution, shock waves, Lorenz transformation, stationary vibration, Maxwell equation, vector field potentials*

2010 Mathematics Subject Classification: 46S10

Здесь $\triangle$ - трехмерный оператор Лапласа

Используя это свойство, можно строить частные решения дифференциальных бикватернионных уравнений на $B(M)$ вида:

$$\nabla^{\pm}\mathbf{K}(\tau,x)=\mathbf{G}(\tau,x), \tag{1}$$

которое назовем для краткости *биволновым уравнением.* А решения этого уравнения будем называть $\pm$ *бипотенциалами* $\mathbf{G}$.

В [1] показано, что при обобщенных преобразованиях Лоренца биволновые уравнения сохраняют вид.

**2. Обобщенные решения биволнового уравнения.** Если взять взаимный биградиент в (1) соответственно знаку, то получим волновое уравнение:

$$\Box\hat{\mathbf{K}}=\nabla^{\mp}\hat{\mathbf{G}}. \tag{2}$$

**Теорема 2.1.** *Обобщенным решением биволнового уравнения* (15) *является свертка*:

$$\hat{\mathbf{K}}=\nabla^{\mp}\hat{\mathbf{G}}*\psi,$$

*где* $\psi(\tau,x)$ – *фундаментальное решение волнового уравнения*:

$$\Box\psi=\delta(\tau)\delta(x).$$

**Доказательство.** Здесь в правой части стоят сингулярные $\delta$-функции. Действительно, используя ассоциативность и свойство дифференцирования свертки, получим

$$\nabla^{\pm}\hat{\mathbf{K}}=\nabla^{\pm}\nabla^{\mp}\left(\hat{\mathbf{G}}*\psi\right)=\Box\left(\hat{\mathbf{G}}*\psi\right)=\hat{\mathbf{G}}*\Box\psi=\hat{\mathbf{G}}*\delta(\tau)\delta(x)=\hat{\mathbf{G}}.$$

Фундаментальные решения определяются с точностью до решений однородного волнового уравнения. Для задач с начальными по времени условиями в качестве фундаментального решения удобно использовать простой слой на световом конусе $\tau=\|x\|$:

$$\psi=(4\pi\,\|x\|)^{-1}\delta(\tau-\|x\|), \tag{3}$$

который назовем *волновой функцией.*

**Теорема 2.2.** *При* $\mathbf{G}=0$ *решение однородного биволнового уравнения имеет вид*:

$$\mathbf{K_0}=\nabla^{\mp}\{\mathbf{C_0}\psi_0(\tau,x)\}, \tag{4}$$

*где* $\mathbf{C_0}$ – любой постоянный бикватернион, а $\psi_0(\tau,x)$ – *решение однородного волнового уравнения*:

$$\Box\psi_0=0,$$

*либо представимо в виде суммы решений подобного вида.*

**Доказательство.** Очевидно, что

$$\nabla^{\pm}\mathbf{K_0}=\nabla^{\pm}\,\nabla^{\mp}\{\mathbf{C_0}\psi_0(\tau,x)\}=\Box\{\mathbf{C_0}\psi_0(\tau,x)\}=\{\Box\psi_0(\tau,x)\}\mathbf{C_0}=0.$$

Т.е. $\mathbf{K_0}$ является решением.

Обратно, если $\mathbf{K_0}$ – решение биволнового уравнения, тогда каждая компонента является решением однородного волнового уравнения. Поэтому его можно представить в виде $\mathbf{C_0}\psi_0(\tau,x)$ или разложить в сумму 4-х таких бипотенциалов для каждой компоненты с разными решениями однородного волнового уравнения.

**3. Ударные волны. Условия на фронтах.** Рассмотрим обобщенные решения однородного биволнового уравнения:

$$\nabla^{\pm}\hat{\mathbf{K}} = 0. \tag{5}$$

Поскольку оно эквивалентно системе гиперболических уравнений, следовательно, существуют разрывные на характеристических поверхностях (S) решения этой системы, на которых, как легко видеть,

$$n_\tau^2 = \|n\|^2 \tag{6}$$

где $(n_\tau, n_1, n_2, n_3)$ – нормаль к $S$ в $M$, $n = (n_1, n_2, n_3)$, $\|n\|^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$. Это конус характеристических нормалей волнового уравнения.

Определим условия, которым должны удовлетворять скачки решений на таких поверхностях, чтобы они были обобщенными решениями (5).

Пусть $S$ – такая поверхность в $M$. Предположим, что вне ее они непрерывны и дифференцируемы. Используя правило обобщенного дифференцирования разрывных функций для БК получим обобщенные производные:

$$\partial_\tau \hat{\mathbf{F}} = \partial_\tau \mathbf{F} + n_\tau \left[\mathbf{F}\right]_S \delta_S(\tau, x), \quad \partial_i \hat{\mathbf{F}} = \partial_i \mathbf{F} + n_i \left[\mathbf{F}\right]_S \delta_S(\tau, x),$$

где первое слагаемое – обычная производная, а второе – простой слой на S, $(n_\tau, n_1, n_2, n_3)$ – компоненты единичной нормали к S в $M$: $n_\tau^2 + n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$; $[\mathbf{F}]_S$ – скачок на S:

$$\left[\mathbf{F}(\tau, x)\right]_S = \lim_{\varepsilon \to +0} \left\{\mathbf{F}(\tau + \varepsilon n_\tau, x + \varepsilon n) - \mathbf{F}(\tau - \varepsilon n_\tau, x - \varepsilon n)\right\}, \quad (\tau, x) \in S.$$

В силу этого, для (5) получим

$$\begin{gathered}\nabla^+\hat{\mathbf{K}} = \nabla^+\mathbf{K} + \left\{n_\tau \left[k\right]_S - i\left(n, \left[K\right]_S\right) + n_\tau \left[K\right]_S + in \left[k\right]_S + i[n, \left[K\right]_S]\right\} \delta_S(\tau, x) = \\ = \nabla^+\mathbf{K} + (n_\tau + in) \circ \left[K\right]_S \delta_S(\tau, x) = 0\end{gathered}$$

Поскольку $\nabla^+\mathbf{K} = 0$, отсюда следуют условия на скачки:

$$n_\tau [k]_S - i\,(n, [K]_S) = 0, \quad n_\tau [K]_S + in[k]_S + i[n, [K]_S] = 0. \tag{7}$$

В $R^3$ характеристической поверхности соответствует подвижный волновой фронт $S_t$, с нормалью $n$, который распространяется со скоростью

$$c = -\frac{n_\tau}{\|n\|} = 1.$$

Последнее – в силу (7). Будем называть такие решения *ударными волнами.*

Очевидно, при регулярной правой части биволнового уравнения получим те же соотношения. Сформулируем этот результат в виде полезной теоремы.

**Теорема 3.1.** *Регулярные разрывные решения биволнового уравнения удовлетворяют следующим условиям на фронтах ударных волн*:

$$\left[K\right]_S = im \circ \left[K\right]_S,$$

*где $m$ – единичный волновой вектор, направленный в сторону распространения волны в* $R^3$.

**Доказательство.** Если поделить (7) на $\|n\|$, с учетом (6), получим условия на фронтах ударных волн:

$$\left[k\right]_S = -i\left(m, \left[K\right]_S\right), \quad \left[K\right]_S = im\left[k\right]_S + i[m, \left[K\right]_S].$$

Бикватернионная запись этих уравнений дана в формуле теоремы.

Первое уравнение описывает продольные волны. Если подставить его во второе уравнение, получим соотношение для касательной составляющей вектора K к фронту волны:

$$[K]_S - m(m,[K]_S) = i[m,[K]_S],$$

которое связывает скачки действительной и мнимой векторной части бикватерниона друг через друга.

**4. Задача Коши для биволнового уравнения.** Рассмотрим задачу Коши для биволнового уравнения. Пусть известны начальные условия:

$$\mathbf{K}(0,x) = \mathbf{K_0}(x). \tag{8}$$

Требуется построить решение уравнения (1), удовлетворяющее этим данным.

Используем для этого метод обобщенных функций. Введем регулярные обобщенные функции вида $\widehat{\mathbf{G}} = H(\tau)\mathbf{G}(\tau,x)$, где $H(\tau)$ — функция Хевисайда. Используя свойство дифференцирования регулярных обобщенных функций, получим

$$\nabla^{\pm}\widehat{\mathbf{K}} = \widehat{\mathbf{G}} + \delta(\tau)\mathbf{K_0}(x).$$

Следовательно,

$$\mathbf{H}(\tau)\mathbf{K}(\tau,x) = \nabla^{\mp}\{H(\tau)\mathbf{G} * \psi\} + \mathbf{G}(0,x) \underset{x}{*} \psi + \nabla^{\mp}\{\mathbf{K_0}(x) \underset{x}{*} \psi\} \tag{9}$$

(здесь знак "$\underset{x}{*}$ "означает, что свертка берется только по $x$). Ее интегральная запись легко выписывается, с учетом вида полной и неполной свертки с $\psi$. А именно,

$$4\pi\hat{\mathbf{K}}(\tau,x) = -\nabla^{\mp}\left\{\int\limits_{r\le\tau} \mathbf{G}(\tau-r,y)\frac{dV(y)}{r} + \tau^{-1}\int\limits_{r=\tau}\mathbf{K_0}(y)dS(y)\right\} - \tau^{-1}\int\limits_{r=\tau}\mathbf{G}(0,y)dS(y). \tag{10}$$

Здесь и далее $r = \|y-x\|$, $dV(y) = dy_1dy_2dy_3$, $dS(y)$ – дифференциал площади сферы $r=\tau$.

Эта формула является обобщением известной формулы Кирхгофа для решения задачи Коши для волнового уравнения. Для решений биволнового уравнения будем называть ее *обобщенной формулой Кирхгофа.*

В качестве примера приложения изложенной теории биволнового уравнения рассмотрим систему уравнений Максвелла для электромагнитного поля.

**5. Бикватернионная форма уравнений Максвелла и ее обобщенные решения**. Система уравнений Максвелла, состоящая из 8 уравнений, в пространстве бикватернионов имеет вид биволнового уравнения [3]:

$$\nabla^{+}\mathbf{A} + \mathbf{\Theta} = 0, \tag{11}$$

где

$$\mathbf{A} = 0 + A = \sqrt{\varepsilon}\,E(\tau,x) + i\sqrt{\mu}\,H(\tau,x), \quad \mathbf{\Theta} = i\rho(\tau,x) + J(\tau,x),$$

вектора $E,H$ – напряженности электрического и магнитного полей (ЭМ-поля); $\varepsilon,\mu$ – константы электрической проводимости и магнитной проницаемости среды; $\tau = ct$, $t$ – время, $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ – скорость света; $\rho$ и $J$ выражаются через плотности электрического заряда $\rho^E$ и электрического тока $j^E$ формулами:

$$\rho = \rho^E/\sqrt{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon}\,div\,E, \quad J = \sqrt{\mu}\,j^E.$$

*Ударные ЭМ-волны.* Из теоремы 2.1 получим условие на фронтах ударных ЭМ-волн:

$$[A]_S = im \circ [A]_S \,,$$

где $m$ – единичный волновой вектор, направленный в сторону распространения волны в $R^3$. Для скалярной и векторной частей в этом случае оно имеет вид:

$$(m, [A]_S) = 0, \quad [A]_S = i[m, [A]_S]. \tag{12}$$

Первое условие означает, что ударные ЭМ-волны являются *поперечными.* Расписывая второе условие для действительной и мнимой части, получим связь скачка электрического поля с со скачком магнитного:

$$\sqrt{\varepsilon}\,[E]_S = \sqrt{\mu}\,[[H]_S, m], \quad \sqrt{\mu}\ [H]_S = \sqrt{\varepsilon}[m, [E]_S],$$

или, используя вектора электрического смещения $D = \varepsilon E$ и магнитной индукции $B = \mu H$, сформулируем теорему.

**Теорема 5.1.** *На фронтах ударных электромагнитных волн выполняются следующие условия на скачки*:

$$[E]_S = c\,[[B]_S, m], \quad [H]_S = c\,[m, [D]_S],$$

*что эквивалентно условиям:*

$$[D]_S = c^{-1}[[H]_S, m], \quad [B]_S = c^{-1}[m, [E]_S],$$

*где* $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ *– скорость света.*

*Задача Коши.* При известных зарядах-токах и начальных данных из класса регулярных функций

$$\mathbf{A}(0, x) = \mathbf{A_0}(x), \tag{13}$$

решение задачи Коши для уравнений Максвелла дается обобщенной формулой Кирхгофа:

$$4\pi\mathbf{A} = \nabla^{-}\left\{\int\limits_{r\le\tau} \mathbf{\Theta}(\tau - r, y)\frac{dV(y)}{r} + \tau^{-1}\int\limits_{r=\tau} \mathbf{A_0}(y)dS(y)\right\} + \tau^{-1}\int\limits_{r=\tau} \mathbf{\Theta}(0, y)dS(y).$$

Отсюда нетрудно записать интегральные представления для векторов напряженности ЭМ-поля $E$,$H$, которые будут иметь довольно громоздкий вид.

*Преобразования Лоренца* для уравнения Максвелла имеют вид:

$$\nabla^{+}\mathbf{A}' = \mathbf{\Theta}', \ \textit{где}\ \mathbf{A}^{'} = \bar{\mathbf{L}}^{*} \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{L}, \ \ \mathbf{\Theta}^{'} = \bar{\mathbf{L}}^{*} \circ \mathbf{\Theta} \circ \mathbf{L}.$$

*Релятивистские формулы* для напряженности, заряда и тока (при $\varphi = 0$):

$$A' = (A - e(e, A)) + e\frac{(e, A)}{\sqrt{1 - v^2}},$$

$$\rho' = \frac{\rho - v(e, J)}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad J' = (J - e(e, J)) + e\frac{(e, J) - v\rho}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

**6. Стационарные колебания.** Рассмотрим решения биволнового уравнения, описывающие гармонические колебания с частотой $\omega > 0 \colon \mathbf{K}(\tau, x) = \mathbf{K}(x)exp(-i\omega\tau)$. Аналогичный вид имеет правая часть этого уравнения.

В этом случае уравнение для комплексных амплитуд имеет вид:

$$\nabla^{\pm}_{\omega}\hat{\mathbf{K}}(x) = \omega k(x) \mp div\, K(x) \pm grad\, k(x) + \omega K(x) \pm rot\, K(x) = i\hat{\mathbf{G}}(x), \tag{14}$$

где введены *стационарные биградиенты* $\nabla^{\pm}_{\omega} = (\omega \pm \bigtriangledown)$ соответственно знакам.

Взяв от этого уравнения сопряженный биградиент, получим уравнение Гельмгольца для комплексных амплитуд:

$$\triangle\hat{\mathbf{K}}(x) + \omega^2\hat{\mathbf{K}}(x) = i\nabla^{\mp}_{\omega}\hat{\mathbf{G}}(x).$$

Решение этого уравнения, в силу свойства дифференцирования свертки, имеет вид:

$$\hat{\mathbf{K}}(x) = i\nabla^{\mp}_{\omega}\{\psi_{\omega}(x) * \hat{\mathbf{G}}(x)\}, \tag{15}$$

где $\psi_{\omega}(x)$ – фундаментальное решение уравнения Гельмгольца. В частности, таковыми являются

$$\psi_{\omega}(x) = -(4\pi R)^{-1} exp(\pm i\omega\|x\|), \;\; R = \|x\|.$$

Здесь выбор знака в правой части зависит от выбора условий излучения на бесконечности. Так, если и решение должно удовлетворять условиям излучения Зоммерфельда на бесконечности [1], то $\psi_{\omega}(x) = -(4\pi R)^{-1} exp(i\omega\|x\|)$.

Добавляя к этому решению решение однородного уравнения:

$$\nabla^{\pm}_{\omega}\hat{\mathbf{K}}(x) = \mathbf{0}, \tag{16}$$

получим общее решение уравнения (14).

Формулу (4) можно использовать для любых обобщенных функций, допускающих свертку с $\psi_{\omega}(x)$. Для регулярных $\mathbf{G}(x)$ ее можно записать в интегральном виде.

**Теорема 6.1.** *Если* $\|\mathbf{G}(x)\| = O(\|x\|^{-(2+\varepsilon)}),\ \varepsilon > 0$ *, то общее решение уравнения (14) имеет вид:*

$$-4i\pi\hat{\boldsymbol{K}}(x) = div\int\limits_{R^3} G(y)\frac{e^{i\omega r}}{r}\,dV(y) - grad\int\limits_{R^3} g(y)\frac{e^{i\omega r}}{r}\,dV(y) - rot\int\limits_{R^3} G(y)\frac{e^{i\omega r}}{r}\,dV(y) + \boldsymbol{K}_0(x),$$

*где* $\boldsymbol{K}_0(x)$ *– решение однородного уравнения (15).*

*Если* $\mathbf{G}(x)$ *– дифференцируемый бикватернион и его производные удовлетворяют условию:*

$$\|\partial_j\mathbf{G}(x)\| = O(\|x\|^{-(2+\varepsilon)}), \;\; j = \tau, x_1, x_2, x_3,$$

*то*

$$-4i\pi\mathbf{K}(x) = \int\limits_{R^3}\{divG(y) - grad\, g(y) - rot\, G(y)\}\frac{exp(i\omega r)}{r}\,dV(y) + \mathbf{K}_0(x).$$

Доказательство следует из представления свертки регулярных функций. Сходимость интегралов следует из асимптотических свойств подынтегральных функций. Все производные берутся в обобщенном смысле.

Введение производной под знак интегралов возможно при заданных условиях на правую часть.

В данном случае решение является классическим в силу леммы Дюбуа-Реймона [2].

**Теорема 6.2.** *Решением однородного стационарного биволнового уравнения* (17) *является БК* $\mathbf{K_0}$ *вида* :

$$\mathbf{K_0} = \nabla^{\mp}\{\mathbf{C_0}\psi_0(\omega, x)\}, \tag{17}$$

*где* $\mathbf{C_0}$ *– любой постоянный БК, а* $\psi^0_{\omega}$ *– решение уравнения Гельмгольца*:

$$(\nabla + \omega^2)\psi^0_\omega = 0. \qquad (18)$$

**Доказательство.** В силу (18),

$$\nabla^{\pm}\mathbf{K_0} = \nabla^{\pm}\nabla^{\mp}\{\mathbf{C_0}\psi^0_\omega(\omega,x)\} = \Box\{\mathbf{C_0}\psi^0_\omega(\omega,x)\} = \mathbf{C_0}\Box\{\psi^0_\omega(\omega,x)\} = 0.$$

Решения уравнения Гельмгольца хорошо изучены в теории специальных функций, поэтому построение решения однородного уравнения не должно вызывать затруднений.

В случае негармонических периодических колебаний с заданным периодом по $\tau$, разлагая правую часть (1) в ряд Фурье по $\tau$, получим выше рассмотренную задачу для каждой гармоники ряда.

**7. Статические решения. Потенциалы векторных полей.** В случае, когда правая часть (1) не зависит от времени, уравнение преобразуется к виду:

$$\nabla\hat{\mathbf{K}}(x) = -div\,K(x) + grad\,k(x) + rot\,K(x) = \hat{\mathbf{G}}(x). \qquad (19)$$

Поскольку $\nabla \circ \nabla = -\triangle$, отсюда имеем

$$\triangle\hat{\mathbf{K}}(x) = -\bigtriangledown\hat{\mathbf{G}}(x).$$

Откуда получим решение

$$\hat{\mathbf{K}}(x) = -\nabla\{\psi_0 * \hat{\mathbf{G}}(x)\}, \qquad (20)$$

где $\psi_0(x)$ – фундаментальное решения уравнения Лапласа: $\Delta\psi_0(x) = \delta(x)$.

В частности, для затухающих на бесконечности решений следует брать [5]

$$\psi_0(x) = -(4\pi R)^{-1}.$$

Формулу (20) можно использовать для любых обобщенных функций, допускающих свертку с $\psi_0(x)$.

**Теорема 7.1.** *Если* $\|\mathbf{G}(x)\| = O(\|x\|^{-(2+\varepsilon)})$, $\varepsilon > 0$, *то*

$$4\pi\hat{\mathbf{K}}(x) = div\int\limits_{R^3}\frac{G(y)}{r}\,dV(y) - grad\int\limits_{R^3}\frac{g(y)}{r}\,dV(y) - rot\int\limits_{R^3}\frac{G(y)}{r}\,dV(y).$$

*Если* $\mathbf{G}(x)$ *– дифференцируемый бикватернион и* $\|\partial_j\mathbf{G}(x)\| = O(\|x\|^{-(2+\varepsilon)})$ $(j = \tau, x_1, x_2, x_3)$, *то решение (19) имеет вид*:

$$4\pi\mathbf{K}(x) = \int\limits_{R^3}(divG(y) - grad\,g(y) - rot\,G(y))\,\frac{dV(y)}{r}.$$

**Доказательство.** Формула следует из представления свертки и градиента (19) на $B(M)$:

$$4\pi\hat{\mathbf{K}}(x) = -\nabla\int\limits_{R^3}\frac{\mathbf{G}(y)}{r}dV(y).$$

Сходимость интегралов – из условий теоремы. Здесь производные берутся в обобщенном смысле.

Доказательство дифференцируемости следует из эквивалентного представления свертки и заданных свойств подынтегральных функций:

$$4\pi\hat{\mathbf{K}}(x) = -\nabla\int\limits_{R^3}\frac{\mathbf{G}(x-y)}{\|y\|}dV(y).$$

**8. Потенциалы векторных полей.** Как приложение рассмотрим задачи определения потенциалов векторных полей.

*Статические поля.* Легко видеть, что статическое бикватернионное уравнение (19) совпадает с уравнениями теории поля, когда требуется определить скалярный $\varphi(x)$ и векторный $\Psi(x)$ потенциалы векторного поля $V(x)$:

$$V(x) = grad\,\varphi(x) + rot\,\Psi(x),$$

с калибровкой : $div\Psi(x) = f(x)$. Тогда, полагая $\mathbf{G}(x) = -f(x) + V(x)$, используя теоремы 11.1 или 11.2, получим:

$$4\pi(\varphi(x) + \Psi(x)) = \int\limits_{R^3} \frac{divV(y) + grad\,f(y) - rot\,V(y)}{\|x-y\|} dy_1 dy_2 dy_3.$$

Так при гауссовой калибровке ( $div\Psi(x) = 0$ ) имеем:

$$4\pi(\varphi(x) + \Psi(x)) = \int\limits_{R^3} \frac{divV(y) - rot\,V(y)}{\|x-y\|} dy_1 dy_2 dy_3.$$

*Динамические поля.* Требуется определить скалярный и векторный потенциалы векторного поля $V(\tau, x)$:

$$\nabla^+ \mathbf{F} = V(\tau, x), \quad \mathbf{F} = f - iF,$$

с лоренцевой калибровкой: $\partial_\tau f = div\,F$. Используем биволновое уравнение

$$\nabla^+ \mathbf{F} = -i\partial_\tau F + igrad\,f + rot\,F = V(\tau, x).$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям излучения, дает обобщенная формула Кирхгофа:

$$-4\pi\hat{\mathbf{F}}(\tau, x) = \nabla^{\mp} \left\{ \int\limits_{r\le\tau} \frac{\mathbf{V}(\tau - r, y)}{r} dy_1 dy_2 dy_3 + \tau^{-1} \int\limits_{r=\tau} \mathbf{F_0}(y) dS(y) \right\} + \frac{1}{\tau} \int\limits_{r=\tau} \mathbf{V}(0, y) dS(y).$$

Очевидно, бипотенциал определяется неоднозначно, с точностью до начального условия $\mathbf{F_0}(x)$.

**Заключение**. Бикватернионная форма уравнений, как видим, позволяет переходить от решения систем дифференциальных уравнений 8-го порядка к решению одного дифференциального, но бикватернионного уравнения, что значительно упрощает их решение и решение краевых задач. В качестве иллюстрации см. [4, 5], где построены обобщенные решения краевых задач для симметризованной системы уравнений Максвелла. Эти результаты можно значительно проще получить, используя бикватернионную форму этих уравнений. Заметим, что это также значительно упрощает решение краевых задач на ЭВМ.

Как здесь показано, восстановление скалярного и векторного потенциала векторного поля также приводится к бикватернионным дифференциальным уравнениям, которые легко решаются.

Группу преобразований Лоренца и ортогональных преобразований также легко вычислять, используя их бикватернионное представление. В матричном представлении это довольно трудоемкая процедура.

Биволновые уравнения и их решения автор использовал ранее для одной модели электрогравимагнитного поля [6,7]. Можно найти много других приложений дифференциальной алгебры бикватернионов, что и предлагаю заинтересованному читателю.

## Цитированная литература

1. **Алексеева Л.А.** //Матем. журнал. 2010. Т.10, № 1. С. 33–41.

2. **Владимиров В.С.** Обобщенные функции в математической физике. М., 1976.

3. **Алексеева Л.А.** //Матем. журнал. 2003. Т. 3, № 4. С. 20–24.

4. **Алексеева Л.А., Саутбеков С.С.** //Журнал вычислит. математики и матем. физики. 2000. Т. 40, № 4. С. 611–622.

5. **Алексеева Л.А.** //Журнал вычислит. математики и матем. физики. 2002. Т. 42, № 1. С. 76–88.

6. **Алексеева Л.А.** //Известия НАН РК. Серия физ.-матем. 2004. № 3. С. 45–53.

7. **Алексеева Л.А.** //Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2009. Т. 6, № 1. С. 122–134.

*Поступила в редакцию 26.02.2010г.*

Математический журнал. *Алматы. 2010. Том 10. № 3 (37) . С. 14—19*

*УДК 519.6*

# ПСЕВДОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ С МАТРИЦАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ПАРАМЕТРА

З. Ж. Алеуова, Ж. А. Сартабанов

Актюбинский государственный университет имени К. Жубанова
030000 Актобе Бр. Жубановых, 263 zaleuova@mail.ru

Установлены достаточные условия существования и единственности псевдопериодического решения квазилинейной системы с матрицей, зависящей от параметров.

В связи с исследованием задач квазипериодических решений М. Урабе [1] предложил метод псевдопериодических функций. Этот метод использован для исследования задач такого же характера в [2] и [3]. Попытка создания более стройной теории псевдопериодических решений дифференциальных уравнений приводила к рассмотрению квазилинейных систем с матрицами, периодически зависящими от параметров. В работе на основе идеи метода, приведенного в [4, 5], даны условия приведения системы к каноническому виду, доказательство которого опущено ввиду подробной освещенности в указанных выше работах. Далее, на этой основе установлены достаточные условия существования псевдопериодических решений линейных и квазилинейных систем дифференциальных уравнений. Данная заметка является дальнейшим развитием результатов работ [6, 7].

Рассмотрим линейную систему неоднородных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{d\tau} = P(\alpha)x + f(\tau, e\tau + \alpha, \alpha) \tag{1}$$

с псевдопериодической с вектор-периодом $(\theta, \omega, \omega)$ свободным членом $f(\tau, t, \alpha)$:

$$f(\tau + \theta, t + k\omega, \alpha + k\omega) = f(\tau, t, \alpha) \in C(R \times R^m \times R^m), k \in Z^m, \tag{2}$$

где $\tau \in R = (-\infty, +\infty)$, $e = (1, ..., 1)$ – $m$-вектор, $P(\alpha)$ – $n \times n$ – матрица, зависящая от вектор-параметра $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m) \in R \times ... \times R = R^m$, $t = (t_1, ..., t_m)$– вектор, $x = (x_1, ..., x_n)$ – искомая вектор-функция. $Z$ – множество целых чисел, $k\omega = (k_1\omega_1, ..., k_m\omega_m)$, $\omega_0 = \theta, \omega_1, ..., \omega_m$ – рационально независимые положительные периоды.

Поставим задачу об исследовании $(\theta, \omega, \omega)$– псевдопериодических решений:

$$x(\tau + \theta, e\tau + \alpha + k\omega, \alpha + k\omega) = x(\tau, e\tau + \alpha, \alpha) \in C^{(1,1,\alpha)}_{\tau,t,\alpha}(R \times R^m \times R^m), k \in Z^m. \tag{$1_*$}$$

Keywords: *Pseudoperiodic solution, matrix, which depends on parameter*
2010 Mathematics Subject Classification: 46S10

системы (1).

**Определение.** *Функция* $x(\tau,\alpha)$ *называется псевдопериодической, если ее можно представить через* $(\theta,\omega)$ *–периодическую непрерывную в* $R\times R^m\times R^m$ *функцию* $\varphi(\tau,t,\alpha)$ *:*

$$\varphi(\tau+\theta,t+k\omega,\alpha+k\omega)=\varphi(\tau,t,\alpha)\in C(R\times R^m\times R^m)$$

*для всех* $k=(k_1,...,k_m)\in Z\times...\times Z=Z^m$ *в виде соотношения:*

$$x(\tau,\alpha)=\varphi(\tau,e\tau+\alpha,\alpha).$$

Заметим, что когда $\alpha=0$, то псевдопериодическая функция обращается в квазипериодическую функцию $\tau\in R$ по Бору.

Для наших целей достаточно ограничиваться рассмотрением решений дифференциальных уравнений $x(\tau,e\tau+\alpha,\alpha)$ с непрерывными $\omega$–периодическими начальными данными

$$x(0,\alpha,\alpha)=u(\alpha),u(\alpha+k\omega)=u(\alpha)\in C(R^m) \tag{3}$$

для всех $k\in Z^m$.

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dx}{d\tau}=P(\alpha)x. \tag{4}$$

Пусть матрица $P(\alpha)$ удовлетворяет следующим условиям:

$1^0$. Периодична по $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_m)\in R\times...\times R=R^m$ с вектор-периодом $\omega=(\omega_1,...,\omega_m)$ и непрерывна или непрерывно дифференцируема. Следовательно, имеем соотношение:

$$P(\alpha+k\omega)=P(\alpha)\in C_\alpha^{(q)}(R^m),k=(k_1,...,k_m)\in Z\times...\times Z=Z^m, \tag{5}$$

где $k\omega=(k_1\omega_1,...,k_m\omega_m),Z$ – множество целых чисел, $q=0,1$, периоды $\omega_1,...,\omega_m$ рационально несоизмеримые положительные постоянные.

$2^0$. Кратности $n_j$ корней $\lambda=\lambda_j(\alpha+k\omega)$ характеристического уравнения

$$h(\lambda,\alpha)\equiv\det\left[P(\alpha)-\lambda E\right]=0 \tag{6}$$

не зависят от $\alpha\in R^m$ и $k\in Z^m$, где $E$ – единичная $n\times n$-матрица, $1\le j\le\chi$,

$$\sum_{j=1}^{\chi}n_j=n.$$

$3^0$. Ранги $r_j,j=\overline{1,\chi}$ матриц

$$H_j(\alpha)\equiv P(\alpha)-\lambda_j(\alpha)E,\ 1\le j\le\chi, \tag{7}$$

не зависят от $\alpha\in R^m$.

При условиях $1^0-3^0$ существует $n\times n$-матрица $Q(\alpha)$, обладающая свойствами

$$\det Q(\alpha)\neq0,Q(\alpha+k\omega)=Q(\alpha)\in C_\alpha^{(q)}(R^m),k\in Z^m, \tag{8}$$

$$Q^{-1}(\alpha)P(\alpha)Q(\alpha)=J(\alpha), \tag{9}$$

где $J(\alpha) - n \times n$ –матрица вида:

$$J(\alpha) = diag\left[J_1(\mu_1), ..., J_\nu(\mu_\nu)\right],$$

с $m_p \times m_p$ –клетками

$$J_p(\mu_p) = \mu_p E_p + I_p,\ p = \overline{1,\nu},$$

соответствующими собственным значениям $\mu_p \in \Lambda = \{\lambda_1, ..., \lambda_\chi\}$, $E_p - m_p \times m_p$ – единичная матрица, $I_p$ – первый косой ряд такой же размерности, $\sum\limits_{p=1}^{\nu} m_p = n$.

Такое приведение доказывается методом математической индукции.

Тогда в силу (8)–(9) и замены

$$x = Q(\alpha)y \tag{10}$$

систему (4) можно привести к виду:

$$\frac{dy}{d\tau} = J(\alpha)y. \tag{11}$$

Очевидно, что каждому блоку $J_j(\lambda_j(\alpha))$ матрицы $J(\alpha)$ соответствует блок системы (11), которой в скалярной форме имеет вид:

$$\frac{dz_1}{d\tau} = \mu(\alpha)z_1,$$

$$\frac{dz_j}{d\tau} = z_{j-1} + \mu(\alpha)z_j,\ j = \overline{2,r}, \tag{12}$$

где $\mu(\alpha)$ представляет одно из собственных значений матрицы $P(\alpha)$. Интегрируя систему (12) имеем:

$$z_j(\tau,\alpha) = \sum_{l=0}^{j-1} \frac{\tau^l}{l!} u_{j-l}(\alpha) e^{\tau\mu(\alpha)},\ j = \overline{2,r}, \tag{13}$$

где $u(\alpha) = (u_1(\alpha), u_2(\alpha), ..., u_j(\alpha))$ – произвольная функция от вектор-параметра $\alpha \in R^m$, удовлетворяющая условию (3).

Если для собственных значений $\mu(\alpha)$ выполнено условие

$$Re\mu(\alpha) < 0, \tag{14}$$

то для решения (13) имеем оценку:

$$|z(\tau - s,\alpha)|_r = \sup_{1\le j\le r} |z_j(\tau - s,\alpha)| \le \varepsilon_r e^{-(\tau-s)[|Re\mu(\alpha)|-\delta]} \|u\|,\ \tau \ge s,\ j = \overline{1,r}. \tag{15}$$

с некоторыми постоянными $\varepsilon_r > 0$ и $\delta > 0$.

Теперь допустим, что все собственные значения $\mu(\alpha) = \lambda_j(\alpha), j = \overline{1,\nu}$, удовлетворяют условию (14). Тогда на основе оценки (15) имеем оценку для решений $y(\tau,\alpha)$ системы (11) вида:

$$|y(\tau - s,\alpha)| \le \varepsilon e^{-\gamma(\tau-s)} \|u\|,\ \tau \ge s, \tag{16}$$

где $\varepsilon > 0,\ \gamma > 0$ – некоторые положительные постоянные.

Тогда в силу (10) и (16) имеем оценку для решения $x(\tau,\alpha)$ системы (4):

$$|x(\tau - s,\alpha)| \le \|Q\| \varepsilon e^{-\gamma(\tau-s)} \|u\| = Ge^{-\gamma(\tau-s)} \|u\|,\ \tau \ge s, \tag{17}$$

где $G = \|Q\|\varepsilon$, $\|Q\| = \max\limits_{\alpha\in R^m} |Q(\alpha)|$, $|Q(\alpha)| = |[q_{ij}(\alpha)]| = \sup\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |q_{ij}(\alpha)|$.

Если $X(\tau,\alpha)$ – матрицант системы (4), то ее любое решение $x(\tau,\alpha)$ с начальным данным $x(0,\alpha)=u(\alpha)$ представляется в виде:

$$x(\tau,\alpha)=X(\tau,\alpha)u(\alpha), \tag{18}$$

где $X(0,\alpha)=E$ – единичная матрица.

Тогда в силу оценки (17) из (18) имеем:

$$|X(\tau-s,\alpha)|\leq Ge^{-\gamma(\tau-s)},\ \ \tau\geq s, \tag{19}$$

с положительными постоянными $G\geq 1$ и $\gamma>0$.

Таким образом, необходимым и достаточным условием оценки (19) является отрицательность реальных частей всех собственных значений $\lambda_j(\alpha),\ j=\overline{1,\chi},$ матрицы $P(\alpha)$, обладающей свойствами $1^0-3^0$:

$$Re\mu(\alpha)=Re\lambda_j(\alpha)<0,\ j=\overline{1,\chi}. \tag{20}$$

Необходимость условия (20) для выполнения оценки (19) легко доказывается методом от противного.

**Теорема 1.** *Пусть выполнены условия* $1^0-3^0$ *и неравенство (20). Тогда система однородных дифференциальных уравнений (4) не имеет псевдопериодических по* $(\tau,e\tau+\alpha,\alpha)$ *решений с периодом* $(\theta,\omega,\omega)$*, кроме нулевого.*

Действительно, в силу представления (18) и оценки (19) любое псевдопериодическое решение системы (4) при $\tau\to+\infty$ стремится к нулю. Ясно, что этим свойством обладает только нулевое решение. Как было показано выше, условие (19) является следствием условий $1^0-3^0$ и (20). Следовательно, теорема 1 доказана.

Заметим, что в случае постоянной матрицы $P$, т.е. когда она не зависит от параметра $\alpha$, условия $1^0-3^0$ выполняются автоматически и для справедливости теоремы 1 достаточно требовать выполнения условия (20).

Решение линейной неоднородной системы (1) представляется в виде:

$$x(\tau,e\tau+\alpha,\alpha)=X(\tau,\alpha)u(\alpha)+\int\limits_{(0,\alpha)}^{(\tau,e\tau+\alpha)}X(\tau,\alpha)X^{-1}(s,\alpha)f(s,\chi,\alpha)d_e(s,\chi), \tag{21}$$

где $X(\tau,\alpha)$–матрицант однородной системы, соответствующей системе (1).

Тогда имеет место следующая теорема

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия* $1^0-3^0$*, (2) и (20). Тогда задача (1)–(1$_*$) имеет единственное решение:*

$$x_*(\tau,e\tau+\alpha,\alpha)=X(\tau,\alpha)\int\limits_{(-\infty,\alpha)}^{(\tau,e\tau+\alpha)}X^{-1}(s,\alpha)f(s,\chi,\alpha)d_e(s,\chi). \tag{22}$$

Единственность решения (22) следует из теоремы 1. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в периодичности решения, причем несобственный интеграла сходится в силу оценки (19).

Далее, рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\xi}{d\tau}=A\xi+\varphi(\tau), \tag{24}$$

где $A-$ постоянная матрица и $\varphi(\tau)$ – вектор-функция, определяемые соотношениями:

$$A = P(0), \;\; \varphi(\tau) = f(\tau, e\tau, 0). \tag{24}$$

**Следствие 1.** *При условиях теоремы 2 система (23) с входными данными (24) имеет единственное квазипериодическое решение* $\xi_*(\tau)$ *вида:*

$$\xi_*(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\tau} K(\tau - s)\varphi(s)ds, \tag{25}$$

*где* $K(\tau - s) = X(\tau, 0)X^{-1}(s, 0) = X(\tau - s, 0)$.

Действительно, теорема 2 верна для всех $\alpha \in R^m$. В частности, и при $\alpha = 0$ она остается справедливой. Отсюда в случае (23) и (24) имеем (25), где $\xi_*(\tau) = x(\tau, e\tau, 0)$ в силу известной теоремы Г. Бора является квазипериодическим, причем интеграл (22) обращается в обыкновенный несобственный интеграл (25).

Теперь рассмотрим задачу для нелинейной системы:

$$\frac{dx}{d\tau} = P(\tau, e\tau + \alpha, \alpha)x + f(\tau, e\tau + \alpha, \alpha, x), \tag{26}$$

$$x_*(\tau + \theta, e\tau + \alpha + k\omega, \alpha + k\omega) = x_*(\tau, e\tau + \alpha, \alpha), \;\; k \in Z^m, \tag{$26_*$}$$

где вектор-функция $f(\tau, t, \alpha, x)$ удовлетворяет условиям:

$$f(\tau + \theta, t + k\omega, \alpha + k\omega, x) = f(\tau, t, \alpha, x) \in C(R \times R^m \times R^m \times R^n_\Delta), \;\; k \in Z^m, \tag{27}$$

$$|f(\tau, t, \alpha, \bar{x}) - f(\tau, t, \alpha, x)| \leq L\,|\bar{x} - x|\,, \tag{28}$$

с некоторой постоянной $L > 0$ для любых $(\tau, t, \alpha, \bar{x})$ и $(\tau, t, \alpha, x)$ из $R \times R^m \times R^m \times R^n_\Delta$, $R^n_\Delta = \{x \in R^n_\Delta : \;\; \|x\| \leq \Delta = const > 0\}$, причем постоянные $G$, $\gamma$, $L$, $\Delta$ и $M = \|f(\tau, t, \alpha, 0)\|$ связаны соотношением

$$G(M + L\Delta) < \gamma\Delta. \tag{29}$$

**Теорема 3.** *Пусть выполнены условия* $1^0 - 3^0$, *(20), (27), (28) и (29). Тогда система (26) имеет единственное псевдопериодическое по* $(\tau, e\tau + \alpha, \alpha)$ *решение* $x_*(\tau, e\tau + \alpha, \alpha)$ *с нормой* $\|x_*\| \leq \Delta$.

Для доказательства теоремы 3 вводится пространство $\Pi$ псевдопериодических функций $x(\tau, e\tau{+}\alpha, \alpha) = (x_1(\tau, e\tau{+}\alpha, \alpha), ..., x_n(\tau, e\tau{+}\alpha, \alpha))$ с нормой $\|x\| = \max\limits_{R\times R^m\times R^m} \sup\limits_{1\leq j\leq n} |x_j(\tau, e\tau + \alpha, \alpha)|$, которое является полным пространством. В замкнутом множестве $S_\Delta(0) = \{x(\tau, e\tau + \alpha, \alpha) \in \Pi : \;\; \|x\| \leq \Delta\}$ рассматривается оператор

$$(Qx)(\tau, e\tau + \alpha, \alpha) = \int\limits_{(-\infty, \alpha)}^{(\tau, e\tau+\alpha)} X(\tau, e\tau + \alpha, \alpha)X^{-1}(s, \chi, \alpha)f(s, \chi, \alpha, x(s, \chi, \alpha))d_e(s, \chi), \tag{30}$$

который в силу условий (5), (27) и (20) псевдопериодическую функцию переводит в псевдопериодическую, причем в силу условий (28), (29) и оценки (19) из (30) имеем $\|Qx\| \leq \frac{G}{\gamma}[M + L\Delta] < \Delta$, что означает $Qx \in S_\Delta(0)$.

На основе условий (19) и (28) легко получить, что для всех $\bar{x}, x \in S_\Delta(0)$ справедлива оценка:

$$||Q\bar{x} - Qx|| \leq \frac{GL}{\gamma} \|\bar{x} - x\| \,.$$

Так как, в силу условия (29), $q = \frac{GL}{\gamma} < 1$, то оператор $Q$ является сжимающим. Следовательно, по принципу неподвижных точек найдется $x_*(\tau, e\tau + \alpha, \alpha) \in S_\Delta(0)$ такая, что $x_* = Qx_*$. В силу эквивалентности задачи (26)–($26_*$) и существования неподвижной точки оператора $Q$ в $S_\Delta(0)$ имеем полное доказательство теоремы 3.

**Следствие 2.** *При условиях теоремы 3 нелинейная квазипериодическая система уравнений*

$$\frac{d\xi}{d\tau} = P(0)\xi + f(\tau, e\tau, 0, \xi)$$

*имеет единственное квазипериодическое решение* $\xi_*(\tau) = x_*(\tau, e\tau, 0)$.

Доказательство следствия 2 следует из теоремы 3 при $\alpha = 0$.

## Цитированная литература

1. **Urabe M.** //Green functions of pseudoperiodic differential operators. Lect. Notes. Math. 1971. P. 106–122.

2. **Комленко Ю. В.** //Проблемы современной теории периодических движений. 1978. №2. С. 23–28.

3. **Сартабанов Ж.** //Украинский математический журнал. 1989. №1. С. 125–130.

4. **Петровский И. Г.** Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М-Л., 1952.

5. **Петровский И. Г.** Лекции об уравнениях с частными производными. М., 1953.

6. **Алеуова З. Ж., Сартабанов Ж. А.** //Вестник КазНПУ им. Абая. 2007. № 2 (18). С. 41–45.

7. **Алеуова З. Ж.** //V Международная конференция "Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры". 9–10 октября, 2009. С. 14–17.

*Поступила в редакцию 05.08.2010г.*

Математический журнал. *Алматы. 2010. Том 10. № 3 (37) . С. 20—28*

*УДК 532.526*

# РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ И АЛГОРИТМОВ СИНТЕЗА РЕЧИ НА ПРИМЕРЕ КАЗАХСКОГО ЯЗЫКА

Е. Н. Амиргалиев, Р. Р. Мусабаев

Институт проблем информатики и управления МОН РК
050100 Алматы Пушкина, 125

В работе приведены результаты разработки унифицированных методов синтеза речевого сигнала по фонемному тексту на примере казахского языка. Моделирование и разработка информационной системы, реализующей данные методы, могут быть использованы при реализации человеко-машинных интерфейсов в составе различных информационных систем.

Система синтеза речи – это многоуровневая комплексная модель речевой функции человека, состоящая из множества подсистем. Все подсистемы в рамках единой системы решают общую задачу получения синтезированного речевого сигнала.

В качестве основной модели синтеза речи выбран компилятивный синтез, который основан на принципе построения заданного речевого сигнала из имеющегося набора эталонных звуковых фрагментов [1]. При использовании данной модели можно получить наиболее натурально звучащую синтезированную речь. Разработаны методы фрагментирования речевого сигнала, и дана оценка количества необходимых фрагментов компиляции. В процессе формирования базы данных (БД) каждое записанное выражение фрагментируется на определённые единичные составляющие: на фонемы, слоги, слова, отдельные фразы и др. С увеличением размера выбранного базового фрагмента улучшается качество синтеза, но при этом увеличиваются объём БД и затраты на её формирование. Фрагментация производится как ручным, так и автоматическим способом. Наиболее оптимальным является автоматический способ фрагментации с последующей ручной корректировкой распознанных сегментов [2]. После выделения речевые фрагменты записываются в БД, куда также в качестве вспомогательной информации сохраняются различные их акустические параметры, такие как частота основного тона, длительность, позиция в слоге, информация о смежных фонемах и др.

На этапе синтеза речи требуемая фраза формируется из общего числа наиболее подходящих фрагментов, которые выбираются из всего множества доступных в БД. В ходе этого процесса строится дерево решений, где каждому доступному решению ставится в соответствие ветвь с определенным весом и производится выбор по максимальному критерию.

Предложен метод фонетико-акустической классификации и определён оптимально достаточный набор параметров для осуществления классификации фонем в рамках проектируемой

Keywords: *Speech synthesis, TTS, signal, FFT, fast Fourier transform, spline, Bezier curves.*
2010 Mathematics Subject Classification: 68T10, 60G35

модели. Выделены основные фонетико-акустические классы: простые тональные звуки (основа – низкие частоты), простые шумовые звуки (основа – высокие частоты), импульсоподобные щелкающие и взрывные звуки (кратковременные импульсы высокой либо низкой частоты), комбинированные звуки (могут состоять из любых предыдущих составляющих).

Для каждого из перечисленных классов используются различные методы для динамической модификации их интонационных характеристик.

Наиболее важным этапом реализации системы является этап её проектирования. Именно от выбора основополагающего подхода в наибольшей степени зависят качественные показатели функционирования системы в целом. Ошибки, допущенные на этапе проектирования, могут свести на нет всю проделанную работу и система может оказаться непригодной для практического применения. Для систем конкатенативного синтеза речи подобным основополагающим подходом является выбор элементарной речевой единицы, а также методов модификации её просодических и интонационных характеристик. В случае компилятивного синтеза речи в системе обычно присутствует конечное множество базовых фрагментов речевого сигнала: $F^B = \left\{f_1^B; f_2^B; ...; f_n^B\right\}$, где $n$ – общее количество фрагментов. Данные фрагменты получаются в ходе записи речи диктора и последующего выделения необходимых фрагментов специалистами по фонетике. Размерность базового фрагмента и их количество зависит от выбранного подхода. Наиболее часто используются речевые фрагменты следующих размерностей: полуфон – половина фонемы; фонема – целая элементарная единица; дифон – два смежных полуфона различных фонем, включающий переходную область между ними; слоги, слова, фразы и т. д. Количество фрагментов в системе может колебаться от нескольких сотен до нескольких десятков тысяч. Для увеличения качества синтеза необходимо увеличивать количество используемых базовых фрагментов, что в свою очередь влечёт увеличение используемых ресурсов, а также времени синтеза. В системе могут одновременно использоваться различные типы базовых фрагментов, которые составляют соответствующее конечное множество типов: $T^B = \left\{t_1^B; t_2^B; ...; t_n^B\right\}$, где $n$ – общее количество используемых типов. Например, можно выделить следующие типы базовых фрагментов $T_k^B = \left\{V_T^B; N_T^B; E_T^B; P_T^B\right\}$: $V_T^B$ - вокализированные, $N_T^B$ - шумовые, $E_T^B$ - взрывные и щелкающие, $P_T^B$ - паузы. Каждому из типов соответствует множество объединённых под ним звуковых фрагментов. При этом для каждого типа устанавливается свой набор правил модификации характеристик $R^T = \left\{r_1^T; r_2^T; ...; r_n^T\right\}$, а также множество методов модификации $M = \{m_1(p_{11}; p_{12}; ..; p_{1k}); m_2(p_{21}; p_{22}; ...; p_{2l}); ..; m_n(p_{n1}; p_{n2}; ...; p_{nj})\}$, которыми оперируют данные правила. Каждое правило может оперировать одним или несколькими методами. Каждый метод может иметь множество параметров модификации $\{p_{11}; p_{12}; ..; p_{1k}\}$. Помимо методов в правилах участвует и множество характеристик $C = \left\{\left\{c_1^B; c_2^B; ...; c_n^B\right\}; \left\{c_1^E; c_2^E; ...; c_k^E\right\}\right\}$, как самого базового фрагмента $c_n^B$, так и его контекстного окружения $c_k^E$. Данное множество характеристик может быть представлено в виде матрицы компетенций, на основе которой выбирается наиболее оптимальный упорядоченный набор методов модификации с соответствующими им параметрами. В общем случае необходимо оперировать следующим комплексным множеством $X = \left(\left\{F_1^B; T_1^B; R_1^T; M_1; C_1\right\}; \left\{F_2^B; T_2^B; R_2^T; M_2; C_2\right\}; ...; \left\{F_n^B; T_n^B; R_n^T; M_n; C_n\right\}\right)$.

Предложен метод регулирования параметров речевого сигнала гладкими кривыми Безье. При рассмотрении естественного речевого сигнала заметны плавные изменения интонации, длительностей фонем, плавные переходы между областями высокой и низкой громкости. В виду описанных свойств при построении систем синтеза речи важно осуществлять плавное изменение всех параметров речевого сигнала. Так как сами параметры речевого сигнала имеют плавную структуру, следовательно, и функции, их регулирующие, должны иметь плавную форму. Вторым не менее важным условием является простота задания данных функций. Наиболее оптимальным вариантом является задание функций несколькими базовыми точками, а остальные точки, в случае необходимости, должны рассчитываться динамически. Для решения задачи плавного регулирования параметров синтеза использованы гладкие кривые Безье, которые задаются ограниченным набором опорных (базовых) точек. Кривая Безье задаётся выражением: $B(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i b_{i,n}(t)$, $0 < t < 1$, где $P_i$ – является функцией компонент векторов для опорных вершин, $b_{i,n}(t)$ – базисные функции кривой Безье (полиномы Бернштейна): $b_{i,n}(t) = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} t^i (1-t)^{n-i}$, $\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$, где $n$ – степень полинома, $i$ – порядковый номер опорной вершины. С помощью параметра $t$ определяется точка, принадлежащая кривой. При этом за единицу принимается вся протяженность кривой от начальной и до конечной точки.

Для достижения качественного синтеза важно плавно регулировать следующие параметры речевого сигнала: контур частоты основного тона, амплитудные огибающие, огибающая спектра. На рис.1 проиллюстрирован процесс модификации речевого сигнала параметрическими кривыми Безье.

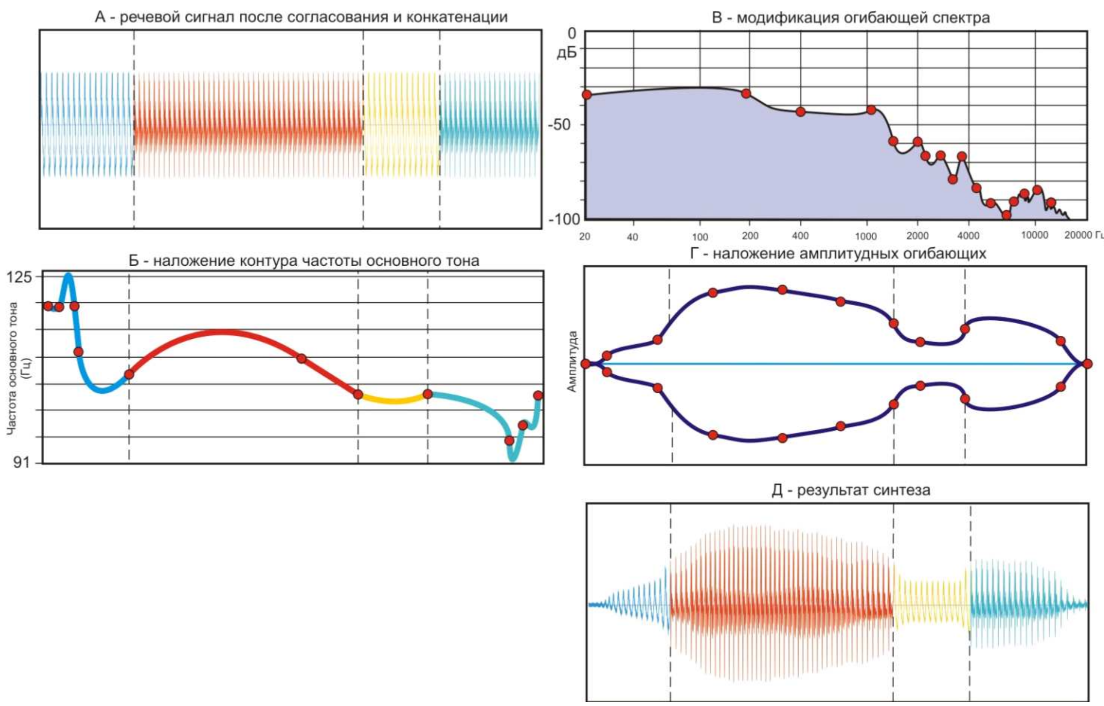


Рис.1: Процесс модификации речевого сигнала параметрическими кривыми Безье.

Заранее подготовленный, нормализированный по длительности фонем и общему уровню амплитуд речевой сигнал подаётся на вход системы регуляции параметров [3]. В зависимости от требуемых интонационных характеристик формируются контуры частоты основного тона, амплитудных и частотных огибающих, на основе которых затем осуществляется модификация исходного речевого сигнала. Для этих целей предлагаются различные методы модификации интонационной составляющей речевого сигнала. В речевом сигнале наибольшую интонационную составляющую имеют вокализированные участки. Для таких типов речевых фрагментов как шумовые и паузы можно ограничиться регулированием лишь их длительностей без особого ущерба для общего качества синтеза. С точки зрения натуральности наибольшее значение имеет регулирование следующих атрибутов: длительности звучания фонем, задание контура частоты основного тона (ЧОТ), местоположение и длительность пауз. Предлагаются методы для осуществления интонационной модификации вокализированных составляющих речевого сигнала. Данные методы апробированы и успешно используются в рамках созданной системы синтеза речи. Предлагается следующий метод модуляции речевого сигнала по амплитуде. Предварительно производится разметка по $F0$ для элементов множества $F^B \in V_T^B$. В результате получаем множество сегментов $S^V = \left(\left(I_1^S; C_1^S\right); \left(I_2^S; C_2^S\right); ...; \left(I_n^S; C_n^S\right)\right)$, заданных индексом начальной выборки $I_n^S$ и количеством входящих в данный сегмент выборок $C_n^S$ следующих по порядку за начальной выборкой (рис. 2).

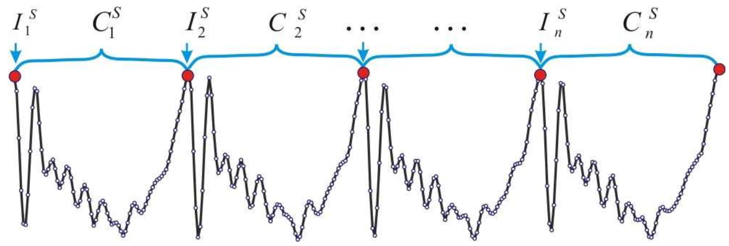


Рис.2: Исходное сегментированное множество выборок вокализированного речевого сигнала.

После разметки производится нормализация множества сегментов $S^V$ по амплитуде. Для нормализации по амплитуде используются индексы граничных выборок нормализируемого микросегмента $I_n^S$ и $I_{n+1}^S$. Изначально форма сигнала изменяется таким образом, чтобы выровнять выборку с индексом $I_{n+1}^S$ до уровня выборки $I_n^S$. Так новое значение амплитудного уровня $Z_x^S$ для каждой выборки с индексом $I_x^S \in [I_n^S;\ I_{n+1}^S]$ вычисляется следующим образом: $Z_x^S = Z_x^S\left(1 + x\frac{1}{I_{n+1}^S - I_n^S}\left(\frac{Z_n^S}{Z_{n+1}^S} - 1\right)\right)$, где $Z_x^S$ – значение амплитудного уровня для рассматриваемой выборки, $x \in [0; I_{n+1}^S - I_n^S]$, $Z_n^S$ и $Z_{n+1}^S$ – соответственно значения дискретных выборок сигнала с индексами $I_n^S$ и $I_{n+1}^S$, $I_{n+1}^S - I_n^S > 0$, $Z_{n+1}^S \neq 0$. Затем граничные выборки приводятся к заданному амплитудному уровню $L^S$, а промежуточные также пропорционально увеличиваются: $Z_x^S = \begin{cases} If \quad Z_n^S \neq 0, \quad then \quad Z_x^S = Z_x^S\frac{L^S}{Z_n^S} \\ \qquad else \quad Z_x^S = Z_x^S \end{cases}$. На рис. 3 проиллюстрирован процесс нормализации по амплитудному уровню, в итоге которого получаем $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = L^S$. Амплитудная нормализация сигнала позволяет впоследствии применить к нему произвольную огибающую амплитудного уровня и, таким образом, произвести модуляцию сигнала по громкости. Для задания плавных огибающих можно использовать параметрические кривые Безье.

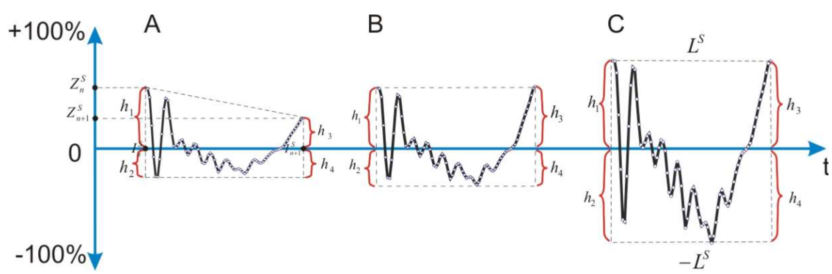


Рис.3: Процесс нормализации вокализированного микросегмента речевого сигнала по амплитудному уровню: A – исходный микросегмент, B – нормализация граничных уровней, C – приведение общего уровня к заданному.

Координаты (X,Y) произвольной точки заданной параметром $0 < t < 1$ вычисляются следующим образом:

$$X = T \cdot A_{i+1}^X + (1 - T) \cdot A_i^X + \frac{1}{6}\left[f(T) \cdot X_{i+1}^P + f(1 - T) \cdot X_i^P\right],$$

$$Y = T \cdot A_{i+1}^Y + (1 - T) \cdot A_i^Y + \frac{1}{6}\left[f(T) \cdot Y_{i+1}^P + f(1 - T) \cdot Y_i^P\right],$$

где $i$ – индекс ближайшей слева базовой точки из множества $A^{(X;Y)}$ соответствующей условиям $i\frac{1}{N_{\max}} \leq t$ и $(i+1)\frac{1}{N_{\max}} \geq t$. $N_{\max}$ – длина множества $A^{(X;Y)}$ за минусом единицы. $A_i^X$ и

$A_i^Y$ – соответственно $i$-ый элемент множества $A^{(X;Y)}$, задающий координаты $X$ и $Y$ $i$-ой базовой точки параметрической кривой. При этом $f(x) = x^3 - x$, $T = N_{\max}\left(t - D_{\max}\frac{1}{N_{\max}}\right)$,$D_{\max} = \begin{cases} If \quad t\ N_{\max} > 0 \quad and \quad trunc\,(tN_{\max}) = 0, \quad then \quad D_{\max} = tN_{\max} - 1 \\ \qquad else \quad D_{\max} = trunc\,(tN_{\max}) \end{cases}$, где $trunc\,(x)$ – функция округления дробного числа до целой части в меньшую сторону. Перед непосредственным вычислением координат $(X;Y)$ произвольной точки кривой производится предварительный расчёт следующих значений при изменении $i$ в диапазоне $[N_{\max} - 1; 1]$: $X_i^P = \frac{1}{D_i}\left(W_i^X - X_{i+1}^P\right)$, $Y_i^P = \frac{1}{D_i}\left(W_i^Y - X_{i+1}^Y\right)$, где $X_0^P = 0$, $Y_0^P = 0$, $X_{N\max}^P = 0$, $Y_{N\max}^P = 0$. Значения $W_i^X$, $W_i^Y$, $D_i$ вычисляются последовательно при изменении $i$ в диапазоне $[1; N_{\max} - 2]$: $W_i^X = W_{i+1}^X - \frac{1}{4}W_i^X$, $W_i^Y = W_{i+1}^Y - \frac{1}{4}W_i^Y$, $D_{i+1} = D_{i+1} - \frac{1}{4}$.

При этом их начальные значения задаются при изменении $i$ в диапазоне $[1; N_{\max} - 1]$: $W_i^X = 6\left(\left(A_{i+1}^X - A_i^X\right) - \left(A_i^X - A_{i-1}^X\right)\right)$, $W_i^Y = 6\left(\left(A_{i+1}^Y - A_i^Y\right) - \left(A_i^Y - A_{i-1}^Y\right)\right)$, $D_i = 4$.

Множества $X^P, Y^P, W^Y, W^X, D$ имеют размерность равную размерности множества $A^{(X;Y)}$. На Рис. 4 проиллюстрирован процесс модификации амплитуды исходного речевого сигнала по огибающей заданной набором параметрических кривых Безье.

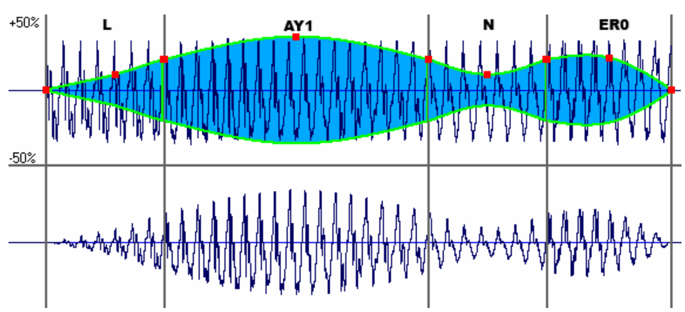


Рис. 4: Процесс модификации амплитуды исходного речевого сигнала по огибающей заданной набором параметрических кривых Безье.

Предложены два различных метода модификации контура частоты основного тона:

1. Метод перекрёстного смешивания микропериодов речевого сигнала (быстрая реализация).

2. Метод частотного разделения и интерполяции гладкими кривыми Безье (ориентация на качество).

На рис.5 проиллюстрирован первый метод.

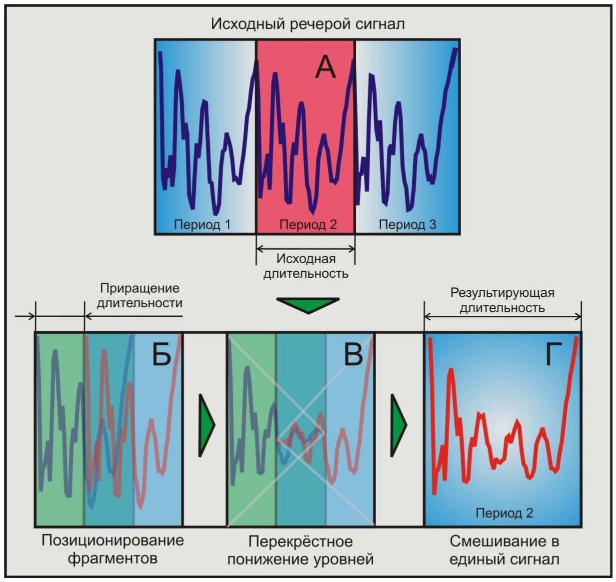


Рис. 5: Иллюстрация метода перекрёстного смешивания двух копий сигнала с заданным смещением и встречным понижением амплитудного уровня.

Производится сегментация речевого сигнала на микросегменты по динамике изменения периода основного тона: $S = (s_1; s_2; ...; s_k) = \{P; N\}$, где $k$ – общее количество микросегментов. Микросегменты классифицируются и распределяются на два подмножества $P$ и $N$ – на периодические и непериодические. На вход алгоритма последовательно подаются микросегменты $p \in P$ подлежащие модификации. Имеются две временные копии модифицируемого микросегмента $p_1$ и $p_2$. Звуковой сигнал каждого микросегмента представляется упорядоченным множеством дискретных выборок $V = (v_1; v_2; ...; v_n)$, где $n$ – количество дискретных выборок в сигнале. Во множестве $V \in p_1$ с конечной позиции производится удаление подмножества выборок, количество которых задаётся $q = L_1 - L_2$, где $L_1$ – длина в выборках исходного сигнала микросегмента, а $L_2$ – длина к которой необходимо привести $L_1$. Удаление производится только при условии $q > 0$. Во множестве $V \in p_2$ с начальной позиции производится удаление подмножества выборок, количество которых также равно $q$. Удаление производится при условии $q > 0$. Над множеством $V \in p_1$ производится операция по приданию сигналу формы плавного линейного уменьшения амплитудного уровня до нуля. При данной операции модифицированная дискретная выборка задаётся выражением $y_i = \left(1 - \frac{i}{n}\right) \cdot v_i$, где $i \in (0...n-1)$, $y_i \in Y$. Затем над множеством $V \in p_2$ производится операция по приданию сигналу формы плавного линейного увеличения амплитудного уровня от нулевого до исходного. При данной операции модифицированная дискретная выборка задаётся как $u_i = \frac{s_i \cdot i}{n}$, где $i \in (0...n-1)$, $u_i \in U$. Определяется приращение длины единичного сегмента в ходе его модификации $\Delta L = L_2 - L_1$, где $L_1$ и $L_2$ соответственно длины исходного и модифицированного микросегментов. Если частота основного тона, приходящаяся на единичный микросегмент обратно пропорциональна его длине $F0 = \frac{1}{L}$, где $L$ – длина микросегмента, следовательно, приращение частоты основного тона в ходе её модификации $\Delta F0 = -\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{L+\Delta L}\right)$. Упорядоченные множества $Y$ – с конечной позиции, а $U$ – с начальной дополняются подмножеством нулевых выборок $Z = (z_1 = 0; z_2 = 0; ...; z_h = 0)$, где $h = \begin{cases} \Delta L, & if\, \Delta L > 0 \\ 0, & in\ other\ case \end{cases}$. Каждый элемент результирующего множества выборок $R$ является суммой $r_i = u_i + y_i$, где $i \in (1...n+h)$, $r_i \in R$. Приращение длительности сигнала в целом при модификации $F0$-контура является суммой приращений длительностей всех составляющих его микросегментов: $\Delta L_{signal} = \sum_{i=1}^{i=k} \Delta L_i$, где $\Delta L_i$ – приращение длины микросегмента $s_i \in S$. Наиболее качественного результата позволяет добиться метод частотного разделения и

интерполяции гладкими кривыми Безье. Он состоит из следующих этапов:
1. Разложение вокализированных микросегментов на высокочастотные и низкочастотные составляющие.
2. Модификация длительностей низкочастотных составляющих кривыми Безье в соответствии с заданным *F0*-контуром.
3. Сборка модифицированных низкочастотных составляющих с исходными высокочастотными составляющими в единый результирующий микросегмент.

На рис. 6 приведён пример разложения фрагмента речевого сигнала на высокочастотные и низкочастотные составляющие с помощью алгоритма быстрого синусного преобразования Фурье.

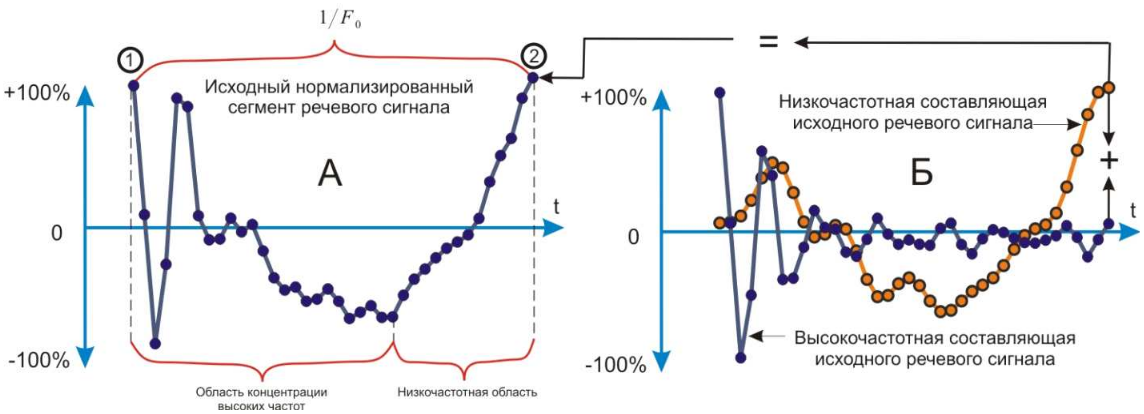


Рис. 6: Пример разложения фрагмента речевого сигнала на высокочастотные и низкочастотные составляющие: А – исходный сегмент; Б – его составляющие; 1 и 2 – соответственно моменты размыкания и смычки голосовых связок.

Исходный сигнал задан упорядоченным множеством дискретных выборок:

$$S^D = s_0^D; s_1^D; ...; s_{N-1}^D,$$

где $N$ – количество выборок. Задаётся частотная граница, разделяющая диапазон на низкие и высокие частоты: $F_{mid} = 700Hz$. Для алгоритма быстрого преобразования Фурье подбирается оптимальный размер окна $R_{FFT}$, значение которого соответствует условиям: $R_{FFT} = 2^{X+1}$, $X > 0$, $X \in \{1, 2, ..., +\infty\} \to \min$, $2^X \geq N$. Максимальная частота для преобразования Фурье вычисляется по формуле $F_{\max} = \frac{B_{Sec}}{2B_{Smp}}$, где $B_{Sec}$ и $B_{Smp}$ – соответственно общее количество байт в секунду и количество байт в одной выборке для исходного сигнала. При этом разрешение по частоте $dF = \frac{F_{\max}}{R_{FFT}}$. В виду того, что $R_{FFT} > N$ используется дополнительное множество $S^E = \left\{ s_0^E; s_1^E; ...; s_{R_{FFT}-1}^E \right\}$ размерностью $R_{FFT}$. При этом исходное множество $S^D$ располагается в середине множества $S^E$ с позиции $P^D = \frac{R_{FFT}-N}{2}$. Левая часть множества $S^E$ от выборки $s_0^E$ до $s_{P^D-1}^E$ заполняется следующим образом:

$$s_i^E = \begin{cases} If\ [(P^D - i) \div N] \mod 2 = 0,\ then\ s_i^E = s_{(P^D-i) mod N}^D \\ else\ s_i^E = s_{(N-1)-[(P^D-i) \mod N]}^D \end{cases},$$

где $i \in [0, \quad P^D - 1]$.

Правая же часть множества $S^E$ от выборки $s_{P^D+N}^E$ до $s_{R_{FFT}-1}^E$ заполняется по следующему принципу:

$$s_i^E = \begin{cases} If \quad [(i - P^D - N - 1) \quad \div \quad N] \quad \bmod \quad 2 = 0, \quad then \quad s_i^E = s^D_{N-1-(i-P^D-N-1) \mod N}, \\ else \quad s_i^E = s^D_{(i-P^D-N-1) \mod N}. \end{cases}$$

Таким образом, по обе стороны $S^D$ получаем его зеркальное продолжение. В крайних областях $S^E$ производится быстрое дискретное синусное преобразование Фурье данного множества. В качестве результата преобразования получаем следующее множество:

$$S^{FFT} = \left\{ s_0^{FFT}; s_1^{FFT}; ...; s^{FFT}_{R_{FFT}-1} \right\}.$$

Каждому элементу множества $S^{FFT}$ можно поставить в соответствие элемент множества

$$F^{FFT} = \left\{ f_0^{FFT} = 0 \cdot dF; f_1^{FFT} = 1 \cdot dF; ...; f^{FFT}_{R_{FFT}-1} = (R_{FFT} - 1) \cdot dF \right\}.$$

Увеличивая или уменьшая значения в определённой области $S^{FFT}$ в соответствии с требуемым диапазоном частот из $F^{FFT}$ можно добиться усиления (подавления) данного диапазона частот в составе модифицируемого сигнала. Для этого используется множество коэффициентов

$$C^{FFT} = \left\{ c_0^{FFT}; c_1^{FFT}; ...; c^{FFT}_{R_{FFT-1}} \right\}.$$

При этом

$$\begin{cases} f_i^{FFT} > F_{mid}, \quad c_i^{FFT} = 0, \\ f_i^{FFT} \le F_{mid}, \quad c_i^{FFT} = 1, \end{cases}$$

где $i \in [\ 0, \quad R^{FFT} - 1\ ]$.

Каждый элемент множества $S^{FFT}$ умножается на соответствующий ему коэффициент из множества $C^{FFT}$: $S_L^{FFT} = \left\{ c_0^{FFT} \cdot s_0^{FFT}; c_1^{FFT} \cdot s_1^{FFT}; ...; c^{FFT}_{R_{FFT-1}} \cdot s^{FFT}_{R_{FFT-1}} \right\}$. Дискретное преобразование Фурье обратно самому себе. Используя данное свойство и выполнив ДПФ для $S_L^{FFT}$, получаем звуковой сигнал $S_L^E$, содержащий только низкие частоты ($< F_{mid}$). Из множества $S_L^E$ удаляются все выборки, порядковый индекс $i$ которых находится в следующих интервалах: $[\ 0; \quad P^D - 1\ ]$ и $[\ P^D + N; \quad R_{FFT} - 1\ ]$. Таким образом, множество $S_L^E$ приобретает вид $S_L^E = \left\{ s_0^L; s_1^L; ...; s_{N-1}^L \right\}$. После выделения низкочастотной составляющей сигнала несложно выделить и его высокочастотную составляющую. Для этого каждая выборка из $S^D$ суммируется с соответствующей выборкой из $S_L^E$ взятой в противофазе:

$$S_H^E = \left\{\ -s_0^L + s_0^D; \quad -s_1^L + s_1^D; \quad ...; \quad -s_{N-1}^L + s_{N-1}^D;\ \right\} = \left\{ s_0^H; s_1^H; ...; s_{N-1}^H \right\}.$$

Для приведения к требуемой длине $L_2$ производится увеличение или уменьшение длительности $S_L^E$ интерполяцией кривыми Безье. При этом все выборки из множества $S_L^E$ принимаются как опорные точки кривой Безье. На основе полученной кривой вычисляется требуемое количество выборок $L_2$, которыми заменяется имеющееся множество $S_L^E$. Если $L_2 < L_1$, тогда длина множества $S_H^E$ уменьшается до $L_2$ отсечением части его правых элементов. Просуммировав множества $S_L^E$ и $S_H^E$ получаем результирующее множество $S_R^E = \left\{ s_0^L + s_0^H; s_1^L + s_1^L; ...; s_{L_2-1}^L + s_{L_2-1}^L \right\}$. Данное множество является модифицированным по длительности микропериодом речевого сигнала, что и требовалось осуществить. Операция изменения длительности выполняется для всего множества микропериодов составляющих речевой сигнал.

Произведена настройка и адаптация разработанной системы для синтеза речевого сигнала по фонемному тексту на казахском языке, а также произведен анализ различных особенностей казахского языка, исследован его фонетический состав. Осуществлена классификация фонемного состава казахского языка по форме звуковой волны и выбор методов её модификации.

Исследованы правила преобразования буква-фонема с целью разработки алгоритма фонетического транскрибирования казахских текстов [4]. Разработанные математические методы и модели позволяют в широком диапазоне осуществлять модификацию интонационных характеристик набора эталонных речевых сигналов по множеству регулируемых параметров. Программная реализация данных методов и моделей показала их достаточную эффективность и надёжность [6-8]. При этом результат синтеза имеет высокие качественные показатели. Нерешённым остаётся вопрос построения интонационной модели казахского языка и последующий процесс её алгоритмизации для построения полнофункционального синтезатора казахской речи по тексту [5].

## Цитированная литература


1. **Taylor P.** Text to Speech Synthesis. University of Cambridge, 2007.
2. **Винцюк Т.К** Анализ, распознавание и интерпретация речевых сигналов. К., 1987.
3. **Рабинер Л. Р., Шафер Р. В.** Цифровая обработка речевых сигналов. М., 1981.
4. **Кенесбаев С. К., Аралбаев Ж. А.** Вопросы казахской фонетики и фонологии. Алма-Ата, 1979.
5. **Базарбаева З. М.** Казахская интонация. Алматы, 2008.
6. **Амиргалиев Е.Н., Мусабаев Р.Р.** Методы анализа и проектирования системы синтеза искусственной речи //Таврический Вестник Информатики и Математики Таврического Национального Университета. Украина, 2008. № 1. С. 51–59.
7. **Амиргалиев Е.Н., Мусабаев Р.Р.** //Труды Института вычислительной математики и мат. геофизики СО РАН. 2009. С. 14–22.
8. **Амиргалиев Е.Н., Мусабаев Р.Р.** //Вычислительные технологии ИВТ СО РАН. 2010. № 1. С. 25–29.


*Поступила в редакцию 22.01.2010г.*

Математический журнал. *Алматы. 2010. Том 10. № 3 (37) . С. 29—36*

*УДК 512.55*

# СИММЕТРИЧЕСКИЕ КОЦИКЛЫ АЛГЕБРЫ ЛИ ТИПА $B_2$

А. Б. Бакирова

Институт Математики МОиН РК
050010 Алматы Пушкина, 125 aliya6262@mail.ru

В работе описано пространство симметрических коциклов для алгебры Ли типа $B_2$ над полем $\mathbf{K}$.

**Введение.** Пусть $L$ – классическая алгебра Ли типа $B_2$ над полем $\mathbf{K}$ характеристики $p \geq 0$. Пусть $C^2_{com}(L)$ – пространство билинейных симметрических отображений $\psi : L \times L \to \mathbf{K}$,

$$\psi(a, b) = \psi(b, a),$$

для всех $a, b \in L$. Для билинейного отображения $\psi : L \times L \to \mathbf{K}$ обозначим через $d\psi$ трилинейное отображение $d\psi : L \times L \times L \to \mathbf{K}$, определенное по правилу:

$$d\psi(a, b, c) = \psi([a, b], c) + \psi([b, c], a) + \psi([c, a], b).$$

Назовем $\psi \in C^2_{com}(L)$ *коммутативным коциклом,* если $d\psi = 0$. Пусть $Z^2_{com}(L)$ – пространство коммутативных коциклов.

Коммутативные коциклы появлются при изучении анти-Ли допустимых алгебр [1]. Алгебра $A = (A, \circ)$ с векторным пространством $A$ и умножением $A \times A \to A, (a, b) \mapsto a \circ b$ называется 1 *-анти-Ли допустимой* (кратко 1 -Алиа), если

$$\{[a, b], c\} + \{[b, c], a\} + \{[c, a], b\} = 0,$$

для всех $a, b, c \in A$. Здесь

$$[a, b] = a \circ b - b \circ a,$$

$$\{a, b\} = a \circ b + b \circ a$$

соответственно лиево и жорданово коммутаторы. Мы говорим, что алгебра $(A, \circ)$ является *двусторонне Alia,* если

$$[a, b] \circ c + [b, c] \circ a + [c, a] \circ b = 0,$$

$$a \circ [b, c] + b \circ [c, a] + c \circ [a, b] = 0,$$

Keywords: *The classical Lie algebra, central extension, commutative cocycle*
2010 Mathematics Subject Classification: 17B05

для всех $a, b, c \in A$. Заметим, что двусторонне Alia алгебра есть $q$-Alia для любого $q \in \mathbf{K}$. В частности она является Lie-допустимой (в нашей терминологии $-1$-Alia) и $1$-Alia. Пусть $A = (A, \circ)$ be двусторонне Alia алгебра и $L = A^{(-1)}$ является ее алгеброй Ли, $L = (A, [\ ,\ ])$. Если $L$ простая, тогда $A$ тоже является простой. Если $Z^2_{com}(L) = 0$, тогда $A$ Ли и изоморфна $L$.

Как показано в [1] любая $1$-Alia алгебра $A$ определяется как антикоммутативная алгебра с коммутативным коциклом с коэффициентам из $A$. Если данная антикоммутативная алгебра не только антикоммутативна, но и Лиева, тогда соответствующая $1$-Alia алгебра является двусторонне Alia.

Для алгебры Ли $L$ выберем следующий базис:

$$e_1 = E_{1,2} + E_{4,5},\ e_2 = 2E_{2,3} - E_{3,4},\ e_3 = 2E_{1,3} + E_{3,5},\ e_4 = E_{1,4} + E_{2,5},$$

$$h_1 = E_{1,1} - E_{2,2} + E_{4,4} - E_{5,5},\ h_2 = 2E_{2,2} - 2E_{4,4},$$

$$f_1 = E_{2,1} + E_{4,5},\ f_2 = E_{3,2} - 2E_{4,3},\ f_3 = E_{3,1} + 2E_{5,3},\ f_4 = E_{4,1} + E_{5,2},$$

$$h_1 = h_\alpha,\ h_2 = h_\beta,\ e_1 = e_\alpha,\ e_2 = e_\beta = e_2,$$

$$e_3 = e_{\alpha+\beta},\ e_4 = e_{\alpha+2\beta},\ f_1 = e_{-\alpha},\ f_2 = e_{-\beta},\ f_3 = e_{-\alpha-\beta},\ f_4 = e_{-\alpha-2\beta}.$$

Пусть $H$ подалгебра Картана $L$. Разобъем $C^2_+(L)$ в прямую сумму весовых подпространств относительно $H$:

$$C^2_+(L) = \bigoplus_\mu C^2_\mu(L).$$

Пусть

$$Z^2_{com}(L) = \bigoplus_{\mu\in\Lambda} Z^2_{com,\mu}(L).$$

$$\psi_1 = h_1^* \otimes h_2^*,\ \psi_2 = h_1^* \otimes e_1^*,\ \psi_3 = h_1^* \otimes e_2^*,\ \psi_4 = h_1^* \otimes e_3^*,$$

$$\psi_5 = h_1^* \otimes e_3^*,\ \psi_6 = h_1^* \otimes f_1^*,\ \psi_7 = h_1^* \otimes f_2^*,\ \psi_8 = h_1^* \otimes f_3^*,$$

$$\psi_9 = h_1^* \otimes f_4^*,\ \psi_{10} = h_2^* \otimes e_1^*,\ \psi_{11} = h_2^* \otimes e_2^*,\ \psi_{12} = h_2^* \otimes e_3^*,$$

$$\psi_{13} = h_2^* \otimes e_4^*,\ \psi_{14} = h_2^* \otimes f_1^*,\ \psi_{15} = h_2^* \otimes f_2^*,\ \psi_{16} = h_2^* \otimes f_3^*,$$

$$\psi_{17} = h_2^* \otimes f_4^*,\ \psi_{18} = e_1^* \otimes e_2^*,\ \psi_{19} = e_1^* \otimes e_3^*,\ \psi_{20} = e_1^* \otimes e_4^*,$$

$$\psi_{21} = e_1^* \otimes f_1^*,\ \psi_{22} = e_1^* \otimes f_2^*,\ \psi_{23} = e_1^* \otimes f_3^*,\ \psi_{24} = e_1^* \otimes f_4^*,$$

$$\psi_{25} = e_2^* \otimes e_3^*,\ \psi_{26} = e_2^* \otimes e_4^*,\ \psi_{27} = e_2^* \otimes f_1^*,\ \psi_{28} = e_2^* \otimes f_2^*,$$

$$\psi_{29} = e_2^* \otimes f_3^*,\ \psi_{30} = e_2^* \otimes f_4^*,\ \psi_{31} = e_3^* \otimes e_4^*,\ \psi_{32} = e_3^* \otimes f_1^*,$$

$$\psi_{33} = e_3^* \otimes f_2^*,\ \psi_{34} = e_3^* \otimes f_3^*,\ \psi_{35} = e_3^* \otimes f_4^*,\ \psi_{36} = e_4^* \otimes f_1^*,$$

$$\psi_{37} = e_4^* \otimes f_2^*,\ \psi_{38} = e_4^* \otimes f_3^*,\ \psi_{39} = e_4^* \otimes f_4^*,\ \psi_{40} = f_1^* \otimes f_2^*,$$

$$\psi_{41} = f_1^* \otimes f_3^*,\ \psi_{42} = f_1^* \otimes f_4^*,\ \psi_{43} = f_2^* \otimes f_3^*,\ \psi_{44} = f_2^* \otimes f_4^*,$$

$$\psi_{45} = f_3^* \otimes f_4^*,\ \psi_{46} = h_1^* \otimes h_1^*,\ \psi_{47} = h_2^* \otimes h_2^*,\ \psi_{48} = e_1^* \otimes e_1^*,$$

$$\psi_{49} = e_2^* \otimes e_2^*,\ \psi_{50} = e_3^* \otimes e_3^*,\ \psi_{51} = e_4^* \otimes e_4^*,\ \psi_{52} = f_1^* \otimes f_1^*,$$

$$\psi_{53} = f_2^* \otimes f_2^*,\ \psi_{54} = f_3^* \otimes f_3^*,\ \psi_{55} = f_4^* \otimes f_4^*,$$

$$(h_\alpha = h_1),\ (h_\beta = h_2),\ (e_\alpha = e_1),\ (e_\beta = e_2),$$
$$(e_{\alpha+\beta} = e_3),\ (e_{\alpha+2\beta} = e_4),\ (e_{-\alpha} = f_1),\ (e_{-\beta} = f_2),\ (e_{-\alpha-\beta} = f_3),\ (e_{-\alpha-2\beta} = f_4),$$

Основным результатом является

**Теорема 1.** *Пусть $L$ классическая алгебра Ли типа $B_2$ над полем $\mathbf{K}$ характеристики $char\mathbf{K} \geq 0$. Тогда $Z^2_{com}(L) = 0$, кроме следующих случаев:*

*(a)* $Z^2_{com}(L) \approx \langle \psi_i \mid i = 1, 2, \cdots, 18 \rangle \approx \mathbf{K}^{18}$, *если* $p = 2$, *где* $\psi_1 = e^*_{\alpha+2\beta} \otimes e^*_{-\alpha-2\beta}$,
$\psi_2 = e^*_\beta \otimes e^*_{-\beta} + e^*_{\alpha+\beta} \otimes e^*_{-\alpha-\beta}$,
$\psi_3 = e^*_\alpha \otimes e^*_{-\alpha}$,
$\psi_4 = h^*_\alpha \otimes e^*_\alpha + h^*_\beta \otimes e^*_\alpha + e^*_{\alpha+\beta} \otimes e^*_{-\beta}$,
$\psi_5 = h^*_\alpha \otimes e^*_\beta + e^*_{\alpha+\beta} \otimes e^*_{-\alpha} + e^*_{\alpha+2\beta} \otimes e^*_{-\alpha-\beta}$,
$\psi_6 = h^*_\alpha \otimes e^*_{\alpha+\beta} + e^*_\alpha \otimes e^*_\beta + e^*_{\alpha+2\beta} \otimes e^*_{-\beta}$,
$\psi_7 = h^*_\beta \otimes e^*_{\alpha+2\beta} + e^*_\beta \otimes e^*_{\alpha+\beta}$,
$\psi_8 = h^*_\alpha \otimes e^*_{-\alpha} + h^*_\beta \otimes e^*_{-\alpha} + e^*_\beta \otimes e^*_{-\alpha-\beta}$,
$\psi_9 = h^*_\alpha \otimes e^*_{-\alpha-\beta} + e^*_\beta \otimes e_{-\alpha} - 2\beta^* + e^*_{-\alpha} \otimes e^*_{-\beta}$,
$\psi_{10} = h^*_\beta \otimes e^*_{-\alpha-2\beta} + e^*_{-\beta} \otimes e^*_{-\alpha-\beta}$,
$\psi_{11} = e^*_\alpha \otimes e^*_{\alpha+2\beta}$,
$\psi_{12} = e^*_\alpha \otimes e^*_{-\alpha-2\beta}$,
$\psi_{13} = e^*_\beta \otimes e^*_\beta$,
$\psi_{14} = e^*_{-\alpha} \otimes e^*_{-\alpha-2\beta}$,
$\psi_{15} = e^*_\alpha \otimes e^*_\alpha$,
$\psi_{16} = e^*_{\alpha+2\beta} \otimes e^*_{\alpha+2\beta}$,
$\psi_{17} = e^*_{-\alpha} \otimes e^*_{-\alpha}$,
$\psi_{18} = e^*_{-\alpha-2\beta} \otimes e^*_{-\alpha-2\beta}$,

*(b)* $Z^2_{com}(L) \approx \langle \phi \rangle \approx \mathbf{K}^1$, *если* $p = 3$, *где* $\psi_1 = 2(h^*_\alpha \otimes h^*_\alpha) + h^*_\alpha \otimes h^*_\beta + h^*_\beta \otimes h^*_\beta + e^*_\alpha \otimes e^*_{-\alpha} + 2(e^*_\beta \otimes e^*_{-\beta}) + 2(e^*_{\alpha+\beta} \otimes e^*_{-\alpha-\beta} + e^*_{\alpha+2\beta} \otimes e^*_{-\alpha-2\beta}$,

**Доказательство.** Следует из теоремы 1 и теоремы 4.1 [1].

Следовательно, если $p \neq 2, 3$, существует только одна простая алгебра Ли, именно $sl_2$, с нетривиальной структурой двусторонне Alia алгебры. Соответствующие двусторонне Alia алгебры описаны в теореме 6.5 [1].

**Замечание.** *Если $char\mathbf{K} = 3$, тогда теорема th1 не верна. Если $( \, , \, )$ есть форма Киллинга на $L$, тогда*

$$\psi(a, b) = (a, b)$$

*является коммутативным коциклом на $L$ (теорема 6.3 [1]).*

Пусть $H$ подалгебра Картана $L$. Обозначим пространство декомпозиции билинейных форм $C^2(L)$ в прямую сумму весовых подпространств относительно $H$:

$$C^2(L) = \bigoplus_\mu C^2_\mu(L).$$

Возьмем базис в $L$, дуальный базис пространства линейных форм $L^*$ и возьмем базис пространства коммутативных билинейных форм $C^2_{com}(L)$. Представим $C^2_{com}(L)$ как прямую сумму собственных подпространств относительно подалгебры Картана $H$,

$$C^2_{com}(L) = \oplus_\mu C^2_{com,\mu}(L).$$

Пусть

$$Z^2_{com}(L) = \bigoplus_{\mu \in \Lambda} Z^2_{com,\mu}(L).$$

Для линейных отображений $f, g$ на $L$ обозначим $f \odot g$ коммутативное билинейное отображение определенное как

$$f \odot g(a, b) = f(a)g(b) + f(b)g(a).$$

Базис $C^2_{com}(L)$ будет совместим с действием $H$. Условия коцикличности на $\psi \in Z^2_{com,\mu}(L)$ дадут нам системы линейных уравнений. Мы докажем, что для любого $\mu$ эти уравнения имеют тривиальное решение, если $p \neq 2, 3$. Доказательство мы привели для случая ранга 2. Легко обобщается на общий случай.

**Доказательство теоремы 1 в случае** $rank L = 2$. Мы покажем вычисление $Z^2_{com}(L)$ для случая $L = B_2$.

Возьмем следующий базис алгебры Ли типа $B_2 = sl_3$,

$$e_1 = E_{1,2} + E_{4,5},\ e_2 = 2E_{2,3} - E_{3,4},\ e_3 = 2E_{1,3} + E_{3,5},\ e_4 = E_{1,4} + E_{2,5},$$

$$h_1 = E_{1,1} - E_{2,2} + E_{4,4} - E_{5,5},\ h_2 = 2E_{2,2} - 2E_{4,4},$$

$$f_1 = E_{2,1} + E_{4,5},\ f_2 = E_{3,2} - 2E_{4,3},\ f_3 = E_{3,1} + 2E_{5,3},\ f_4 = E_{4,1} + E_{5,2},$$

$$h_1 = h_\alpha,\ h_2 = h_\beta,\ e_1 = e_\alpha,\ e_2 = e_\beta = e_2,$$

$$e_3 = e_{\alpha+\beta},\ e_4 = e_{\alpha+2\beta},\ f_1 = e_{-\alpha},\ f_2 = e_{-\beta},\ f_3 = e_{-\alpha-\beta},\ f_4 = e_{-\alpha-2\beta}.$$

Возьмем дуальный базис пространства линейных форм $L^*$ по правилу $e^*_i(e_j) = \delta_{i,j}$.

Заметим, что пространство коммутативных форм на $L$ есть размерности $55$. Следующие коммутативные билинейные формы на $C^2(L, \mathbf{K})$ образуют базис:

$$\psi_1 = h^*_1 \otimes h^*_2,\ \psi_2 = h^*_1 \otimes e^*_1,\ \psi_3 = h^*_1 \otimes e^*_2,\ \psi_4 = h^*_1 \otimes e^*_3,$$

$$\psi_5 = h^*_1 \otimes e^*_3,\ \psi_6 = h^*_1 \otimes f^*_1,\ \psi_7 = h^*_1 \otimes f^*_2,\ \psi_8 = h^*_1 \otimes f^*_3,$$

$$\psi_9 = h^*_1 \otimes f^*_4,\ \psi_{10} = h^*_2 \otimes e^*_1,\ \psi_{11} = h^*_2 \otimes e^*_2,\ \psi_{12} = h^*_2 \otimes e^*_3,$$

$$\psi_{13} = h^*_2 \otimes e^*_4,\ \psi_{14} = h^*_2 \otimes f^*_1,\ \psi_{15} = h^*_2 \otimes f^*_2,\ \psi_{16} = h^*_2 \otimes f^*_3,$$

$$\psi_{17} = h^*_2 \otimes f^*_4,\ \psi_{18} = e^*_1 \otimes e^*_2,\ \psi_{19} = e^*_1 \otimes e^*_3,\ \psi_{20} = e^*_1 \otimes e^*_4,$$

$$\psi_{21} = e^*_1 \otimes f^*_1,\ \psi_{22} = e^*_1 \otimes f^*_2,\ \psi_{23} = e^*_1 \otimes f^*_3,\ \psi_{24} = e^*_1 \otimes f^*_4,$$

$$\psi_{25} = e^*_2 \otimes e^*_3,\ \psi_{26} = e^*_2 \otimes e^*_4,\ \psi_{27} = e^*_2 \otimes f^*_1,\ \psi_{28} = e^*_2 \otimes f^*_2,$$

$$\psi_{29} = e^*_2 \otimes f^*_3,\ \psi_{30} = e^*_2 \otimes f^*_4,\ \psi_{31} = e^*_3 \otimes e^*_4,\ \psi_{32} = e^*_3 \otimes f^*_1,$$

$$\psi_{33} = e^*_3 \otimes f^*_2,\ \psi_{34} = e^*_3 \otimes f^*_3,\ \psi_{35} = e^*_3 \otimes f^*_4,\ \psi_{36} = e^*_4 \otimes f^*_1,$$

$$\psi_{37} = e^*_4 \otimes f^*_2,\ \psi_{38} = e^*_4 \otimes f^*_3,\ \psi_{39} = e^*_4 \otimes f^*_4,\ \psi_{40} = f^*_1 \otimes f^*_2,$$

$$\psi_{41} = f^*_1 \otimes f^*_3,\ \psi_{42} = f^*_1 \otimes f^*_4,\ \psi_{43} = f^*_2 \otimes f^*_3,\ \psi_{44} = f^*_2 \otimes f^*_4,$$

$$\psi_{45} = f^*_3 \otimes f^*_4,\ \psi_{46} = h^*_1 \otimes h^*_1,\ \psi_{47} = h^*_2 \otimes h^*_2,\ \psi_{48} = e^*_1 \otimes e^*_1,$$

$$\psi_{49} = e^*_2 \otimes e^*_2,\ \psi_{50} = e^*_3 \otimes e^*_3,\ \psi_{51} = e^*_4 \otimes e^*_4,\ \psi_{52} = f^*_1 \otimes f^*_1,$$

$$\psi_{53} = f^*_2 \otimes f^*_2,\ \psi_{54} = f^*_3 \otimes f^*_3,\ \psi_{55} = f^*_4 \otimes f^*_4,$$

Напомним, что мы используем следующее обозначение $f \odot g = f \otimes g + g \otimes f$. Случай $\mu = 0$. Тогда

$$\psi = y_1\psi_1 + y_{16}\psi_{16} + y_{21}\psi_{21} + y_{25}\psi_{25} + y_{29}\psi_{29} + y_{30}\psi_{30}.$$

Из условия $-\psi([a,b],c)+\psi([a,c],b)-\psi([b,c],a)=0$ для следующих $(a,b,c)$'s мы имеем:

| $(a,b,c)$ | cocyclicity conditions |
|---|---|
| $(h_\alpha, e_\alpha, e_{-\alpha})$ | $-4y_{16}-y_{29}=0$ |
| $(h_\alpha, e_\beta, e_{-\beta})$ | $-y_1+2y_{21}=0$ |
| $(h_\alpha, e_{\alpha+\beta}, e_{-\alpha-\beta})$ | $-y_1-2y_{25}-y_{29}=0$ |
| $(h_\beta, e_\alpha, e_{-\alpha})$ | $-y_1+2y_{16}=0$ |
| $(h_\beta, e_\beta, e_{-\beta})$ | $-4y_{21}-y_{30}=0$ |
| $(e_{\alpha+\beta}, e_{-\alpha}, e_{-\beta})$ | $y_{16}+y_{21}+y_{25}=0$ |

Детерминант соответствующей матрицы равен 12:

$$\begin{vmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 12,$$

что отлично от нуля,если $p \neq 2,3$. Таким образом,

$$y_1=0, y_{16}=0, y_{21}=0, y_{25}=0, y_{29}=0, y_{30}=0.$$

Поэтому,

$$Z^2_{com,\mu}(L)=0 \quad \text{if} \quad \mu=0, \quad p\neq 2,3.$$

Подобные же вычисления необходимы для других случаев.

Случай $\mu=-2\lambda_1+\lambda_2$. Тогда $\psi=y_2\psi_2+y_8\psi_8+y_{24}\psi_{24}\in Z^{\mu}_{com}(L,\mathbf{K})$. Мы имеем

| $(a,b,c)$ | cocyclicity conditions |
|---|---|
| $(h_\alpha, h_\beta, e_\alpha)$ | $y_2+2y_8=0$ |
| $(h_\beta, e_{\alpha+\beta}, e_{-\beta})$ | $y_8+3y_{24}=0$ |
| $(e_\alpha, e_\beta, e_{-\beta})$ | $y_8+y_{24}=0$ |

Имеет матрицу с детерминантом -2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Так,

$$y_2=0, y_8=0, y_{24}=0,$$

и

$$Z^2_{com,\mu}(L)=0 \quad \text{if} \quad \mu=-2\lambda_1+\lambda_2, \quad p\neq 2.$$

Случай $\mu=\lambda_1-2\lambda_2$. Тогда $\psi=y_3\psi_3+y_9\psi_9+y_{23}\psi_{23}\in H^2_\lambda(L,\mathbf{K}.)$ Мы имеем:

| $(a,b,c)$ | cocyclicity conditions |
|---|---|
| $(h_\alpha, h_\beta, e_\beta)$ | $-2y_3-y_9=0$ |
| $(h_\alpha, e_{\alpha+\beta}, e_{-\alpha})$ | $y_3-3y_{23}=0$ |
| $(e_\beta, e_{\alpha+\beta}, e_{-\alpha-\beta})$ | $-y_3-y_9+y_{23}=0$ |

Имеет матрицу с детерминантом 4:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

Так, $y_3 = y_9 = y_{23} = 0$.

Случай $\mu = -\lambda_1 - \lambda_2$. Тогда $\psi = y_4\psi_4 + y_{10}\psi_{10} + y_{14}\psi_{14} \in Z^2_{com,\mu}(L, \mathbf{K})$. Мы имеем:

| $(a, b, c)$ | cocyclicity conditions |
|---|---|
| $(h_\alpha, h_\beta, e_{\alpha+\beta})$ | $y_{10} - y_4 = 0$ |
| $(h_\beta, e_\alpha, e_\beta)$ | $3y_{14} - y_{10} = 0$ |
| $(e_\beta, e_{\alpha+\beta}, e_{-\beta})$ | $y_{10} - y_{14} = 0$ |

Имеет матрицу с детерминантом 2:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

Таким образом, $y_4 = y_{10} = y_{14} = 0$.

Случай $\mu = 2\lambda_1 - \lambda_2$. Тогда $\psi = y_5\psi_5 + y_{11}\psi_{11} + y_{22}\psi_{22} \in H^2_\lambda(L, \mathbf{K}.)$ Мы имеем:

| $(a, b, c)$ | cocyclicity conditions |
|---|---|
| $(h_\alpha, h_\beta, e_{-\alpha})$ | $-y_5 - 2y_{11} = 0$ |
| $(e_\beta, e_{-\alpha}, e_{-\beta})$ | $y_{11} + y_{22} = 0$ |
| $(e_{\alpha+\beta}, e_{-\alpha}, e_{-\alpha-\beta})$ | $y_5 + y_{11} + y_{22} = 0$ |

Имеет матрицу с детерминантом -2:

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Так, $y_5 = y_{11} = y_{22} = 0$.

Случай $\mu = -\lambda_1 + 2\lambda_2$. Тогда $\psi = y_6\psi_6 + y_{12}\psi_{12} + y_{18}\psi_{18} \in Z^2_{com,\mu}(L, \mathbf{K})$. Мы имеем

| $(a, b, c)$ | cocyclicity conditions |
|---|---|
| $(h_\alpha, h_\beta, e_{-\beta})$ | $2y_6 + y_{12} = 0$ |
| $(h_\alpha, e_\alpha, e_{-\alpha-\beta})$ | $y_6 - 3y_{18} = 0$ |
| $(e_{\alpha+\beta}, e_{-\beta}, e_{-\alpha-\beta})$ | $y_6 + y_{12} - y_{18} = 0$ |

Имеет матрицу с детерминантом 4:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4.$$

Так, $y_1 = y_{12} = y_{18} = 0$.

Случай $\mu = \lambda_1 + \lambda_2$. Тогда $\psi = y_7\psi_7 + y_{13}\psi_{13} + y_{26}\psi_{26} \in Z^2_{com,\mu}(L)$. Мы имеем:

| $(a, b, c)$ | cocyclicity conditions |
|---|---|
| $(h_\alpha, h_\beta, e_{-\alpha-\beta})$ | $y_7 - y_{13} = 0$ |
| $(h_\alpha, e_{-\alpha}, e_{-\beta})$ | $y_7 + 3y_{26} = 0$ |
| $(e_\alpha, e_{-\alpha}, e_{-\alpha-\beta})$ | $-y_7 + y_{26} = 0$ |

Имеет матрицу с детерминантом 4:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Так, $y_7 = y_{13} = y_{26} = 0$.

Случай $\mu = -3\lambda_1$. Тогда $\psi = y_{15}\psi_{15} \in Z^2_{com,\mu}(L)$. Из условий коцикличности $(h_\alpha, e_\alpha, e_{\alpha+\beta})$ мы имеем: $y_{15} = 0$. Следовательно

$$Z^2_{com,-3\lambda_1}(L, \mathbf{K}) = 0.$$

Случай $\mu = -3\lambda_1 + 3\lambda_2$. В этом случае $\psi = y_{17}\psi_{17} \in Z^2_{com,\mu}(L)$. Из следующих уравнений

$$(h_\alpha, e_\alpha, e_{-\beta}) : -y_{17} = 0,$$

мы получаем

$$-y_{17} = 0.$$

Следовательно,

$$Z^2_{com,-3\lambda_1+3\lambda_2} = 0;$$

Случай $\mu = -3\lambda_2$. Тогда $\psi = y_{19}\psi_{19} \in Z^2_{com,\lambda}(L)$ . Мы имеем:

$$d\psi(h_\beta, e_\beta, e_{\alpha+\beta}) = 0 \Rightarrow y_{19} = 0,$$

Следовательно,

$$Z^2_{com,-3\lambda_2} = 0.$$

Случай $\mu = 3\lambda_1 - 3\lambda_2$. Тогда $\psi = y_{20}\psi_{20} \in Z^2_{com,\mu}(L)$. Мы имеем:

$$d\psi(h_\beta, e_\beta, e_{-\alpha}) \Rightarrow -y_{20} = 0.$$

Следовательно,

$$Z^2_{com,3\lambda_1-3\lambda_2} = 0.$$

Случай $\mu = 3\lambda_1$. Тогда $\psi = y_{27}\psi_{27} \in Z^2_{com,\mu}(L)$. Мы имеем:

$$d\psi(h_\beta, e_{-\alpha}, e_{-\alpha-\beta}) \Rightarrow -2y_{27} = 0.$$

Следовательно,

$$Z^2_{com,3\lambda_1} = 0.$$

Случай $\mu = 3\lambda_2$. Тогда $\psi = y_{28}\psi_{28} \in Z^2_{com,\mu}(L)$. Из следующего уравнения

$$d\psi(h_\beta, e_{-\beta}, e_{-\alpha-\beta}) = 0 \Rightarrow y_{28} = 0.$$

Следовательно,

$$Z^2_{com,3\lambda_2} = 0.$$

Случай $\mu = -4\lambda_1 + 2\lambda_2$. Тогда $\psi = y_{31}\psi_{31} \in Z^2_{com,\mu}(L)$. Мы имеем:

$$d\psi(e_\alpha, e_{\alpha+\beta}, e_{-\beta}) \Rightarrow y_{31} = 0,$$

Следовательно,

$$Z^2_{com,4\lambda_1-2\lambda_2} = 0.$$

Случай $\mu = 2\lambda_1 - 4\lambda_2$. Тогда $\psi = y_{32}\psi_{32} \in Z^2_{com,\mu}(L)$. Мы имеем:

$$d\psi(e_\beta, e_{\alpha+\beta}, e_{-\alpha}) \Rightarrow y_{32} = 0,$$

Следовательно,

$$Z^2_{com,2\lambda_1-4\lambda_2} = 0.$$

Случай $\mu = -2\lambda_1 - 2\lambda_2$. Тогда $\psi = y_{33}\psi_{33} \in Z^2_{com,\mu}(L)$. Мы имеем:

$$(e_\alpha, e_\beta, e_{\alpha+\beta}) \Rightarrow -y_{33} = 0.$$

Следовательно,

$$Z^2_{com,-2\lambda_1+2\lambda_2} = 0.$$

Случай $\mu = 4\lambda_1 - 2\lambda_2$. Тогда $\psi = y_{34}\psi_{34} \in Z^2_{com,\mu}(L)$. Мы имеем:

$$d\psi(e_\beta, e_{-\alpha}, e_{-\alpha-\beta}) \Rightarrow y_{34} = 0,$$

так,

$$Z^2_{com,-4\lambda_1+2\lambda_2} = 0.$$

Случай $\mu = -2\lambda_1 + 4\lambda_2$. Тогда $\psi = y_{35}\psi_{35} \in Z^2_{com,\mu}(L)$. Мы имеем:

$$d\psi(e_\alpha, e_{-\beta}, e_{-\alpha-\beta}) \Rightarrow -y_{35} = 0.$$

Таким образом

$$Z^2_{com,-2\lambda_1+4\lambda_2} = 0.$$

Случай $\mu = 2\lambda_1 + 2\lambda_2$. Тогда $\psi = y_{36}\psi_{36} \in Z^2_{com,\mu}(L)$. Мы имеем:

$$d\psi(e_{-\alpha}, e_{-\beta}, e_{-\alpha-\beta}) \Rightarrow y_{36} = 0.$$

Следовательно,

$$Z^2_{com,2\lambda_1+2\lambda_2} = 0.$$

**Доказательство теоремы 1 в общем случае.** Если ранг $L$ равен 2, как мы показали выше теорема верна. Если ранг $L$ больше $> 2$, тогда любые два корня $\gamma, \delta$, порождают корневую систему ранга 2 или корневую систему ранга 1. Любая корневая система ранга 1 может быть расширена до корневой системы ранга 2. Следовательно, $e_\gamma, e_\delta$ пораждает алгебру Ли ранга 2 или подалгебру алгебры ранга 2. Таким образом, в любом случае

$$\psi(e_\gamma, e_\delta) = 0$$

для коммутативного коцикла $\psi$.

## Цитированная литература

1. **Dzhumadil'daev A.S.** //Современная математика и ее приложения. Институт кибернетики. НАН Грузии, 2008. Т. 60. С. 13–32.

*Поступила в редакцию 01.09.2010г.*

*УДК 517.95*

# CLASSICAL SOLUTION OF A NONREGULAR CONJUNCTION PROBLEM FOR THE HEAT EQUATIONS

G. I. Bizhanova

Institute of Mathematics of the Ministry of Education and Sciences of the Republic of Kazakhstan, 050010 Almaty Pushkin str. 125, galya@math.kz, galina_math@mail.ru

One dimensional conjunction boundary value problem for the heat equations with the incompatible initial and boundary data is studied. It is shown that a nonfulfillment of the compatibility conditions leads to the appearance in the solution of the problem of the special functions (repeated integrals of a probability), which are singular in the vicinity of a boundary of the domains as $t \to 0$. After extraction from the solution of these functions there is proved in the weighted and classical Hölder spaces the existence, uniqueness and estimates of the solution of the problem, to which the original problem was reduced.

## 1. Introduction. Statement of the problem. Main definitions

When we investigate the initial boundary value problems for the parabolic equations in the Hölder space $C_{x\ \ t}^{2+l,1+l/2}(\overline{\Omega}_T)$, $l$–positive noninteger, we require the fulfillment of the compatibility conditions of the boundary and initial data. These conditions provide the continuous of the solution and its derivatives and boundedness of the Hölder constants of the higher derivatives in $\overline{\Omega}_T$. The compatibility conditions represent the functional identities connecting the given functions on the boundary of the domain at the initial moment and they considerably restrict the arbitrariness of all given functions in the problem.

Studying the boundary value problems in the weighted Hölder space $C_s^l(\Omega_T)$, $s \in (l, 2+l]$, introduced by V.S.Belonosov we can get rid of one or two compatibility conditions, this depends on the boundary conditions of the problems and the indexes $s, l$ [1], [2], [9], but if in the problem there is the first boundary condition, then we should require the fulfilment of the zero order compatibility condition for any $s, l$.

Y. Martel and Ph. Souplet in [8] proved that the solution of the first boundary value problem for the parabolic equation with incompatible data is not continuous in the closure of a domain.

Keywords: *parabolic equation, incompatible data, existence, uniqueness, estimate of the solution, Hölder space, singular solution*

2010 Mathematics Subject Classification: 35K20, 35A20, 35A07, 35B65

In [5] there was studied one dimensional first and second initial boundary value problems for the heat equations with the incompatible data and was shown an order of the singularity of the solution with respect to $t$ in the vicinity of a boundary of a domain.

We study the conjunction boundary value problem for the heat equations with the incompatible initial and boundary data of all necessary orders on the boundary of a domain. The nonfulfilment of the compatibility conditions of initial and boundary data leads to the appearance of the special functions (repeated integrals of a probability) in the solution of the problem, which are singular in the vicinity of a boundary of a domain as $t \to 0$. After extraction of these functions from the solution we derive the problem, for which the compatibility conditions of the all necessary orders are fulfilled and prove the existence, uniqueness and estimates of the solutions of the obtained problem in the weighted and classical Hölder spaces.

In Chapter 1 we set the problem, determine the weighted and classical Hölder spaces and compatibility conditions for the considered problem and define the special functions (repeated integrals of the probability). The main results of the paper are formulated in the Chapter 2. In the Chapter 3 we construct these special functions as the solutions of the auxiliary problems with incompatible data. Then in Chapter 4 with the help of them after suitable substitutions of the unknown functions in the problem we prove the unique solvability and derive the estimates of the solution of the obtained problem in the weighted and classical Hölder spaces.

Let $D_1 := \mathbb{R}^1_- = \{x : x \in (-\infty, 0)\}$, $D_2 := \mathbb{R}^1_+ = \{x : x \in (0, \infty)\}$, $D_{jT} := D_j \times (0, T)$, $j = 1, 2$, $\sigma_T := (0, T)$.

It is required to find the functions $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ satisfying the heat equations

$$\partial_t u_1 - a_1 \partial_x^2 u_1 = f_1(x,t) \;\text{ in }\; D_{1T}, \quad \partial_t u_2 - a_2 \partial_x^2 u_2 = f_2(x,t) \;\text{ in }\; D_{2T}, \tag{1.1}$$

the initial conditions

$$u_j\big|_{t=0} = u_{0j}(x) \text{ in } \; D_j, \; j = 1, 2, \tag{1.2}$$

and the conjunction conditions

$$(u_1 - u_2)\big|_{x=0} = \varphi(t), \quad t \in (0, T), \tag{1.3}$$

$$\big(\lambda_1 \partial_x u_1 - \lambda_2 \partial_x u_2\big)\big|_{x=0} = \psi(t), \quad t \in (0, T). \tag{1.4}$$

Here $a_j,\ \lambda_j,\ j = 1, 2$, are positive constants, $\partial_t^k = \partial^k / \partial t^k$, $\partial_x^k = \partial^k / \partial x^k$, $k = 1, 2, \ldots$. Further we shall denote by $C_1, C_2, \ldots$ the positive constants and use the notation $D_t^k = d^k / d^k t$, $D_x^k = d^k / d^k x$.

We define the weighted [1, 2] and classical [7] Hölder spaces.

Let $\Omega \in \mathbb{R}^1$, $\Omega_T := \Omega \times (0, T)$. By $C_s^l(\Omega_T)$, $l$ – positive noninteger, $s \le l$, we denote the Banach space of the functions $u(x,t)$ with the norm

$$|u|^{(l)}_{s,\Omega_T} = \sup_{t<T} t^{\frac{l-s}{2}} [u]^{(l)}_{\Omega'_t} + \sum_{s<2j_0+j<l} \sup_{t<T} t^{\frac{2j_0+j-s}{2}} |\partial_t^{j_0} \partial_x^j u|_{\Omega'_t} + \begin{cases} |u|^{(s)}_{\Omega_T}, & s \ge 0, \\ 0, & s < 0, \end{cases} \tag{1.5}$$

where $\Omega'_t = \Omega \times (t/2, t)$, $|f|_{\Omega_T} = \sup_{(x,t)\in\Omega_T} |f|$,

$$\begin{gathered} [f]^{(l)}_{\Omega_T} = \sum_{2j_0+j=[l]} [\partial_t^{j_0} \partial_x^j f]^{(l-[l])}_{x,\Omega_T} + \sum_{0<l-2j_0-j<2} [\partial_t^{j_0} \partial_x^j f]^{(\frac{l-2j_0-j}{2})}_{t,\Omega_T}, \\ [f]^{(\alpha)}_{x,\Omega_T} = \sup_{(x,t),(z,t)\in\Omega_T} \frac{|f(x,t) - f(z,t)|}{|x-z|^\alpha}, \quad [f]^{(\alpha)}_{t,\Omega_T} = \sup_{(x,t),(x,\tau)\in\Omega_T} \frac{|f(x,t) - f(x,\tau)|}{|t-\tau|^\alpha}, \; \alpha \in (0,1), \end{gathered} \tag{1.6}$$

$|u|^{(s)}_{\Omega_T}$ is the norm of the classical Hölder space $C^{s,s/2}_{x\ \ t}(\overline{\Omega}_T)$ :

$$|u|^{(s)}_{\Omega_T}=\sum_{2j_0+j=0}^{[s]}|\partial_t^{j_0}\partial_x^j u|_{\Omega_T}+\begin{cases}[u]^{(s)}_{\Omega_T}, & s-\text{noninteger},\\ 0, & s-\text{integer},\end{cases}$$

where the Hölder constants $[u]^{(s)}_{\Omega_T}$ are determined by the formulas (1.6) with $l=s$.

$C^{l/2}_{s/2}(\sigma_T)$ is the Banach space of the functions $v(t)$ with the norm

$$|v|^{(l/2)}_{s/2,\sigma_T}=\sup_{t<T}t^{\frac{l-s}{2}}[D_t^{[l/2]}v]^{(l/2-[l/2])}_{\sigma'_t}+\sum_{s<2j_0<l}\sup_{t<T}t^{\frac{2j_0-s}{2}}|D_t^{j_0}\,v|_{\sigma'_t}+\begin{cases}|v|^{(s/2)}_{\sigma_T}, & s\geq 0,\\ 0, & s<0,\end{cases}$$

where $\sigma'_t=(t/2,\,t)$, $|v|^{(s/2)}_{\sigma_T}$ is the norm of the Hölder space $C^{s/2}(\overline{\sigma}_T)$:

$$|v|^{(s/2)}_{\sigma_T}=\sum_{j_0=0}^{[s/2]}|D_t^{j_0}v|_{\sigma_T}+\begin{cases}[D_t^{[s/2]}v]^{(s/2-[s/2])}_{t,\sigma_T}, & s/2-\text{noninteger},\\ 0, & s/2-\text{integer}.\end{cases}$$

For $s=l$ the spaces $C^l_s(\Omega_T)$ and $C^{l/2}_{s/2}(\sigma_T)$ are the classical Hölder spaces $C^{l,l/2}_{x\ \ t}(\overline{\Omega}_T)$ and $C^{l/2}(\overline{\sigma}_T)$ respectively.

Define the compatibility conditions of the initial and boundary functions for the problem (1.1)–(1.4). Let $u_j^{(n)}(x,t)=\partial_t^n u_j(x,t)$,

$$\begin{gathered}u_j^{(n)}(x)=\partial_t^n u_j(x,t)\big|_{t=0},\quad u_j^{(0)}(x)=u_{0j}(x),\quad f_j^{(n)}(x)=\partial_t^n f_j(x,t)\big|_{t=0},\ j=1,2,\\ \varphi^{(n)}(0)=D_t^n\varphi(t)\big|_{t=0},\ \ \psi^{(n)}(0)=D_t^n\psi(t)\big|_{t=0},\ n=0,1,2,\dots.\end{gathered}\tag{1.7}$$

The functions $u_j^{(n)}(x)$, $n=1,2,\dots$, are determined from the equations (1.1) and an initial conditions (1.2), i.e.

$$u_j^{(1)}(x)=\partial_t u_j(x,t)\big|_{t=0}=a_j\,u''_{0j}(x)+f(x,0),\tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}u^{(n)}(x)&=\Big(\partial_t^{n-1}\big(a\,\partial_x^2u_j(x,t)+f(x,t)\big)\Big)\Big|_{t=0}=\big(a_j\,\partial_x^2u_j^{(n-1)}(x,t)+f^{(n-1)}(x,t)\big)\big|_{t=0}\\ &\equiv a_j^n\,D_x^{2n}u_{0j}(x)+\sum_{\nu=1}^{n-1}a_j^\nu\,D_x^{2\nu}\,f_j^{(n-1-\nu)}(x)+f_j^{(n-1)}(x),\ n=2,3,\dots.\end{aligned}\tag{1.9}$$

Here $D_x^n=d^n/d^nx$, $D_t^n=d^n/d^nt$.

We denote

$$A_n:=\varphi^{(n)}(0)-\big(u_1^{(n)}(x)-u_2^{(n)}(x)\big)\big|_{x=0},\ n=0,1,2,\dots,\tag{1.10}$$

$$B_n:=\psi^{(n)}(0)-\big(\lambda_1D_xu^{(n)}(x)-\lambda_2D_xu^{(n)}(x)\big)\big|_{x=0},\ n=0,1,2,\dots.\tag{1.11}$$

The compatibility conditions of the n-th order for the problem (1.1)–(1.4) correspoding to the conjunction conditions (1.3) and (1.4) respectively are

$$\begin{aligned}&\big(\partial_t^nu_1(x,t)-\partial_t^nu_2(x,t)\big)\big|_{t=0,\,x=0}\equiv\big(u_1^{(n)}(x)-u_2^{(n)}(x)\big)\big|_{x=0}\\ &=D_t^n\varphi(t)\big|_{t=0}\equiv\varphi^{(n)}(0),\quad\text{or}\quad A_n=0,\ n=0,1,2,\dots,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&\big(\lambda_1\partial_x\partial_t^nu_1(x,t)-\lambda_2\partial_x\partial_t^nu_2(x,t)\big)\big|_{t=0,\,x=0}\equiv\big(\lambda_1D_xu_1^{(n)}(x)-\lambda_2D_xu_2^{(n)}(x)\big)\big|_{x=0}\\ &=D_t^n\psi(t)\big|_{t=0}\equiv\psi^{(n)}(0),\quad\text{or}\quad B_n=0,\ n=0,1,2,\dots.\end{aligned}$$

In particular, the compatibility conditions of the zero, first and zero orders corresponding to the boundary conditions (1.3) and (1.4) respectively have the form

$$A_0 := \varphi(0) - \big(u_{01}(x) - u_{02}(x)\big)\big|_{x=0} = 0, \tag{1.12}$$

$$A_1 := \varphi'(0) - \big(a_1\, u''_{01} + f_1(x,0) - a_2\, u''_{02} - f_2(x,0)\big)\big|_{x=0} = 0; \tag{1.13}$$

and

$$B_0 := \psi(0) - \big(\lambda_1 u'_{01}(x) - \lambda_2 u'_{02}(x)\big)\big|_{x=0} = 0. \tag{1.14}$$

For the problem (1.1)–(1.4) the following theorems are valid.

**Theorem 1.1** [4, 9] *Let $\alpha \in (0,1)$, $s \in (\alpha,\, 2+\alpha]$.*

*For every functions $u_{0j}(x) \in C^s(\overline{D}_j)$, $f_j(x,t) \in C^{\alpha}_{s-2}(D_{jT})$, $j = 1,2$, $\varphi(t) \in C^{1+\alpha/2}_{s/2}(\sigma_T)$, $\psi(t) \in C^{\frac{1+\alpha}{2}}_{\frac{s-1}{2}}(\sigma_T)$ satisfying the compatibility conditions*

$$A_0 = 0 \text{ for } s \in (\alpha,\, 1);\ A_0 = 0,\ B_0 = 0 \text{ for } s \in [1,\, 2);$$
$$A_0 = 0,\ A_1 = 0,\ B_0 = 0 \text{ for } s \in [2,\, 2+\alpha],$$

*where $A_0$, $A_1$, $B_0$ are defined by the formulas (1.12)– (1.14), the problem (1.1) – (1.4) has a unique solution $u_j(x,t) \in C^{2+\alpha}_s(D_{jT})$, $j = 1,2$, and an estimate for it takes place*

$$\sum_{j=1}^{2} |u_j|^{(2+\alpha)}_{s,D_{jT}} \le C_1\Big(\sum_{j=1}^{2}\big(|u_{0j}|^{(s)}_{D_j} + |f_j|^{(\alpha)}_{s-2,D_{jT}}\big) + |\varphi|^{(1+\alpha/2)}_{s/2,\sigma_T} + |\psi|^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{\frac{s-1}{2},\sigma_T}\Big).$$

**Theorem 1.2** [3, 7] *For every functions $u_{0j}(x) \in C^{2+\alpha}(\overline{D}_j)$, $f_j(x,t) \in C^{\alpha,\,\alpha/2}_{x\quad t}(\overline{D}_{jT})$, $j = 1,2$, $\varphi(t) \in C^{1+\alpha/2}(\overline{\sigma}_T)$, $\psi(t) \in C^{\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{\sigma}_T)$, $\alpha \in (0,1)$, satisfying the compatibility conditions*

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad B_0 = 0,$$

*where $A_0$, $A_1$, $B_0$ are defined by the formulas (1.12)–(1.14), the problem (1.1) – (1.4) has a unique solution $u_j(x,t) \in C^{2+\alpha,\,1+\alpha/2}_{x\qquad t}(\overline{D}_{jT})$, $j = 1,2$, and an estimate for it takes place*

$$\sum_{j=1}^{2} |u_j|^{(2+\alpha)}_{D_{jT}} \le C_2\Big(\sum_{j=1}^{2}\big(|u_{0j}|^{(2+\alpha)}_{D_j} + |f_j|^{(\alpha)}_{D_{jT}}\big) + |\varphi|^{(1+\alpha/2)}_{\sigma_T} + |\psi|^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{\sigma_T}\Big).$$

**Remark 1.1** *Comparing Theorems 1.1 and 1.2 we can see that the consideration of the problem in the weighted Hölder space $C^{2+\alpha}_s(D_{jT})$ permits us to get rid of one or two compatibility conditions of the highest orders. In any case the compatibility condition of the zero order: $A_0 = 0$ must be fulfilled.*

Further we shall apply the special functions (repeated integrals of the probability) $\mathrm{i}^n\mathrm{erfc}\,\zeta$. Define them [6], Ch. 7.2, page 122,

$$\begin{gathered}\mathrm{i}^n\mathrm{erfc}\,\zeta := \int_\zeta^\infty \mathrm{i}^{n-1}\mathrm{erfc}\,\xi\, d\xi, \;\; n = 0,1,2,\ldots, \\ \mathrm{i}^{-1}\mathrm{erfc}\,\zeta := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\zeta^2}, \;\; \mathrm{i}^0\mathrm{erfc}\,\zeta := \mathrm{erfc}\,\zeta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_\zeta^\infty e^{-\xi^2}\, d\xi, \;\; \mathrm{i}^1\mathrm{erfc}\,\zeta := \mathrm{ierfc}\,\zeta.\end{gathered} \tag{1.15}$$

The following relations for them are fulfilled:

$$d/d\zeta\, \mathrm{i}^n\mathrm{erfc}\,\zeta = -\mathrm{i}^{n-1}\mathrm{erfc}\,\zeta, \quad n = 0,1,2,\ldots, \tag{1.16}$$

$$\mathrm{i}^n\mathrm{erfc}\,\zeta = \frac{1}{2n}\,\mathrm{i}^{n-2}\,\mathrm{erfc}\,\zeta - \frac{\zeta}{n}\,\mathrm{i}^{n-1}\mathrm{erfc}\,\zeta, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$\mathrm{i}^n\mathrm{erfc}\,0 = \frac{1}{2^n\,\Gamma(n/2+1)}, \quad n = -1, 0, 1, \ldots, \tag{1.17}$$

where $\Gamma(\cdot)$ — Euler gamma – function. As it is seen from the formulas (1.15), (1.17) for $\zeta \geq 0$ these functions are restricted

$$\mathrm{i}^n\mathrm{erfc}\,\zeta \leq \mathrm{i}^n\mathrm{erfc}\,0, \quad n = -1,\, 0,\, 1, \ldots,$$

and they satisfy an estimate [5]

$$\mathrm{i}^n\mathrm{erfs}\,\zeta \leq (\sqrt{2})^{n+1}\mathrm{i}^n\mathrm{erfs}\frac{\zeta}{\sqrt{2}}\,e^{-\zeta^2/2}, \quad (\zeta \geq 0), \quad n = -1,\, 0,\, 1, \ldots. \tag{1.18}$$

## 2. Main results

We shall prove that the nonfulfilment of the compatibility conditions in the problem (1.1)–(1.4) leads to the appearance in the solution of the special functions (repeated integrals of the probability) $\mathrm{i}^n\mathrm{erfc}\,\frac{x}{2\sqrt{a_j t}}$, which are singular in the vicinity of the boundary $x = 0$ of a domain as $t \to 0$. But the main results of the present work are formulated in the general case, i.e. for every given functions satisfying or not the compatibility conditions.

We remind that the fulfillment of the compatibility conditions of the $n_0$–th order corresponding to the boundary conditions (1.3) and (1.4) means $A_{n_0} = 0$ and $B_{n_0} = 0$ respectively, where $A_{n_0}$, $B_{n_0}$ are determined by the formulas (1.10), (1.11).

**Theorem 2.1** *For every functions $u_{0j}(x) \in C^{2+\alpha}(\overline{D}_j)$, $f_j(x,t) \in C_{x\ \ t}^{\alpha,\,\alpha/2}(\overline{D}_{jT})$, $j = 1, 2$, $\varphi(t) \in C^{1+\alpha/2}(\overline{\sigma}_T)$, $\psi(t) \in C^{\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{\sigma}_T)$, $\alpha \in (0,1)$, the problem* (1.1) – (1.4) *has a unique solution*

$$u_j(x,t) = V_j^{(0)}(x,t) + V_j^{(2)}(x,t) + W_j^{(1)}(x,t) + v_j(x,t), \;\; j = 1, 2,$$

*where*

$$V_1^{(0)}(x,t) = A_0\,\frac{\lambda_2}{æ\sqrt{a_2}}\mathrm{erfs}\,\frac{-x}{2\sqrt{a_1 t}}, \quad V_2^{(0)}(x,t) = -A_0\,\frac{\lambda_1}{æ\sqrt{a_1}}\mathrm{erfs}\,\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}} \tag{2.1}$$

$$V_1^{(2)}(x,t) = A_1\,\frac{\lambda_2}{æ\sqrt{a_2}}\frac{1}{\mathrm{i}^2\mathrm{erfs}\,0}\,t\,\mathrm{i}^2\mathrm{erfs}\,\frac{-x}{2\sqrt{a_1 t}}, \quad V_2^{(2)}(x,t) = -A_1\,\frac{\lambda_1}{æ\sqrt{a_1}}\frac{1}{\mathrm{i}^2\mathrm{erfs}\,0}\,t\,\mathrm{i}^2\mathrm{erfs}\,\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}, \tag{2.2}$$

$$W_j^{(1)}(x,t) = B_0\,\frac{2}{æ}\,\sqrt{t}\,\mathrm{ierfs}\,\frac{(-1)^j x}{2\sqrt{a_j t}}, \;\; j = 1, 2, \tag{2.3}$$

$æ = \lambda_1/\sqrt{a_1} + \lambda_2/\sqrt{a_2}$, *the values $A_0$, $A_1$, $B_0$ are defined by the formulas* (1.12)– (1.14), *and the functions $v_j(x,t)$ belong to $C_{x\ \ \ \ t}^{2+\alpha,\,1+\alpha/2}(\overline{D}_{jT})$, $j = 1, 2$, and satisfy an estimate*

$$\sum_{j=1}^{2} |v_j|_{D_{jT}}^{(2+\alpha)} \leq C_1\Big(\sum_{j=1}^{2}\big(|u_{0j}|_{D_j}^{(2+\alpha)} + |f_j|_{D_{jT}}^{(\alpha)}\big) + |\varphi|_{\sigma_T}^{(1+\alpha/2)} + |\psi|_{\sigma_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}\Big). \tag{2.4}$$

**Theorem 2.2** *Let $\alpha \in (0,1)$, $s \in (\alpha,\, 2+\alpha]$.*

*For every functions $u_{0j}(x) \in C^s(\overline{D}_j)$, $f_j(x,t) \in C_{s-2}^{\alpha}(D_{jT})$, $j = 1, 2$, $\varphi(t) \in C_{s/2}^{1+\alpha/2}(\sigma_T)$, $\psi(t) \in C_{\frac{s-1}{2}}^{\frac{1+\alpha}{2}}(\sigma_T)$ the problem* (1.1) – (1.4) *has a unique solution*

$$u_j(x,t) = \begin{cases} V_j^{(0)}(x,t) + v_j^{(1)}(x,t), & s \in (\alpha,\, 1), \\ V_j^{(0)}(x,t) + W_j^{(1)}(x,t) + v_j^{(2)}(x,t), & s \in [1,\, 2), \\ V_j^{(0)}(x,t) + V_j^{(2)}(x,t) + W_j^{(1)}(x,t) + v_j^{(3)}(x,t), & s \in [2,\, 2+\alpha], \qquad j = 1, 2, \end{cases}$$

*where the functions* $V_j^{(0)}(x,t)$, $V_j^{(2)}(x,t)$, $W_j^{(1)}(x,t)$ *are defined by the formulas* (2.1)–(2.3), *and the functions* $v_j^{(1)}(x,t)$, $v_j^{(2)}(x,t)$, $v_j^{(3)}(x,t)$ *belong to the space* $C_s^{2+\alpha}(D_{jT})$, $j=1,2$, *and satisfy an estimate*

$$\sum_{j=1}^{2}|v_j^{(k)}|_{s,D_{jT}}^{(2+\alpha)} \le C_2\Big(|u_0|_{D_j}^{(s)}+|f_j|_{s-2,D_{jT}}^{(\alpha)}+|\varphi|_{s/2,\sigma_T}^{(1+\alpha/2)}+|\psi|_{\frac{s-1}{2},\sigma_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}\Big),\ k=1,2,3. \tag{2.5}$$

**Theorem 2.3** *Let* $\alpha\in(0,1)$, $k=0,\,1,\,2,\ldots$.

*For every functions* $u_{0j}(x)\in C^{2+k+\alpha}(\overline{D}_j)$, $f_j(x,t)\in C_x^{k+\alpha,\,\frac{k+\alpha}{2}}{}_t(\overline{D}_{jT})$, $j=1,2$, $\varphi(t)\in C^{1+\frac{k+\alpha}{2}}(\overline{\sigma}_T)$, $\psi(t)\in C^{\frac{1+k+\alpha}{2}}(\overline{\sigma}_T)$ *the problem* (1.1) – (1.4) *has a unique solution* $u_j(x,t)=V_j(x,t)+W_j(x,t)+v_j(x,t)$, $j=1,2$, *where*

$$V_j(x,t)=\sum_{n=0}^{1+[k/2]}V_j^{(2n)}(x,t),\ \ W_j(x,t)=\sum_{n=0}^{[\frac{1+k}{2}]}W_j^{(2n+1)}(x,t),\ j=1,2, \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} V_1^{(2n)}(x,t)&=A_n\,\frac{\lambda_2}{æ\sqrt{a_2}}\frac{1}{n!\,\mathrm{i}^{2n}\mathrm{erfs}\,0}\,t^n\mathrm{i}^{2n}\mathrm{erfs}\frac{-x}{2\sqrt{a_1t}},\\ V_2^{(2n)}(x,t)&=-A_n\,\frac{\lambda_1}{æ\sqrt{a_1}}\frac{1}{n!\,\mathrm{i}^{2n}\mathrm{erfs}\,0}\,t^n\mathrm{i}^{2n}\mathrm{erfs}\frac{x}{2\sqrt{a_2t}}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$W_j^{(2n+1)}(x,t)=B_n\,\frac{2}{æ\,n!\,\mathrm{i}^{2n}\mathrm{erfs}\,0}\,t^{n+1/2}\mathrm{i}^{2n+1}\mathrm{erfs}\frac{(-1)^jx}{2\sqrt{a_jt}},\quad j=1,2, \tag{2.8}$$

$æ=\lambda_1/\sqrt{a_1}+\lambda_2/\sqrt{a_2}$, *the values* $A_n$, $B_n$ *are defined by formulas* (1.10), (1.11), *and the functions* $v_j(x,t)$ *belong to the space* $C_x^{2+k+\alpha,\,1+\frac{k+\alpha}{2}}{}_t(\overline{D}_{jT})$, *j=1,2, and satisfy an estimate*

$$\sum_{j=1}^{2}|v_j|_{D_{jT}}^{(2+k+\alpha)}\le C_3\Big(\sum_{j=1}^{2}\big(|u_{0j}|_{D_j}^{(2+k+\alpha)}+|f_j|_{D_{jT}}^{(k+\alpha)}\big)+|\varphi|_{\sigma_T}^{(1+\frac{k+\alpha}{2})}+|\psi|_{\sigma_T}^{(\frac{1+k+\alpha}{2})}\Big). \tag{2.9}$$

**Remark 2.1** *In the Theorems 2.1–2.3 the compatibility conditions can be fulfilled or not. If some of them take place, for instance,* $A_{n_0}=0$, $B_{m_0}=0$, *then* $V_j^{(2n_0)}(x,t)=0$, $W_j^{(2m_0+1)}(x,t)=0$, $j=1,2$, *in accordance to the formulas* (2.6)–(2.8). *If the compatibility conditions of the all necessary orders take place, i.e.* $A_n=0$, $n=0,\ldots,1+[k/2]$, $B_n=0$, $n=0,\ldots,[\frac{1+k}{2}]$, *then all the functions* $V_j^{(2n)}(x,t)$, $n=0,\ldots,1+[k/2]$, $W_j^{(2n+1)}(x,t)$, $n=0,\ldots,[\frac{1+k}{2}]$, $j=1,2$, *are equalled to zero (in the Theorems 2.1, 2.2 we have* $k=0$, *and* $k=0,\,1,\,2,\ldots$, *in the Theorem 2.3).*

## 3. Auxiliary problems

To reduce the problem (1.1)–(1.4) to the problem, for which all the necessary compatibility conditions are fulfilled we construct the solutions of two conjunction problems with unknown functions $V_j^{(2n)}(x,t)$ and $W_j^{(2n+1)}(x,t)$, $j=1,2$, $n=0,1,\ldots$,

$$\partial_t V_j^{(2n)}-a_j\,\partial_x^2 V_j^{(2n)}=0\ \text{ in }\ D_{jT},\ j=1,2, \tag{3.1}$$

$$V_j^{(2n)}\big|_{t=0}=0\text{ in }\ D_j,\ j=1,2, \tag{3.2}$$

$$(V_1^{(2n)}-V_2^{(2n)})\big|_{x=0}=A_n\frac{t^n}{n!},\quad \big(\lambda_1\partial_xV_1^{(2n)}-\lambda_2\partial_xV_2^{(2n)}\big)\big|_{x=0}=0,\quad t\in(0,T), \tag{3.3}$$

and

$$\partial_t W_j^{(2n+1)} - a_j\, \partial_x^2 W_j^{(2n+1)} = 0 \ \text{ in } \ D_{jT},\ j = 1, 2, \tag{3.4}$$

$$W_j^{(2n+1)}\big|_{t=0} = 0 \text{ in } \ D_j,\ j = 1, 2, \tag{3.5}$$

$$(W_1^{(2n+1)} - W_2^{(2n+1)})\big|_{x=0} = 0, \quad \big(\lambda_1 \partial_x W_1^{(2n+1)} - \lambda_2 \partial_x W_2^{(2n+1)}\big)\big|_{x=0} = B_n \frac{t^n}{n!}, \quad t \in (0, T), \tag{3.6}$$

where $a_j,\ \lambda_j,\ j = 1, 2,$ are positive constants

**Lemma 3.1** *The solutions $V_j^{(2n)}(x,t)$ and $W_j^{(2n+1)}(x,t)$ of the problems* (3.1)–(3.3) *and* (3.4)–(3.6), *$n = 0, 1, \ldots,$ have the forms*

$$\begin{aligned} V_1^{(2n)}(x,t) &= A_n \frac{\lambda_2}{æ\sqrt{a_2}} \frac{1}{n!\, \mathrm{i}^{2n}\mathrm{erfs}\, 0}\, t^n \mathrm{i}^{2n}\mathrm{erfs} \frac{-x}{2\sqrt{a_1 t}}, \\ V_2^{(2n)}(x,t) &= -A_n \frac{\lambda_1}{æ\sqrt{a_1}} \frac{1}{n!\, \mathrm{i}^{2n}\mathrm{erfs}\, 0}\, t^n \mathrm{i}^{2n}\mathrm{erfs} \frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$W_j^{(2n+1)}(x,t) = B_n \frac{2}{n!\, \mathrm{i}^{2n}\mathrm{erfs}\, 0}\, t^{n+1/2} \mathrm{i}^{2n+1}\mathrm{erfs} \frac{(-1)^j x}{2\sqrt{a_j t}},\ j = 1, 2, \tag{3.8}$$

*where $æ = \lambda_1/\sqrt{a_1} + \lambda_2/\sqrt{a_2}$, the functions $\mathrm{i}^k\mathrm{erfs}\, \zeta$ are defined by the formulas* (1.15).

**Proof.** Applying Laplace transform to the problems (3.1)–(3.3) and (3.4)–(3.6) we find the solutions of them in the form

$$V_1^{(2n)}(x,t) = -\frac{A_n}{n!} \frac{\lambda_2}{æ\sqrt{a_2}} \int_0^t \tau^n \frac{x}{2\sqrt{a_1 \pi (t-\tau)^3}} e^{-\frac{x^2}{4a_1(t-\tau)}}\, d\tau,\ x < 0,$$

$$V_2^{(2n)}(x,t) = -\frac{A_n}{n!} \frac{\lambda_1}{æ\sqrt{a_1}} \int_0^t \tau^n \frac{x}{2\sqrt{a_2 \pi (t-\tau)^3}} e^{-\frac{x^2}{4a_2(t-\tau)}}\, d\tau,\ x > 0,$$

$$W_j^{(2n+1)}(x,t) = \frac{B_n}{n!\, æ} \int_0^t \tau^n \frac{1}{\sqrt{\pi (t-\tau)}} e^{-\frac{x^2}{4a_j(t-\tau)}}\, d\tau, \quad x < 0 \text{ for } j = 1, \quad x > 0 \text{ for } j = 2.$$

By direct computations of these integrals we obtain the formulas (3.7), (3.8). □

In [5] with the help of the inequality (1.18) there was obtained that the functions $V_j^{(2n)}(x,t)$, $W_j^{(2n+1)}(x,t)$, $n = 0, 1, \ldots,\ j = 1, 2$, satisfy the estimates

$$|\partial_t^k \partial_x^m V_j^{(2n)}| \le C_1\, t^{\frac{2n-2k-m}{2}} e^{-\frac{x^2}{8a_j t}}, \quad |\partial_t^k \partial_x^m W_j^{(2n+1)}| \le C_2\, t^{\frac{2n+1-2k-m}{2}} e^{-\frac{x^2}{8a_j t}}. \tag{3.9}$$

These inequalities show that the functions $V_j^{(2n)}(x,t)$ and $W_j^{(2n+1)}(x,t)$ and their derivatives have the singularities for $2n-2k-m < 0$ and $2n+1-2k-m < 0$ respectively only in the vicinity of the boundary $x = 0$ as $t \to 0$. Really, due to an inequality $|\xi|^\beta e^{-\xi^2} \le C_\beta e^{-\xi^2/2},\ \beta \ge 0$, from (3.9) we shall have the estimates for $|x| \ge r_0$=const$>0$ and for all $t \in [0, T]$

$$|\partial_t^k \partial_x^m V_j^{(2n)}| \le C_3 \frac{|A_n|}{r_0^{2k+m-2n}} e^{-\frac{x^2}{16a_j t}}, \quad |\partial_t^k \partial_x^m W_j^{(2n+1)}| \le C_4 \frac{|B_n|}{r_0^{2k+m-2n-1}} e^{-\frac{x^2}{16a_j t}}, \quad j = 1, 2. \tag{3.10}$$

## 4. Proofs of the Theorems 2.1–2.3

We prove the Theorems 2.1–2.3 with the help of the constructed functions $V_j^{(2n)}$ and $W_j^{(2n+1)}$ determined by formulas (3.7), (3.8). They permit us to reduce (1.1)–(1.4) to the problem with compatible initial and boundary data of all necessary orders.

**Proof of Theorem 2.1.** We assume that in the problem (1.1)–(1.4) the compatibility conditions are not fulfilled, i.e.

$$A_0 := \varphi(0) - \big(u_{01}(x) - u_{02}(x)\big)\big|_{x=0} \neq 0, \;\; B_0 := \psi(0) - \big(\lambda_1 u_{01}'(x) - \lambda_2 u_{02}'(x)\big)\big|_{x=0} \neq 0,$$
$$A_1 := \varphi'(t)|_{t=0} - \big(a_1\, u_{01}'' + f_1(x,0) - a_2\, u_{02}'' - f_2(x,0)\big)\big|_{x=0} \neq 0.$$

In the problem (1.1)–(1.4) we make the substitution

$$u_j(x,t) = V_j^{(0)}(x,t) + V_j^{(2)}(x,t) + W_j^{(1)}(x,t) + v_j(x,t),\;\; j=1,2, \tag{4.1}$$

where $v_1(x,t)$ and $v_2(x,t)$ are the new unknown functions, the functions $V_j^{(0)}(x,t)$, $V_j^{(2)}(x,t)$ and $W_j^{(1)}(x,t)$ are defined by the formulas (3.7), (3.8) with $n=0$:

$$V_j^{(0)}(x,t) = (-1)^{1+j} A_0 \,\frac{\lambda_{3-j}}{æ\sqrt{a_{3-j}}} \operatorname{erfs} \frac{(-1)^j\, x}{2\sqrt{a_j t}}, \tag{4.2}$$

$$V_j^{(2)}(x,t) = (-1)^{1+j} A_1 \,\frac{\lambda_{3-j}}{æ\sqrt{a_{3-j}}}\, \frac{1}{\mathrm{i}^2\operatorname{erfs} 0}\, t\, \mathrm{i}^2\operatorname{erfs} \frac{(-1)^j\, x}{2\sqrt{a_j t}}, \tag{4.3}$$

$$W_j^{(1)}(x,t) = B_0\, \frac{2}{æ}\, \sqrt{t}\, \operatorname{ierfs} \frac{(-1)^j x}{2\sqrt{a_j t}}, \tag{4.4}$$

where $x<0$ for $j=1$, $x>0$ for $j=2$, $æ = \lambda_1/\sqrt{a_1} + \lambda_2/\sqrt{a_2}$, $\operatorname{erfc}\zeta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_\zeta^\infty e^{-\xi^2}\,d\xi$, $\mathrm{i}^n\operatorname{erfc}\zeta := \int_\zeta^\infty \mathrm{i}^{n-1}\operatorname{erfc}\xi\,d\xi$, $n=1,2,\ldots$.

Taking into account that the functions $V_j^{(0)}(x,t)$, $V_j^{(2)}(x,t)$ and $W_j^{(1)}(x,t)$ are the solutions of the problems (3.1)–(3.3) and (3.4)–(3.6) respectively after substitution (4.1) we obtain the problem for the functions $v_j(x,t)$, $j=1,2$,

$$\partial_t\, v_j - a_j\, \partial_x^2\, v_j = f_j(x,t) \;\text{ in }\; D_{jT},\;\; j=1,2, \tag{4.5}$$

$$v_j\big|_{t=0} = u_{0j}(x) \text{ in } D_j,\; j=1,2, \tag{4.6}$$

$$(v_1 - v_2)\big|_{x=0} = \varphi(t) - A_0 - A_1\, t,\;\; t\in(0,T), \tag{4.7}$$

$$\big(\lambda_1\partial_x v_1 - \lambda_2\partial_x v_2\big)\big|_{x=0} = \psi(t) - B_0.\;\; t\in(0,T). \tag{4.8}$$

We shall show that the compatibility conditions for the problem (4.5)–(4.8) are fulfilled, really,

$$\big(v_1 - v_2\big)\big|_{\substack{x=0,\\ t=0}} \equiv \big(u_{01}(x) - u_{02}(x)\big)\big|_{x=0} = \varphi(0) - A_0 \equiv \big(u_{01}(x) - u_{02}(x)\big)\big|_{x=0}; \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}\big(\partial_t v_1 - \partial_t v_2\big)\big|_{\substack{x=0,\\ t=0}} &\equiv \big(a_1\, u_{01}''(x) + f_1(x,0)\big)\big|_{x=0} - \big(a_2\, u_{02}''(x) + f_2(x,0)\big)\big|_{x=0}\\ &= \varphi'(t)\big|_{t=0} - A_1 \equiv \big(a_1\, u_{01}''(x) + f_1(x,0)\big)\big|_{x=0} - \big(a_2\, u_{02}''(x) + f_2(x,0)\big)\big|_{x=0};\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}\big(\lambda_1\partial_x v_1 - \lambda_2\partial_x v_2\big)\big|_{\substack{x=0,\\ t=0}} &\equiv \big(\lambda_1 u_{01}'(x) - \lambda_2 u_{02}'(x)\big)\big|_{x=0}\\ &= \psi(0) - B_0 \equiv \big(\lambda_1 u_{01}'(x) - \lambda_2 u_{02}'(x)\big)\big|_{x=0}.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Thus, the compatibility conditions of the zero and first orders and zero order corresponding to the boundary conditions (4.7) and (4.8) respectively take place, then under the conditions of the Theorem 2.1 the problem (4.5)– (4.8) has a unique solution $v_j(x,t) \in C_{x\ \ t}^{2+\alpha,\,1+\alpha/2}(\overline{D}_{jT})$, $j=1,2$, [7] and it satisfies an estimate (2.4).

Consider the functions $V_j^{(2k)}(x,t)$, $W_j^{(1)}(x,t)$, $j=1,2$, $k=0,1$, determined by (4.2)–(4.4) and their derivatives. Applying the formula $d/d\zeta\, \mathrm{i}^n\mathrm{erfc}\,\zeta = -\mathrm{i}^{n-1}\mathrm{erfc}\,\zeta$, $\ n=0,1,2,\ldots$, (see (1.16)) for the iterated integrals of probability $\mathrm{i}^n\mathrm{erfc}\,\zeta$ we shall have

$$\partial_x V_j^{(0)}(x,t) = A_0 \frac{\lambda_{3-j}}{æ\sqrt{\pi a_1 a_2}} \frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{x^2}{4a_j t}}, \tag{4.12}$$

$$\partial_t V_j^{(0)}(x,t) = a_j \partial_x^2 V_j^{(0)}(x,t) = -A_0\, \frac{\lambda_{3-j}}{2æ\sqrt{\pi a_1 a_2}} \frac{x}{t^3/2}\, e^{-\frac{x^2}{4a_j t}}, \tag{4.13}$$

$$\partial_x V_j^{(2)}(x,t) = A_1 \frac{\lambda_{3-j}}{2\,æ\sqrt{a_1 a_2}\,\mathrm{i}^2\mathrm{erfs}0} \sqrt{t}\ \mathrm{ierfs} \frac{(-1)^j x}{2\sqrt{a_j t}}, \tag{4.14}$$

$$\partial_t V_j^{(2)}(x,t) = a_j \partial_x^2 V_j^{(2)}(x,t) = (-1)^{1+j} A_1 \frac{\lambda_{3-j}}{4\,æ\sqrt{a_{3-j}}\,\mathrm{i}^2\mathrm{erfs}0}\ \mathrm{erfs} \frac{(-1)^j x}{2\sqrt{a_j t}}, \tag{4.15}$$

$$\partial_x W_j^{(1)}(x,t) = (-1)^{1+j} B_0 \frac{1}{æ\sqrt{a_j}}\ \mathrm{erfs} \frac{(-1)^j x}{2\sqrt{a_j t}}, \tag{4.16}$$

$$\partial_t W_j^{(1)}(x,t) = a_j \partial_x^2 W_j^{(1)}(x,t) = B_0 \frac{1}{æ\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{x^2}{4a_j t}},\ j=1,2. \tag{4.17}$$

The functions $V_j^{(0)}(x,t)$, $V_j^{(2)}(x,t)$ and $W_j^{(1)}(x,t)$, $j=1,2$, are appeared in the solution (4.1) of the problem (1.1)–(1.4) due to the nonfulfillment of the compatibility conditions of the zero and first orders ($A_0 \neq 0$ and $A_1 \neq 0$) corresponding to the boundary condition (1.3) and of the zero order ($B_0 \neq 0$) corresponding to the boundary condition (1.4). Comparing the formulas (4.2)–(4.4), (4.12)–(4.17) we can see that the most singular are the functions $V_j^{(0)}(x,t)$, $\ j=1,2$, ($A_0 \neq 0$). They are bounded, but discontinuous at the point $x=0$, $\ t=0$, their derivatives $\partial_x V_j^{(0)}(x,t)$ and $\partial_t V_j^{(0)}(x,t)$, $\ \partial_x^2 V_j^{(0)}(x,t)$ determined by the formulas (4.12) and (4.13) are singular and their limits as $(x,t) \to (0,0)$ depend on the approach of an interior point $(x,t)$ of a domain $D_{jT}$ to the point $(0,0)$. Really, from (4.2), (4.12), (4.13) we obtain

$$\lim_{t\to 0} \lim_{|x|\to 0} V_j^{(0)}(x,t) = (-1)^{1+j}\, A_0\, \frac{\lambda_{3-j}}{æ\sqrt{a_{3-j}}}, \quad \lim_{|x|\to 0} \lim_{t\to 0} V_j^{(0)}(x,t) = 0,$$

$$\lim_{t\to 0} \lim_{|x|\to 0} \partial_x V_j^{(0)}(x,t) = \mathrm{sign} A_0\, \infty, \quad \lim_{|x|\to 0} \lim_{t\to 0} \partial_x V_j^{(0)}(x,t) = 0.$$

Let the point $x$ tend to 0 as $x=(-1)^j l_0\sqrt{t}$, $\ t\to 0$, $l_0 =$const $> 0$, then

$$V_j^{(0)}((-1)^j l_0\sqrt{t}, t) = (-1)^{1+j}\, A_0\, \frac{\lambda_{3-j}}{æ\sqrt{a_{3-j}}} \mathrm{erfs}\, \frac{l_0}{2\sqrt{a_j}},$$

$$\partial_x V_j^{(0)}(x,t)\big|_{x=(-1)^j l_0\sqrt{t}} = A_0\, \frac{\lambda_{3-j}}{æ\sqrt{\pi a_1 a_2}}\, e^{-\frac{l_0^2}{4a_j}}\, \frac{1}{\sqrt{t}},$$

$$\partial_t V_j^{(0)}(x,t)\big|_{x=(-1)^j l_0\sqrt{t}} = a_j\, \partial_x^2 V_j^{(0)}(x,t)\big|_{x=(-1)^j l_0\sqrt{t}} = -A_0\, \frac{\lambda_{3-j} l_0}{2æ\sqrt{\pi a_1 a_2}}\, e^{-\frac{l_0^2}{4a_j}}\, \frac{1}{t}.$$

From here we can see that the derivatives $\partial_x V_j^{(0)}(x,t)$ and $\partial_t V_j^{(0)}(x,t)$, $\partial_x^2 V_j^{(0)}(x,t)$ tend to $\mathrm{sign}\, A_0\,\infty$ and $-\mathrm{sign}\, A_0\,\infty$ as $\mathrm{sign}\, A_0 \frac{1}{\sqrt{t}}$ and $-\mathrm{sign}\, A_0\, \frac{1}{t}$ respectively, when $x=(-1)^j l_0\sqrt{t}$, $t\to 0$.

The functions $V_j^{(2)}(x,t)$, $\partial_x V_j^{(2)}(x,t)$ and $W_j^{(1)}(x,t)$, $j=1,2$, determined by the formulas (4.3), (4.14) and (4.4) are continuous ones at the point $(x=0,\, t=0)$, the derivatives $\partial_t V_j^{(2)}(x,t)$, $\partial_x^2 V_j^{(2)}(x,t)$ and $\partial_x W_j^{(1)}(x,t)$ (see (4.15), (4.16)) are bounded, but discontinuous functions at the point $(x=0,\, t=0)$ as the function $V_j^{(0)}(x,t)$ due to erfs $\frac{(-1)^j x}{2\sqrt{a_j t}}$, and the derivatives $\partial_t W_j^{(1)}(x,t)$, $\partial_x^2 W_j^{(1)}(x,t)$ (see (4.17)) are discontinuous functions at the point $(x=0,\, t=0)$ as $\partial_x V_j^{(0)}(x,t)$ (see (4.12)) and have the finite or infinite limits at this point depending on the approach of an interior point $(x,t)$ to the point $(0,0)$.

As it follows from the estimate (3.10) in the interior of the domain $D_j$ $|x|\ge r_0$=const$>0$ for every $t\in[0,T]$ the functions $V_j^{(0)}(x,t)$, $V_j^{(2)}(x,t)$ and $W_j^{(1)}(x,t)$, $j=1,2$, and all their derivatives are continuous.

If some of the compatibility conditions are fulfilled ($A_0=0$, or $A_1=0$, or $B_0=0$,), then corresponding to them singular functions $V_j^{(0)}(x,t)$, or $V_j^{(2)}(x,t)$, or $W_j^{(1)}(x,t)$, $j=1,2$, are equalled to zero. □

**Proof of Theorem 2.2.** Let the compatibility conditions of all necessary orders in the problem (1.1)–(1.4) are not fulfilled. We reduce this problem to the problem with compatible initial and boundary data. For this in the problem (1.1)–(1.4) we make the substitution

$$u_j = V_j^{(0)}(x,t) + v_j^{(1)}(x,t),\ s\in(\alpha,\,1),\ u_j = V_j^{(0)}(x,t) + W_j^{(0)}(x,t) + v_j^{(2)}(x,t),\quad s\in[1,\,2),$$
$$u_j = V_j^{(0)}(x,t) + V_j^{(2)}(x,t) + W_j^{(1)}(x,t) + v_j^{(3)}(x,t),\ s\in[2,\,2+\alpha],\ j=1,2,$$

where the functions $V_j^{(0)}(x,t)$, $V_j^{(2)}(x,t)$ and $W_j^{(1)}(x,t)$ are determined by the formulas (4.2)–(4.4). Then for the new unknown functions $v_j^{(k)}(x,t)$, $k=1,2,3$, we obtain the following problems:

$$\partial_t v_j^{(k)} - a_j\,\partial_x^2 v_j^{(k)} = f_j(x,t)\ \text{ in }\ D_{jT},\quad j=1,2,\quad k=1,2,3, \tag{4.18}$$

$$v_j^{(k)}\big|_{t=0} = u_{0j}(x)\ \text{in}\ D_j,\ j=1,2,\quad k=1,2,3, \tag{4.19}$$

$$(v_1^{(1)} - v_2^{(1)})\big|_{x=0} = \varphi(t) - A_0,\quad \big(\lambda_1\partial_x v_1^{(1)} - \lambda_2\partial_x v_2^{(1)}\big)\big|_{x=0} = \psi(t),\quad t\in(0,T); \tag{4.20}$$

$$(v_1^{(2)} - v_2^{(2)})\big|_{x=0} = \varphi(t) - A_0,\quad \big(\lambda_1\partial_x v_1^{(2)} - \lambda_2\partial_x v_2^{(2)}\big)\big|_{x=0} = \psi(t) - B_0.\ \ t\in(0,T), \tag{4.21}$$

and

$$(v_1^{(3)} - v_2^{(3)})\big|_{x=0} = \varphi(t) - A_0 - A_1\,t,\quad \big(\lambda_1\partial_x v_1^{(3)} - \lambda_2\partial_x v_2^{(3)}\big)\big|_{x=0} = \psi(t) - B_0,\quad t\in(0,T). \tag{4.22}$$

Consider the problem (4.18), (4.19), $k=1$, (4.20) for the function $v_j^{(1)}(x,t)$, $j=1,2$. For $s\in(\alpha,\,1)$ it is required the fulfillment of a zero order compatibility condition corresponding to the first boundary condition (4.20) and it takes place due to (4.9). In the problem (4.18), (4.19), $k=2$, (4.21) for the functions $v_j^{(2)}(x,t)$, $j=1,2$, $s\in[1,\,2)$, the compatibility conditions of the zero orders corresponding to the both conditions (4.21) must be fulfilled and they take place as it is shown in (4.9), (4.10) and in the problem (4.18), (4.19), $k=3$, (4.22) for the functions $v_j^{(3)}(x,t)$, $j=1,2$, $s\in[2,\,2+\alpha]$, all necessary compatibility conditions of the zero, first and zero orders corresponding to the first and second boundary conditions (4.22) respectively are fulfilled also, this follows from (4.9)–(4.11). But then under the conditions of the Theorem 2.2 each of the problems (4.18), (4.19),

$k=1$, (4.20); (4.18), (4.19), $k=2$, (4.21) and (4.18), (4.19), $k=3$, (4.22) has a unique solution $v_j^{(k)}(x,t)\in C_s^{2+\alpha}(D_{jT})$, $j=1,2$, $k=1,2,3$, and it satisfies an estimate (2.5).

The behavior of the functions $V_j^{(0)}(x,t)$, $V_j^{(2)}(x,t)$ and $W_j^{(1)}(x,t)$, $j=1,2$, was considered in the proof of Theorem 2.1.

Due to the definition of the norm (1.5) of the weighted Hölder space $C_s^{2+\alpha}(\Omega_T)$ the derivatives $\partial_x v_j^{(1)}(x,t)$; $\partial_t v_j^{(1)}(x,t)$, $\partial_x^2 v_j^{(1)}(x,t)$ and their Hölder constants have in $\overline{D}_j$, $j=1,2$, the singularities of the orders $t^{\frac{s-1}{2}}$; $t^{\frac{s-2}{2}}$ and $t^{\frac{s-2-\alpha}{2}}$, $s\in(\alpha,\,1)$, respectively; the functions $\partial_t v_j^{(2)}(x,t)$, $\partial_x^2 v_j^{(2)}(x,t)$ and their Hölder constants have in $\overline{D}_j$, $j=1,2$, the singularities of the orders $t^{\frac{s-2}{2}}$ and $t^{\frac{s-2-\alpha}{2}}$, $s\in[1,\,2)$, respectively and the Hölder constants of the derivatives $\partial_t v_j^{(3)}(x,t)$, $\partial_x^2 v_j^{(3)}(x,t)$ have in $\overline{D}_j$, $j=1,2$, the singularities of the order $t^{\frac{s-2-\alpha}{2}}$, $s\in[2,\,2+\alpha)$.

We point out that the character and the origin of the singularities of the functions $V_j^{(0)}(x,t)$, $V_j^{(2)}(x,t)$, $W_j^{(1)}(x,t)$, $j=1,2$, and $v_j^{(k)}(x,t)$, $j=1,2$ $k=1,2,3$, are different. The functions $V_j^{(0)}(x,t)$, $V_j^{(2)}(x,t)$ and $W_j^{(1)}(x,t)$, $j=1,2$, are appeared in the solution of the problem (1.1)–(1.4) due to the nonfulfilment of the compatibility conditions of the initial and boundary data and they are singular only in the vicinity of the boundary point $x=0$ as $t\to 0$. The derivatives of the functions $v_j^{(k)}(x,t)$, $j=1,2$, $k=1,2,3$, are singular in the whole domain $\overline{D_j}$, $j=1,2$, as $t\to 0$, and this singularity appears, because an initial functions $u_{0j}(x)$ belong to $C^s(\overline{D}_j)$, $s\in(\alpha,\,2+\alpha)$.

In the cases of the fulfillment of the compatibility conditions: $A_0=0$, or $A_1=0$, or $B_0=0$ corresponding to them singular functions $V_j^{(0)}(x,t)$, or $V_j^{(2)}(x,t)$, or $W_j^{(1)}(x,t)$, $j=1,2$, are equaled to zero. □

**Proof of Theorem 2.3.** We assume that in the problem (1.1)–(1.4) the compatibility conditions of the initial and boundary data of the all necessary orders are not fulfilled, i.e.

$$A_n := \varphi^{(n)}(0)(0) - \big(u_1^{(n)}(x) - u_2^{(n)}(x)\big)\big|_{x=0} \neq 0,\ n=0,1,2,\ldots,1+[k/2],$$
$$B_n := \psi^{(n)}(0) - \big(\lambda_1 D_x u^{(n)}(x) - \lambda_2 D_x u^{(n)}(x)\big)\big|_{x=0} \neq 0,\ n=0,1,2,\ldots,[\frac{1+k}{2}].$$

As above in the problem (1.1)–(1.4) we make the substitution

$$u_j(x,t) = V_j(x,t) + W_j(x,t) + v_j(x,t),\ j=1,2,$$

where

$$V_j(x,t) = \sum_{n=0}^{1+[k/2]} V_j^{(2n)}(x,t),\ \ W_j(x,t) = \sum_{n=0}^{[\frac{1+k}{2}]} W_j^{(2n+1)}(x,t),\ j=1,2,$$
$$V_1^{(2n)} = A_n\,\frac{\lambda_2}{\text{æ}\sqrt{a_2}}\,\frac{1}{n!\,\mathrm{i}^{2n}\mathrm{erfs}\,0}\,t^n \mathrm{i}^{2n}\mathrm{erfs}\frac{-x}{2\sqrt{a_1 t}},\ \ V_2^{(2n)}(x,t) = -A_n\,\frac{\lambda_1}{\text{æ}\sqrt{a_1}}\,\frac{1}{n!\,\mathrm{i}^{2n}\mathrm{erfs}\,0}\,t^n \mathrm{i}^{2n}\mathrm{erfs}\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}},$$
$$W_j^{(2n+1)}(x,t) = B_n\,\frac{2}{\text{æ}\,n!\,\mathrm{i}^{2n}\mathrm{erfs}\,0}\,t^{n+1/2}\mathrm{i}^{2n+1}\mathrm{erfs}\frac{(-1)^j x}{2\sqrt{a_j t}},$$

$\text{æ} = \lambda_1/\sqrt{a_1}+\lambda_2/\sqrt{a_2}$, then for the new unknown functions $v_j(x,t)$, $j=1,2$, we obtain the following problem:

$$\partial_t v_j - a_j\,\partial_x^2 v_j = f_j(x,t) \ \text{ in } \ D_{jT},\ \ j=1,2, \tag{4.23}$$

$$v_j\big|_{t=0} = u_{0j}(x) \text{ in } \ D_j,\ j=1,2, \tag{4.24}$$

$$(v_1 - v_2)\big|_{x=0} = \varphi(t) - \sum_{n=0}^{1+[k/2]} \frac{A_n}{n!} t^n, \quad t \in (0,T), \tag{4.25}$$

$$\big(\lambda_1 \partial_x v_1^{(1)} - \lambda_2 \partial_x v_2^{(1)}\big)\big|_{x=0} = \psi(t) - \sum_{n=0}^{[\frac{1+k}{2}]} \frac{B_n}{n!} t^n, \quad t \in (0,T). \tag{4.26}$$

It is easily to verify that in the problem (4.23)–(4.26) all compatibility conditions of the necessary orders take place, really

$$\begin{aligned}\big(\partial_t^n v_1 - \partial_t^n v_2\big)\big|_{\substack{x=0,\\ t=0}} &\equiv \big(v_1^{(n)}(x) - v_2^{(n)}(x)\big)\big|_{x=0} = \varphi^{(n)}(0) - A_n \\ &\equiv \big(u_1^{(n)}(x) - u_2^{(n)}(x)\big)\big|_{x=0}, \quad n = 0, \dots, 1 + [k/2],\end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}\big(\lambda_1 \partial_x \partial_t^n v_1 - \lambda_2 \partial_x \partial_t^n v_2\big)\big|_{\substack{x=0,\\ t=0}} &\equiv \big(\lambda_1 D_x v_1^{(n)}(x) - \lambda_2 D_x v_2^{(n)}(x)\big)\big|_{x=0} \\ = \psi^{(n)}(0) - B_n &\equiv \big(\lambda_1 D_x u_1^{(n)}(x) - \lambda_2 D_x u_2^{(n)}(x)\big)\big|_{x=0}, \quad n = 0, \dots, [\frac{1+k}{2}].\end{aligned} \tag{4.28}$$

In (4.27), (4.28) the functions $u_j(x,t)$ and $v_j(x)$, $j = 1, 2$, satisfy one and the same equations (see (1.1), (4.23)) and initial data (see (1.2), (4.24)), so due to the formulas (1.7)– (1.9) we obtain $u_j^{(n)}(x) = v_j^{(n)}(x)$, $j = 1, 2$, then (4.27), (4.28) are identities and they mean that the compatibility conditions of $0, \dots, 1 + [k/2]$–th and $0, \dots, [\frac{1+k}{2}]$–th orders corresponding to the boundary conditions (4.25) and (4.26) respectively are fulfilled. Then under the conditions of the Theorem 2.3 the problem (4.23) – (4.26) has a unique solution $v_j(x,t)$ belonging to the space $C_{x\ \ t}^{2+k+\alpha,\, 1+\frac{k+\alpha}{2}}(\overline{D}_{jT})$, $j = 1, 2$, and it satisfies an estimate (2.9) [7].

If some compatibility conditions take place: $A_{n_0} = 0$ or $B_{m_0} = 0$, then corresponding to them singular functions $V_j^{(2n_0)}(x,t)$ or $W_j^{(2m_0+1)}(x,t)$ equal zero. □

## Цитированная литература

1. **Belonosov V.S.** // Matem. Sbornik. 1979. V.110, №2. P. 163–188.

2. **Belonosov V.S., Zelenyak T.I.** Nonlocal Problems in the Theory of Quasilinear Parabolic Equations. Novosibirsk, 1975.

3. **Bizhanova G.I.** // Izvestiya AN Kaz.SSR. Seriya fiz.–mat. 1991. №5. P. 21–27.

4. **Bizhanova G.I.** // I, II. Izvestiya AN Kaz.SSR. Seriya fiz.–mat. 1992. №5. P. 7–13; 1993. №1, P. 11–17.

5. **Bizhanova G.I.** // Sovremennaya matematika. Fundamentalnye napravleniya. 2010. V.36. P. 12–23. (English transl. Journal of Math. Sciences. 2010, V. 171, №1, P. 9–21.)

6. Handbook of mathematical functions. Edited by M.Abramowitz, I.Stegun. Moscow, 1979.

7. **Ladyženskaja O.A., Solonnikov V.A. and Ural'çeva N.N.** Linear and quasilinear equations of parabolic type. Moscow, 1967.

8. **Martel Y., Ph. Souplet Ph** // J. Math. Pures Appl. 2000. V. 79. P. 603–632.

9. **Solonnikov V.A.** On an estimate of the maximum of a derivative modulus for a solution of a uniform parabolic initial-boundary value problem. LOMI Preprint P-2-77, 1977.

*Received 01.09.2010.*

Математический журнал. *Алматы. 2010. Том 10. № 3 (37) . С. 49—53*

*УДК 517.9*

# УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНО-ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

К. Б. Бопаев, А. Т. Жунусова

Жетысуский Государственый Университет им. И. Жансугурова
040000 Талдыкорган ул. Жансугурова, 187а aigul-z@mail.ru

Рассматривается задача об устойчивости решения разностно-динамической системы $(k+2+l)$-го порядка по отношению к $k+2$ переменным. Решена задача сведения устойчивости по части переменных тривиального решения разностно-динамической системы $(k+2)$-го порядка к устойчивости "укороченной" системы второго порядка в критическом случае, когда характеристическое уравнение имеет пару комплексных корней, по модулю равных единице, а остальные $k$ корней по модулю меньше единицы.

Для систем дифференциальных уравнений задачи устойчивости тривиального решения по всем переменным были рассмотрены в [1].

**Постановка задачи.** Рассматривается разностно-динамическая система (РДС) $(k+2+l)$-го порядка:

$$\begin{array}{l} x_{n+1} = Ax_n + X\left(x_n, y_n\right), \\ y_{n+1} = By_n + Y\left(x_n, y_n\right), \end{array} \tag{1}$$

где $n \in N\bigcup\{0\}$, $A = (a_{ij})$, $i,j = \overline{1,k+2}$, $B = (b_{\alpha\beta})$, $\alpha,\beta = \overline{1,l}$, постоянные матрицы, $x_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{(k+2),n} \end{pmatrix}$, $y_n = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ \vdots \\ y_{ln} \end{pmatrix}$. $X$ и $Y$ – $(k+2)$ и $l$-мерные вектор-функции, разложения которых по степеням переменных начинаются членами не ниже второго порядка.

Пусть характеристическое уравнение

$$D\left(\lambda\right) = \left|A - \lambda E\right| = 0 \tag{2}$$

системы первого приближения

$$x_{n+1} = Ax_n \tag{3}$$

Keywords: *Difference-dynamical system, stability*
2010 Mathematics Subject Classification: 74H10

имеет пару комплексных корней, по модулю равных единице и $k$ корней по модулю меньших единицы: $\lambda_1 = e^{i\alpha}$, $\lambda_2 = e^{-i\alpha}$; $|\lambda_j| < 1$, $j = \overline{3, k+2}$.

Предположим, что $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 2\pi p/q$, где $p$ и $q$ – целые взаимно простые числа. Вопрос устойчивости в данном случае не решается первым приближением. Цель статьи – показать, что при сделанных предположениях задача устойчивости для (1) эквивалентна аналогичной задаче для РДС:

$$\begin{aligned} \xi_{n+1} &= a\xi_n - b\eta_n + \varphi^{(0)}(\xi_n, \eta_n; z_n), \\ \eta_{n+1} &= b\xi_n + a\eta_n + \Psi(\xi_n, \eta_n; z_n), \\ z_{n+1} &= Bz_n + Z(\xi_n, \eta_n, z_n). \end{aligned} \tag{4}$$

**Вспомогательные предложения.** Пусть $U = \{u_1, u_2, ..., u_k\}$ есть $m$-вектор-форма $m$-го порядка переменных $x_n$, требуется определить условия, при которых существует другая $k$-вектор-форма: $V = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ того же порядка, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta V_n = QV_n + U, \tag{5}$$

где $Q$ – есть $(\tau \times \tau)$ – постоянная матрица $(a_{ij})$, $i, j = \overline{1, \tau}$, $\Delta V_n$ – первая разность вектор формы $V_n$ в силу РДС (3).

Пусть $\lambda_j$, $j = \overline{1, k+2}$, – корни характеристического уравнения (2), а $\aleph_1, ..., \aleph_\tau$ – корни уравнения:

$$D(\aleph) = |Q - \aleph E| = 0. \tag{6}$$

**Теорема 1.** *Если между корнями уравнений* (2) *и* (6) *не существует никаких соотношений вида:*

$$\lambda_1^{m_1}\lambda_2^{m_2}...\lambda_{k+2}^{m_{k+2}} - 1 = \aleph_i, \ \ i = \overline{1, \tau}, \tag{7}$$

*где* $m_1, ..., m_{k+2}$ *– целые неотрицательные числа, связанные соотношением* $\sum_{j=1}^{k+2} m_j = m$, *то существует одна и только одна вектор-форма* $m$*-го порядка* $V_n$, *удовлетворяющая уравнению* (5).

**Доказательство.** Пусть дана форма $h(x_n)$ порядка $m$, будем находить форму $g(x_n)$ порядка $m$, удовлетворяющую уравнению:

$$g(Ax_n) - g(x_n) = h(x_n). \tag{8}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых произведениях $x_{1n}^{m_1}...x_{k+2}^{m_{k+2}}$, $m_1 + m_2 + ... + m_{k+2} = m$, слева и справа в последнем уравнении, получим алгебраическую систему $\begin{pmatrix} k+2 \\ m \end{pmatrix}$ линейных неоднородных уравнений относительно коэффициентов формы $g(x_n)$ с матрицей $(S - E)$ порядка $\begin{pmatrix} k+2 \\ m \end{pmatrix}$. Лемма утверждает, что если выполнено условие $\rho = \lambda_1^{m_1}\lambda_2^{m_2}...\lambda_{k+2}^{m_{k+2}} - 1 \neq 0$, для всех корней производного уравнения $|S - \rho E| = 0$, то существует единственная форма $g(x_n)$ порядка $m$, удовлетворяющая уравнению (8). Действительно, при помощи неособого преобразования $V_n = BV_n^*$, где $B$ есть $(k \times k)$-постоянная неособенная матрица такая, что матрица $C = B^{-1}QB$ имеет канонический вид, уравнение (1) будет иметь вид:

$$\Delta v_{n(3)} = x_i v_{in} + v_{i-1n} + u_{in}, \ \ i = \overline{1, k}. \tag{9}$$

Из уравнения (9) на основании леммы 1 [2] очевидно, что формы $v_{in}$ определяются единственным образом, если $\aleph_i$ не удовлетворяют соотношению (6), что и требовалось доказать.

**Приведение уравнений к специальному виду.** При помощи подстановки $\xi_n = \sum_{j=1}^{k+2} A_j x_{jn}$, $\eta_n = \sum_{j=1}^{k+2} B_j x_{jn}$, где коэффициенты удовлетворяют однородным уравнениям: $\sum_{j=1}^{k+2} A_i a_{ij} =$

$aA_j - bB_j$; $\sum_{i=1}^{k+2} B_i a_{ij} = bA_j + aB_j$, $j = \overline{1, k+2}$, или $\sum_{i=1}^{k+2} C_i a_{ij} = \lambda_1 C_j$, $C_j = A_j + iB_j$, РДС (1) можно привести к виду:

$$\begin{aligned} \xi_{n+1} &= a\xi_n - b\eta_n + \psi\left(\xi_n, \eta_n, \underset{1}{\overset{k}{x}}{}_{jn}, \underset{1}{\overset{l}{z}}{}_{\tau n}\right), \\ \eta_{n+1} &= b\xi_n + a\eta_n + \theta\left(\xi_n, \eta_n, \underset{1}{\overset{k}{x}}{}_{jn}, \underset{1}{\overset{l}{z}}{}_{\tau n}\right), \\ x_{in+1} &= \textstyle\sum_{j=1}^{k} P_{ij} x_{jn} + X_j\left(\xi_n, \eta_n, \underset{1}{\overset{k}{x}}{}_{jn}, \underset{1}{\overset{l}{z}}{}_{\tau n}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Характеристическое уравнение первого приближения РДС (10) распадается на два уравнения:

$$(a-\lambda)^2 + b^2 = 0, \tag{11}$$

$$D(\aleph) = |P_{ij} - \aleph\delta_{ij}| = 0, \;\; i, j = \overline{1, k}. \tag{12}$$

В силу предположения о корнях уравнения (2), все корни (3) по модулю меньше единицы, а корни уравнения (11) таковы, что $arctg\dfrac{b}{a} \neq 2\pi p/q, arctg\dfrac{b}{a} \neq 0$.

РДС (10) еще раз преобразуем, введя новые переменные

$$\xi_{in} = x_{in} - v(\xi_n, \eta_n, z_n), \tag{13}$$

где $v_i(\xi_n, \eta_n, z_n)$ – аналитические функции переменных $x_n, y_n$, обращаются в нуль при $x_n = y_n = 0$. РДС (10) принимают вид:

$$\xi_{n+1} = a\xi_n - b\eta_n + \psi\left(\xi_n, \eta_n, \underbrace{\xi_{in} + v_i(\xi_n, \eta_n, z_n)}_{i=\overline{1,k}}\right) = a\xi_n - b\eta_n + \psi^*\left(\xi_n, \eta_n \underset{1}{\overset{k}{\xi}}{}_{in}, z_n\right);$$

$$\eta_{n+1} = b\xi_n + a\eta_n + \theta\left(\xi_n, \eta_n, \underbrace{\xi_{in} + v_i(\xi_n, \eta_n, z_n)}_{i=\overline{1,k}}\right) = b\xi_n + a\eta_n + \theta^*\left(\xi_n, \eta_n, \underset{1}{\overset{k}{\xi}}{}_{in}, \underset{1}{\overset{l}{z}}{}_{\tau n}\right); \tag{14}$$

$$\zeta_{in+1} = \sum_{j=1}^{k} P_{ij}\zeta_{jn} + p_i\xi_n + q_i\eta_n + \sum P_{ij} v_j(\xi_n, \eta_n, z_n) + X_i\left(\xi_n, \eta_n, \underbrace{\xi_{in+1} + v_i}_{i=\overline{1,k}}\right) -$$

$$-v_i(a\xi_n - b\eta_n + \psi^*; b\xi_n + a\eta_n + \theta^*) = \sum_{j=1}^{k} P_{ij}\xi_{in} + M_i(\xi_n, \eta_n, \xi_{1n}, \xi_{2n}, ..., \xi_{kn}; z_n).$$

Обозначим через $M_i^0(\xi_n, \eta_n, z_n)$ совокупность всех членов в функциях $M_i$, независящую от переменных $\xi_{in}$:

$$\begin{aligned} &M_i^0\left(\xi_n, \eta_n, \underset{1}{\overset{l}{z}}{}_{\tau n}\right) = \textstyle\sum_{j=1}^{k} P_{ij} v_j + P_i\xi_{in} + q_i\eta_{in} + X_i(\xi_n, \eta_n, v_i; z_n) - \\ &-v_i(a\xi_n - b\eta_n + \psi(\xi_n, y_n, v, Bz_n + ...), b\xi_n + a\eta_n + \theta). \end{aligned} \tag{15}$$

Цель преобразования (13) – подобрать функции $v_1, v_2, ..., v_n$ таким образом, чтобы разложения функции $M_i^0$ начинались членами ниже $N$-го порядка, где $N$ – достаточно большое число. С этой целью положим:

$v_i(\xi_n,\eta_n,z_n) = v_i^{(1)}\left(\xi_n,\eta_n,\underset{1}{z}{}_{\tau n}^{l}\right) + v_i^{(2)}\left(\xi_n,\eta_n,\underset{1}{z}{}_{\tau n}^{l}\right) + ...,\ i=\overline{1,k},$ где $v_i^{(m)}\left(\xi_n,\eta_n,\underset{1}{z}{}_{\tau n}^{l}\right)$ – формы $m$-го порядка переменных $\xi_n,\eta_n$. Тогда члены первого порядка в (15) будут:

$M_i^{01} = \sum_{j=1}^{k} P_{ij}v_j^{(1)} + P_i\xi_n + q_i\eta_n - v_i^{(1)}\left(a\xi_n - b\eta_n, b\xi_n + a\eta_n, \underset{1}{z}{}_{\tau n}^{l}\right)$, $i=\overline{1,k}$, а совокупность членов $m$-го порядка имеет вид $M_i^{0m} = \sum_{j=1}^{k} P_{ij}v_j^{(m)} + u_i^{(m)} - v_i^{(m)}\left(a\xi_n - b\eta_n, b\xi_n + a\eta_n, \underset{1}{z}{}_{\tau n}^{l}\right)$, $i=\overline{1,k}$, где $u_i^{(m)}\left(\xi_n,\eta_n,\underset{1}{z}{}_{\tau n}^{l}\right)$ – формы $k$-го порядка, зависящие от формы $v_i^{(j)}$, для которых $j<m$. Для того чтобы разложение функций $M_i^{0}\left(\xi_n,\eta_n,\underset{1}{z}{}_{\tau n}^{l}\right)$ начиналось членами порядка не ниже $N$, необходимо, чтобы выполнялись уравнения $M_i^{0m}=0$, $m=\overline{1,N-1}$, $i=\overline{1,k}$, т.е.

$$\Delta v_{n(15)}^{(m)} = \sum_{j=1}^{k} P_{ij}v_j^{(m)} - v_i^{(m)} + u_i^{(m)},\ \ m=\overline{1,N-1}, i=\overline{1,k}, \tag{16}$$

здесь $\Delta v_{i(15)}^{(m)}$ – обозначает первую разность формы $v_i^{(m)}$ в силу РДС

$$\left.\begin{array}{l} \xi_{n+1} = a\xi_n - b\eta_n; \eta_{n+1} = a\eta_n + b\xi_n \\ y_{n+1} = By_n \end{array}\right\}. \tag{17}$$

Для $k=1$ форма $u_i^{(1)}$ известна, а именно, $u_i^{(1)} = p_ix_n + q_iy_n$, значит, в (16) форма $u_i^{(m)}$ тоже известна, если известны $v_i^{(j)}$, $j=\overline{1,m-1}$. По условию ни при каких целых неотрицательных $m_1$ и $m_2$ не выполняется соотношение $\lambda_1^{m_1}\lambda_2^{m_2} = \aleph_i$, $i=\overline{1,k}$, где $m_1+m_2=m$; $\lambda_1,\lambda_2$ – корни характеристического уравнения (11), а $x_1,x_2,...,x_k$ – корни уравнения (12). Следовательно, на основании теоремы вспомогательного предложения система (16) имеет решение для $v_i^{(m)}$, каков бы ни был индекс $m$.

Таким образом, РДС в общем виде (1) всегда можно привести к системе вида (5), для которой разложения функции $M_i^0(\xi_n,\eta_n,y_n)$ будут начинаться с членов сколь угодно высокого порядка. При этом все сделанные преобразования таковы, что задача устойчивости для исходных уравнений (1) эквивалентна той же задаче для РДС (5).

**Решение задачи устойчивости для "укороченной" РДС.** Рассмотрим систему второго порядка:

$$\xi_{n+1} = a\xi_n - b\eta_n + \psi^0(\xi_n,\eta_n,y_n); \eta_{n+1} = b\xi_n + a\eta_n + \theta^0(\xi_n,\eta_n,y_n), \tag{18}$$

где $\psi^0\left(\xi_n,\eta_n,\underset{1}{y}{}_{\tau n}^{l}\right) = \psi\left(\xi,\eta_n,0,0,...,0,\underset{1}{y}{}_{\tau n}^{l}\right)$, $\theta^0\left(\xi_n,\eta_n,\underset{1}{y}{}_{\tau n}^{l}\right) = \theta\left(\xi_n,\eta_n,0,0,...,0;\underset{1}{y}{}_{\tau n}^{l}\right)$ – нелинейные члены из (18).

Будем искать функцию Ляпунова $v(\xi_n,\eta_n)$ для РДС (18) в виде:

$$v(\xi_n,\eta_n) = \xi_n^2 + \eta_n^2 + v_3(\xi_n,\eta_n) + ..., \tag{19}$$

где $v_j(\xi_n,\eta_n)$, $j=3,4,...,$ – неизвестные формы переменных $\xi_n,\eta_n$ постараемся подобрать так $v_j(\xi_n,\eta_n)$, чтобы имело место равенство:

$$\Delta v_{(18)} = 0, \tag{20}$$

тогда для определения неизвестных форм получим функциональные уравнения:

$$v_j(a\xi_n - b\eta_n, b\xi_n + a\eta_n) - v_j(\xi_n,\eta_n) = u_j(\xi_n,\eta_n),$$

где $u_j(\xi_n, \eta_n)$ – известная форма порядка $j$, если известны все формы $v_n, k < j$.

Тогда для нахождения формы $v_j(\xi_n, \eta_n)$, должно выполняться условие:

$$\exp \alpha (m_1 - m_2) \neq 1 \tag{21}$$

при всех целых и положительных $m_1, m_2$, для которых выполнено условие $m_1 + m_2 = m$; если $m = 2\nu + 1$, то условие (21) всегда выполняется . Поэтому форма нечетного порядка $v_m(\xi_n, \eta_n)$ находится всегда однозначно, если найдены формы $v_j(\xi_n, \eta_n)$ с меньшими номерами. Если $m = 2\nu$, то в силу наложенных условий, условие (21) нарушается при $m_1 = m_2 = \nu$ или $m_1 = m_2 = t < \nu$.

При всех остальных комбинациях $m_1 \neq m_2$ условие (21) выполнено. Допустим, что все формы $v_j(\xi_n, \eta_n)$ найдены при $v_j < 2\nu$ и уравнение, определяющее форму $v_{2\nu}$, неразрешимо. Это означает, что задача удовлетворения уравнения (20) функции $v(\xi_n, \eta_n)$ вида (19) неразрешима. Тогда $v(\xi_n, \eta_n)$ будем искать в виде конечной суммы, в которую входят уже найденные формы $v_j < 2\nu$, и форма $v_{2v}$, удовлетворяющая условию:

$$v_{2k}(\xi_n, \eta_n) - v(\xi_n, \eta_n) = u_{2\nu}(\xi_n, \eta_n) + G_{2\nu}(y_n)\left(\xi_n^2 + \eta_n^2\right)^{\tau}, \tag{22}$$

где $2\tau + \sum_{j=1}^{l} k_j = 2\nu$ и $G_{2\nu}$ – неизвестная функция от $y_n$. Ищем $v_{2\nu}$ в виде: $v_{2v}(\xi_n, \eta_n) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2} A_{\alpha_1\alpha_2}(y_n)\,\xi_n^{\alpha_1}\eta_n^{\alpha_2}$, где $A_{\alpha_1\alpha_2}$ – неизвестные постоянные. Пусть $u_{2\nu}(\xi_n, \eta_n) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2} B_{\alpha_1\alpha_2}(y_n)\,\xi_n^{\alpha_1}\eta_n^{\alpha_2}$, где $B_{\alpha_1\alpha_2}$ – известные постоянные. Тогда для определения коэффициентов $A_{\alpha_1\alpha_2}$ получим из (22) систему линейных неоднородных уравнений с определителем, равным нулю. Так как условие (21) нарушается лишь при одной комбинации $m_1 = m_2 = t$, то среди первых миноров этого определителя найдется по крайней мере один, расположенный на главной диагонали и отличный от нуля. Для разрешимости системы линейных неоднородных уравнений, определяющих $A_{\alpha_1\alpha_2}(y_n)$, потребуется подчинить правые части одному условию. Это условие будет выполнено, если постоянная $G_{2\nu}(y_n)$ находится по формуле:

$$G_{2\nu} = -B_{\alpha_1\alpha_2}(y_n). \tag{23}$$

Тем самым мы доказали следующую теорему

**Теорема 2.** *Если $G_{2\nu}(y_n) < 0$ для всех $-\infty < y_{jn} < \infty$, $j = \overline{1, l}$, то укороченная система* (18) *асимптотически устойчива по части переменных $\xi_n\eta_n$; если $G_{2\nu}(y_n) > 0$, то укороченная система* (18) *не устойчива по части переменных $\xi_n\eta_n$.*

**Доказательство.** Доказательство очевидно, так как здесь в качестве функции Ляпунова может быть выбрана $v(\xi_n, \eta_n) = \xi_n^2 + \eta_n^2 + v_3(\xi_n, \eta_n) + ... + v_{2k}(\xi_n, \eta_n)$, где $v_{2k}(\xi_n, \eta_n)$ найдена удовлетворяющей уравнению (22). Первая разность от $v(\xi_n, \eta_n)$ в силу системы (18) имеет вид $\Delta v(\xi_n, \eta_n) = G_{2v}\left(\xi_n^2 + \eta_n^2\right)^{\tau} + ...$, здесь ... – члены более высокого порядка. При этом: $v$ – знакоопределенная функция.

## Цитированная литература

1. **Малкин И.Г.** Теория устойчивости движения. М, 1966.
2. **Babary I., Mira C.** //Computes rends, 1969. Serial A, vol. 268, № 2.

*Поступила в редакцию 22.07.2010г.*

Математический журнал. *Алматы. 2010. Том 10. № 3 (37) . С. 54–56*

*УДК 517.962*

# УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗНОСТНО-ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Е. В. Ескендирова

Жетысуский государственный университет им. И.Жансугурова
040009 Талдыкорган Жансугурова, 187а helen_yeskendirova@mail.kz

В работе с помощью метода вариации постоянных и дискретных неравенств исследуется устойчивость разностно-динамических систем.

Одним из наиболее эффективных методов получения информации о системах разностных уравнений (в частности, о существовании и об устойчивости решений), когда правые части не обязательно аналитические, является метод оценки функций, удовлетворяющих дискретным неравенствам, через известные параметры и функции, входящие в правые части системы.

В предлагаемой работе получены результаты об устойчивости по первому приближению решения разностно-динамических систем (РДС), которые ранее не рассматривались.

Рассмотрим РДС:

$$x_{n+1} = A(n)x_n + f(n, x_n), \quad x_{n_0} = x_0, \tag{1}$$

где $A(n)$ – невырожденная $(m \times m)$ матрица,

$$f : N_{n_0} \times R^m \to R^m; \quad N_{n_0} = \{n_0, n_0 + 1, \dots, n_0 + k, \dots\}.$$

**Теорема 1.** *Решение $x(n, n_0, x_0)$ РДС (1) удовлетворяет уравнению:*

$$x_n = X(n, n_0)\, x_0 + \sum_{k=n_0}^{n-1} X^{-1}(n_0, k) f(k, x_k), \tag{2}$$

*где $X(n, n_0)$ – фундаментальная матрица л. РДС:*

$$x_{n+1} = A(n)x_n. \tag{3}$$

---

Keywords: *difference and netly difference inequalities, difference-dynamical systems, stability of non-linear difference-dynamical systems.*

2010 Mathematics Subject Classification: 45J5

**Доказательство.** Пусть

$$x\left(n,n_0,x_0\right)=X\left(n,n_0\right)y_n,\quad y_{n_0}=x_0. \tag{4}$$

Тогда, подставляя в уравнение (1), получаем:

$$X\left(n+1,n_0\right)y_{n+1}=A(n)X\left(n,n_0\right)y_n+f\left(n,x_n\right).$$

Откуда

$$\Delta y_n=X^{-1}\left(n+1,n_0\right)f\left(n,x_n\right)$$

или суммируя по $n$ от 0 до $n-1$

$$y_n=\sum_{k=n_0}^{n-1}X^{-1}\left(n_0,k+1\right)f\left(k,x_k\right)+x_{n_0}$$

и подставляя в (4), получим:

$$x\left(n,n_0,x_0\right)=X\left(n,n_0\right)x_0+\sum_{k=n_0}^{n-1}X\left(n,n_0\right)X^{-1}\left(n_0,k+1\right)f\left(k,x_k\right)$$

или

$$x\left(n,n_0,x_0\right)=X\left(n,n_0\right)x_0+\sum_{k=n_0}^{n-1}X^{-1}\left(n_0,k\right)f\left(k,x_k\right). \tag{5}$$

Что и доказывает теорему.

**Теорема 2.** *Пусть* $X\left(n,n_0\right)$ *– фундаментальная матрица л. РДС (3) и*

$$f:N_{n_0}\times R^m\to R^m\quad f(n,0)=0;$$

$$\left\|X^{-1}\left(n+1,n_0\right)f\left(n,X\left(n,n_0\right)y_n\right)\right\|\le\varphi\left(n,\|y_n\|\right), \tag{6}$$

*где функция* $\varphi\left(n,\|y_n\|\right)$ *неубывает по* $n$. *Предположим, что решения* $z_n$ *уравнения*

$$z_{n+1}=z_n+\varphi\left(n,z_n\right) \tag{7}$$

*ограничены при* $n\ge n_0$.

*Тогда из устойчивости л. РДС (3) следует соответствующее свойство устойчивости нулевого решения уравнения РДС (1).*

**Доказательство.** Линейное преобразование

$$x_n=X\left(n,n_0\right)y_n$$

приводит РДС (1) к виду:

$$y_{n+1}=y_n+X^{-1}\left(n+1,n_0\right)f\left(n,X\left(n,n_0\right)y_n\right).$$

Отсюда имеем:

$$\|y_{n+1}\|\le\|y_n\|+\varphi\left(n,\|y_n\|\right).$$

Если $\|y_0\|\le z_0$, то получаем [1]:

$$\|y_n\|\le z_n,$$

где $z_n$ – решение уравнения (7), тогда

$$\|x_n\|\le\left\|X\left(n,n_0\right)\right\|\ \ \|y_n\|\le\left\|X\left(n,n_0\right)\right\|z_n.$$

Отсюда, если решение л. РДС (3) асимптотически устойчиво, то по [1] имеем:

$$\|X(n, n_0)\| \leq M \cdot \lambda^{n-n_0}$$

при некотором соответствующем $M > 0$ и $0 < \lambda < 1$.

Тогда,

$$\|x_n\| \leq M \cdot \lambda^{n-n_0} z_n$$

и это показывает, что решение $x_n = 0$ асимптотически устойчиво.

Теперь, используя формулу вариации постоянных (2), докажем следующую теорему об устойчивости по первому приближению.

**Теорема 3.** *Предположим, что*

$$\|f(n, x_n)\| \leq \varphi_n \|x_n\|, \tag{8}$$

*где функции* $\varphi_n$ *– положительные и* $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \varphi_n < \infty$, *тогда, если нулевое решение л. РДС (3) устойчиво (или асимптотически устойчиво), то нулевое решение РДС (1) устойчиво (или асимптотически устойчиво).*

**Доказательство.** Действительно, применяя (8) к (2), получаем:

$$\|x_n\| \leq M \|x_0\| + M \sum_{k=n_0}^{n-1} \varphi_k \|x_k\|,$$

отсюда по дискретному аналогу неравенства Гронуолла [2] получим оценки:

$$\|x_n\| \leq M \|x_0\| \exp\left(M \sum_{k=n_0}^{n-1} \varphi_k\right),$$

откуда и следует доказательство при условии достаточно малого значения $x_0$, настолько, что

$$M \|x_0\| \exp\left(M \sum_{k=n_0}^{n-1} \varphi_k\right) < \alpha.$$

В случае асимптотической устойчивости следует, что при $n > \overline{N}$, $\|X(n, n_0) x_0\| < \varepsilon$, предыдущее неравенство может быть записано как

$$\|x_n\| \leq \varepsilon \exp\left(M \sum_{k=n_0}^{n-1} \varphi_k\right),$$

откуда следует, что

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0.$$

Теорема доказана.

## Цитированная литература

1. **Бопаев К.Б., Бопаева С.К.** //Материалы II Международной научно-практической конференции. Днепропетровск, 2006. С. 37–43

2. **Бопаев К.Б.** //University Annual Applied mathematics. Sofia, 1982. V. 18, book 3. P. 91–100.

*Поступила в редакцию 02.09.2010г.*

Математический журнал. *Алматы. 2010. Том 10. № 3 (37) . С. 57—66*

*УДК 517.946*

# КОНЕЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДОПУСТИМЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Р. У. Жахина, Ж. Н. Тасмамбетов

Актюбинский государственный университет имени К.Жубанова
030000 Актобе Бр. Жубановых, 263 tasmam@rambler.ru

В работе с помощью метода Фробениуса-Латышевой установлены необходимые, а также необходимые и достаточные условия существования конечных решений допустимых систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

**Основные сведения.** К.Я. Латышева установила [1] необходимые и достаточные условия существования конечных решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Обычно вид конечного решения устанавливается с помощью понятия ранга $p = 1 + k$ ( $k$ – подранг) введенного А. Пуанкаре и антиранга $m = -1 - \chi$ ( $\chi$ – антиподранг), введенного Л. Томе. Для доказательства необходимого и достаточного условия существования конечного решения К.Я. Латышева ввела понятие размаха коэффициентов заданного уравнения. Согласно методу Фробениуса-Латышевой конечные решения существуют только тогда, когда одновременно существуют нормальные и нормально-регулярные решения [2]. Обобщая метод Фробениуса-Латышевой на специальные системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, Ж.Н. Тасмамбетов доказал [3] необходимые и достаточные условия существования конечного решения вида:

$$Z = \exp Q(x,y) \cdot x^{\rho} \cdot y^{\sigma} \cdot S(x,y), \tag{1}$$

где $\rho, \sigma$ – неизвестные постоянные, $S(x,y)$ – многочлен двух переменных по возрастающим или убывающим степеням независимых переменных, а многочлен $Q(x,y)$ двух переменных

$$Q(x,y) = \frac{\alpha_{p\,0}}{p} \cdot x^p + \frac{\alpha_{0p}}{p} \cdot y^p + ... + \alpha_{11} \cdot xy + \alpha_{10} \cdot x + \alpha_{01} \cdot y \tag{2}$$

с неизвестными коэффициентами $\alpha_{p\,0}$, $\alpha_{0p}$, ..., $\alpha_{11}$, $\alpha_{01}$, $\alpha_{10}$ , которые следует определить. Степень многочлена $Q(x,y)$ определяется рангом $p = 1 + k$ системы. При этом будем предполагать, что одновременно существует и нормальное решение вида:

$$Z = \exp Q(x,y) \cdot x^{\rho} \cdot y^{\sigma} \cdot \sum_{\mu,\,\nu=0}^{\infty} A_{\mu,\,\nu} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu} \qquad (A_{0,0} \neq 0) \tag{3}$$

Keywords: *Wave equation, the final decisions*
2010 Mathematics Subject Classification: 34K29,60H10

и нормально-регулярное решение в виде:

$$Z = \exp Q(x,y) \cdot x^{\rho} \cdot y^{\sigma} \cdot \sum_{\mu,\,\nu=0}^{\infty} B_{\mu,\,\nu} \cdot x^{\mu} \cdot y^{\nu} \qquad (B_{0,0} \neq 0). \tag{4}$$

Многочлен $Q(x,y)$ для всех решений общий.

Если изучаемая система имеет ранг $p > 0$, то справедливо преобразование:

$$Z(x,y) = \exp Q(x,y) \cdot U(x,y) \tag{5}$$

и неизвестные постоянные многочлена $\alpha_{p\,0}$, $\alpha_{0p}$, ..., $\alpha_{11}$, $\alpha_{01}$ и $\alpha_{10}$ определяются из так называемой вспомогательной системы, полученной с помощью преобразования (5) из исходной системы, путем приравнивания к нулю коэффициентов при наибольших степенях независимых переменных $x$ и $y$. Полученные коэффициенты обозначим через $b_{p\,0}^{(j)}$, $b_{0p}^{(j)}$, ..., $b_{11}^{(j)}$, $b_{01}^{(j)}$, $b_{10}^{(j)}$ и $b_{00}^{(j)}$. Тогда мы получим первое необходимое условие существования конечного решения (1)–(2) или решений (3)–(4).

**Постановка задачи.** Исследуется система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка:

$$\begin{aligned}
&(A^{(0)} \cdot x^2 + a_{10}^{(0)} \cdot x + a_{01}^{(0)} \cdot y + a_{00}^{(0)}) \cdot Z_{xx} + ({}^{(1)} \cdot xy + a_{10}^{(1)} \cdot x + a_{01}^{(1)} \cdot y + a_{00}^{(1)}) \cdot Z_{xy} + \\
&\qquad + (a_{10}^{(2)} \cdot x + a_{00}^{(2)}) \cdot Z_x + (a_{01}^{(3)} \cdot y + a_{00}^{(3)}) \cdot Z_y + a_{00}^{(4)} \cdot Z = 0, \\
&(A^{(2)} \cdot y^2 + b_{10}^{(0)} \cdot x + b_{01}^{(0)} \cdot y + b_{00}^{(0)}) \cdot Z_{yy} + ({}^{(3)} \cdot xy + b_{10}^{(1)} \cdot x + b_{01}^{(1)} \cdot y + b_{00}^{(1)}) \cdot Z_{xy} + \\
&\qquad + (b_{10}^{(2)} \cdot x + b_{00}^{(2)}) \cdot Z_x + (b_{01}^{(3)} \cdot y + b_{00}^{(3)}) \cdot Z_y + b_{00}^{(4)} \cdot Z = 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

где $A^{(t)}$, $a_{ij}^{(k)}$ и $b_{ij}^{(k)}$ $(t = 0,1,2,3;\ i = 0,1;\ j = 0,1;\ k = 0,1,2,3,4)$ – некоторые постоянные, а $Z = Z(x,y)$ – общее решение.

Целью работы является установление условия существования конечного решения вида (1), используя метод Фробениуса-Латышевой, а также изучение связи системы вида (6) с одним допустимым [4] дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned}
&(\cdot x^2 + a_{10} \cdot x + a_{01} \cdot y + a_{00}) \cdot Z_{xx} + 2(\cdot xy + b_{10} \cdot x + b_{01} \cdot y + b_{00}) \cdot Z_{xy} + \\
&\qquad (\cdot y^2 + c_{10} \cdot x + c_{01} \cdot y + c_{00}) \cdot Z_{yy} + (B \cdot x + d_{00}) \cdot Z_x + (B \cdot y + g_{00}) \cdot Z_y = \\
&\qquad = n \cdot (n \cdot A - A + B) \cdot Z.
\end{aligned} \tag{7}$$

Главные коэффициенты $A$ и $B$ в (7) должны быть такими, чтобы при любом неотрицательном $m$ выполнялось условие:

$$A \cdot m + B \neq 0. \tag{8}$$

Система (6) и уравнение (7) должны обладать рядом свойств.

**1.** Будем предполагать, что коэффициенты системы удовлетворяют всем условиям совместности [5]. Тогда при выполнении следующих условий совместности

$$1 - \frac{{}^{(1)} \cdot xy + a_{10}^{(1)} \cdot x + a_{01}^{(1)} \cdot y + a_{00}^{(1)}}{{}^{(0)} \cdot x^2 + a_{10}^{(0)} \cdot x + a_{01}^{(0)} \cdot y + a_{00}^{(0)}} \cdot \frac{{}^{(3)} \cdot xy + b_{10}^{(1)} \cdot x + b_{01}^{(1)} \cdot y + b_{00}^{(1)}}{{}^{(2)} \cdot y^2 + b_{10}^{(0)} \cdot x + b_{01}^{(0)} \cdot y + b_{00}^{(0)}} \neq 0, \tag{9}$$

система (6) имеет всего четыре линейно-независимых частных решений.

**2.** Ранг и антиранг системы (6) определяются неравенствами

$$1 + \min_{(0 \le \nu \le n-1)} \frac{\beta_n - \beta_0}{n - \nu} \le p \le 1 + \max_{(1 \le \nu \le n)} \frac{\beta_n - \beta_0}{\nu} \qquad \text{(ранг)}, \tag{10}$$

$$1 + \min_{(1\le\nu\le n)} \frac{\pi_\nu - \pi_0}{\nu} = -m \le 1 + \max_{(0\le\alpha\le n-1)} \frac{\pi_\nu - \pi_0}{n-\nu} \qquad \text{(антиранг)}. \tag{11}$$

Теория допустимых уравнений (7) была построена усилиями ряда известных математиков, таких как Г. Кролл, И. Шеффер, Г.К. Энгелис, Т. Корвиндер, Д. Джексон, П.К. Суетин и др. Их решения связаны с ортогональными многочленами двух переменных. Однако, наши исследования не ограничиваются исследованиями ортогональных многочленов двух переменных, поскольку частные случаи системы (6) охватывают обширный класс систем, решениями которых являются и специальные функций двух переменных. Приведем определения и отдельные свойства допустимых уравнений.

**Теорема 1.** *Основное уравнение*

$$a \cdot Z_{xx} + 2b \cdot Z_{xy} + c \cdot Z_{yy} + d \cdot Z_x + g \cdot Z_y = \lambda \cdot Z, \tag{12}$$

*($a$, $b$, $c$, $d$, $g$ – многочлены) допустимо тогда и только тогда, когда оно имеет вид (7), где коэффициенты $a_{km}$, $b_{km}$, $c_{km}$, $d_{00}$, $g_{00}$ – произвольные фиксированные действительные числа, а числа $A$ и $B$ таковы, что при любом целом неотрицательном $p$ выполняется условие (8) [4].*

**Определение 1.** *Совместная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (6) называется допустимой системой, если сумма двух её уравнений удовлетворяет условиям теоремы 1.*

Обычно основное дифференциальное уравнение (12) связывают с основным дифференциальным оператором

$$Du = a \cdot D_1^2 \cdot Z_{xx} + 2b \cdot D_1 \cdot D_2 \cdot Z_{xy} + c \cdot D_2^2 \cdot Z_{yy} + d \cdot D_1 \cdot Z_x + g \cdot D_2 \cdot Z_y. \tag{13}$$

Тогда, возникает вопрос о существовании многочленов, которые являются решениями уравнения

$$DZ = \lambda Z. \tag{14}$$

Уравнение (14) называется основным дифференциальным уравнением, соответствующим оператору (13).

**Определение 2.** *Основной дифференциальный оператор (13) и основное уравнение (14) будем называть допустимыми, если для каждого целого неотрицательного числа $n$ существует такое число $\lambda_n$, что уравнение*

$$DZ = \lambda_n Z. \tag{15}$$

*имеет $n+1$ линейно независимых решений в виде многочленов степени $n$:*

$$Q_{n0}(x,y),\ \ Q_{n1}(x,y),\ \ \ldots,\ \ Q_{nn}(x,y) \tag{16}$$

*и не имеет нетривиальных решений во множестве многочленов степени меньшей чем $n$.*

Из формулы (14) следует, что если $n = 0$, то нетривиальное решение может быть только в случае $\lambda_0 = 0$. Значит, если уравнение (14) допустимо, то существует последовательность собственных значений

$$\lambda_0 = 0,\ \ \lambda_1,\ \ \lambda_2,\ \ \ldots,\ \ \lambda_n,\ \ \ldots \tag{17}$$

уравнения (14), причем каждому значению $\lambda_n$ соответствует система $n+1$ линейно независимых многочленов (16). Из определения допустимости уравнения (14) также следует, что все числа (17) различны между собой. Эти и другие свойства допустимого уравнения и их решений приводятся в [4].

**Необходимые условия существования конечного решения.** Определим ранг системы (6). Если ранг $p > 0$, то первое необходимое условие существования конечного решения следующее.

**Теорема 2.** *Для того, чтобы вспомогательная система, полученная с помощью преобразования (5) из системы (6), имела хотя бы одно решение вида (1), необходимо, чтобы имели место равенства*

$$b_{p0}^{(j)} = 0,\ b_{0p}^{(j)} = 0,\ \ldots,\ b_{01}^{(j)} = 0,\ b_{10}^{(j)} = 0,\ b_{00}^{(j)} = 0 \qquad (j = 1, 2), \tag{18}$$

*где правые части* $b_{p0}^{(j)}$, $b_{0p}^{(j)}$, ..., $b_{10}^{(j)}$ *и* $b_{00}^{(j)}$ *равенств (18) получены из вспомогательной системы путем приравнивания к нулю коэффициентов при наибольших степенях независимых переменных* $x$ *и* $y$ *при новой неизвестной* $U(x, y)$.

Это необходимое условие общее и для нормального решения (3), а также нормально-регулярного решения (4). При выполнении условии (18) из основной вспомогательной системы получаем ряд систем. Их назовём *присоединенными*. Обычно появление большого количества присоединенных систем затрудняет изучение систем вида (6).

Следующим этапом построения решения вида (1) является построение многочлена двух переменных:

$$S(x, y) = x^{\alpha} \cdot y^{\beta} \cdot \sum_{\mu,\,\nu=0}^{m,n} B_{\mu,\nu} \cdot x^{\mu} \cdot y^{\nu} \qquad (B_{0,0} \neq 0), \tag{19$'$}$$

$$S(x, y) = x^{\gamma} \cdot y^{\delta} \cdot \sum_{\mu,\,\nu=0}^{m,n} A_{\mu,\nu} \cdot \frac{1}{x^{\mu} \cdot y^{\nu}} \qquad (A_{0,0} \neq 0), \tag{19$''$}$$

где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ – некоторые постоянные; $A_{\mu,\nu}$, $B_{\mu,\nu}$, $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$ – неизвестные коэффициенты; $\gamma = \alpha + m$, $\delta = \beta + n$. Причем (19) связана с нормально-регулярным решением (4), т.е. получается, когда обрывается ряд в правой части:

$$U(x, y) = x^{\rho} \cdot y^{\sigma} \cdot \sum_{\mu,\,\nu=0}^{\infty} B_{\mu,\nu} \cdot x^{\mu} \cdot y^{\nu} \qquad (B_{0,0} \neq 0). \tag{20}$$

Аналогично, когда обрывается нормальный ряд

$$U(x, y) = x^{\rho} \cdot y^{\sigma} \cdot \sum_{\mu,\,\nu=0}^{\infty} A_{\mu,\nu} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu} \qquad (A_{0,0} \neq 0), \tag{21}$$

получим многочлен $(19'')$. Поэтому, нам сначала важно установить необходимые условия существования решения вида (20) и (21).

**Теорема 3.** *Для того чтобы вспомогательная система имела решения вида (20), необходимо, чтобы пара* $(\rho, \sigma)$ *была корнем системы определяющих уравнений относительно особенности* $(0, 0)$ *вида:*

$$\begin{cases} f_{00}^{(1)}(\rho, \sigma) = a_{00}^{(0)} \cdot \rho \cdot (\rho - 1) + a_{00}^{(1)} \cdot \rho\sigma + a_{00}^{(2)} \cdot \rho + a_{00}^{(3)} \cdot \sigma + a_{00}^{(4)} = 0, \\ f_{00}^{(2)}(\rho, \sigma) = b_{00}^{(0)} \cdot \sigma \cdot (\sigma - 1) + b_{00}^{(1)} \cdot \rho\sigma + b_{00}^{(2)} \cdot \rho + b_{00}^{(3)} \cdot \sigma + b_{00}^{(4)} = 0, \end{cases} \tag{22}$$

*где* $f_{00}^{(j)}(\rho, \sigma)$, $(j = 1, 2)$ *есть коэффициенты при нулевых степенях (* $x^0$ *и* $y^0$ *) системы характеристических функций, полученной из вспомогательной системы путем подстановки вместо неизвестной* $Z(x, y) = x^{\rho} \cdot y^{\sigma}$.

**Теорема 4.** *Для того чтобы вспомогательная система имела решения вида (21), необходимо, чтобы пара* $(\rho,\sigma)$ *была корнем системы определяющих уравнений относительно особенности* $(\infty,\infty)$ *вида:*

$$\begin{cases} \varphi^{(1)}_{00}(\rho,\sigma) = A^{(0)}\cdot\rho\cdot(\rho-1) + A^{(1)}\cdot\rho\sigma + a^{(2)}_{10}\cdot\rho + a^{(3)}_{01}\cdot\sigma + a^{(4)}_{00} = 0, \\ \varphi^{(2)}_{00}(\rho,\sigma) = A^{(2)}\cdot\sigma\cdot(\sigma-1) + A^{(3)}\cdot\rho\sigma + b^{(2)}_{10}\cdot\rho + b^{(3)}_{01}\cdot\sigma + b^{(4)}_{00} = 0, \end{cases} \tag{23}$$

*где* $\varphi^{(j)}_{00}(\rho,\sigma)$, $(j=1,2)$ *– коэффициенты при наибольших степенях системы характеристических функций.*

Неизвестные коэффициенты $A_{\mu,\nu}$ и $B_{\mu,\nu}$, $(\mu,\nu=0,1,2,...)$ определяются из рекуррентных последовательностей систем [3].

Все это показывает, что конечное решение (1) существует только тогда, когда выполняются первые и вторые необходимые условия. Отсюда убеждаемся, что конечное решение (1) существует при существовании нормального ряда Томе (3) и нормально-регулярного решения (4) одновременно, т.е. необходимые условия существования этих решений совпадают.

**Применение метода Фробениуса-Латышевой.** Определим ранг и антиранг системы (6). Применяя формулы (10) и (11), убеждаемся, что ранг $p\le 0$ и антиранг $m\le 0$. В этом случае многочлен $Q(x,y)\equiv 0$ и первое необходимое условие выполняется автоматически. Остается построить решение (20), (21) и определить условия существования конечного решения вида (19), то есть условия когда ряд (20) и (21) обрываются одновременно.

Составляя систему характеристических функций изучаемой системы (6), убеждаемся, что её следующий частный случай:

$$\begin{aligned} &(A^{(0)}\cdot x^2 + a^{(0)}_{10}\cdot x)\cdot Z_{xx} + (A^{(1)}\cdot xy + a^{(1)}_{10}\cdot x + a^{(1)}_{01}\cdot y + a^{(1)}_{00})\cdot Z_{xy} + (a^{(2)}_{10}\cdot x + \\ &\quad + a^{(2)}_{00})\cdot Z_x + (a^{(3)}_{01}\cdot y + a^{(3)}_{00})\cdot Z_y + a^{(4)}_{00}\cdot Z = 0, \\ &(A^{(2)}\cdot y^2 + b^{(0)}_{01}\cdot y)\cdot Z_{yy} + (A^{(3)}\cdot xy + b^{(1)}_{10}\cdot x + b^{(1)}_{01}\cdot y + b^{(1)}_{00})\cdot Z_{xy} + (b^{(2)}_{10}\cdot x + \\ &\quad + b^{(2)}_{00})\cdot Z_x + (b^{(3)}_{01}\cdot y + b^{(3)}_{00})\cdot Z_y + b^{(4)}_{00}\cdot Z = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

удовлетворяет условиям теоремы 3 и теоремы 4 одновременно. Действительно, система характеристических функций полученной системы (24):

$$\begin{aligned} &Z_1[x^\rho\cdot y^\sigma] \equiv x^{\rho+1}\cdot y^{\sigma+1}\cdot\Big\{a^{(1)}_{00}\cdot\rho\sigma + [a^{(1)}_{10}\cdot\rho\sigma + a^{(3)}_{00}\cdot\sigma]\cdot x + [a^{(0)}_{10}\cdot\rho\cdot(\rho-1) + \\ &\quad + a^{(1)}_{01}\cdot\rho\sigma + a^{(2)}_{00}\cdot\rho]\cdot y + [A^{(0)}\cdot\rho\cdot(\rho-1) + A^{(1)}\cdot\rho\sigma + a^{(2)}_{10}\cdot\rho + a^{(3)}_{01}\cdot\sigma + a^{(4)}_{00}]\cdot xy\Big\}, \\ &Z_2[x^\rho\cdot y^\sigma] \equiv x^{\rho+1}\cdot y^{\sigma+1}\cdot\Big\{b^{(1)}_{00}\cdot\rho\sigma + [b^{(0)}_{01}\cdot\sigma\cdot(\sigma-1) + b^{(1)}_{10}\cdot\rho\sigma + b^{(3)}_{00}\cdot\sigma]\cdot x + \\ &\quad + [b^{(2)}_{00}\cdot\rho + b^{(1)}_{01}\cdot\rho\sigma]\cdot y + [A^{(2)}\cdot\sigma\cdot(\sigma-1) + A^{(3)}\cdot\rho\sigma + b^{(2)}_{10}\cdot\rho + b^{(3)}_{01}\cdot\sigma + b^{(4)}_{00}]\cdot xy\Big\} \end{aligned} \tag{25}$$

имеет системы определяющих уравнений и относительно особенности $(0,0)$:

$$\begin{cases} f^{(1)}_{00}(\rho,\sigma) \equiv a^{(1)}_{00}\cdot\rho\sigma = 0, \\ f^{(2)}_{00}(\rho,\sigma) \equiv b^{(1)}_{00}\cdot\rho\sigma = 0, \end{cases} \tag{26}$$

и относительно особенности $(\infty,\infty)$:

$$\begin{cases} \varphi^{(1)}_{00}(\rho,\sigma) \equiv A^{(0)}\cdot\rho\cdot(\rho-1) + A^{(1)}\cdot\rho\sigma + a^{(2)}_{10}\cdot\rho + a^{(3)}_{01}\cdot\sigma + a^{(4)}_{00} = 0, \\ \varphi^{(2)}_{00}(\rho,\sigma) \equiv A^{(2)}\cdot\sigma\cdot(\sigma-1) + A^{(3)}\cdot\rho\sigma + b^{(2)}_{10}\cdot\rho + b^{(3)}_{01}\cdot\sigma + b^{(4)}_{00} = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Система определяющих уравнений (26) при $a_{00}^{(1)} \neq 0$ и $b_{00}^{(1)} \neq 0$ имеет только одну пару корней $(\rho_1, \sigma_1) = (0,0)$.

Если система (24) совместная и выполняется условие интегрируемости (9), то она имеет одно решение вида:

$$Z(x,y) = \sum_{\mu,\,\nu=0}^{\infty} B_{\mu,\,\nu} \cdot x^{\mu} \cdot y^{\nu} \qquad (B_{0,0} \neq 0). \tag{28}$$

соответствующее показателю $(\rho_1, \sigma_1) = (0,0)$.

Известно [6], что система вида (27) имеет до четырех пар корней $(\rho_i', \sigma_i')$ $(i = 1,2,3,4)$. Определим размах коэффициентов системы [3].

**Определение 3.** *Размахом коэффициентов системы (24) называется число слагаемых* $\nu + 1$ *в правой части системы характеристических функций (25).*

В общем случае, когда коэффициенты системы (6) – многочлены двух переменных, размах коэффициентов каждого из уравнений системы можно найти отдельно и наибольшее из них выбирается в качестве размаха коэффициентов системы.

В силу конечности размаха коэффициентов системы с полиномиальными коэффициентами число слагаемых в каждой рекуррентной зависимости не превосходит $\nu+1$. Следует отметить, что система (24) получена из системы (6) при $a_{00}^{(0)} = a_{01}^{(0)} = 0$ и $b_{00}^{(0)} = b_{10}^{(0)} = 0$. Поэтому, размах коэффициентов системы в различных случаях определяется индивидуально. Размах системы $\nu + 1 = 3 + 1 = 4$ $(\nu = 3)$.

Пусть в $(19')$ показатели независимых переменных $\alpha$ и $\beta$ определяются из системы определяющих уравнений (26), а в $(19'')$ показатели $\gamma$ и $\delta$ находятся из системы определяющих уравнений относительно особенности $(\infty, \infty)$ (27). Тогда на основании общих исследований в [3] можно сформулировать ряд теорем.

**Теорема 5.** *Для того чтобы система (24), размах которой равен четырем, имела решения в конечном виде* $(19')$ – $(19'')$ *необходимо и достаточно, чтобы в разности пар* $(\gamma, \delta) - (\alpha, \beta) = (q, g)$ *числа* $q$ *и* $g$ *были целыми числами или нулями.*

*В случае отсутствия логарифмических решений, если* $(\gamma_i, \delta_i) - (\alpha_1, \beta_1) = (q_i, g_i)$ $(i = 1,2,3,4)$ *будут целыми числами или нулями, возможно существование до четырех конечных решений в виде многочленов двух переменных.*

Если не выполняются условия теоремы 5, то система (24) имеет одно нормально-регулярное решение вида (20) и до четырех решений вида (21).

**Связь изучаемых систем с допустимыми уравнениями.** Важным частным случаем системы (24) является система Аппеля $(F_2)$:

$$\begin{cases} x(1-x) \cdot \Upsilon_{xx} + xy \cdot \Upsilon_{xy} + [\alpha - (c+a+1) \cdot x] \cdot \Upsilon_x - a \cdot y \cdot \Upsilon_y - c \cdot a \cdot \Upsilon = 0, \\ y(1-y) \cdot \Upsilon_{yy} + xy \cdot \Upsilon_{xy} + [\beta - (c+b+1) \cdot y] \cdot \Upsilon_y - b \cdot x \cdot \Upsilon_x - c \cdot b \cdot \Upsilon = 0, \end{cases} \tag{29}$$

с решением в виде гипергеометрической функции двух переменных Аппеля:

$$F_2(a,b,c,\alpha,\beta;x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_k \cdot (b)_s \cdot (c)_{(k+s)}}{(\alpha)_k \cdot (\beta)_s \cdot k! \cdot s!} \cdot x^k \cdot y^s. \tag{30}$$

Данная функция зависит от пяти действительных параметров $a, b, c, \alpha, \beta$ и при целых отрицательных значениях параметров $a, b, c$ разложение (30) превращается в конечную сумму. Итак, функция $F_2(a,b,c,\alpha,\beta;x,y)$ превращается в полином двух переменных [7]:

1. при $\alpha = -k$ получим многочлен степени $k$;

2. при $\beta = -s$ и $c = -r$ получим многочлен двух переменных степени $s + r$ или при условиях

$$a = -k, \qquad b = -s, \qquad c = k + s + \gamma \tag{31}$$

функция $F_2(a,b,c,\alpha,\beta;x,y)$ приводится к виду:

$$F_2(x,y;-k,-s,k+s+\gamma,\alpha,\beta)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-k)_p\cdot(-s)_q\cdot(k+s+\gamma)_{(p+q)}}{(\alpha)_p\cdot(\beta)_q\cdot p!\cdot q!}\cdot x^p\cdot y^q. \tag{32}$$

Учитывая равенства

$$(-k)_p=0,\ \ p>k,\qquad (-s)_q=0,\ \ q>s, \tag{33}$$

находим, что функция (32) есть многочлен степени $k+s$ по совокупности переменных. Полученный многочлен обозначим через

$$B_{hs}(x,y)=B_{hs}(x,y;\alpha,\beta,\gamma)=\sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{s}\frac{(-k)_p\cdot(-s)_q\cdot(k+s+\gamma)_{(p+q)}}{(\alpha)_p\cdot(\beta)_q\cdot p!\cdot q!}\cdot x^p\cdot y^q. \tag{34}$$

В отличие от многочленов первого рода $A_{nm}(x,y)$ приведенных в [8], эти многочлены называются многочленами Аппеля второго рода. Каждый из них является моническим, то есть содержит только один член степени $k+s$. Первый индекс $k$ означает наивысшую степень по $x$, а второй индекс $s$ наивысшую степень по $y$. Таким образом, многочлен $B_{k0}(x,y)$ не зависит от $y$, а $B_{0s}(x,y)$ не зависит от $x$.

Приведем несколько многочленов Аппеля второго рода, используя формулу (34):

$$\begin{aligned}
&B_{00}(x,y)=1,\qquad B_{10}(x,y)=1-\frac{1+\gamma}{\alpha}\cdot x,\\
&B_{01}(x,y)=1-\frac{1+\gamma}{\beta}\cdot y,\\
&B_{20}(x,y)=1-\frac{2\cdot(2+\gamma)}{\alpha}\cdot x+\frac{(2+\gamma)\cdot(3+\gamma)}{\alpha\cdot(\alpha+1)}\cdot x^2,\\
&B_{11}(x,y)=1-\frac{(2+\gamma)}{\alpha}\cdot x-\frac{(2+\gamma)}{\beta}\cdot y+\frac{(2+\gamma)\cdot(3+\gamma)}{\alpha\cdot\beta}\cdot xy,\\
&B_{02}(x,y)=1-\frac{2\cdot(2+\gamma)}{\beta}\cdot y+\frac{(2+\gamma)\cdot(3+\gamma)}{\beta\cdot(\beta+1)}\cdot y^2.
\end{aligned} \tag{35}$$

В работе [4] доказано, что функция

$$\upsilon=F_2(a,b,c,\alpha,\beta;x,y)$$

удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (29). Складывая два уравнения этой системы, получим одно дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка

$$\begin{gathered}
x\cdot(1-x)\cdot V_{xx}-2xy\cdot V_{xy}+y\cdot(1-y)\cdot V_{yy}+[\alpha-(a+b+c+1)\cdot x]\cdot V_x+\\
+[\beta-(a+b+c+1)\cdot y]\cdot V_y-c\cdot(a+b)\cdot V=0.
\end{gathered} \tag{36}$$

Гипергеометрическая функция Аппеля $F_2(a,b,c,\alpha,\beta;x,y)$ удовлетворяет и дифференциальному уравнению (36). Полученное уравнение при условиях (31) имеет вид:

$$\begin{gathered}
x\cdot(1-x)\cdot V_{xx}-2xy\cdot V_{xy}+y\cdot(1-y)\cdot V_{yy}+[\alpha-(\gamma+1)\cdot x]\cdot V_x+\\
+[\beta-(\gamma+1)\cdot y]\cdot V_y+(k+s)\cdot(k+s+\gamma)\cdot V=0.
\end{gathered} \tag{37}$$

Следовательно, многочлен (34) удовлетворяет дифференциальному уравнению (37). Собственное число уравнения (37) обозначим через

$$\lambda_{ks}=(k+s)\cdot(k+s+\gamma)$$

В [4] было установлено, что в случае рассмотрения многочлена Аппеля первого рода $A_{nm}(x,y)$ собственное число имеет вид:

$$\lambda_{nm} = (n+m)\cdot(n+m+\gamma).$$

Найденные собственные числа $\lambda_{ks}$ и $\lambda_{nm}$ различны.

В обоих случаях получается уравнение вида (37). Поэтому, две системы многочленов

$$\{A_{nm}(x,y)\},\ \ \{B_{ks}(x,y)\} \tag{38}$$

являются собственными функциями одного и того же дифференциального уравнения (37). Поскольку собственные числа $\lambda_{ks}$ и $\lambda_{nm}$ также различны между собой, то многочлены $A_{nm}(x,y)$ и $B_{ks}(x,y)$ ортогональны между собой, то есть выполняется условие ортогональности:

$$\int\limits_{G}\int h(x,y)\cdot A_{nm}(x,y)\cdot B_{ks}(x,y)dxdy = 0.$$

Вышеприведенные свойства ортогональных многочленов двух переменных приведены в монографии П.К.Суетина [4]. Однако, на конкретном примере системы Аппеля $(F_2)$ мы убедились, что решениями изученных нами систем вида (6) и (24) являются не только ортогональные многочлены, но и гипергеометрические функции двух переменных вида (30).

Отсюда делаем некоторые общие выводы относительно исходной системы (6) и ее частных случаев (24) и (29).

1. Изученная исходная система (6) содержит большое количество различных систем, решениями которых являются ортогональные многочлены и гипергеометрические функций двух переменных.

2. К изучению системы (6) применим метод Фробениуса-Латышевой. Действительно, используя условия совместности и интегрируемости, а также необходимые условия существования решения вида (20) и (21), мы выделили систему вида (24). Отсюда – систему (29) с решением (30).

Система определяющих уравнений относительно особенности $(0,0)$ системы (22) имеет вид:

$$\begin{cases} f_{00}^{(1)}(\rho,\sigma) \equiv \rho\cdot(\rho-1+\gamma) = 0, \\ f_{00}^{(2)}(\rho,\sigma) \equiv \sigma\cdot(\sigma-1+\gamma') = 0, \end{cases} \tag{39}$$

откуда определяем четыре пары корней:

$$\begin{array}{ll} 1.\ \rho_1 = 0,\ \ \sigma_1 = 0; & 3.\ \rho_2 = 1-\gamma,\ \ \sigma_1 = 0;, \\ 2.\ \rho_1 = 0,\ \ \sigma_2 = 1-\gamma'; & 4.\ \rho_2 = 1-\gamma,\ \ \sigma_2 = 1-\gamma'. \end{array} \tag{40}$$

Таким же образом найдем, что система определяющих уравнений относительно особенности $(\infty,\infty)$ системы (29):

$$\begin{cases} f_{10}^{(1)}(\rho,\sigma) \equiv -[\rho\cdot(\rho-1)+\rho\cdot\sigma+(c+a+1)\cdot\rho+a\cdot\sigma+c\cdot a] = 0, \\ f_{01}^{(1)}(\rho,\sigma) \equiv -[\sigma\cdot(\sigma-1)+\rho\cdot\sigma+(c+b+1)\cdot\sigma+b\cdot\rho+c\cdot b] = 0 \end{cases} \tag{41}$$

имеет только три пары корней:

I. $(\rho_3 = -a,\ \ \sigma_3 = -b)$;

II. $(\rho_3 = -a,\ \ \sigma_4 = a-c)$;

III. $(\rho_4 = b-c,\ \ \sigma_4 = -b)$.

Отсюда разность пар $(\rho_3, \sigma_3) - (\rho_1, \sigma_1) = (-a, -b) - (0, 0) = (-a, -b)$, как наименьшая разность, определяет условие существования конечного решения. Это означает, что выполняется необходимое и достаточное условие теоремы 5, только здесь размах коэффициентов $\nu + 1 = 1 + 1 = 2$. На самом деле, в данном случае показатели в $(19') - (19'')$: $\gamma - \alpha = -a - 0 = q$, $\delta - \beta = -b - 0 = g$ и пара принимает целые неотрицательные значения только тогда, когда $a$ и $b$ целые отрицательные числа или нуль, что совпадает с условиями приведенными нами выше. Приведем уточнение теоремы 5 [8].

**Теорема 6.** *Если разности* $(\gamma_i - \alpha,\ \delta_i - \beta)$ *или* $(\gamma - \alpha_i,\ \delta - \beta_i)$ *равны целым числам, то конечные решения определяются теми из разностей, которые являются минимальными.*

3. Уравнение (37), полученное путем сложения двух уравнений системы (29), при выполнении условий (31) допустимое. Поскольку удовлетворяются все условии теоремы 1: представимо в виде (7) и выполняется условие (8). Поэтому имеет $N + 1$ линейно независимых решений в виде многочленов степени $N = k + s$. Они монические. Несколько первых многочленов приведены в (35). Все они удовлетворяют уравнению (37), а также системе (29) при условиях (31).

Если в уравнении (37) положить

$$\gamma = B - 1 \qquad k + s = N, \qquad d_{00} = -\alpha, \qquad g_{00} = -\beta,$$

то из (37) получим уравнение

$$\begin{gathered}(x^2 - x) \cdot V_{xx} + 2xy \cdot V_{xy} + (y^2 - y) \cdot V_{yy} + (B \cdot x + d_{00}) \cdot V_x + \\ + (B \cdot y + g_{00}) \cdot V_y = N \cdot (N - 1 + B) \cdot V.\end{gathered} \tag{42}$$

При $d_{00} = g_{00} = 0$ из этого уравнения получим нормальную форму первого типа для канонического допустимого уравнения (7) [4].

Характеристический многочлен для уравнения (42) имеет вид:

$$\alpha(x, y) = ac - b^2 = xy \cdot (1 - x - y).$$

Этот характеристический многочлен совпадает с характеристическим многочленом системы (29).

Таким образом, на конкретных примерах нами изучена связь системы типа (6) с уравнением вида (7) и связанных с ними допустимыми уравнениями. Метод Фробениуса-Латышевой к непосредственному изучению допустимых уравнений проходит только в отдельных случаях. Поэтому требуется изучить эквивалентную им систему. Такое изучение особого труда не составляет.

## Цитированная литература


1. **Латышева К. Я.** Нормальные решения линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами. Автореферат дисс. доктора физ.-мат. наук. Киев, 1962.

2. **Латышева К. Я., Терещенко Н., Орел Г.С.** Нормально-регулярные решения и их приложения. Киев, 1974.

3. **Тасмамбетов Ж.Н.** Нормальные решения специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с полиномиальными коэффициентами. Автореферат дисс. доктора физ.-мат. наук. Алматы, 2004.

4. **Суетин П.К.** Ортогональные многочлены по двум переменным. М., 1988.

5. **Wilczynski E.J.** Projective differential Geometry of Curves and Ruled surfaces. Leipzig: Leubner, 1906.

6. **Sternberg W.** //Math. Ann. 1920. Bd.81. P. 119–186.

7. **Appell P. and Kampe de Feriet M.J.** Functions hypergeometriges of hyperspheriges Polynomes d'Hermite. Paris. Gauthier-Villars, 1926.

8. **Жахина Р.У.** //Поиск. 2009. № 3. С. 186–191.

*Поступила в редакцию 12.08.2010г.*

Математический журнал. *Алматы. 2010. Том 10. № 3 (37) . С. 67—74*

*УДК 517.958*

# ДИНАМИЧЕСКИЕ АНАЛОГИ ФОРМУЛ ГРИНА И ГАУССА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Г. К. Закирьянова

Институт Математики МОиН РК
050010 Алматы Пушкина, 125 zakir@math.kz

Для строго гиперболического уравнения рассмотрены решения в классе ударных волн. На основе метода обобщенных функций получены условия на волновых фронтах. Поставлены две начально-краевые задачи и доказана единственность их решений. Построены динамические аналоги формул Грина, Гаусса для гиперболического уравнения.

Процессы распространения волн в сплошных средах описываются, как правило, гиперболическими уравнениями, для которых характерным является наличие характеристических поверхностей, на которых сами решения, либо их производные разрывны. В физических процессах они описывают ударные волны, на фронтах которых исследуемые характеристики процесса (скорости, напряжения, давление, температура и др.) могут иметь скачки. Математическая теория краевых задач для таких уравнений требует привлечение аппарата теории обобщенных функций, т.к., в отличие от эллиптических уравнений, решения таких уравнений, как правило, относятся к классу обобщенных функций. В [1, 2] предложен Метод Обобщенных Функций решения нестационарных краевых задач для волнового уравнения Даламбера в многомерных пространствах. На его основе был разработан МОФ для решения нестационарных краевых задач динамики анизотропных упругих сред [3, 4]. Здесь используется этот метод для исследования решений двух начально-краевых задач для строго гиперболического уравнения в классе ударных волн. Получены условия на волновых фронтах. Рассматриваются вопросы единственности решений в классе ударных волн. Построены аналоги формул Грина и Гаусса, позволяющие получить их обобщенные решения.

**1. Обобщенные решения гиперболического уравнения. Условия на фронтах.** Рассматривается строго гиперболическое уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$L(\partial_x,\partial_t)u(x,t)=G(x,t),\ \ (x,t)\in R^{N+1}, \tag{1}$$

$$L(\partial_x,\partial_t)=\sum_{i,j}^{N}a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}. \tag{2}$$

Keywords: *Hyperbolic equation, wave fronts, fundamental solution, generalized solution*
2010 Mathematics Subject Classification: 35L20

Коэффициенты $a_{ij} = a_{ji}$ удовлетворяют условию строгой гиперболичности: $a_{ij} \geq \lambda\|\xi\|$, $\lambda = const > 0$, $\rho = const$, $G$ – регулярная функция. Предполагая суммирование по повторяющимся индексам в произведении (подобно тензорной свертке), далее знак суммы опускаем. Введем обозначения: $u_{,i} = \partial u/\partial x_i$, $u_{,ij} = \partial^2 u/\partial x_i \partial x_j$, $u_{,t} = \partial u/\partial t$, $u_{,tt} = \partial^2 u/\partial t^2$.

Пусть $u(x,t)$ – решение уравнения (1) – дважды дифференцируемая функция почти всюду, за исключением, быть может, характеристической поверхности $F$, неподвижной в $R^{N+1}$ и подвижной в $R^N$ (волновой фронт $F_t$), на которой производные могут иметь скачки. Уравнение такой поверхности $F$ имеет вид:

$$a_{ij}\nu_i\nu_j - \rho\nu_t^2 = 0. \tag{3}$$

$\nu(x,t) = (\nu_1, ..., \nu_N, \nu_t)$ – нормаль к характеристической поверхности, связанная со скоростью $c$ поверхности $F$ в пространстве $R^N$ соотношением $c = -\nu_t/\|\nu\|_{R^N}$, $\|\nu\| = \sqrt{\nu_j\nu_j}$. Для вывода условий на скачки удобно воспользоваться аппаратом теории обобщенных функций.

Обозначим через $\mathfrak{D}'(R^{N+1})$ пространство обобщенных функций $\widehat{f}(x,t)$, определенных на пространстве $\mathfrak{D}(R^{N+1})$ – финитных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x,t)$. Для регулярных функций $\widehat{f}$ имеем:

$$(\widehat{f}(x,t), \varphi(x,t)) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{R^N} f(x,\tau)\varphi(x,\tau)dV(x), \quad dV(x) = dx_1...dx_N, \quad \forall\varphi \in \mathfrak{D}(R^{N+1}).$$

Решение $u(x,t)$, рассматриваемое как регулярная обобщенная функция, обозначим через $\widehat{u}(x,t) = u(x,t)$. Аналогично $\widehat{G}(x,t) = G(x,t)$.

**Определение 1.** *Функция $\widehat{u}(x,t)$ называется обобщенным решением уравнения (1), если она удовлетворяет этому уравнению в обобщенном смысле, т.е. для $\forall\varphi \in \mathfrak{D}(R^{N+1})$ выполняется равенство: $(L\widehat{u}, \varphi) = (G, \varphi)$, где $L$ – дифференциальный оператор (2).*

Обозначим через $[f]_{F_t}$ – скачок функции $f$ на волновом фронте $F_t$:

$$[f(x,t)]_{F_t} = f^+(x,t) - f^-(x,t) = \lim_{\varepsilon \to +0}(f(x+\varepsilon m, t) - f(x - \varepsilon m, t)), \quad x \in F_t,$$

здесь $m(x,t) = (m_1, ..., m_N)$ – единичный вектор нормали к поверхности $F_t$, направленный в сторону распространения фронта волны.

**Теорема 1**. *Если $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) почти всюду, за исключением волновых фронтов, удовлетворяющих условию (3), на которых выполняются условия на скачки*

$$[u(x,t)]_{F_t} = 0, \tag{4}$$

$$[a_{ij}u_{,i}m_j + \rho c u_{,t}]_{F_t} = 0, \tag{5}$$

*то $\widehat{u}(x,t)$ является обобщенным решением (1).*

**Доказательство.** С учетом правил дифференцирования обобщенных функций [5]:

$$\widehat{u}_{,i} = u_{,i} + [u]_F \nu_i \delta_F(x,t), \tag{6}$$

$$\widehat{u}_{,ij} = u_{,ij} + ([u]_F \nu_i \delta_F(x,t))_{,j} + [u_{,i}]_F \nu_j \delta_F(x,t), \tag{7}$$

где первые слагаемые справа в (6) и (7) являются производными в классическом смысле, $\alpha(x,t)\delta_F(x,t)$ – сингулярная обобщенная функция – простой слой на $F$ с плотностью $\alpha$:

$$(\alpha(x,t)\delta_F(x,t), \varphi(x,t)) = \int_F \alpha(x,t)\varphi(x,t)dS(x,t) \quad \forall\varphi \in \mathfrak{D}(R^{N+1}),$$

$dS(x,t)$ – дифференциал площади поверхности в точке $(x,t)$.

С учетом выражений (6)–(7) уравнение (1) для функции $\widehat{u}$ имеет вид:

$$L(\partial_x,\partial_t)\widehat{u}(x,t)-\widehat{G}(x,t)=a_{ij}u,_{ij}(x,t)-\rho u,_{tt}(x,t)-G(x,t)+a_{ij}[u,_i]_F\nu_j\delta_F(x,t)+ \tag{8}$$

$$+\{a_{ij}[u]_F\nu_i\delta_F(x,t)\},_j-\rho[u,_t]_F\nu_t\delta_F(x,t)-\rho\{[u]_F\nu_t\delta_F(x,t)\},_t\,.$$

Функция $\widehat{u}$ будет удовлетворять уравнению (1) в обобщенном смысле, если правая часть выражения (8) равна нулю, т.е. должны равняться нулю

$$[u(x,t)]_F=0,\quad [a_{ij}u,_i\nu_j-\rho u,_t\nu_t]_F=0. \tag{9}$$

Запишем эти условия на соответствующем волновом фронте $F_t$. В силу непрерывности функции $u(x,t)$ вне фронта волны имеем $[u]_F=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}(u(x+\varepsilon m,t)-u(x-\varepsilon m,t))=[u]_{F_t}$. С учетом $m_i=\nu_i/\|\nu\|_N$, условия (9) на подвижных волновых фронтах примут вид (4), (5), где $c$ есть скорость движения волнового фронта, которая определяется решением характеристического уравнения (3) и равна $c=\sqrt{a_{ij}m_im_j/\rho}$. Поэтому все плотности простых и двойных слоев на поверхности равны нулю. Следовательно, обобщенное решение также удовлетворяет (1). Теорема доказана.

Следствием условия непрерывности решения на фронте волны является условие непрерывности касательных производных функций $u(x,t)$ на волновом фронте, которое имеет вид:

$$[cu,_i-u,_t m_t]_{F_t}=0,\quad i=\overline{1,N}. \tag{10}$$

Заметим, что в отличие от уравнения Даламбера, скорость не является постоянной и зависит от направления нормали на фронте волны.

**2. Постановка краевых задач. Единственность решений**. Пусть в области $x\in S^-\subset R^N$, ограниченной поверхностью Ляпунова $S$ с непрерывной внешней нормалью, требуется построить решение краевых задач для уравнения (1) при $t\geq 0$. Обозначим через $D^-=S^-\times[0,\infty)$ – пространственно-временной цилиндр: $(x,t)\in D^-$, $D=S\times[0,\infty)$, $n=(n_1,...,n_N)$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности $S$ $(\|n\|=1)$ : $\|n(x_2)-n(x_1)\|=O(\|x_2-x_1)$ для $x_1,x_2\in S$. Предполагается, что $G\in C(D^-\cup D)$.

*Краевая задача I.* Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям при $t=0$

$$u(x,0)=u^0(x),\quad x\in(S^-\cup S),\quad u,_t(x,0)=u^1(x),\quad x\in S^-, \tag{11}$$

условиям Дирихле

$$u(x,t)=u^S(x,t),\quad x\in S, \tag{12}$$

и условиям на волновых фронтах (4)–(5).

*Краевая задача II.* Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (11) при $t=0$, условиям типа условий Неймана

$$a_{ij}u,_i n_j=g(x,t),\quad x\in S, \tag{13}$$

и условиям на волновых фронтах (4)-(5).

Предполагается, что начальные условия заданы и известно одно из граничных условий соответственно рассматриваемой краевой задаче.

**Определение 2.** *Функция $u(x,t)\in C^2(D^-)\cap C^1(D^-\cup D)$ называется классическим решением уравнения (1), если она удовлетворяет уравнению (1) в цилиндре $D^-$, начальным условиям (11) на основании, граничным условиям (12) либо (13) на $S$ – боковой поверхности этого цилиндра и имеет ограниченное число волновых фронтов, на которых выполняются условия на скачки (4)–(5).*

**Замечание.** *Необходимым условием существования дифференцируемого решения начально-краевой задачи являются условия гладкости:* $G \in C(D^-)$, $u^0(x) \in C^1(S^- \cup S)$, $u^1(x) \in C(S^-)$ *и условия согласования начальных и граничных данных. Если эти условия не выполняются, возникают волновые фронты, характерные для ударных волн. Здесь будем предполагать только регулярность этих функций и только одно из двух условий согласования:*

$$u^S(x,0) = u^0(x). \tag{14}$$

Введем следующие функции $\mathcal{W}(x,t) = 0,5a_{ij}u,_i u,_j$, $\mathcal{K}(x,t) = 0,5\rho u,_t{}^2$, $\mathcal{E}(x,t) = \mathcal{K}(x,t) + \mathcal{W}(x,t)$, $\mathcal{L}(x,t) = \mathcal{K}(x,t) - \mathcal{W}(x,t)$.

**Теорема 2.** *Если* $u(x,t)$ *– классическое решение краевой задачи, то*

$$\int\limits_{S^-} (\mathcal{E}(x,t) - \mathcal{E}(x,0))dV(x) =$$

$$\int\limits_0^t \int\limits_S u,_t^S(x,t)g(x,t)dS(x)dt - \int\limits_{D^-} G(x,t)u,_t(x,t)dV(x,t).$$

**Доказательство.** Умножая (1) на $u,_t$ после простых преобразований получим:

$$(a_{ij}u,_i(x,t)u,_t(x,t)),_j - \mathcal{E},_t(x,t) = G(x,t)u,_t(x,t).$$

Проинтегрируем полученное соотношение по области $D^-$, с учетом разбиения области интегрирования волновыми фронтами $F_k$. Заметим, что первые два слагаемые можно рассматривать как дивергенцию соответствующего вектора в пространстве $R^{N+1}$, которая в областях между фронтами непрерывна. Поэтому, используя теорему Остроградского-Гаусса в $R^{N+1}$, получим:

$$\int\limits_{D^-}(a_{ij}u,_i u,_t),_j dV(x,t) - \int\limits_{D^-} \mathcal{E},_t(x,t)dV(x,t) - \int\limits_{D^-} Gu,_t dV(x,t) =$$

$$= \int\limits_D (a_{ij}u,_i u,_t)n_j dS(x,t) - \int\limits_{S^-}(\mathcal{E}(x,t) - \mathcal{E}(x,0))dV(x) + \tag{15}$$

$$+ \sum_k \int\limits_{F_k} [a_{ij}u,_i u,_t n_j - \mathcal{E}(x,t)n_t]_{F_k} dF_k(x,t) - \int\limits_{D^-} Gu,_t dV(x,t) = 0.$$

Здесь и далее $dV(x,t) = dV(x)dt$; $dS(x)$, $dS(x,t) = dS(x)dt$ – дифференциалы площади поверхностей $S$ и $D$ соответственно.

Рассмотрим выражение скачка в (15), учитывая условия на скачки (5), (10), а также равенства $[ab] = a^+[b] + b^-[a]$, $[a^2] = (a^+ + a^-)[a]$:

$$[a_{ij}u,_i u,_t n_j - \mathcal{E}(x,t)n_t] = [a_{ij}u,_i u,_t n_j] - 0,5[a_{ij}u,_i u,_j n_t - a_{ij}u,_i u,_t n_j] -$$

$$-0,5[a_{ij}u,_i u,_t n_j] - 0,5n_t[u,_t u,_t] = 0,5\{(u,_t)^+[a_{ij}u,_i n_j - u,_t n_t] +$$

$$+[u,_t](a_{ij}u,_i n_j - u,_t n_t)^-\} - 0,5\{(a_{ij}u,_i)^+[u,_j n_t - u,_t n_j] +$$

$$+[a_{ij}u,_i](u,_j n_t - u,_t n_j)^-\} = 0,5[u,_t](a_{ij}u,_i n_j - u,_t n_t)^- -$$

$$-0,5[a_{ij}u,_i](u,_j n_t - u,_t n_j)^- = 0,5[u,_t n_j](a_{ij}u,_i)^- -$$

$$-0,5[u,_i n_t](a_{ij}u,_j)^- = 0,5a_{ij}u,_i[u,_t n_j - u,_j n_t] = 0.$$

Таким образом, выражение (15) примет вид:

$$\int_{S^-}(\mathcal{E}(x,t)-\mathcal{E}(x,0))dV(x)=\int_0^t\int_S a_{ij}u,_i n_j u,_t\, dS(x)dt-\int_{D^-}Gu,_t\, dV(x,t)$$

С учетом обозначений для граничных функций, отсюда получаем формулу теоремы.

**Следствие 1.** *Если* $u$ *– классическое решение (1), то на фронтах*

$$[\mathcal{E}(x,t)]_{F_t}=c^{-1}[a_{ij}u,_i n_j u,_t]_{F_t}. \tag{16}$$

**Следствие 2.** *Если внешние воздействия на систему отсутствуют, т.е.* $G(x,t)=0$, $g(x,t)=0$, *то полная энергия системы не меняется со временем:*

$$\int_{S^-}\mathcal{E}(x,t)dV(x)=\int_{S^-}\mathcal{E}(x,0)dV(x).$$

**Теорема 3.** *Если классическое решение краевой задачи существует, то оно единственно.*

**Доказательство.** В силу линейности задачи достаточно доказать единственность решения однородной краевой задачи. Если существуют два решения $u_1, u_2$, то разность этих решений $u=u_2-u_1$ удовлетворяет уравнению с однородной правой частью, т.е. $G=0$, нулевым начальным условиям $u^m(x)=0\ \ (m=0,1)$ и однородным соответствующим граничным условиям $u(x,t)=0$ либо $g(x,t)=0$ для $x\in S$. Из теоремы 2 нетрудно получить: $\int\limits_{S^-}\mathcal{E}(x,t)dV(x)=0$. В силу положительности подынтегрального выражения следует, что $u\equiv 0$. Теорема доказана.

**Теорема 4.** *Если* $u(x,t)$ *– классическое решение краевой задачи, то*

$$\int_{D-}\mathcal{L}(x,t)dV(x,t)=\int_{D^-}G(x,t)u(x,t)dV(x,t)-$$

$$-\int_0^t\int_S g(x,t)u^S(x,t)dS(x)dt-\rho c\int_{S^-}(u(x,t)u,_t(x,t)-u^0(x)u^1(x))dV(x).$$

**Доказательство.** Умножая (1) на $u$, после некоторых преобразований получим:

$$\mathcal{L}(x,t)+(a_{ij}u,_i u),_j-(\rho u,_t u),_t=Gu. \tag{17}$$

Проинтегрируем (17) по области $D^-$ с учетом разбиения ее волновыми фронтами $F_k$. Аналогично, как в теореме 2, используя теорему Остроградского-Гаусса, имеем:

$$\int_{D-}\mathcal{L}(x,t)dV(x,t)=\int_{D^-}\{(\rho u,_t u),_t-(a_{ij}u,_i u),_j\}dV(x,t)+\int_{D^-}GudV(x,t)=$$

$$=\int_{S^-}\rho(u,_t u-u^0(x)u^1(x))n_t dV(x)-\int_D a_{ij}u,_i un_j dS(x,t)+$$

$$+\sum_k\int_{F_k}[\rho u,_t un_t-a_{ij}u,_i un_j]_{F_k}dF_k(x,t)+\int_{D^-}GudV(x,t)=$$

$$=-\rho c\int_{S^-}(uu,_t-u^0(x)u^1(x))dV(x)-\int_D g(x,t)u^S(x,t)dS(x,t)+\int_{D^-}GudV(x,t).$$

Таким образом, учитывая условия (10), граничные условия (12)–(13), получим формулу теоремы.

**3. Динамический аналог формулы Грина, Гаусса в пространстве обобщенных функций.** Введем определенные на всем пространстве $R^N$ обобщенные функции $\widehat{u}(x,t) = u(x,t)H_D^-(x,t)$, $\widehat{G}(x,t) = G(x,t)H_D^-(x,t)$, где $u(x,t)$ – классическое решение краевой задачи, $H_D^-(x,t) = H_S^-(x)H(t)$ – характеристическая функция пространственно-временного цилиндра $D^-(x,t)$, $H_S^-(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}[V(S^-\cap O_\varepsilon(x))/V(O_\varepsilon(x))]$ – характеристическая функция области $S^-$ [7], где $O_\varepsilon(x) = \{y : \|y-x\| < \varepsilon\}$. Если граница области $S$ – гладкая с непрерывной нормалью, то $H_S^-(x) = 1/2$ для $x \in S$. $H(t)$ – функция Хевисайда: $H(0) = 1/2$.

Пусть $U(x,t)$ матрица Грина – решение уравнения (1) для $G(x,t) = \delta(x)\delta(t)$, удовлетворяющее условиям: $U(x,0) = 0$, $U,_t(x,0) = 0$, $x \neq 0$. Введем первообразную матрицы Грина $U(x,t)$ по времени:

$$V(x,t) = U(x,t) \underset{t}{*} H(t), \quad \partial_t V(x,t) = U(x,t). \tag{18}$$

Здесь символ " $\underset{t}{*}$ " означает неполную свертку функций по $t$, которая для регулярных функций имеет вид $f(x,t) \underset{t}{*} g(x,t) = H(t)\int\limits_0^t f(x,t-\tau)g(x,\tau)d\tau$. Первообразная матрицы Грина $V(x,t)$ является решением (1) при $G(x,t) = \delta(x)H(t)$.

**Теорема 5.** *Если классическое решение краевой задачи $u(x,t)$ существует и единственно, то обобщенное решение $\widehat{u}(x,t)$ представимо в виде свертки:*

$$\widehat{u}(x,t) = U * G + U \underset{x}{*} u^1(x)H_S^-(x) + (U \underset{x}{*} u^0(x)H_S^-(x)),_t - \tag{19}$$

$$-U * g(x,t)\delta_S(x)H(t) - a_{ij}V,_j * u,_t n_i\delta_S(x)H(t) - a_{ij}V,_j \underset{x}{*} u^0(x)n_i\delta_S(x).$$

Здесь $\delta_S(x)$ – сингулярная обобщенная функция – простой слой на поверхности $S$ [5], соответственно $g(x,t)\delta_S(x)H(t)$ – простой слой на боковой поверхности цилиндра $D = S\times[0,\infty)$, $\delta(t)$ – функция Дирака.

**Доказательство.** Действуя оператором $L$ на $\widehat{u}(x,t)$, используя правила дифференцирования обобщенных функций, с учетом равенств [5]:

$$\partial_j H_D^-(x,t) = -n_j\delta_S(x)H(t), \quad \partial_t H_D^-(x,t) = \delta(t)H_S^-(x) \tag{20}$$

и условий на фронтах (4)–(5), получим:

$$L(\partial_x,\partial_t)\widehat{u}(x,t) = a_{ij}u,_{ij} H_S^-(x)H(t) - a_{ij}u,_i n_j\delta_S(x)H(t) -$$

$$-(a_{ij}un_i\delta_S(x)),_j H(t) - \rho u,_{tt} H_S^-(x)H(t) + \rho\{u\delta(t),_t + u\delta(t)\}H_S^-(x),$$

т.е.

$$L(\partial_x,\partial_t)\widehat{u}(x,t) = G(x,t) + \{\rho u\delta(t),_t + \rho u\delta(t)\}H_S^-(x) -$$

$$-g(x,t)\delta_S(x)H(t) - \{a_{ij}un_i\delta_S(x)H(t)\},_j = \widehat{G}(x,t). \tag{21}$$

Свойство фундаментального решения $U(x,t)$ уравнения (1) позволяет построить обобщенное решение (1) в виде свертки:

$$\widehat{\omega}(x,t) = U * G + U \underset{x}{*} \rho u^1(x)H_S^-(x) + \rho(U \underset{x}{*} u^0(x)H_S^-(x)),_t -$$

$$-U(x,t) * g(x,t)\delta_S(x)H(t) - U(x,t) * (a_{ij}un_i\delta_S(x)),_j H(t), \tag{22}$$

где "$*$" обозначает полную свертку по $(x,t)$ [5], переменная $x$ под звездочкой соответствует свертке только по $x$. Последнюю свертку в (22) можно преобразовать, пользуясь обозначением (18) и правилами дифференцирования сверток и обобщенных функций:

$$U(x,t)*(a_{ij}un_i\delta_S(x)H(t)),_j=\partial_t V(x,t)*(a_{ij}un_i\delta_S(x)H(t)),_j=$$

$$=a_{ij}\partial_j V(x,t)*u_t n_i\delta_S(x)H(t)+a_{ij}\partial_j V(x,t)*u^0(x)n_i\delta_S(x).$$

Подставляя это соотношение в (22), получим правую часть (21) $\widehat{G}(x,t)$.

Покажем, что (22) является обобщенным решением (1). Действительно, если $U(x,t)$ – фундаментальное решение (1), решение для произвольной $\widehat{G}$ может быть представлено в виде свертки: $\widehat{\omega}=U*\widehat{G}$. Подставив это в (1), получим:

$$L\widehat{\omega}=L(U*\widehat{G})=(LU)*\widehat{G}=\delta(x,t)*\widehat{G}=\widehat{G}$$

Поскольку для $\forall\varphi\in\mathfrak{D}(R^{N+1})$

$$(\widehat{\omega},\varphi)=(U*\widehat{G},\varphi)=(U*L\widehat{u},\varphi)=(LU*\widehat{u},\varphi)=(\delta(x,t)*\widehat{u},\varphi)=(\widehat{u},\varphi),$$

отсюда следует, что $\widehat{\omega}=\widehat{u}$ и утверждение теоремы. В силу леммы дю Буа-Реймона [5] $\omega(x,t)$ является классическим решением (1).

В (19) плотности простых и двойных слоев определяются заданными начальными условиями (11) и граничными условиями (12)–(13), часть из которых, в зависимости от решаемой краевой задачи, известна. Таким образом, полученная формула по известным начальным и граничным значениям восстанавливает решение в области, поэтому ее можно назвать *аналогом формулы Грина* для решений уравнений (1). Она является обобщенным решением поставленных задач и может использоваться при $\forall\widehat{G}$ в том числе и сингулярных, что характерно для физических задач.

**5. Аналог формулы Гаусса в пространстве обобщенных функций.** Введем функцию $T(x,t,n)=a_{ij}U,_i n_j$, удовлетворяющую в силу свойств симметрии оператора (2) и $\delta$ - функции следующим соотношениям симметрии:

$$T(x-y,t,n)=-T(y-x,t,n)=-T(x-y,t,-n).$$

**Теорема 6.** *При фиксированном $n$ функция $T(x,t,n)$ является фундаментальным решением уравнения (1), соответствующим мультиполю типа*

$$G(x,t)=a_{ij}n_j\delta,_i\delta(t).$$

**Лемма 1.** *В $\mathfrak{D}'(R^{N+1})$ динамический аналог формулы Гаусса имеет вид:*

$$-a_{ij}V,_i n_j \underset{x}{*} \delta_S(x)-\rho U,_t \underset{x}{*} H_S^-(x)=H_D^-(x,t). \tag{23}$$

**Доказательство.** Свернем обе части уравнения (1) для $U(x,t)$ при $G=\delta(x,t)$ с характеристической функцией $H_S^-(x)H(t)$, используя свойства дифференцирования сверток, соотношения (18), (20):

$$(a_{ij}U,_{ij}-\rho U,_{tt})*H_S^-(x)H(t)=a_{ij}U,_i*(H_S^-(x)H(t)),_j-\rho U*(H_S^-(x)H(t)),_{tt}=$$

$$=a_{ij}V,_{it}*(H_S^-(x)H(t)),_j-(\rho U*H_S^-(x)\delta(t)),_t=a_{ij}V,_i*(-n_j\delta_S(x))\delta(t)-$$

$$-\rho U,_t*H_S^-(x)\delta(t)=-a_{ij}V,_i n_j \underset{x}{*}\delta_S(x)-\rho U,_t \underset{x}{*} H_S^-(x)=H_D^-(x,t).$$

Формула леммы доказана.

Формула (23) является динамическим аналогом известной формулы Гаусса для потенциала двойного слоя [5].

Динамический аналог формулы Грина (19) для $x \in S$ дает граничные интегральные уравнения для решения поставленных начально-краевых задач. Это нетрудно показать, используя динамический аналог формулы Гаусса, подобно доказательству, приведенному в [2].

## Цитированная литература

1. **Алексеева Л.А.** // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, № 8. С. 1451–1454.

2. **Алексеева Л.А.** // Математический журнал. 2006. Т.6, № 1(19). С. 16–32.

3. **Alexeyeva L.A., Dildabayev Sh.A., Zakiryanova G.K., Zhanbyrbaev A.B.** // Computational mechanics. 1996. Vol.18, P. 147–157.

4. **Alexeyeva L.A., Zakiryanova G.K.** // Journal of the Mechanical Behavior of Materials. 2005. Vol.16, Nos. 4–5. P. 259–267.

5. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. М., 1978.

6. **Закирьянова Г.К.** // Сб.докл. межд. научной конф. "Суверенный Казахстан: 15-летний путь развития космической деятельности". Алматы. 2006. С.53–56.

7. **Закирьянова Г.К.** // Вестник АН КазССР. 1992. № 3. С.79–84.

*Поступила в редакцию 06.09.2010г.*

Математический журнал. *Алматы. 2010. Том 10. № 3 (37) . С. 75—84*

*УДК 519.624*

# О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ-НИКОЛЕТТИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

А. Е. Иманчиев

Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова
030000 Актобе Бр. Жубановых, 263 imanchiev_ae@mail.ru

Исследуется задача Коши-Николетти для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений методом параметризации. Получены необходимые и достаточные условия существования "изолированного" решения рассматриваемой задачи в терминах исходных данных.

Рассматривается задача Коши-Николетти для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad t \in [0,T], \quad x \in R^n, \tag{1}$$

$$x_i(t_i) = x_i^0, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{2}$$

где $f$: $[0,T] \times R^n \to R^n$, $0 = t_1 < t_2 < ... < t_n = T$, $x_i^0$ - постоянные, $i = \overline{1,n}$, $\|x(t)\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i(t)|$.

Через $C([0,T],R^n)$ обозначим пространство непрерывных функций $x : [0,T] \to R^n$ с нормой $||x||_0 = \max\limits_{t\in[0,T]} ||x(t)||$.

Решением задачи (1), (2) называется непрерывно дифференцируемая на $[0,T]$ вектор-функция $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))' \in C([0,T],R^n)$, удовлетворяющая системе уравнений (1) и условию (2).

Задача Коши-Николетти является одной из известных многоточечных краевых задач, которая часто встречается в приложениях. Вопросы существования, единственности и построения приближенных методов нахождения решения многоточечных краевых задач исследованы многими авторами [1-10]. В соответствии применяемым при этом методам ответы на них получены в разных терминах. В настоящей работе задача (1), (2) исследуется методом параметризации [11].

Keywords: *The problem Cauchy-Nikoletti, nonlinear system of differential equations, solvability, izolated solution*
2010 Mathematics Subject Classification: 34B10

Запишем условие (2) в векторной форме

$$\sum_{j=1}^{n} M_j x(t_j) = x^0, \qquad x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)' \in R^n, \tag{3}$$

здесь $M_j$ – $(n \times n)$-матрица, на $j$-ой строке и $j$-ом столбце которой расположена единица, остальные элементы - нули, $j = \overline{1,n}$, т.е. $M_j = \{m_{ik}^{(j)}\}_1^n$: $\quad m_{ik}^{(j)} = 0$, $i \neq j$, $k \neq j$, $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,n}$; $\qquad m_{jj}^{(j)} = 1$, $j = \overline{1,n}$.

Приведем схему метода параметризации. Возьмем некоторое число $h > 0$ и разобьем промежуток $[0,T)$ на $N$ частей $(N = 1, 2, ...)$ с шагом $h = \frac{T}{N}$ : $[0,T) = \bigcup\limits_{r=1}^{N} [(r-1)h, rh)$. Сужение функции $x(t)$ на $r$-й интервал $[(r-1)h, rh)$ обозначим через $x_r(t)$, т.е. $x_r(t) = x(t)$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1,N}$, $\lim\limits_{t \to T-0} x_N(t) = x(T)$.

Через $C([0,T], h, R^{nN})$ обозначим пространство систем функций $x[t] = (x_1(t), x_2(t), ..., x_N(t))'$, где $x_r : [(r-1)h, rh) \to R^n$ непрерывна и имеет конечный левосторонний предел $\lim\limits_{t \to rh-0} x_r(t)$ при всех $r = \overline{1,N}$ с нормой $||x[\cdot]||_1 = \max\limits_{r=\overline{1,N}} \sup\limits_{t \in [(r-1)h, rh)} ||x_r(t)||$.

От задачи (1), (3) перейдем к эквивалентной краевой задаче:

$$\frac{dx_r}{dt} = f(t, x_r), \qquad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1,N}, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} M_j x_{r_j}(t_j) + M_n \lim_{t \to r_n - 0} x_{r_n}(t) = x^0, \tag{5}$$

$$\lim_{t \to sh-0} x_s(t) = x_{s+1}(sh), \qquad s = \overline{1, N-1}. \tag{6}$$

Здесь $r_j$ – номер интервала, которому принадлежит точка $t_j$ при выбранном $N$: $t_j \in [(r_j - 1)h, r_j h)$, $h = \frac{T}{N}$, $1 = r_1 \le r_2 \le r_3 \le ... \le r_n = N$. Равенства (6) имеют место в силу непрерывности решения задачи (1), (3) и являются условиями склеивания во внутренних точках разбиения.

Решением задачи (4)–(6) является система функций $\quad x^*[t] = (x_1^*(t), x_2^*(t), ..., x_N^*(t))' \in C([0,T], h, R^{nN})$, где непрерывно дифференцируемая и ограниченная на $[(r-1)h, rh)$ функция $x_r^*(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (4) при всех $t \in [(r-1)h, rh)$ (при $t = (r-1)h$ уравнению (4) удовлетворяет правосторонняя производная функции $x_r^*(t)$), имеют место равенства (5), (6).

Если $x^*(t)$ – решение задачи (1), (3), то система функций $x^*[t] = (x_1^*(t), x_2^*(t), ..., x_N^*(t))' \in C([0,T], h, R^{nN})$, где $x_r^*(t)$ – сужение функции $x^*(t)$ на интервал $[(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1,N}$, $\lim\limits_{t \to T-0} x_N^*(t) = x^*(T)$, является решением задачи (4)–(6). И, обратно, если система функций $\tilde{x}[t] = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), ..., \tilde{x}_N(t))' \in C([0,T], h, R^{nN})$, является решением задачи (4)–(6), то функция $\tilde{x}(t)$, определяемая равенствами $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_r(t)$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1,N}$, $\tilde{x}(T) = \lim\limits_{t \to T-0} \tilde{x}_N(t)$, будет решением задачи (1), (3).

Введем обозначение $\lambda_r = x_r[(r-1)h]$ и в задаче (4)-(6) на каждом интервале $[(r-1)h, rh)$ произведя замену $x_r(t) = u_r(t) + \lambda_r$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1,N}$, получим эквивалентную многоточечную краевую задачу с параметрами:

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, \lambda_r + u_r), \qquad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1,N}, \tag{7}$$

$$u_r((r-1)h) = 0, \quad r = \overline{1,N}, \tag{8}$$

$$M_1\lambda_1+\sum_{j=2}^{n-1}M_j\lambda_{r_j}+\sum_{j=2}^{n-1}M_ju_{r_j}(t_j)+M_n\lambda_N+M_n\lim_{t\to T-0}u_N(t)=x^0, \tag{9}$$

$$\lambda_s+\lim_{t\to sh-0}u_s(t)-\lambda_{s+1}=0, \qquad s=\overline{1,N-1}. \tag{10}$$

Решением задачи (7)–(10) является пара $(\lambda^*,u^*[t])$ с элементами $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,...,\lambda_N^*)'\in R^{nN}$, $u^*[t]=(u_1^*(t),u_2^*(t),...,u_N^*(t))'\in C([0,T],h,R^{nN})$, где непрерывно дифференцируемая и ограниченная на $[(r-1)h,rh)$ функция $u_r^*(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (7) при всех $t\in[(r-1)h,rh)$ (при $t=(r-1)h$ уравнению (7) удовлетворяет правосторонняя производная функции $u_r^*(t)$), выполняется условие $u_r^*((r-1)h)=0$, $r=\overline{1,N}$, и для $\lambda_1^*$, $\lambda_{r_2}^*+u_{r_j}^*(t_2)$, $\lambda_{r_3}^*+u_{r_j}^*(t_3)$,..., $\lambda_N^*+\lim\limits_{t\to T-0}u_N^*(t)$, $\lambda_s^*+\lim\limits_{t\to sh-0}u_s^*(t)$, $\lambda_{s+1}^*$, $s=\overline{1,N-1}$, имеют место равенства (9), (10).

Если $x^*(t)$ – решение задачи (1), (3), то пара $(\lambda^*,u^*[t])$ с элементами $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,...,\lambda_N^*)'$, $u^*[t]=(u_1^*(t),u_2^*(t),...,u_N^*(t))'$, где $\lambda_r^*=x_r^*((r-1)h)$, $u_r^*(t)=x_r^*(t)-x_r^*((r-1)h)$, $t\in[(r-1)h,rh)$, $x_r^*(t)$ – сужение функции $x^*(t)$ на интервал $[(r-1)h,rh)$, $r=\overline{1,N}$, является решением задачи (7)-(10). И, обратно, если пара $(\tilde\lambda,\tilde u[t])$ с элементами $\tilde\lambda=(\tilde\lambda_1,\tilde\lambda_2,...,\tilde\lambda_N)'$, $\tilde u[t]=(\tilde u_1(t),\tilde u_2(t),...,\tilde u_N(t))'$, является решением задачи (7)–(10), то функция $\tilde x(t)$, определяемая равенствами $\tilde x(t)=\tilde\lambda_r+\tilde u_r(t)$, $t\in[(r-1)h,rh)$, $r=\overline{1,N}$, $\tilde x(T)=\tilde\lambda_N+\lim\limits_{t\to T-0}\tilde u_N(t)$, является решением задачи (1), (3). Задача (7)–(10) отличается от задачи (4)–(6) тем, что здесь появились начальные условия (8).

Задачи Коши (7), (8) при фиксированных значениях параметров $\lambda_r$ эквивалентны интегральным уравнениям Вольтерра второго рода

$$u_r(t)=\int\limits_{(r-1)h}^{t}f(\tau,\lambda_r+u_r(\tau))d\tau, \qquad t\in[(r-1)h,rh), \quad r=\overline{1,N}. \tag{11}$$

Вместо $u_r(\tau)$ подставляя правую часть (11) и повторяя этот процесс $\nu$ раз, получим следующее представление для функции $u_r(t)$:

$$u_r(t)=\int\limits_{(r-1)h}^{t}f\Bigg(\tau_1,\lambda_r+\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1}f\Bigg(\tau_2,\lambda_r+...+\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}}f(\tau_\nu,\lambda_r+u_r(\tau_\nu))d\tau_\nu\Bigg)...d\tau_2\Bigg)d\tau_1, \tag{12}$$

$t\in[(r-1)h,rh)$, $\quad r=\overline{1,N}$.

Определив из (12) $u_{r_j}(t_j)$, $j=\overline{2,n-1}$, $\lim\limits_{t\to sh-0}u_s(t)$, $s=\overline{1,N-1}$, $\lim\limits_{t\to T-0}u_N(t)$, подставив найденные значения в (9), (10), предварительно умножив (9) на $h=\frac{T}{N}>0$, получим систему нелинейных уравнений относительно неизвестных параметров:

$$hM_1\lambda_1+h\sum_{j=2}^{n-1}M_j\lambda_{r_j}+hM_n\lambda_N-hx^0+$$

$$+h\sum_{j=2}^{n-1}M_j\int\limits_{(r_j-1)h}^{t_j}f\Bigg(\tau_1,\lambda_{r_j}+\int\limits_{(r_j-1)h}^{\tau_1}f\Bigg(\tau_2,\lambda_{r_j}+...+\int\limits_{(r_j-1)h}^{\tau_{\nu-1}}f(\tau_\nu,\lambda_{r_j}+u_{r_j}(\tau_\nu))d\tau_\nu\Bigg)...d\tau_2\Bigg)d\tau_1+$$

$$+hM_n\int\limits_{(N-1)h}^{T}f\Bigg(\tau_1,\lambda_N+\int\limits_{(N-1)h}^{\tau_1}f\Bigg(\tau_2,\lambda_N+...+\int\limits_{(N-1)h}^{\tau_{\nu-1}}f(\tau_\nu,\lambda_N+u_N(\tau_\nu))d\tau_\nu\Bigg)...d\tau_2\Bigg)d\tau_1=0, \tag{13}$$

$$\lambda_s+\int\limits_{(s-1)h}^{sh}f\Bigg(\tau_1,\lambda_s+\int\limits_{(s-1)h}^{\tau_1}f\Bigg(\tau_2,\lambda_s+...+\int\limits_{(s-1)h}^{\tau_{\nu-1}}f(\tau_\nu,\lambda_s+u_s(\tau_\nu))d\tau_\nu\Bigg)...d\tau_2\Bigg)d\tau_1-\lambda_{s+1}=0, \quad (14)$$

$s=\overline{1,N-1}$.

Запишем систему уравнений (13), (14) в виде:

$$Q_{\nu,h}(\lambda,u)=0, \qquad \lambda\in R^{nN}. \quad (15)$$

В дальнейшем предполагаем следующее.

**Условие А.** *Существуют $h>0: T=Nh$ ($N\in\mathbb{N}$), $\nu\in\mathbb{N}$, такие, что система нелинейных уравнений $Q_{\nu,h}(\lambda,0)=0$ имеет решение $\lambda^{(0)}=(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},...,\lambda_N^{(0)})'\in R^{nN}$ и задача Коши (7), (8) при $\lambda_r=\lambda_r^{(0)}$, $r=\overline{1,N}$, имеет решение $u^{(0)}[t]\in C([0,T],h,R^{nN})$, $u^{(0)}[t]=(u_1^{(0)}(t),u_2^{(0)}(t),...,u_N^{(0)}(t))'$.*

По паре $(\lambda^{(0)},u^{(0)}[t])$ равенствами $x^{(0)}(t)=\lambda_r^{(0)}+u_r^{(0)}(t)$, $t\in[(r-1)h,rh)$, $r=\overline{1,N}$, $x^{(0)}(T)=\lambda_N^{(0)}+\lim\limits_{t\to T-0}u_N^{(0)}(t)$, определим кусочно-непрерывную на $[0,T]$ функцию $x^{(0)}(t)$.

Выберем числа $\rho_\lambda>0$, $\rho_u>0$, $\rho_x>0$ и составим множества:

$S(\lambda^{(0)},\rho_\lambda)=\Big\{\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_N)'\in R^{nN}:||\lambda-\lambda^{(0)}||=\max\limits_{r=\overline{1,N}}||\lambda_r-\lambda_r^{(0)}||<\rho_\lambda\Big\}$,

$S(u^{(0)}[t],\rho_u)=\Big\{u[t]\in C([0,T],h,R^{nN}):||u[\cdot]-u[\cdot]||_1<\rho_u\Big\}$,

$S(x^{(0)}(t),\rho_x)=\Big\{x(t)\in C([0,T],R^n):||x-x^{(0)}||_0<\rho_x\Big\}$,

$G_1^0(\rho_x)=\Big\{(t,x):t\in[0,T],||x-x^{(0)}(t)||<\rho_x\Big\}$.

**Условие В.** *Функция $f$ в $G_1^0(\rho_x)$ непрерывна, имеет равномерно непрерывную частную производную $f'_x$ и выполняется неравенство $\quad ||f'_x(t,x)||\le L(t),\quad$ где $\quad L(t)\in C([0,T])$.*

За начальное приближение решения задачи (7)-(10) возьмем пару $(\lambda^{(0)},u^{(0)}[t])$ и последовательность $(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t])$, $k=1,2,...$, найдем по следующему алгоритму:

**Шаг 1.** а) Из уравнения $Q_{\nu,h}(\lambda,u^{(0)})=0$ найдем параметр $\lambda^{(1)}=(\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},...,\lambda_N^{(1)})'\in R^{nN}$; б) Решая задачи Коши (7), (8) при $\lambda_r=\lambda_r^{(1)}$, $r=\overline{1,N}$, найдем систему функций $u^{(1)}[t]=(u_1^{(1)}(t),u_2^{(1)}(t),...,u_N^{(1)}(t))'$.

**Шаг 2.** а) Из уравнения $Q_{\nu,h}(\lambda,u^{(1)})=0$ найдем параметр $\lambda^{(2)}=(\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},...,\lambda_N^{(2)})'\in R^{nN}$; б) Решая задачи Коши (7), (8) при $\lambda_r=\lambda_r^{(2)}$, $r=\overline{1,N}$, найдем систему функций $u^{(2)}[t]=(u_1^{(2)}(t),u_2^{(2)}(t),...,u_N^{(2)}(t))'$.

Продолжая процесс, на **шаге** $k$ найдем пару $(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t])$, удовлетворяющую равенствам $Q_{\nu,h}(\lambda^{(k)},u^{(k-1)})=0$ и $\frac{du_r^{(k)}(t)}{dt}=f(t,\lambda_r^{(k)}+u_r^{(k)})$, $t\in[(r-1)h,rh)$, $u_r^{(k)}((r-1)h)=0$, $r=\overline{1,N}$, $k=1,2,\dots$.

Достаточные условия осуществимости и сходимости алгоритма, одновременно обеспечивающие существование решения задачи (7)–(10), а также оценку ее решения устанавливает

**Теорема 1.** *Пусть при некоторых $\nu$, $h>0: T=Nh$ выполнены условия А, В, матрица Якоби $\dfrac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda,u)}{\partial\lambda}$ обратима для всех $(\lambda,u[t])\in S(\lambda^{(0)},\rho_\lambda)\times S(u^{(0)}[t],\rho_u)$ и выполняются неравенства*

*1)* $\Big|\Big|\Big[\frac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda,u)}{\partial\lambda}\Big]^{-1}\Big|\Big|\le\gamma_\nu(h)$;

*2)* $q_\nu(h)=\gamma_\nu(h)\cdot\max\Big(1,h\sum\limits_{j=2}^{n}||M_j||\Big)\max\limits_{r=\overline{1,N}}\Big\{\exp\Big(\int\limits_{(r-1)h}^{rh}L(t)dt\Big)-\sum\limits_{i=0}^{\nu}\frac{1}{i!}\Big(\int\limits_{(r-1)h}^{rh}L(t)dt\Big)^i\Big\}<1$;

*3)* $\frac{\gamma_\nu(h)}{1-q_\nu(h)}||Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)},u^{(0)})||<\rho_\lambda$;

*4)* $\frac{\gamma_\nu(h)}{1-q_\nu(h)}||Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)},u^{(0)})||\max\limits_{r=\overline{1,N}}\left[\exp\left(\int\limits_{(r-1)h}^{rh}L(t)dt\right)-1\right]<\rho_u;$

*5)* $\max\limits_{r=\overline{1,N}}\max\limits_{l=\overline{1,\nu}}\left\{\rho_\lambda\sum\limits_{i=0}^{l-1}\frac{1}{i!}\left(\int\limits_{(r-1)h}^{rh}L(t)dt\right)^i+\rho_u\frac{1}{(l-1)!}\left(\int\limits_{(r-1)h}^{rh}L(t)dt\right)^{l-1}\right\}\le\rho_x.$

*Тогда определяемая алгоритмом последовательность пар* $(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t])$ *для любого* $k=0,1,2,...$, *содержится в* $S(\lambda^{(0)},\rho_\lambda)\times S(u^{(0)}[t],\rho_u)$, *сходится к решению* $(\lambda^*,u^*[t])\in S(\lambda^{(0)},\rho_\lambda)\times S(u^{(0)}[t],\rho_u)$ *задачи (7)–(10) и справедливы оценки:*

*a)* $||\lambda^*-\lambda^{(k)}||\le\frac{\{q_\nu(h)\}^k}{1-q_\nu(h)}\gamma_\nu(h)||Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)},u^{(0)})||,$

*b)* $||u^*[\cdot]-u^{(k)}[\cdot]||_1\le\max\limits_{r=\overline{1,N}}\sup\limits_{t\in[(r-1)h,rh)}\left[\exp\left(\int\limits_{(r-1)h}^{t}L(\tau)d\tau\right)-1\right]||\lambda^*-\lambda^{(k)}||.$

*Причем любое решение задачи (7)–(10) в* $S(\lambda^{(0)},\rho_\lambda)\times S(u^{(0)}[t],\rho_u)$ *в изолировано.*

**Доказательство.** Возьмем любую пару $(\lambda,u[t])\in S(\lambda^{(0)},\rho_\lambda)\times S(u^{(0)}[t],\rho_u)$. В силу условия В имеют место неравенства:

$$||\lambda_r+u_r(t)-\lambda_r^{(0)}-u_r^{(0)}(t)||\le||\lambda_r-\lambda_r^{(0)}||+||u_r(t)-u_r^{(0)}(t)||<\rho_\lambda+\rho_u<\rho_x, \qquad (16_1)$$

$$\left|\left|\lambda_r+\int\limits_{(r-1)h}^{t}f(\tau_1,\lambda_r+u_r(\tau_1))d\tau_1-\lambda_r^{(0)}-u_r^{(0)}(t)\right|\right|\le||\lambda_r-\lambda_r^{(0)}||+$$

$$+\left|\left|\int\limits_{(r-1)h}^{t}f(\tau_1,\lambda_r+u_r(\tau_1))d\tau_1-\int\limits_{(r-1)h}^{t}f(\tau_1,\lambda_r^{(0)}+u_r^{(0)}(\tau_1))d\tau_1\right|\right|\le||\lambda_r-\lambda_r^{(0)}||+$$

$$+\int\limits_{(r-1)h}^{t}L(\tau_1)\Big[||\lambda_r-\lambda_r^{(0)}||+||u_r(\tau_1)-u_r^{(0)}(\tau_1)||\Big]d\tau_1\le\rho_\lambda\sum_{i=0}^{1}\frac{1}{i!}\Big[\int\limits_{(r-1)h}^{t}L(t)dt\Big]^i+\rho_u\int\limits_{(r-1)h}^{t}L(t)dt<\rho_x, \qquad (16_2)$$

$$...,$$

$$\left|\left|\lambda_r+\int\limits_{(r-1)h}^{t}f\left(\tau_1,\lambda_r+\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1}f\left(\tau_2,\lambda_r+...+\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}}f(\tau_{\nu-1},\lambda_r+u_r(\tau_{\nu-1}))d\tau_{\nu-1}\right)...d\tau_2\right)d\tau_1-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\lambda_r^{(0)}-u_r^{(0)}(t)\right|\right|\le\rho_\lambda\sum_{i=0}^{\nu-1}\frac{1}{i!}\Big[\int\limits_{(r-1)h}^{t}L(t)dt\Big]^i+\rho_u\frac{1}{(\nu-1)!}\Big[\int\limits_{(r-1)h}^{t}L(t)dt\Big]^{\nu-1}<\rho_x, \qquad (16_\nu)$$

$t\in[(r-1)h,rh),\quad r=\overline{1,N}.$

Ввиду $(16_1),(16_2),(16_\nu)$, неравенства 5) теоремы, для всех $t\in[(r-1)h,rh)$, $r=\overline{1,N}$, пары

$$(t,\lambda_r+u_r(t)),\quad (t,\lambda_r+\int\limits_{(r-1)h}^{t}f(\tau_1,\lambda_r+u_r(\tau_1))d\tau_1),\ ...,$$

$$(t,\lambda_r+\int\limits_{(r-1)h}^{t}f\left(\tau_1,\lambda_r+\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1}f\left(\tau_2,\lambda_r+...+\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}}f(\tau_{\nu-1},\lambda_r+u_r(\tau_{\nu-1}))d\tau_{\nu-1}\right)...d\tau_2\right)d\tau_1)$$

принадлежат множеству $G_1^0(\rho_x)$.

Решение задачи (7)–(10) найдем по алгоритму. За начальное приближение возьмем пару $(\lambda^{(0)},u^{(0)}[t])$. $k-$е приближение по параметру $\lambda^{(k)}$ найдем из уравнения $Q_{\nu,h}(\lambda,u^{(k-1)})=0$, $\lambda\in R^{nN}$. Используя равенство $Q_{\nu,h}(\lambda^{(k-1)},u^{(k-2)})=0$, установим справедливость неравенства

$$\gamma_\nu(h)\|Q_{\nu,h}(\lambda^{(k-1)},u^{(k-1)})\|\le q_\nu(h)\|\lambda^{(k-1)}-\lambda^{(k-2)}\|\le[q_\nu(h)]^{k-1}\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\|. \qquad (17)$$

Возьмем $\rho_{k-1} = \gamma_\nu(h)\|Q_{\nu,h}(\lambda^{(k-1)}, u^{(k-1)})\|$ и покажем, что $S(\lambda^{(k-1)}, \rho_{k-1}+\varepsilon_1) \subset S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$.

Для любого $\lambda \in S(\lambda^{(k-1)}, \rho_{k-1}+\varepsilon_1)$ в силу (17) выполняется следующее:

$$||\lambda - \lambda^{(0)}|| \le ||\lambda - \lambda^{(k-1)}|| + ||\lambda^{(k-1)} - \lambda^{(k-2)}|| + ... + ||\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}|| <$$
$$< \rho_{k-1} + \varepsilon_1 + [q_\nu(h)]^{k-2}\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\| + ... + q_\nu(h)\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\| + \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\| \le$$
$$\le ([q_\nu(h)]^{k-1} + ... + q_\nu(h) + 1)\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\| + \varepsilon_1 <$$
$$< \frac{1}{1-q_\nu(h)}\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\| + \varepsilon_1 \le \frac{\gamma_\nu(h)}{1-q_\nu(h)}\|Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\| + \varepsilon_1 < \rho_\lambda,$$

т.е. $S(\lambda^{(k-1)}, \rho_{k-1}+\varepsilon_1) \subset S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$.

Так как $Q_{\nu,h}(\lambda, u^{(k-1)})$ в $S(\lambda^{(k-1)}, \rho_{k-1}+\varepsilon_1)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 из [12], то в $S(\lambda^{(k-1)}, \rho_{k-1}+\varepsilon_1)$ существует решение $\lambda^{(k)}$ уравнения $Q_{\nu,h}(\lambda, u^{(k-1)}) = 0$ и справедлива оценка:

$$\|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\| \le \gamma_\nu(h)||Q_{\nu,h}(\lambda^{(k-1)}, u^{(k-1)})||. \tag{18}$$

Из задачи Коши $\dfrac{du_r}{dt} = f(t, \lambda_r^{(k)} + u_r), \qquad u_r((r-1)h) = 0, \qquad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1,N}$, с учетом условия B, неравенств 4), 5) следует существование $u_r^{(k)}(t)$ и оценка

$$\|u_r^{(k)}(t) - u_r^{(k-1)}(t)\| \le \left(e^{\int\limits_{(r-1)h}^{t} L(\tau)d\tau} - 1\right)\|\lambda_r^{(k)} - \lambda_r^{(k-1)}\|, \qquad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1,N}, \tag{19}$$

отсюда получим $u^{(k)}[t] \in S(u^{(0)}[t], \rho_u)$.

Если $\rho_k = \gamma_\nu(h)\|Q_{\nu,h}(\lambda^{(k)}, u^{(k)})\| = 0$, то $Q_{\nu,h}(\lambda^{(k)}, u^{(k)}) = 0$ и пара $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$ является решением задачи (7)–(10). Согласно (17), (18) установим, что

$$\|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\| \le q_\nu(h)\|\lambda^{(k-1)} - \lambda^{(k-2)}\|. \tag{20}$$

Из (19), (20) и условия 2) теоремы: $q_\nu(h) < 1$, следует, что последовательность пар $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$ при $k \to \infty$ сходится к $(\lambda^*, u^*[t])$ – решению задачи (7)–(10). Причем в силу неравенств 4), 5) теоремы пары $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$, $k = 1, 2, ...,$ и $(\lambda^*, u^*[t])$ принадлежат $S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S(u^{(0)}[t], \rho_u)$. Ввиду (19), (20) легко показать, что при всех $k = 1, 2, ...,$ и $p \in \mathbb{N}$

$\|\lambda^{(k+p)} - \lambda^{(k)}\| < \frac{1}{1-q_\nu(h)}[q_\nu(h)]^k\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|$,

$$\|u^{(k+p)}[\cdot] - u^{(k)}[\cdot]\|_1 \le \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h, rh)} \left(e^{\int\limits_{(r-1)h}^{t} L(\tau)d\tau} - 1\right)\|\lambda^{(k+p)} - \lambda^{(k)}\|.$$

Переходя к пределу при $p \to \infty$ в последних неравенствах, получим оценки а), б) теоремы.

Изолированность решения устанавливается аналогично доказательству теоремы 2 из [12]. Теорема 1 доказана.

Функции $x^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, 2, ...,$ определим равенствами: $x^{(k)}(t) = \lambda_r^{(k)} + u_r^{(k)}(t), \qquad t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1,N}$, $x^{(k)}(T) = \lambda_N^{(k)} + \lim\limits_{t\to T-0} u_N^{(k)}(t)$. Ввиду эквивалентности задач (1), (3) и (7)-(10) из теоремы 1 следует

**Теорема 2.** *Пусть существуют $\nu$, $h > 0 : T = Nh$, $\rho_\lambda > 0$, $\rho_u > 0$, $\rho_x > 0$, при которых выполняются условия A, B, матрица Якоби $\dfrac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda, u)}{\partial\lambda}$ обратима для всех $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S(u^{(0)}[t], \rho_u)$ и справедливы неравенства 1)–5) теоремы 1.*

*Тогда последовательность функций $x^{(k)}(t)$, $k = 1, 2, ...,$ содержится в $S(x^{(0)}(t), \rho_x)$, сходится к $x^*(t) \in S(x^{(0)}(t), \rho_x)$ – решению задачи (1), (3) и справедливо неравенство:*

$$\|x^*(t) - x^{(k)}(t)\| \le [q_\nu(h)]^k \frac{\gamma_\nu(h)}{1-q_\nu(h)} e^{\int\limits_{(r-1)h}^{t} L(\tau)d\tau} \|Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\|, \qquad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1,N}.$$

*Причем любое решение задачи (1), (3) в $S(x^{(0)}(t), \rho_x)$ изолировано.*

В теореме 2 изолированное решение понимается как изолированный элемент множества решений и такое решение не только не обеспечивает его непрерывную зависимость от исходных данных, но и не сохраняет свойство разрешимости при малых изменениях правой части дифференциального уравнения. Так как построение алгоритмов нахождения приближенных решений предполагает малость изменения решения при малых возмущениях правой части дифференциального уравнения, то вводится следующее определение изолированности.

**Определение 1.** *Решение $x^*(t)$ задачи (1), (3) называется "изолированным", если существует число $\rho_0 > 0$, при котором функция $f$ в $G_1^*(\rho_0) = \Big\{(t,x) : t \in [0,T], ||x - x^*(t)|| < \rho_0\Big\}$ имеет равномерно непрерывную производную $f_x'$ и линейная однородная многоточечная краевая задача*

$$\frac{dy}{dt} = f_x'(t, x^*(t))y, \qquad t \in [0,T], y \in R^n, \tag{21}$$

$$\sum_{j=1}^{n} M_j y(t_j) = 0 \tag{22}$$

*имеет только тривиальное решение $y(t) = 0$.*

**Теорема 3.** *При выполнении условий теоремы 1 любое решение (1), (3) из $S(x^{(0)}(t), \rho_x)$ является "изолированным".*

**Доказательство.** Из теоремы 2 следует существование изолированного решения $x^*(t) \in S(x^{(0)}(t), \rho_x)$. Покажем, что это решение является изолированным в смысле определения. Рассмотрим линейную однородную краевую задачу (21), (22). По матрицам $A^*(t) = f_x'(t, x^*(t))$, $C_j^* = M_j$, $j = \overline{1,n}$, составляется $(nN \times nN)$-матрица специальной структуры $Q_\nu(*,h)$, аналогично матрице $Q_\nu(h)$ из [13], с учетом обозначений. Обозначив через $\lambda_r^*$ значение функции $x^*(t)$ при $t = (r-1)h$ и на интервалах $[(r-1)h, rh)$ введя функции $u_r^*(t) = x^*(t) - \lambda_r^*$, $r = \overline{1,N}$, нетрудно установить, что матрица Якоби $\frac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda^*, u^*)}{\partial \lambda}$ совпадает с $Q_\nu(*,h)$. Тогда в силу условий теоремы 1 матрица $Q_\nu(*,h)$ обратима и выполняются неравенства: $||f_x'(t, x^*(t))|| \le L(t)$,

$$q_\nu(h) = \gamma_\nu(h) \max(1, h\sum_{j=2}^{n} ||C_j^*||) \max_{r=\overline{1,N}} \Bigg\{ \exp\Bigg( \int\limits_{(r-1)h}^{rh} L(t)dt \Bigg) - \sum_{i=0}^{\nu} \frac{1}{i!} \Bigg( \int\limits_{(r-1)h}^{rh} L(t)dt \Bigg)^i \Bigg\} < 1.$$

При этих условиях существование только тривиального решения однородной задачи (21), (22) устанавливается по схеме доказательства теоремы 1 из [13]. Теорема 3 доказана.

Следующее утверждение показывает, что условия теоремы 1 не только достаточны, но и необходимы для существования "изолированного" решения.

**Теорема 4.** *Краевая задача (1), (3) имеет "изолированное" решение тогда и только тогда, когда для любого $\nu$ $(\nu = 1, 2, ...)$, существуют числа $h = h(\nu) : Nh = T$ $(N = 1, 2, ...)$, $\rho_\lambda > 0$, $\rho_u > 0$, $\rho_x > 0$, при которых выполняются условия A, B, матрица Якоби $\dfrac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda}$ обратима для всех $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S(u^{(0)}[t], \rho_u)$ и справедливы неравенства 1) – 5) теоремы 1.*

**Доказательство необходимости.** Пусть $x^*(t)$ – "изолированное" решение задачи (1), (3). Тогда, по определению, существует число $\rho_0 > 0$ и функция $f(t,x)$ в $G_1^*(\rho_0)$ имеет равномерно непрерывную частную производную $f_x'$. Поэтому найдется число $\alpha$, ограничивающее эту функцию $||f_x'(t,x)|| \le L_0$, для всех $(t,x) \in G_1^*(\rho_0)$. Отрезок $[0,T]$ разобьем на равные части с шагом $h > 0 : Nh = T$ $(N = 1, 2, ...)$ и рассмотрим эквивалентную многоточечную краевую задачу с параметрами. Пара $(\lambda^*, u^*[t])$ с элементами $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_N^*)' \in R^{nN}$, $u^*[t] = (u_1^*(t), u_2^*(t), ..., u_N^*(t))' \in C([0,T], h, R^{nN})$, где $\lambda_r^* = x^*((r-1)h)$, $u_r^*(t) = x^*(t) - x^*((r-1)h)$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1,N}$, будет решением задачи (7)–(10).

Так как $x^*(t)$ удовлетворяет уравнению (1) и $f(t, x^*(t))$ непрерывна на $[0, T]$, то найдется число $L_0 > 0$ такое, что $||\dot{x}^*||_0 \leq \tilde{L}$, и для каждого $r = \overline{1, N}$ справедлива оценка:

$$||u_r^*(t)|| = ||x^*(t) - x^*((r-1)h)|| \leq \sup_{t \in [(r-1)h, rh)} ||\dot{x}^*(t)||h \leq \tilde{L}h, \qquad t \in [(r-1)h, rh). \tag{23}$$

Из существования только тривиального решения однородной краевой задачи (21), (22), следует однозначная разрешимость неоднородной краевой задачи

$$\frac{dy}{dt} = f'_x(t, x^*(t))y + \varphi(t), \qquad t \in [0, T], y \in R^n, \quad \sum_{j=1}^{n} M_j y(t_j) = d,$$

$\varphi(t) \in C([0, T], R^n)$, $d \in R^n$. Тогда, согласно теореме 4 из [13], существует шаг $h_0 > 0$, что для всех $h \in (0, h_0] : Nh = T$ матрица $Q_\nu^*(h) = \frac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda^*, u^*)}{\partial \lambda}$ обратима и $||[Q_\nu^*(h)]^{-1}|| \leq \frac{\gamma_\nu}{h}$, где $\gamma_\nu$ – const, не зависящая от $h$. Возьмем число $\varepsilon > 0$, удовлетворяющим неравенству $\varepsilon\gamma_\nu \leq \frac{1}{4}$ и, используя равномерную непрерывность $f'_x(t, x)$ найдем $\rho_\lambda^* > 0$, $\rho_u^* > 0$ такие, что $\max\limits_{l=\overline{1,\nu}} \left\{ \rho_\lambda^* \sum\limits_{i=0}^{l-1} \frac{(hL_0)^i}{i!} + \rho_u^* \frac{(hL_0)^{l-1}}{(l-1)!} \right\} = \rho^* \in \in (0, \rho_0]$ и $\left|\left| \frac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda} - \frac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda^*, u^*)}{\partial \lambda} \right|\right| \leq \varepsilon$ для всех $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^*, \rho_\lambda^*) \times S(u^*[t], \rho_u^*)$. Применяя теорему о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов [14, с. 142] получим, что матрица Якоби $\frac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda}$ ограниченно обратима и $\left|\left| \left[ \frac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda} \right]^{-1} \right|\right| \leq \frac{4\gamma_\nu}{3h}$ для всех $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^*, \rho_\lambda^*) \times S(u^*[t], \rho_u^*)$. Выберем $h_1 \in (0, h_0] : Nh_1 = T$ $(N = 1, 2, ...)$ так, чтобы выполнялись неравенства:

$$\tilde{L}h_1 \leq \frac{\rho_u^*}{2}, \tag{24}$$

$$\frac{4\gamma_\nu}{3h} \tilde{L} \max\Big(1, h_1 \sum_{j=2}^{n} ||M_j||\Big) \frac{(h_1 L_0)^\nu}{\nu!} < \frac{\rho_\lambda^*}{2}, \tag{25}$$

$$\frac{4\gamma_\nu}{3h} \tilde{L} \max\Big(1, h_1 \sum_{j=2}^{n} ||M_j||\Big) \frac{(h_1 L_0)^\nu}{\nu!} \Big(e^{h_1 L_0} - 1\Big) < \frac{\rho_u^*}{2}. \tag{26}$$

Покажем, что $S(0, \rho_u^*/2) \subset S(u^*[t], \rho_u^*)$. Действительно, если $u[t] \in S(0, \rho_u^*/2)$ то в силу (23), (24), $||u[\cdot] - u^*[\cdot]||_1 \leq ||u[\cdot]||_1 + ||u^*[\cdot]||_1 < \frac{\rho_u^*}{2} + \frac{\rho_u^*}{2} = \rho_u^*$, т.е. $u[t] \in S(u^*[t], \rho_u^*)$. При $h \in (0, h_1] :$ $Nh = T$ $(N = 1, 2, ...)$ рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$Q_{\nu,h}(\lambda, 0) = 0, \qquad \lambda \in R^{nN}. \tag{27}$$

Так как матрица Якоби $\frac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda, 0)}{\partial \lambda}$ равномерно непрерывна в $S(\lambda^*, \rho_\lambda^*)$, оценка $\left|\left| \left[ \frac{\partial Q_{\nu,h}(\lambda, 0)}{\partial \lambda} \right]^{-1} \right|\right| \leq \frac{4\gamma_\nu}{3h}$ справедлива для всех $\lambda \in S(\lambda^*, \rho_\lambda^*)$. Ввиду (23), (25) и равенства $Q_{\nu,h}(\lambda^*, u^*) = 0$ имеем, что $\frac{4\gamma_\nu}{3h} ||Q_{\nu,h}(\lambda^*, 0)|| = \frac{4\gamma_\nu}{3h} ||Q_{\nu,h}(\lambda^*, 0) - Q_{\nu,h}(\lambda^*, u^*)|| \leq \frac{4\gamma_\nu}{3h} \max\Big(1, h \sum\limits_{j=2}^{n} ||M_j||\Big) \frac{(hL_0)^\nu}{\nu!} \tilde{L}h < \rho_\lambda^*$. Поэтому, согласно теореме 1 из [12] система уравнений (27) имеет решение $\lambda^{(0)} \in S(\lambda^*, \rho_\lambda^*)$ и

$$||\lambda^{(0)} - \lambda^*|| \leq \frac{4\gamma_\nu}{3h} \max\Big(1, h \sum_{j=2}^{n} ||M_j||\Big) \frac{(hL_0)^\nu}{\nu!} \tilde{L}h < \rho_\lambda^*. \tag{28}$$

Решение задачи Коши (7), (8) при $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$, $r = \overline{1, N}$, найдем методом последовательных приближений: $u_r^{(0,0)}(t) = u_r^*(t)$,

$$u_r^{(0,m+1)}(t)=\int\limits_{(r-1)h}^{t} f(\tau,\lambda_r^{(0)}+u_r^{(0,m)}(\tau)d\tau, \qquad m=0,1,2,..., \qquad t\in[(r-1)h,rh), \quad r=\overline{1,N}.$$

Для любого $m=0,1,2,...$, функция $u_r^{(0,m+1)}(t)$ имеет конечный левосторонний предел, равный $\int\limits_{(r-1)h}^{rh} f(\tau,\lambda_r^{(0)}+u_r^{(0,m)}(\tau)d\tau$, $r=\overline{1,N}$, и система функций $u^{(0,m+1)}[t]=(u_1^{(0,m+1)}(t),u_2^{(0,m+1)}(t),...,$ $u_N^{(0,m+1)}(t))'$ принадлежит пространству $C([0,T],h,R^{nN})$.

Из неравенств $||u_r^{(0,1)}(t)-u_r^{(0,0)}(t)||=||u_r^{(0,1)}(t)-u_r^{*}(t)||=$
$=\left\|\int\limits_{(r-1)h}^{t} f(\tau,\lambda_r^{(0)}+u_r^{*}(\tau)d\tau-\int\limits_{(r-1)h}^{t} f(\tau,\lambda_r^{*}+u_r^{*}(\tau)d\tau\right\|\leq L_0(t-(r-1)h)||\lambda_r^{(0)}-\lambda_r^{*}||,$

$||u_r^{(0,2)}(t)-u_r^{(0,1)}(t)||\leq\int\limits_{(r-1)h}^{t} L_0||u_r^{(0,1)}(\tau)-u_r^{(0,0)}(\tau)||d\tau\leq\frac{(L_0(t-(r-1)h))^2}{2!}||\lambda_r^{(0)}-\lambda_r^{*}||,$

$||u_r^{(0,m+1)}(t)-u_r^{(0,m)}(t)||\leq\frac{(L_0(t-(r-1)h))^{m+1}}{(m+1)!}||\lambda_r^{(0)}-\lambda_r^{*}||, \qquad t\in[(r-1)h,rh), \quad r=\overline{1,N},$

следует оценка $\qquad ||u^{(0,m+1)}[\cdot]-u^{(0,m)}[\cdot]||_1\leq\frac{(L_0(t-(r-1)h))^{m+1}}{(m+1)!}||\lambda^{(0)}-\lambda^{*}||, \qquad m=0,1,2,...,$ откуда, учитывая полноту пространства $C([0,T],h,R^{nN})$, получим сходимость $\{u^{(0,m)}[t]\}$ к $u^{(0)}[t]\in C([0,T],h,R^{nN})$ при $m\to\infty$ и

$$||u^{(0)}[\cdot]-u^{*}[\cdot]||_1\leq\frac{4\gamma_\nu}{3h}\tilde{L}\max\Big(1,h\sum_{j=2}^{n}||M_j||\Big)\frac{(hL_0)^\nu}{\nu!}\Big(e^{hL_0}-1\Big)<\frac{\rho_u^{*}}{2}. \tag{29}$$

Таким образом, имеет место условие A и оценки (28), (29).

Теперь возьмем $\rho_\lambda=\rho_\lambda^{*}/2$, $\rho_u=\rho_u^{*}/2$, $\rho_x=\max\limits_{l=\overline{1,\nu}}\Big\{\rho_\lambda\sum\limits_{i=0}^{l-1}\frac{(hL_0)^i}{i!}+\rho_u\frac{(hL_0)^{l-1}}{(l-1)!}\Big\}$ и выберем $h_2\in(0,h_1]:Nh_2=T$, удовлетворяющим неравенствам

$$\frac{4\gamma_\nu}{3h_2}\max\Big(1,h_2\sum_{j=2}^{n}||M_j||\Big)\Big(e^{h_2L_0}-\sum_{i=0}^{\nu}\frac{(h_2L_0)^i}{i!}\Big)\leq\frac{1}{3}, \tag{30}$$

$$2\gamma_\nu\tilde{L}\max\Big(1,h_2\sum_{j=2}^{n}||M_j||\Big)\frac{(h_2L_0)^\nu}{\nu!}\Big(\frac{4\gamma_\nu}{3h_2}\max\Big(1,h_2\sum_{j=2}^{n}||M_j||\Big)\frac{(h_2L_0)^\nu}{\nu!}\Big(e^{h_2L_0}-1\Big)+1\Big)<\rho_\lambda, \tag{31}$$

$$2\gamma_\nu\tilde{L}\max\Big(1,h_2\sum_{j=2}^{n}||M_j||\Big)\frac{(h_2L_0)^\nu}{\nu!}\Big(\frac{4\gamma_\nu}{3h_2}\max\Big(1,h_2\sum_{j=2}^{n}||M_j||\Big)\frac{(h_2L_0)^\nu}{\nu!}\Big(e^{h_2L_0}-1\Big)+1\Big)\times$$
$$\times\Big(e^{h_2L_0}-1\Big)<\rho_u. \tag{32}$$

Если $(\lambda,u[t])\in S(\lambda^{(0)},\rho_\lambda)\times S(u^{(0)}[t],\rho_u)$, то, на основании (25), (26), (28), (29) получим:

$||\lambda-\lambda^{*}||\leq||\lambda-\lambda^{(0)}||+||\lambda^{(0)}-\lambda^{*}||\leq\rho_\lambda+\frac{4\gamma_\nu}{3h}\max\Big(1,h\sum\limits_{j=2}^{n}||M_j||\Big)\frac{(hL_0)^\nu}{\nu!}\tilde{L}h<\rho_\lambda^{*},$

$||u[\cdot]-u^{*}[\cdot]||_1\leq||u[\cdot]-u^{(0)}[\cdot]||_1+||u^{(0)}[\cdot]-u^{*}[\cdot]||_1\leq\rho_u+\frac{4\gamma_\nu}{3h}\tilde{L}\max\Big[1,h\sum\limits_{j=2}^{n}||M_j||\Big]\frac{[hL_0]^\nu}{\nu!}\Big[e^{hL_0}-1\Big]<$ $<\rho_u^{*}$, т.е. $S(\lambda^{(0)},\rho_\lambda)\subset S(\lambda^{*},\rho_\lambda^{*})$, $S(u^{(0)}[t],\rho_u)\subset S(u^{*}[t],\rho_u^{*})$ при всех $h\in(0,h_2]$. Поэтому в $G_1^{*}(\rho_0)$ выполняется условие B. Неравенство 1) теоремы 1 выполняется с постоянной $\gamma_\nu(h)\leq\frac{4\gamma_\nu}{3h}$. Тогда $q_\nu(h)=\frac{4\gamma_\nu}{3h}\max\Big(1,h\sum\limits_{j=2}^{n}||M_j||\Big)\Big(e^{hL_0}-\sum\limits_{i=0}^{\nu}\frac{(hL_0)^i}{i!}\Big)$, и в силу (30) $q_\nu(h)\leq\frac{1}{3}$ при $h\in(0,h_2]$.

Принимая во внимание оценки

$$||u^{(0)}[\cdot]||_1 \le ||u^{(0)}[\cdot] - u^*[\cdot]||_1 + ||u^*[\cdot]||_1 \le \tilde{L}h\Big(\tfrac{4\gamma_\nu}{3h}\max\Big(1, h\sum_{j=2}^{n}||M_j||\Big)\tfrac{(hL_0)^\nu}{\nu!}\Big(e^{hL_0}-1\Big)+1\Big),$$

$$||Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})|| = ||Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)}) - Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)}, 0)|| \le \max\Big(1, h\sum_{j=2}^{n}||M_j||\Big)\tfrac{(hL_0)^\nu}{\nu!}||u^{(0)}[\cdot]||_1$$

и неравенства (31), (32), получим следующее: $\frac{\gamma_\nu(h)}{1-q_\nu(h)}||Q_{\nu,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})|| \le$

$$\le 2\gamma_\nu(h)\tilde{L}\max\Big(1, h\sum_{j=2}^{n}||M_j||\Big)\tfrac{(hL_0)^\nu}{\nu!}\Big(\tfrac{4\gamma_\nu}{3h}\max\Big(1, h\sum_{j=2}^{n}||M_j||\Big)\tfrac{(hL_0)^\nu}{\nu!}\Big(e^{hL_0}-1\Big)+1\Big) < \rho_\lambda.$$

Таким образом, при выборе $\rho_\lambda = \rho_\lambda^*/2$, $\rho_u = \rho_u^*/2$, $\rho_x = \max\limits_{l=\overline{1,\nu}}\Big\{\rho_\lambda\sum\limits_{i=0}^{l-1}\frac{(hL_0)^i}{i!} + \rho_u\frac{(hL_0)^{l-1}}{(l-1)!}\Big\}$, все условия теоремы 1 выполняются для любого $h \in (0, h_2] : Nh = T$ $(N = 1, 2, ...)$.

Теорема 4 доказана.

## Цитированная литература


1. **Nicoletti O.** Sulle condizioni iniziali che determiniano gli integrali della diffenziali ordinazie. // Att della R. Acc. Sc. Torino. 1897, 1898. P.748-759.

2. **Найшуль А.Б.** //Доклады АН СССР. 1949. Т.67. №6. С. 969–972

3. **Исраилов С.В.** //Уч. записки Азербайдж. госун-та. Серия ф-м. науки. 1963. №3. С. 63–71.

4. **Кигурадзе И.Т.** Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Тбилиси, 1972.

5. **Исраилов С.В.** // Издательство Северокавказского научного центра высшей школы. Естественные науки. 1974. №4. С.72–76.

6. **Ешуков Л. Н., Веков А. А., Степанов А. Н.** // Труды Рязан. радиотехн. ин-та. Рязань. 1972. Вып. 42. С. 184–192.

7. **Васильев Н.И., Клоков Ю.А.** Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига: Зинетне. 1978.

8. **Самойленко А. М., Ронто Н. И.** Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. Киев. 1985.

9. **Кигурадзе И. Т.** Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Совр. пробл. математики. Новейшие достижения. 1987. Т. 30. С. 3–103.

10. **Исраилов С.В., Юшаев С.С.** Многоточечные и функциональные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Нальчик: Изд. центр "Эльфа". 2004.

11. **Джумабаев Д. С.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, №1. С. 50-66.

12. **Джумабаев Д. С., Темешева С.М.** // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47, №1. С. 39-63.

13. **Джумабаев Д.С., Иманчиев А.Е.** //Математический журнал. 2005. Т.5, №1(15). С. 30–38.

14. **Треногин В. А.** Функциональный анализ.М., 1980.


*Поступила в редакцию 17.08.2010г.*

Математический журнал. *Алматы. 2010. Том 10. № 3 (37) . С. 85—91*

*УДК 532.5:519.8*

# ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА РАЗРАБОТКИ НЕФТЯНЫХ ЗАЛЕЖЕЙ С ВЫСОКОВЯЗКОЙ НЕФТЬЮ

М. Ж. Мукимбеков, Б. К. Шеркешбаева

Атырауский институт нефти и газа
060002 Атырау Азаттык, 1

В работе рассматривается построение математической модели паротеплового воздействия на нефтяной пласт.

**Постановка задачи.** Многочисленные исследования показывают, что существенно увеличить нефтеотдачу пластов на современном этапе можно лишь путем изменения физических и физико-химических свойств вытесняющей жидкости, добиваясь при этом изменения температурного режима процесса вытеснения нефти из пласта. Для повышения нефтеотдачи в пласт нагнетают воду с повышенным давлением, с добавками поверхностно-активных веществ (ПАВ) и щелочей, растворы полимеров, повышающие вязкость воды. Эти методы повышения эффективности заводнения основаны на направленном воздействии активными агентами на регулируемые параметры процесса таким образом, чтобы обеспечивались наилучшие физические и физико-химические условия вытеснения нефти из коллектора.

В работе рассматривается метод паротеплового воздействия на нефтяной коллектор, позволяющий улучшить процесс извлечения нефти из пластов по сравнению с традиционными методами разработки. Областью применения метода паротеплового воздействия являются, как правило, пласты, насыщенные высоковязкой нефтью (более 50–100 мПас) [1–3].

Вместе с тем, применение этого метода увеличения нефтеотдачи требует довольно значительных дополнительных затрат, поэтому решение о его внедрении на конкретном месторождении принимается на основе технико-экономического сравнения вариантов паротеплового воздействия и базового метода разработки (обычно, режим истощения пластовой энергии). Однако, в ряде случаев для предварительной оценки возможности применения этого метода на группе объектов могут быть также полезны зависимости технологической эффективности метода от основных геолого-физических параметров пластов. Технологическая эффективность паротеплового воздействия определялась двумя показателями: приростом конечного коэффициента нефтеотдачи по сравнению с базовым режимом разработки и удельным расходом пара на дополнительную добычу нефти за весь период применения метода паротеплового воздействия на объекте.

Keywords: *Problem of mathematical modeling, oil field exploration, computation analysis*
2010 Mathematics Subject Classification: 42A10

Математическая модель неизотермической многофазной плановой фильтрации пластового течения описывается следующими уравнениями (в безразмерном виде):

$$H(x,y)\frac{\partial(m\rho_B s_B)}{\partial t}+div(\rho_B\overline{W}_B)+N_B=\sum_{i=1}^{N_1}\varrho_{B,ni}\delta(x-x_{ni},y-y_{ni})-\sum_{i=1}^{N_2}\varrho_{B,\partial i}\delta(x-x_{\partial i},y-y_{\partial i}),\quad (1)$$

$$H(x,y)\frac{\partial(m\rho_H s_H)}{\partial t}+div(\rho_H\overline{W}_H)=\sum_{i=1}^{N_2}\varrho_{Hi}\delta(x-x_{\partial i},y-y_{\partial i}),\quad (2)$$

$$H(x,y)\frac{\partial(m\rho_\Gamma s_\Gamma)}{\partial t}+div(\rho_\Gamma\overline{W}_\Gamma)=\sum_{i=1}^{N_2}\varrho_{\Gamma i}\delta(x-x_{\partial i},y-y_{\partial i}),\quad (3)$$

$$H(x,y)\frac{\partial(m\rho_K s_K)}{\partial t}+div(\rho_K\overline{W}_K)+N_K=\sum_{i=1}^{N_1}\varrho_{K,ni}\delta(x-x_{ni},y-y_{ni})-\sum_{i=1}^{N_2}\varrho_{K,\partial i}\delta(x-x_{\partial i},y-y_{\partial i}),\quad (4)$$

$$\overline{W}_B=-Hk\frac{f_B}{\mu_B}\bigtriangledown P,\ \ \overline{W}_H=-Hk\frac{f_H}{\mu_H}\bigtriangledown P,$$

$$\overline{W}_\Gamma=-Hk\frac{f_\Gamma}{\mu_\Gamma}\bigtriangledown P,\ \ \overline{W}_K=-Hk\frac{f_K}{\mu_K}\bigtriangledown P,\quad (5)$$

$$s_B+s_H+s_\Gamma+s_K=1,\quad (6)$$

$$\rho_B=\rho_B(p,T),\ \ \rho_H=\rho_H(p,T),$$

$$\rho_\Gamma=\rho_\Gamma(p,T),\ \ \rho_K=\rho_K(p,T),\quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[Hm(i_B\rho_B s_B+i_H\rho_H s_H+i_\Gamma\rho_\Gamma s_\Gamma+i_K\rho_K s_K)+H(1-m)c_\Pi\rho_\Pi]+$$

$$+div(\rho_B\overline{W}_B i_B+\rho_H\overline{W}_H i_H+\rho_\Gamma\overline{W}_\Gamma i_\Gamma+\rho_K\overline{W}_K i_K)=$$

$$=div(\lambda\nabla T)+\sum_{i=1}^{N_1}\varrho_{\text{тепло},ni}\delta(x-x_{ni},y-y_{ni})-\sum_{i=1}^{N_2}\varrho_{\text{тепло},\partial i}\delta(x-x_{\partial i},y-y_{\partial i}),\quad (8)$$

где $i_B=c_BT$, $i_H=c_HT$, $i_\Gamma=c_\Gamma T$, $i_K=c_KT+r(T)$. Здесь $s_B$, $s_H$, $s_\Gamma$, $s_K$ – насыщенность воды, нефти, газа и пара соответственно; $p$, $T$, $H$ – давление, температура, толщина пласта соответственно; $k$, $m$ – абсолютная проницаемость, пористость пласта; $\rho_B$, $\rho_H$, $\rho_\Gamma$, $\rho_K$ – плотность воды, нефти, газа и пара соответственно; $r(T)$ – скрытая теплота парообразования; $f_B$, $f_H$, $f_\Gamma$, $f_K$ и $\mu_B$, $\mu_H$, $\mu_\Gamma$, $\mu_K$ – относительные фазовые проницаемости и вязкость воды, нефти, газа и пара соответственно; $c_B$, $c_H$, $c_\Gamma$, $c_K$, $c_\Pi$ и $\lambda_B$, $\lambda_H$, $\lambda_\Gamma$, $\lambda_K$, $\lambda_\Pi$ – коэффициенты теплоемкости и теплопроводности воды, нефти, газа, пара и породы соответственно; $\varrho_{B,ni}$, $\varrho_{B,\partial i}$ – приведенные дебиты воды на нагнетательных и добывающих скважинах соответственно; $\varrho_{Hi}$, $\varrho_{\Gamma,ni}$ – приведенные дебиты нефти и газа на добывающих скважинах соответственно; $\varrho_{K,ni}$, $\varrho_{K,\partial i}$ – приведенные дебиты пара на нагнетательных и добывающих скважинах соответственно; $\varrho_{\text{тепло},ni}$, $\varrho_{\text{тепло},\partial i}$ – приведенные расходы количества тепла на нагнетательных и добывающих скважинах соответственно; $(x_{ni},\,y_{ni})$ – координаты $i$-ой нагнетательной скважины; $(x_{\partial i},\,y_{\partial i})$ – координаты $i$-ой добывающей скважины; $N_1$, $N_2$ – количество нагнетательных скважин и добывающих скважин соответственно.

В качестве начальных условий берутся начальные распределение давления и температура пласта; осредненные по мощности насыщенность воды, нефти, газа и пара в начальный момент времени:

$$(p,\, T)|_{t=0} = (p^0,\, T^0),$$
$$(s_B,\, s_H,\, s_\Gamma,\, s_K)|_{t=0} = (s_B^0,\, s_H^0,\, s_\Gamma^0,\, s_K^0). \tag{9}$$

На границах области течения задаются условия непротекания флюидов и отсутствия теплового потока:

$$(\overline{W}_B\overline{n},\, \overline{W}_H\overline{n},\, \overline{W}_\Gamma\overline{n},\, \overline{W}_K\overline{n})|_\Gamma = 0,\ (\frac{\partial T}{\partial n})|_\Gamma = 0. \tag{10}$$

Задаются поддерживаемые давления на нагнетательных и добывающих скважинах соответственно. На нагнетательных скважинах задаются температура, давление нагнетаемого пара.

**Численный алгоритм**

В области $0 \le x \le l_x$, $0 \le y \le l_y$, $0 < t \le T$ введем следующие разностные сетки. На первой сетке $(x_i,\, y_j,\, t_S^n)$ будем определять насыщенность, а на другой сетке $(x_i,\, y_j,\, t_{P,T}^n)$ – давление и температуру. Здесь $x_{i+1} = x_i + h_{xi}$, $y_{j+1} = y_j + h_{yj}$, $\overline{h}_{xi} = \frac{h_{xi-1}+h_{xi}}{2}$, $\overline{h}_{yj} = \frac{h_{yj-1}+h_{yj}}{2}$, $t^0 = 0$, $t_{P,T}^n = t_{P,T}^{n-1} + \Delta t^n$, $(i = 0,\ldots,N_1,\ j = 0,\ldots,N_2,\ n = 0,\ldots,M)$, $t_{S,C}^{n+1} - t_{P,T}^n = \Delta t^0$, где $\Delta t^0 = const$ ($\Delta t^0$ – задаваемый начальный шаг). Систему уравнений (1)–(4) аппроксимируем следующими разностными уравнениями:

$$\overline{h}_{xi}\overline{h}_{yj}H_{ij}m_{ij}(s_{Bij}^{n+1}\rho_{Bij}^n - s_{Bij}^n\rho_{Bij}^{n-1}) = \overline{h}_{yj}\Delta t^n[(\rho_B\frac{\partial p}{\partial x})_{i+1/2j}^n - (\rho_B\frac{\partial p}{\partial x})_{i-1/2j}^n] +$$
$$+\overline{h}_{xi}\Delta t^n[(\rho_B\frac{\partial p}{\partial x})_{ij+1/2j}^n - (\rho_B\frac{\partial p}{\partial x})_{ij-1/2j}^n] + \Delta t^n\sum_{i=1}^{N_1}\varrho_{B,n}^n\delta_{ij} - \Delta t^n\sum_{i=1}^{N_2}\varrho_{B,\partial}^n\delta_{ij}, \tag{11}$$

$$\overline{h}_{xi}\overline{h}_{yj}H_{ij}m_{ij}(s_{Hij}^{n+1}\rho_{Hij}^n - s_{Hij}^n\rho_{Hij}^{n-1}) = \overline{h}_{yj}\Delta t^n[(\rho_H\frac{\partial p}{\partial x})_{i+1/2j}^n - (\rho_H\frac{\partial p}{\partial x})_{i-1/2j}^n] +$$
$$+\overline{h}_{xi}\Delta t^n[(\rho_H\frac{\partial p}{\partial x})_{ij+1/2j}^n - (\rho_H\frac{\partial p}{\partial x})_{ij-1/2j}^n] + \Delta t^n\sum_{i=1}^{N_2}\varrho_H^n\delta_{ij}, \tag{12}$$

$$\overline{h}_{xi}\overline{h}_{yj}H_{ij}m_{ij}(s_{\Gamma ij}^{n+1}\rho_{\Gamma ij}^n - s_{\Gamma ij}^n\rho_{\Gamma ij}^{n-1}) = \overline{h}_{yj}\Delta t^n[(\rho_\Gamma\frac{\partial p}{\partial x})_{i+1/2j}^n - (\rho_\Gamma\frac{\partial p}{\partial x})_{i-1/2j}^n] +$$
$$+\overline{h}_{xi}\Delta t^n[(\rho_\Gamma\frac{\partial p}{\partial x})_{ij+1/2j}^n - (\rho_\Gamma\frac{\partial p}{\partial x})_{ij-1/2j}^n] + \Delta t^n\sum_{i=1}^{N_2}\varrho_\Gamma^n\delta_{ij}, \tag{13}$$

$$\overline{h}_{xi}\overline{h}_{yj}H_{ij}m_{ij}(s_{Kij}^{n+1}\rho_{Kij}^n - s_{Kij}^n\rho_{Kij}^{n-1}) = \overline{h}_{yj}\Delta t^n[(\rho_K\frac{\partial p}{\partial x})_{i+1/2j}^n - (\rho_K\frac{\partial p}{\partial x})_{i-1/2j}^n] +$$
$$+\overline{h}_{xi}\Delta t^n[(\rho_K\frac{\partial p}{\partial x})_{ij+1/2j}^n - (\rho_K\frac{\partial p}{\partial x})_{ij-1/2j}^n] + \Delta t^n\sum_{i=1}^{N_1}\varrho_{K,n}^n\delta_{ij} - \Delta t^n\sum_{i=1}^{N_2}\varrho_{K,\partial}^n\delta_{ij} - \overline{h}_{xi}\overline{h}_{yj}\Delta t^n N_K^n, \tag{14}$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1,\ x_i = x_H,\, y_i = y_H \\ 0,\ x_i \ne x_H,\, y_i \ne y_H \end{cases}$, здесь $(\rho_B\frac{\partial p}{\partial x})_{ij+1/2j}^n = \begin{cases} f_{Bij}^n D_{Bi+1/2j}^n, \text{ если} D_{Bi+1/2j}^n \ge 0 \\ f_{Bi+1j}^n D_{Bi+1/2j}^n, \text{ если} D_{Bi+1/2j}^n < 0 \end{cases}$, где $D_{Bi+1/2j}^n = -b_{Bi+1/2j}^n(\frac{p_{i+1j}^n - p_{ij}^n}{h_{xi}})$, $b_{Bi+1/2j}^n = \frac{1}{2}[(\rho_B\frac{Hk}{\mu_B})_{i+1j}^n + (\rho_B\frac{Hk}{\mu_B})_{ij}^n]$, аналогично записываются для остальных случаев. Исключив из уравнений (11)–(14) насыщенности $s_{Bi,j}^{n+1}$, $s_{Hi,j}^{n+1}$, $s_{\Gamma i,j}^{n+1}$,

$s^{n+1}_{Ki,j}$ с использованием соотношения: $s^{n+1}_{Bi,j} + s^{n+1}_{Hi,j} + s^{n+1}_{\Gamma i,j} + s^{n+1}_{Ki,j} = 1$, получим следующее разностное уравнение относительно давления:

$$\frac{s^n_{Bij}\rho^{n-1}_{Bij}}{\rho^n_{Bij}} + \frac{s^n_{Hij}\rho^{n-1}_{Hij}}{\rho^n_{Hij}} + \frac{s^n_{\Gamma ij}\rho^{n-1}_{\Gamma ij}}{\rho^n_{\Gamma ij}} + \frac{s^n_{Kij}\rho^{n-1}_{Kij}}{\rho^n_{Kij}} + \frac{\Delta t^n}{\rho^n_{Bij}\overline{h}_{xi}H_{ij}m_{ij}}[(\rho_B\frac{\partial p}{\partial x})^n_{i+1/2j} - (\rho_B\frac{\partial p}{\partial x})^n_{i-1/2j}] +$$

$$+\frac{\Delta t^n}{\rho^n_{Bij}\overline{h}_{yi}H_{ij}m_{ij}}[(\rho_B\frac{\partial p}{\partial y})^n_{i+1/2j} - (\rho_B\frac{\partial p}{\partial y})^n_{i-1/2j}] + \frac{\Delta t^n}{\rho^n_{Hij}\overline{h}_{xi}H_{ij}m_{ij}}[(\rho_H\frac{\partial p}{\partial x})^n_{i+1/2j} - (\rho_H\frac{\partial p}{\partial x})^n_{i-1/2j}] +$$

$$+\frac{\Delta t^n}{\rho^n_{Hij}\overline{h}_{yi}H_{ij}m_{ij}}[(\rho_H\frac{\partial p}{\partial y})^n_{i+1/2j} - (\rho_H\frac{\partial p}{\partial y})^n_{i-1/2j}] + \frac{\Delta t^n}{\overline{h}_{xi}\overline{h}_{yi}H_{ij}m_{ij}\rho^n_{Bij}}[\sum_{i=1}^{N_1}\varrho^n_{B,H}\delta_{ij} - \sum_{i=1}^{N_2}\varrho^n_{B,\partial}\delta_{ij}] +$$

$$+\frac{\Delta t^n}{\rho^n_{\Gamma ij}\overline{h}_{xi}H_{ij}m_{ij}}[(\rho_\Gamma\frac{\partial p}{\partial x})^n_{i+1/2j} - (\rho_\Gamma\frac{\partial p}{\partial x})^n_{i-1/2j}] + \frac{\Delta t^n}{\rho^n_{\Gamma ij}\overline{h}_{yi}H_{ij}m_{ij}}[(\rho_\Gamma\frac{\partial p}{\partial y})^n_{i+1/2j} - (\rho_\Gamma\frac{\partial p}{\partial y})^n_{i-1/2j}] +$$

$$+\frac{\Delta t^n}{\rho^n_{Kij}\overline{h}_{xi}H_{ij}m_{ij}}[(\rho_K\frac{\partial p}{\partial x})^n_{i+1/2j} - (\rho_K\frac{\partial p}{\partial x})^n_{i-1/2j}] + \frac{\Delta t^n}{\rho^n_{Kij}\overline{h}_{yi}H_{ij}m_{ij}}[(\rho_K\frac{\partial p}{\partial y})^n_{i+1/2j} - (\rho_K\frac{\partial p}{\partial y})^n_{i-1/2j}] +$$

$$+\frac{\Delta t^n}{\overline{h}_{xi}\overline{h}_{yi}H_{ij}m_{ij}\rho^n_{Kij}}[\sum_{i=1}^{N_1}\varrho^n_{K,H}\delta_{ij} - \sum_{i=1}^{N_2}\varrho^n_{K,\partial}\delta_{ij}] - \overline{h}_{xi}\overline{h}_{yi}\Delta t^n N^n_K +$$

$$+\frac{\Delta t^n}{\overline{h}_{xi}\overline{h}_{yi}H_{ij}m_{ij}\rho^n_{Hij}}\sum_{i=1}^{N_2}\varrho^n_H\delta_{ij} + +\frac{\Delta t^n}{\overline{h}_{xi}\overline{h}_{yi}H_{ij}m_{ij}\rho^n_{\Gamma ij}}\sum_{i=1}^{N_2}\varrho^n_\Gamma\delta_{ij} = 1. \qquad (15)$$

Уравнение (15) является нелинейным относительно давления. Для нахождения давления уравнение решается итерационным методом переменных направлений [4,5]. Число итераций задается таким образом, чтобы дисбаланс по фазам был незначительным. Затем, по известному $p^n_{ij}$ и $s^{n+1}_{Bij}$, $s^{n+1}_{Hij}$, $s^{n+1}_{\Gamma ij}$, $s^{n+1}_{Kij}$, из соотношений (11)–(14) находится температура пласта путем решения уравнения (8) вышеприведенным итерационным методом.

**Численные результаты**

Расчеты проводились для объектов со следующими основными базовыми геолого-физическими условиями: вязкость нефти в пластовых условиях 260 мПас; эффективная нефтенасыщенная толщина пласта 15 м; проницаемость 2 мкм; пористость 32%; глубина залегания 400 м; начальная нефтенасыщенность 0,78 [6–8]. Базовая плотность сетки скважин 2 га/скв. Система размещения скважин обращенная: шеститочечная. Срок разработки объекта на базовом режиме во всех вариантах ограничивался 25 годами, а при паротепловом воздействии – достижением 98%-ной обводненности добываемой продукции. На рисунке 1 представлен один из вариантов разработки месторождения (6-точечная схема разработки), где в центральной (газовой) области расположен ряд из двух нагнетательных скважин, а по краям месторождения (в нефтяных областях) размещены два ряда из четырех добывающих скважин.

Для каждого анализируемого параметра исследовались зависимости показателей извлечения нефти: коэффициенты нефтеотдачи на естественном режиме и при применении процесса паротеплового воздействия, а также прирост коэффициента нефтеотдачи. Исследовались также зависимости удельного расхода пара на общую добычу нефти при паротепловом воздействии и на дополнительную нефть за весь период разработки объекта.

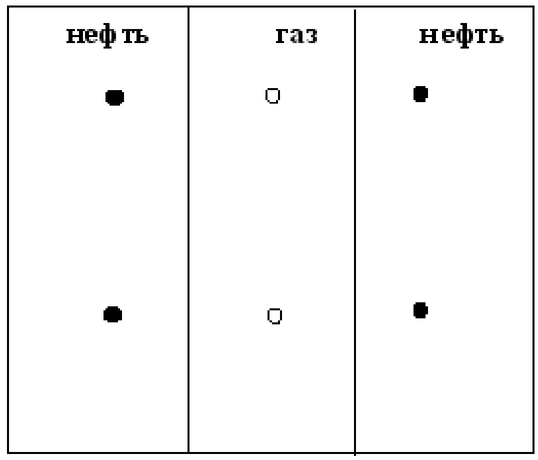


Рис. 1: Вариант разработки месторождения.

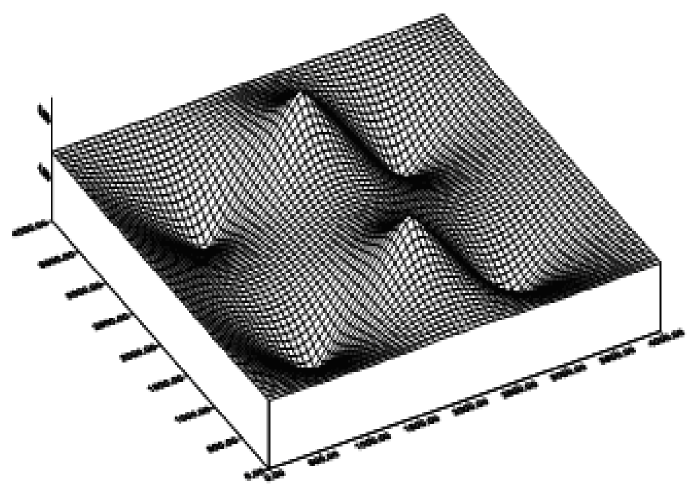

Рис. 2: Распределение давления пласта для средней стадии разработки.

На рисунках 2, 3 представлено распределение давления, температуры, насыщенности нефти, газа для средней стадии разработки месторождения, соответствующего рисунку 1. Значительное влияние на эффективность процесса паротеплового воздействия оказывает вязкость пластовой нефти. Расчеты показывают, что общая нефтеотдача пласта при паротепловом воздействии снижается при увеличении вязкости нефти. Это связано, во-первых, с неблагоприятным изменением соотношения подвижностей нефти и вытесняющего агента, особенно в меньшей степени прогреваемых зонах пласта. Кроме того, с увеличением вязкости нефти изменяется эффективность ее вытеснения непосредственно в зонах паротеплового воздействия. Более вязкие нефти содержат меньшее количество легких фракций, что снижает влияние на механизм их вытеснения испарения и приводит к увеличению остаточной нефтенасыщенности в зоне пара и снижению коэффициента нефтеотдачи. Снижение нефтеотдачи пласта с увеличением вязкости нефти при паротепловом воздействии приводит к соответствующему увеличению удельного расхода пара на общую добычу нефти и, в конечном итоге, к ухудшению общих технико-экономических показателей разработки объектов.

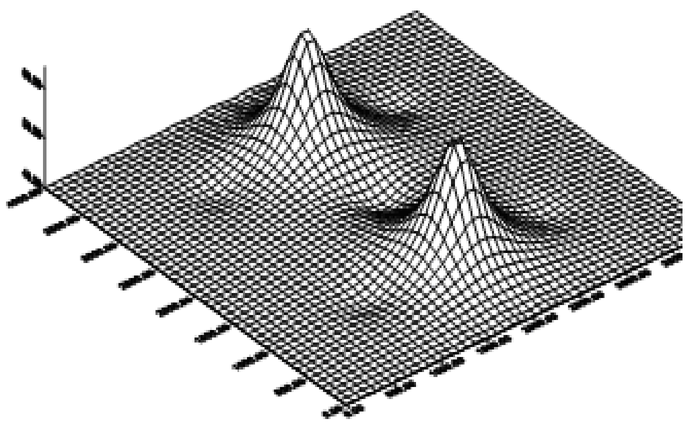

Рис. 3: Распределение температуры пласта для средней стадии разработки.

Таким образом, с увеличением вязкости нефти (в пределах рассматриваемых величин) эффективность применения процесса паротеплового воздействия за весь период разработки объекта возрастает. Глубина залегания пласта влияет и на показатели непосредственно вытеснения нефти из пористой среды паром. С увеличением глубины увеличивается давление закачки пара в пласт, скрытая теплота парообразования которого уменьшается. Влияние изменения эффективной толщины пласта на эффективность паротеплового воздействия определяется двумя факторами. При увеличении эффективной толщины снижается доля тепла, уходящего из пласта в окружающие породы. Особенно этот фактор оказывает сильное влияние на нефтеотдачу пласта до значений его толщины 10-15 м. С другой стороны, увеличение эффективной толщины пласта приводит (особенно свыше 10-15 м) к снижению его охвата воздействием. Особенно сильное влияние на процесс паротеплового воздействия оказывает пористость пласта – ее увеличение повышает эффективность использования тепла и приводит к улучшению показателей процесса.

Обращает на себя внимание также наличие оптимума в зависимостях прироста коэффициента нефтеотдачи за счет применения паротеплового воздействия от проницаемости пласта. Наличие оптимальной области отмечается и в зависимости прироста нефтеотдачи пласта при применении процесса паротеплового воздействия от плотности сетки скважин.

В целом полученные результаты показывают значительное влияние геолого-физических параметров пласта на эффективность применения процесса паротеплового воздействия.

Таким образом, использование в качестве показателя эффективности прирост коэффициента нефтеотдачи пласта по сравнению с базовым режимом разработки и соответствующий ему удельный расход пара на добычу дополнительной нефти позволяет уточнить влияние некоторых геолого-физических параметров на эффективность применения метода паротеплового воздействия на пласт.

## Цитированная литература

1. **Максимов В. М.** Основы гидротермодинамики пластовых систем. М., 1994.

2. **Антониади Д.Г.** Научные основы разработки нефтяных месторождений термическими ме-

тодами. М., 1995.

3. **Бурже Ж. и др.** Термические методы повышения нефтеотдачи пластов. М., 1988.

4. **Самарский А.А.** Теория разностных схем. М., 1989.

5. **Андерсон Д., Таннехил Дж.** Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М., 1990.

6. **Теслюк Е.В.** Разработка нефтяных месторождений и гидродинамика пласта. М., 1970.

7. Проблемы разработки и добычи нефти на месторождении Узень. Труды КазНИПИ нефтегазовой промышленности. Грозный, 1980. Вып. 7. 80 с.

8. Освоение нефтяного Мангышлака. Труды КазНИПИ нефтегазовой промышленности. Грозный, 1981. Вып. 8. 78 с.

*Поступила в редакцию 23.06.2010г.*

Математический журнал. *Алматы. 2010. Том 10. № 3 (37) . С. 92—100*

*УДК 519.624*

# ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К НАХОЖДЕНИЮ НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

К. Ж. Назарова

Институт Математики МОиН РК
050010 Алматы Пушкина, 125, anar@math.kz

Построена система нелинейных уравнений относительно параметров для нахождения начального приближения решения нелинейной двухточечной краевой задачи. Предложен способ нахождения решений построенной системы.

На отрезке $[0,T]$ рассматривается нелинейная двухточечная краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad t \in (0,T), \qquad x \in R^n, \tag{1}$$

$$g[x(0), x(T)] = 0, \tag{2}$$

где $f : [0,T] \times R^n \longrightarrow R^n$, $\quad g : R^n \times R^n \longrightarrow R^n$ – непрерывные функции.

Вопросы разрешимости и построения приближенного решения задачи (1), (2) различными методами исследованы многими авторами [1–9].

В работе [10] краевая задача (1),(2) исследовалась методом параметризации [9], где дополнительные параметры вводятся как значения решения в начальных точках интервалов разбиения отрезка $[0,T]$. Предложен способ выбора начального приближения решения задачи (1),(2) основанный на решении системы нелинейных уравнений, составленной из краевых условий и условий склеивания решения в точках разбиения отрезка.

В работе [11] двухточечная краевая задача (1),(2) для систем обыкновенных дифференциальных уравнений исследовалась модифицированным методом параметризации, где дополнительные параметры вводятся как значения решения в серединах интервалов разбиения отрезка $[0,T]$.

В настоящей работе проблема выбора начального приближения исследуется на основе модифицированного метода параметризации.

Keywords: *Differential equation, the parameterization's method, the non-uniform partition, the correct solvability.*
2010 Mathematics Subject Classification: 34B40

Используя методику работы [11] по шагу разбиения $\widetilde{h} = 2h > 0 : 2Nh = T$ и функциям $f, g$ и числу подстановок $\nu \in N$, составим систему нелинейных уравнений относительно неизвестных параметров $\lambda \in R^{nN}$ :

$$\widetilde{h}g\Bigg[\lambda_1 + \int\limits_h^0 f(\tau_1, \lambda_1 + \ldots + \int\limits_h^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_1 + u_1(\tau_\nu))d\tau_\nu \ldots)d\tau_1,$$

$$\lambda_N + \int\limits_{(2N-1)h}^{N\widetilde{h}} f(\tau_1, \lambda_N + \ldots + \int\limits_{(2N-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_N + u_N(\tau_\nu))d\tau_\nu \ldots)d\tau_1\Bigg] = 0, \tag{3}$$

$$\lambda_s + \int\limits_{(2s-1)h}^{s\widetilde{h}} f(\tau_1, \lambda_s + \ldots + \int\limits_{(2s-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_s + u_s(\tau_\nu))d\tau_\nu \ldots)d\tau_1 - \lambda_{s+1} -$$

$$- \int\limits_{(2s+1)h}^{s\widetilde{h}} f(\tau_1, \lambda_{s+1} + \ldots + \int\limits_{(2s+1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_{s+1} + u_{s+1}(\tau_\nu))d\tau_\nu \ldots)d\tau_1] = 0, \quad s = \overline{1, N-1}, \tag{4}$$

которую запишем в виде

$$Q_{\nu,\widetilde{h}}(\lambda, u) = 0, \quad \lambda \in R^{nN}. \tag{5}$$

Выберем шаг $\widetilde{h} = 2h > 0 : 2Nh = T$, вектор $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_N^{(0)})' \in R^{nN}$. Возьмем $\lambda^{(0)} \in G_0(f, \widetilde{h})$, ему соответствующую $u^{(0)}[t]$, непрерывные на $[(r-1)\widetilde{h}, r\widetilde{h}]$ функции $R_r(t) \geq 0, \quad r = \overline{1, N}$, число $\rho > 0$ и построим множества:

$$S(\lambda^{(0)}, \rho) = \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)' \in R^{nN} : \|\lambda_r - \lambda_r^{(0)}\| < \rho, \quad r = \overline{1, N}\},$$

$$S(u^{(0)}[t], R[t]\rho) = \{u[t] = (u_1(t), \ldots, u_N(t))', u[t] \in C([0,T], \widetilde{h}, R^{nN}) :$$

$$\|u_r(t) - u_r^{(0)}(t)\| < R_r(t)\rho, t \in [(r-1)\widetilde{h}, r\widetilde{h}), \quad r = \overline{1, N}\},$$

$$G_1^0(R[t], \rho) = \{(t, x) : \quad t \in [0, T], \quad \|x - \lambda_r^{(0)} - u_r^{(0)}(t)\| < [R_r(t) + 1]\rho,$$

$$t \in [(r-1)\widetilde{h}, r\widetilde{h}), \quad r = \overline{1, N},$$

$$\|x - \lambda_N^{(0)} - \lim_{t \to T-0} u_N^{(0)}(t)\| < [R_N(T) + 1]\rho, \ t = T\},$$

$$G_2^0(R[t], \rho) = \{(\vartheta, \omega) : \|\vartheta - \lambda_1^{(0)} - u_1^{(0)}(0)\| \leq [R_1(0) + 1]\rho,$$

$$\|\omega - \lambda_N^{(0)} - \lim_{t \to T-0} u_N^{(0)}(t)\| \leq [R_N(T) + 1]\rho. \quad \}.$$

Через $U_0(f, g, L(t), L_1, L_2, \widetilde{h})$ обозначим совокупность $(\lambda^{(0)}, u^{(0)}[t], R[t], \rho)$ при которых функции $f(t, x), \ g(v, w)$ соответственно в $G_1^0(R[t], \rho), \ G_2^0(R[t], \rho)$ имеют равномерно непрерывные частные производные $f_x'(t, x), \ g_v'(v, w), \ g_w'(v, w)$ и выполняются неравенства:

$$\|f_x'(t, x)\| \leq L(t), \quad \|g_v'(v, w)\| \leq L_1, \quad \|g_w'(v, w)\| \leq L_2,$$

где непрерывная на $[0, T]$ функция $L(t)$ удовлетворяет соотношениям:

$$e^{\int\limits_t^{(2r-1)h} L(\tau)d\tau} - 1 \leq R_r(t), \quad t \in [(r-1)\widetilde{h}, (2r-1)h), \ r = \overline{1, N},$$

$$e^{\int\limits_{(2r-1)h}^{t} L(\tau)d\tau} - 1 \le R_r(t), \quad t \in [(2r-1)h, r\widetilde{h}), \ r = \overline{1,N},$$

а $L_1, L_2-$ постоянные.

Одним из основных условий применения метода параметризации для нахождения решения нелинейных краевых задач является выбор начального приближения по параметру – $\lambda^{(0)}$. Если неизвестна область принадлежности решения рассматриваемой краевой задачи, то используя начальное условие $u[(r-1)\widetilde{h}] = 0, \ r = \overline{1,N}$, определим компоненты параметра $\lambda^{(0)}$ из системы уравнений (5). Пусть $\lambda^{(0)} \in G_0(f, \widetilde{h})$ решение систем уравнений (5) и $(\lambda^{(0)}, u^{(0)}[t], R[t], \rho) \in U_0(f, g, L(t), L_1, L_2, \widetilde{h})$.

Следующее утверждение устанавливает оценку разности между $\lambda^{(0)}-$ решением (5) и параметром $\lambda^*$, компоненты которого составлены из значений решения задачи (1), (2) в серединах интервалов разбиения отрезка $[0, T]$.

**Теорема 1.** *Если матрица Якоби* $\dfrac{\partial Q_{\nu,\widetilde{h}}(\lambda, u)}{\partial \lambda}$ *обратима при всех* $(\lambda, u) \in S(\lambda^{(0)}, \rho) \times S(u^{(0)}[t], R[t]\rho)$ *и выполняются неравенства 1), 2), 3) теоремы 1 из [7], то имеет место оценка*

$$\|\lambda^* - \lambda^{(0)}\| \le \frac{\gamma_\nu(\widetilde{h})}{1 - q_\nu(\widetilde{h})} \max(1, \widetilde{h} \max(L_1, L_2)) \times$$

$$\times \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t \in [(r-1)\widetilde{h}, r\widetilde{h})} \Big\| \int\limits_{(2r-1)h}^{t} f(\tau, \lambda_r^{(0)}) d\tau \Big\| \times$$

$$\times e^{\left| \int\limits_{(2r-1)h}^{t} L(\tau)d\tau \right|} \frac{1}{\nu!} \Big[ \Big( \int\limits_{(r-1)\widetilde{h}}^{(2r-1)h} L(t)dt \Big)^\nu + \Big( \int\limits_{(2r-1)h}^{r\widetilde{h}} L(t)dt \Big)^\nu \Big]. \tag{6}$$

**Доказательство.** Учитывая структуру оператора $Q_{\nu,\widetilde{h}}(\lambda, u)$ и равенство $Q_{\nu,\widetilde{h}}(\lambda^{(0)}, 0) = 0$, из неравенства а) теоремы 1 из [9] при $k = 0$ получим:

$$\|\lambda^* - \lambda^{(0)}\| \le \frac{\gamma_\nu(\widetilde{h})}{1 - q_\nu(\widetilde{h})} \|Q_{\nu,\widetilde{h}}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\| = \frac{\gamma_\nu(\widetilde{h})}{1 - q_\nu(\widetilde{h})} \|Q_{\nu,\widetilde{h}}(\lambda^{(0)}, u^{(0)}) -$$

$$-Q_{\nu,\widetilde{h}}(\lambda^{(0)}, 0)\| \le \frac{\gamma_\nu(\widetilde{h})}{1 - q_\nu(\widetilde{h})} \Big\{ \max(1, \widetilde{h} L_1) \times$$

$$\times \max_{r=\overline{1,N}} \Big| \int\limits_{(2r-1)h}^{(r-1)\widetilde{h}} L(\tau_1) \ldots \int\limits_{(2r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} L(\tau_\nu) \|u_r^{(0)}(\tau_\nu)\| d\tau_\nu \ldots d\tau_1 \Big| + \max(1, \widetilde{h} L_2) \times$$

$$\times \max_{r=\overline{1,N}} \int\limits_{(2r-1)h}^{r\widetilde{h}} L(\tau_1) \ldots \int\limits_{(2r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} L(\tau_\nu) \|u_r^{(0)}(\tau_\nu)\| d\tau_\nu \ldots d\tau_1 \Big\} \le$$

$$\le \frac{\gamma_\nu(\widetilde{h})}{1 - q_\nu(\widetilde{h})} \max(1, \widetilde{h} \max(L_1, L_2)) \times \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t \in [(r-1)\widetilde{h}, r\widetilde{h})} \|u_r^{(0)}(t)\| \times$$

$$\times \frac{1}{\nu!} \Big[ \Big| \Big( \int\limits_{(r-1)\widetilde{h}}^{(2r-1)h} L(t)dt \Big)^\nu \Big| + \Big( \int\limits_{(2r-1)h}^{r\widetilde{h}} L(t)dt \Big)^\nu \Big]. \tag{7}$$

Используя неравенство Гронуолла-Беллмана [11] оценим $u_r^{(0)}(t)$ :

$$\|u_r^{(0)}(t)\| \le \Big\| \int\limits_{(2r-1)h}^{t} f(\tau, \lambda_r^{(0)}) d\tau \Big\| e^{\left| \int\limits_{(2r-1)h}^{t} L(\tau) d\tau \right|}. \tag{8}$$

Учитывая (8), из (7) получим неравенство (6). Теорема 1 доказана.

Из оценки (6) видно, что начальное приближение по параметру будет тем ближе к точному решению $\lambda^*$, чем меньше шаг разбиения $\widetilde{h} > 0$ или чем больше число подстановок $\nu \in \mathbb{N}$. Начальное приближение по параметру $\lambda^{(0)} \in R^{nN}$ будем искать как решение систем уравнений (5). Система уравнений (3),(4) является сложной нелинейной системой размерности $nN$. Однако эта система полностью определяется по исходным данным задачи и для нахождения его решения $\lambda^{(0)} \in R^{nN}$ можно применить известные методы теории нелинейных систем уравнений. Рассмотрим систему (5) при некоторых $\nu \in \mathbb{N}$, $\widetilde{h} > 0 : 2Nh = T$ :

$$Q_{\nu,\widetilde{h}}(\lambda, 0) = 0, \quad \lambda \in R^{nN}, \tag{9}$$

которая в векторно координатной форме имеет вид:

$$\widetilde{h} g\Bigg[\lambda_1 + \int\limits_{h}^{0} f(\tau_1, \lambda_1 + \ldots + \int\limits_{h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_1) d\tau_\nu \ldots) d\tau_1,$$

$$\lambda_N + \int\limits_{(2N-1)h}^{N\widetilde{h}} f(\tau_1, \lambda_N + \ldots + \int\limits_{(2N-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_N) d\tau_\nu \ldots) d\tau_1\Bigg] = 0, \tag{10}$$

$$\lambda_s + \int\limits_{(2s-1)h}^{s\widetilde{h}} f(\tau_1, \lambda_s + \ldots + \int\limits_{(2s-1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_s) d\tau_\nu \ldots) d\tau_1 -$$

$$-\lambda_{s+1} - \int\limits_{(2s+1)h}^{s\widetilde{h}} f(\tau_1, \lambda_{s+1} + \ldots + \int\limits_{(2s+1)h}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_{s+1}) d\tau_\nu \ldots) d\tau_1] = 0. \tag{11}$$

Пусть $\widetilde{\lambda}_{\nu,\widetilde{h}} = (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, ..., \widetilde{\lambda}_N)$ – решение системы (9). Далее рассмотрим систему (9) при некотором $\nu \in \mathbb{N}, \widehat{h} = \frac{\widetilde{h}}{2}$, которая записывается в виде систем уравнений размерности $2nN$ :

$$\widehat{h} g\Bigg[\lambda_1 + \int\limits_{\frac{\widehat{h}}{2}}^{0} f(\tau_1, \lambda_1 + \ldots + \int\limits_{\frac{\widehat{h}}{2}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_1) d\tau_\nu \ldots) d\tau_1,$$

$$\lambda_{2N} + \int\limits_{(4N-1)\frac{\widehat{h}}{2}}^{T} f(\tau_1, \lambda_{2N} + \ldots + \int\limits_{(4N-1)\frac{\widehat{h}}{2}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_{2N}) d\tau_\nu \ldots) d\tau_1\Bigg] = 0, \tag{12}$$

$$\lambda_s + \int\limits_{(2s-1)\frac{\widehat{h}}{2}}^{s\widehat{h}} f(\tau_1, \lambda_s + \ldots + \int\limits_{(2s-1)\frac{\widehat{h}}{2}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_s) d\tau_\nu \ldots) d\tau_1 -$$

$$-\lambda_{s+1} - \int\limits_{(2s+1)\frac{\widehat{h}}{2}}^{s\widehat{h}} f(\tau_1, \lambda_{s+1} + \ldots + \int\limits_{(2s+1)\frac{\widehat{h}}{2}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_{s+1}) d\tau_\nu \ldots) d\tau_1] = 0, \quad s = \overline{1, 2N-1}, \tag{13}$$

т.е.

$$Q_{\nu,\widehat{h}}(\lambda, 0) = 0, \quad \lambda \in R^{2nN}. \tag{14}$$

Начальное приближение $\widehat{\lambda}_{\nu,\widehat{h}} = (\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2, ..., \widehat{\lambda}_{2N})$ системы нелинейных уравнений (14) определим следующим образом:

$$\widehat{\lambda}_1 = \widetilde{\lambda}_1 + \int\limits_{\widehat{h}}^{\frac{\widehat{h}}{2}} f(\tau_1, \widetilde{\lambda}_1 + \ldots + \int\limits_{\widehat{h}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \widetilde{\lambda}_1) d\tau_\nu \ldots) d\tau_1,$$

$$\widehat{\lambda}_2 = \widetilde{\lambda}_1 + \int\limits_{\widehat{h}}^{\frac{3\widehat{h}}{2}} f(\tau_1, \widetilde{\lambda}_1 + \ldots + \int\limits_{\widehat{h}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \widetilde{\lambda}_1) d\tau_\nu \ldots) d\tau_1,$$

$$\widehat{\lambda}_3 = \widetilde{\lambda}_2 + \int\limits_{3\widehat{h}}^{\frac{5\widehat{h}}{2}} f(\tau_1, \widetilde{\lambda}_2 + \ldots + \int\limits_{3\widehat{h}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \widetilde{\lambda}_2) d\tau_\nu \ldots) d\tau_1,$$

$$\widehat{\lambda}_4 = \widetilde{\lambda}_2 + \int\limits_{3\widehat{h}}^{\frac{7\widehat{h}}{2}} f(\tau_1, \widetilde{\lambda}_2 + \ldots + \int\limits_{3\widehat{h}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \widetilde{\lambda}_2) d\tau_\nu \ldots) d\tau_1,$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\widehat{\lambda}_{2s-1} = \widetilde{\lambda}_s + \int\limits_{(2s-1)\widehat{h}}^{\frac{(4s-3)\widehat{h}}{2}} f(\tau_1, \widetilde{\lambda}_s + \ldots + \int\limits_{(2s-1)\widehat{h}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \widetilde{\lambda}_s) d\tau_\nu \ldots) d\tau_1, \tag{15}$$

$$\widehat{\lambda}_{2s} = \widetilde{\lambda}_s + \int\limits_{(2s-1)\widehat{h}}^{\frac{(4s-1)\widehat{h}}{2}} f(\tau_1, \widetilde{\lambda}_s + \ldots + \int\limits_{(2s-1)\widehat{h}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \widetilde{\lambda}_s) d\tau_\nu \ldots) d\tau_1, \quad s = \overline{1, N}. \tag{16}$$

Взяв $\widehat{\lambda}_{\nu,\widehat{h}}$, число $\rho_1 > 0$, построим множества:

$$S(\widehat{\lambda}_{\nu,\widehat{h}}, \rho_1) = \big\{(\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2, ..., \widehat{\lambda}_{2N})' \in R^{2nN} : \|\lambda_r - \widehat{\lambda}_r\| < \rho_1, \quad r = \overline{1, 2N}\big\},$$

$$G_1^0(\widehat{\lambda}_{\nu,\widehat{h}}, \rho_1) = \big\{(t, x) : \quad t \in [0, T], \quad \|x - \widehat{\lambda}_s\| < \rho_1, t \in [(s-1)\widehat{h}, s\widehat{h}), \quad s = \overline{1, 2N},$$

$$G_2^0(\widehat{\lambda}_{\nu,\widehat{h}}, \rho_1) = \big\{\, (\vartheta, \omega) : \|\vartheta - \widehat{\lambda}_1\| \le \rho_1, \|\omega - \widehat{\lambda}_{2N} - \| \le \rho_1 \quad \big\}.$$

**Теорема 2.** Пусть $\widetilde{\lambda}_{\nu,\widetilde{h}}$ – решение системы (9) и функции $f(t, x), g(v, w)$ соответственно в $G_1(\widehat{\lambda}_{\nu,\widehat{h}}, \rho_1), G_2(\widehat{\lambda}_{\nu,\widehat{h}}, \rho_1)$ имеет равномерно непрерывные частные производные $f'_x(t, x),\ g'_v(v, w)$, $g'_w(v, w)$, матрица Якоби $\dfrac{\partial Q_{\nu,\widehat{h}}(\lambda,\, 0)}{\partial \lambda}$ обратима для всех $\lambda \in S(\widehat{\lambda}_{\nu,\widehat{h}}, \rho_1)$ и выполнены следующие неравенства:

1) $\left\|\left[\dfrac{\partial Q_{\nu,\widehat{h}}(\lambda,0)}{\partial\lambda}\right]^{-1}\right\| \leq \gamma_\nu(\widehat{h})$, 2) $\gamma_\nu(\widehat{h})\|Q_{\nu,\widehat{h}}(\widehat{\lambda}_{\nu,\widehat{h}},0)\| < \rho_1$.

Тогда существует $\lambda_{\nu,\widehat{h}} \in S(\widehat{\lambda}_{\nu,\widehat{h}},\rho_1)$ – изолированное решение уравнения (14), для которого справедливы оценки:

$$\|\lambda_{\nu,\widehat{h}} - \widehat{\lambda}_{\nu,\widehat{h}}\| \leq \gamma_\nu(\widehat{h})\max\big(1,\widehat{h}\max(L_1,L_2)\big)\frac{\widehat{h}}{2}M\cdot\frac{1}{(\nu-1)!}\times$$

$$\times\max_{s=\overline{1,2N}}\Big\{\Big|\int\limits_{(2s-1)\frac{\widehat{h}}{2}}^{(s-1)\widehat{h}} L(t)dt\Big|^{\nu-1} + \Big(\int\limits_{(2s-1)\frac{\widehat{h}}{2}}^{s\widehat{h}} L(t)dt\Big)^{\nu-1}\Big\}, \tag{17}$$

где $\quad M = \max\limits_{j=1,N}\max\limits_{r=\overline{1,2N}}\sup\limits_{t\in[(r-1)\widetilde{h},r\widetilde{h})}\|f(t,\lambda_j)\|.$

**Доказательство.** Так как оператор $Q_{\nu,\widehat{h}}(\lambda,0)$ в $S(\widehat{\lambda}_{\nu,\widehat{h}},\rho_1)$ удовлетворяет всем предположениям теоремы 1 из [9], то существует число $\alpha\geq 1$ такое, что последовательность $\big\{\lambda^{(m)}_{\nu,\widehat{h}}\big\}$, $m=0,1,2,\ldots$, определяемая итерационным процессом: $\lambda^{(0)}_{\nu,\widehat{h}} = \widehat{\lambda}_{\nu,\widehat{h}}$,

$$\lambda^{(m+1)}_{\nu,\widehat{h}} = \lambda^{(m)}_{\nu,\widehat{h}} - \frac{1}{\alpha}\Big[\frac{\partial Q_{\nu,\widehat{h}}(\lambda^{(m)}_{\nu,\widehat{h}},0)}{\partial\lambda}\Big]^{-1}\cdot Q_{\nu,\widehat{h}}(\lambda^{(m)}_{\nu,\widehat{h}},0),$$

сходится к $\lambda_{\nu,\widehat{h}}$ – изолированному решению систем уравнений (14) в $S(\widehat{\lambda}_{\nu,\widehat{h}},\rho_1)$ и имеет место неравенство:

$$\|\lambda_{\nu,\widehat{h}} - \widehat{\lambda}_{\nu,\widehat{h}}\| \leq \gamma_\nu(\widehat{h})\|Q_{\nu,\widehat{h}}(\lambda,0)\|. \tag{18}$$

Учитывая, что $Q_{\nu,\widetilde{h}}(\lambda,0)=0$ оценим норму оператора $Q_{\nu,\widehat{h}}(\lambda,0)$ :

$$\|Q_{\nu,\widehat{h}}(\lambda,0)\| \leq \max\Bigg\{\widehat{h}\Bigg\|g\Bigg[\widehat{\lambda}_1 + \int\limits_{\frac{\widehat{h}}{2}}^{0} f(\tau_1,\widehat{\lambda}_1+\ldots+\int\limits_{\frac{\widehat{h}}{2}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu,\widehat{\lambda}_1)d\tau_\nu\ldots)d\tau_1,$$

$$\widehat{\lambda}_{2N} + \int\limits_{(4N-1)\frac{\widehat{h}}{2}}^{T} f(\tau_1,\widehat{\lambda}_{2N}+\ldots+\int\limits_{(4N-1)\frac{\widehat{h}}{2}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu,\widehat{\lambda}_{2N})d\tau_\nu\ldots)d\tau_1\Bigg]-$$

$$-g\Bigg[\widetilde{\lambda}_1 + \int\limits_{\widehat{h}}^{0} f(\tau_1,\widetilde{\lambda}_1+\ldots+\int\limits_{\widehat{h}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu,\widetilde{\lambda}_1)d\tau_\nu\ldots)d\tau_1,$$

$$\widetilde{\lambda}_N + \int\limits_{(2N-1)\widehat{h}}^{T} f(\tau_1,\widetilde{\lambda}_N+\ldots+\int\limits_{(2N-1)\widehat{h}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu,\widetilde{\lambda}_N)d\tau_\nu\ldots)d\tau_1\Bigg]\Bigg\|,$$

$$\max_{s=\overline{1,2N-1}}\Bigg\|\widehat{\lambda}_s + \int\limits_{(2s-1)\frac{\widehat{h}}{2}}^{s\widehat{h}} f(\tau_1,\widehat{\lambda}_s+\ldots+\int\limits_{(2s-1)\frac{\widehat{h}}{2}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu,\widehat{\lambda}_s)d\tau_\nu\ldots)d\tau_1-$$

$$-\widehat{\lambda}_{s+1} - \int\limits_{(2s+1)\frac{\widehat{h}}{2}}^{s\widehat{h}} f(\tau_1, \widehat{\lambda}_{s+1} + \ldots + \int\limits_{(2s+1)\frac{\widehat{h}}{2}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \widehat{\lambda}_{s+1}) d\tau_\nu \ldots) d\tau_1] -$$

$$-\widetilde{\lambda}_s - \int\limits_{(2s-1)\widehat{h}}^{s\widetilde{h}} f(\tau_1, \widetilde{\lambda}_s + \ldots + \int\limits_{(2s-1)\widehat{h}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_s) d\tau_\nu \ldots) d\tau_1 +$$

$$+\widetilde{\lambda}_{s+1} + \int\limits_{(2s+1)\widehat{h}}^{s\widetilde{h}} f(\tau_1, \widetilde{\lambda}_{s+1} + \ldots + \int\limits_{(2s+1)\widehat{h}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \widetilde{\lambda}_{s+1}) d\tau_\nu \ldots) d\tau_1] \Big\| \Big\} \leq$$

$$\leq \max\big(1, \widehat{h}\max(L_1, L_2)\big) \frac{\widehat{h}}{2} M \cdot \frac{1}{(\nu-1)!} \times$$

$$\times \max_{s=\overline{1,2N}} \Big\{ \Big| \int\limits_{(2s-1)\frac{\widehat{h}}{2}}^{(s-1)\widehat{h}} L(t)dt \Big|^{\nu-1} + \Big( \int\limits_{(2s-1)\frac{\widehat{h}}{2}}^{s\widehat{h}} L(t)dt \Big)^{\nu-1} \Big\}, \tag{19}$$

где $\qquad M = \max\limits_{j=\overline{1,N}} \max\limits_{r=\overline{1,2N}} \sup\limits_{t \in [(r-1)\widehat{h}, r\widehat{h})} \|f(t, \widehat{\lambda}_j)\|.$

Подставляя в (18) правую часть (19), получим справедливость оценки (17). Из полученной оценки видно, что норма разности $\lambda_{\nu,\widehat{h}} - \widehat{\lambda}_{\nu,\widehat{h}}$ при увеличении числа разбиений $N$ становится малой величиной. Здесь мы осуществили продвижение по шагу $2h$ исходя из решения систем уравнений (9) при некоторых $\nu, \widetilde{h}$. Теперь осуществим продвижение по $\nu$. Пусть $\widetilde{\lambda}_{\nu,\widetilde{h}} \in R^{nN}$ решения систем уравнений (10),(11). Рассмотрим при некоторых $\nu+1, \widetilde{h}$ систему нелинейных уравнений относительно неизвестных параметров $\lambda$ :

$$Q_{\nu+1,\widetilde{h}}(\lambda, 0) = 0, \quad \lambda \in R^{nN}. \tag{20}$$

Для определения решения уравнений воспользуемся снова теоремой 1 из [9]. В качестве начального приближения возьмем вектор $\widetilde{\lambda}_{\nu,\widetilde{h}} \in R^{nN}$ – решение уравнения (9). Взяв $\widetilde{\lambda}_{\nu,\widetilde{h}}$, число $\rho_2 > 0$, построим множества:

$$S(\widetilde{\lambda}_{\nu,\widetilde{h}}, \rho_2) = \big\{ (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, ..., \widetilde{\lambda}_N)' \in R^{nN} : \|\lambda_r - \widetilde{\lambda}_r\| < \rho_2, \quad r = \overline{1,N} \big\},$$

$$G_1^0(\widetilde{\lambda}_{\nu,\widetilde{h}}, \rho_2) = \big\{ (t,x) : \quad t \in [0,T], \quad \|x - \widetilde{\lambda}_s\| < \rho_2, t \in [(s-1)h, sh), \quad s = \overline{1,N},$$

$$G_2^0(\widetilde{\lambda}_{\nu,\widetilde{h}}, \rho_2) = \big\{ \, (\vartheta, \omega) : \|\vartheta - \widetilde{\lambda}_1\| \leq \rho_2, \|\omega - \widetilde{\lambda}_N\| \leq \rho_2 \quad \big\}.$$

**Теорема 3.** Пусть $\widetilde{\lambda}_{\nu,\widetilde{h}}$ – решение системы (9) и функции $f(t,x), g(v,w)$ соответственно в $G_1(\widetilde{\lambda}_{\nu,\widetilde{h}}, \rho_2), G_2(\widetilde{\lambda}_{\nu,\widetilde{h}}, \rho_2)$ имеют равномерно непрерывные частные производные $f'_x(t,x)$, $g'_v(v,w)$, $g'_w(v,w)$, матрица Якоби $\dfrac{\partial Q_{\nu+1,\widetilde{h}}(\lambda,\, 0)}{\partial \lambda}$ обратима для всех $\lambda \in S(\widetilde{\lambda}_{\nu,\widetilde{h}}, \rho_2)$ и выполнены следующие неравенства:

1) $\Big\| \Big[ \dfrac{\partial Q_{\nu+1,\widetilde{h}}(\lambda,\, 0)}{\partial \lambda} \Big]^{-1} \Big\| \leq \gamma_{\nu+1}(\widetilde{h}),$ $\quad$ 2) $\gamma_{\nu+1}(\widetilde{h}) \|Q_{\nu+1,\widetilde{h}}(\widetilde{\lambda}_{\nu+1,\widetilde{h}}, 0)\| < \rho_2.$

Тогда существует $\lambda_{\nu+1,\widetilde{h}} \in S(\widetilde{\lambda}_{\nu,\widetilde{h}}, \rho_2)$ – изолированное решение уравнения (20), для которого справедливы оценки:

$$\|\lambda_{\nu+1,\widetilde{h}} - \widetilde{\lambda}_{\nu,\widetilde{h}}\| \leq \gamma_\nu(\widetilde{h}) \max\big(1, \widetilde{h}\max(L_1, L_2)\big) \frac{\widetilde{h}}{2} M \cdot \frac{1}{\nu!} \times$$

$$\times \max_{s=\overline{1,N}}\Big\{\Big|\int\limits_{(2s-1)\frac{\widetilde{h}}{2}}^{(s-1)\widetilde{h}} L(t)dt\Big|^{\nu}+\Big(\int\limits_{(2s-1)\frac{\widetilde{h}}{2}}^{s\widetilde{h}} L(t)dt\Big)^{\nu}\Big\}, \tag{21}$$

где $$M=\max_{j=\overline{1,N}}\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)\widetilde{h},r\widetilde{h})}\|f(t,\widetilde{\lambda}_j)\|.$$

**Доказательство.** Так как оператор $Q_{\nu+1,\widetilde{h}}(\lambda,0)$ в $S(\widetilde{\lambda}_{\nu,\widetilde{h}},\rho_2)$ удовлетворяет всем предположениям теоремы 1 из [11], то существует число $\alpha\geq 1$ такое, что последовательность $\Big\{\lambda^{(m)}_{\nu+1,\widetilde{h}}\Big\}$, $m=0,1,2,\ldots$, определяемая итерационным процессом $\lambda^{(0)}_{\nu+1,\widetilde{h}}=\widetilde{\lambda}_{\nu,\widetilde{h}}$,

$$\lambda^{(m+1)}_{\nu+1,\widetilde{h}}=\lambda^{(m)}_{\nu+1,\widetilde{h}}-\frac{1}{\alpha}\Big[\frac{\partial Q_{\nu+1,\widetilde{h}}(\lambda^{(m)}_{\nu+1,\widetilde{h}},\,0)}{\partial\lambda}\Big]^{-1}\cdot Q_{\nu+1,\widetilde{h}}(\lambda^{(m)}_{\nu+1,\widetilde{h}},\,0),$$

сходится к $\lambda_{\nu+1,\widetilde{h}}$ – изолированному решению систем уравнений (20) в $S(\widetilde{\lambda}_{\nu,\widetilde{h}},\rho_2)$ и имеет место неравенство:

$$\|\lambda_{\nu+1,\widetilde{h}}-\widetilde{\lambda}_{\nu,\widetilde{h}}\|\leq\gamma_{\nu+1}(\widetilde{h})\|Q_{\nu+1,\widetilde{h}}(\lambda,\,0)\|. \tag{22}$$

Учитывая, что $Q_{\nu,\widetilde{h}}(\lambda,\,0)=0$, оценим норму оператора $Q_{\nu+1,\widetilde{h}}(\lambda,\,0)$ :

$$\|Q_{\nu+1,\widetilde{h}}(\lambda,\,0)\|=\|Q_{\nu+1,\widetilde{h}}(\lambda,\,0)-Q_{\nu,\widetilde{h}}(\lambda,\,0)\|\leq$$

$$\leq\max\big(1,\widetilde{h}\max(L_1,L_2)\big)\frac{\widetilde{h}}{2}M\cdot\frac{1}{\nu!}\times$$

$$\times \max_{s=\overline{1,N}}\Big\{\Big|\int\limits_{(2s-1)\frac{\widetilde{h}}{2}}^{(s-1)\widetilde{h}} L(t)dt\Big|^{\nu}+\Big(\int\limits_{(2s-1)\frac{\widetilde{h}}{2}}^{s\widetilde{h}} L(t)dt\Big)^{\nu}\Big\}, \tag{23}$$

где $M=\max\limits_{j=\overline{1,N}}\max\limits_{r=\overline{1,N}}\sup\limits_{t\in[(r-1)\widetilde{h},r\widetilde{h})}\|f(t,\widetilde{\lambda}_j)\|$.

Подставляя в (22) неравенство (23), получим справедливость оценки (21). Таким образом, введение дополнительных параметров позволяет проблему выбора начального приближения для нелинейной двухточечной краевой задачи (1), (2) свести к нахождению $\lambda^{(0)}\in R^{nN}$ – решения системы уравнений (9). Продвижение по числу подстановок $\nu\in\mathbb{N}$ и по шагу $h>0:2Nh=T$ осуществляется на основе итерационных процессов, где в качестве начального приближения берется решение уравнения (9) при предыдущих параметров $\nu$ и $\widetilde{h}$.

## Цитированная литература


1. **Абрамов А.А., Андреев В.Б.** //Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1963. Т. 3, №2. С. 377–381.

2. **Шаманский В.Е.** Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. Ч.1. Киев, 1963.

3. **Keller H. B.** Numerical methods for two-point boundary-value problems. Blaisdell, 1968.

4. **Roberts S.M.,Shiptan J.S.** Two-point boundary-value problems:Shooting methods. N.Y., 1972.

5. **Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений** Под ред. Холла Дж.,Уатта Дж. М., 1979.

6. **Монастырный П. И.** //Ж.вычисл. матем.и матем.физ. 1978. Т. 18, № 6. С. 1139–1145.

7. **Кигурадзе И.Т.** Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. "Современные проблемы математики. Новейшие достижения Т.30. (Итоги науки и техн.ВИНИТИ АН СССР) М.,1987.

8. **Самойленко А.М., Ронто Н.И.** Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. Киев, 1986.

9. **Джумабаев Д.С., Темешева С.М.** //Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47, № 1. С. 39–63.

10. **Темешева С. М.** // Матем. журнал. 2004. Т. 4, № 1. С. 73–83.

11. **Назарова К. Ж.** // Матем. журнал. 2004. Т. 4, № 4. С. 58–67.

*Поступила в редакцию 09.09.2010г.*

Математический журнал. *Алматы. 2010. Том 10. № 3 (37) . С. 101—106*

*УДК 521.35*

# НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕУГОЛЬНЫХ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ФОТОГРАВИТАЦИОННОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

А. Т. Турешбаев

Кызылординский государственный университет им. Коркыт Ата
120014 Кызылорда Айтеке Би, 29А aturesh@mail.ru

Рассматривается фотогравитационная ограниченная задача трех тел, в которой оба основных гравитирующих тела являются источниками излучения световой энергии.

Проведен нелинейный анализ устойчивости трехпараметрического семейства треугольных точек либрации (лагранжевых решений) в пространстве параметров системы с учетом резонансных режимов 3-го и 4-го порядков.

В связи с возросшим интересом к исследованию космического пространства в последние десятилетия особое внимание ученых было уделено изучению прикладных задач небесной механики и космодинамики, среди которых центральное место занимает фотогравитационная задача трех тел, которая является простейшей динамической моделью, адекватно описывающей поведение частиц в поле двух гравитирующих и одновременно излучающих тел.

Подавляющее большинство работ [1–4], посвященных исследованию фотогравитационной задачи трех тел, было проведено лишь на основе анализа уравнений в вариациях. Однако из устойчивости линеаризованной системы никаких окончательных выводов относительно поведения исходной системы сделать нельзя. В работе [5] проведено нелинейное исследование устойчивости треугольных точек либрации лишь для некоторых частных значений параметров системы. В настоящей работе впервые проводится полный нелинейный анализ устойчивости трехпараметрического семейства треугольных точек либрации в плоской круговой задаче.

Движение частицы $P(x, y, z)$ пренебреженно малой массы будем изучать в поле двух гравитирующих и одновременно излучающих тел $S_1$ и $S_2$, считаемых материальными точками, и обращающихся друг относительно друга по кеплеровой орбите. Начало $O$ прямоугольной системы координат $Oxyz$ поместим в центр масс основных тел; ось $Ox$ направим вдоль прямой, соединяющей основные тела, а ось $Oz$ – перпендикулярно плоскости их орбитального движения в сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки. При этом для удобства выберем следующие единицы измерения: сумму масс основных тел $S_1$ и $S_2$

Keywords: *A photogravitational problem of three bodies, triangular points libration, stability on Lyapunov, the nonlinear analysis, the particle movement, the limited circular problem*

2010 Mathematics Subject Classification: 70F07

примем за единицу массы, расстояние между ними – за единицу длины, отношение $T/2\pi$ – за единицу времени (где $T$ – период обращения основных тел). Тогда движение частицы задается каноническими уравнениями:

$$\frac{d\overline{q}_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \overline{p}_i}, \ \ \frac{d\overline{p}_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \overline{q}_i}, \ \ (i = 1, 2, 3), \tag{1}$$

где $\overline{q}_i$ суть декартовы координаты частицы $P(x, y, z)$, $\overline{p}_i$ – соответствующие канонические импульсы, а $H(x, y, z, \overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{p}_3)$ – аналитическая функция Гамильтона относительно координат и импульсов, которая в нашем случае имеет вид:

$$H = \frac{1}{2}(\overline{p}_1^2 + \overline{p}_2^2 + \overline{p}_3^2) + (\overline{p}_1 y - \overline{p}_2 x) - Q_1(1-\mu)/R_1 - Q_2\mu/R_2,$$

$$R_\alpha = \sqrt{(x - x_\alpha)^2 + y^2 + z^2}, \ \ (\alpha = 1, 2). \tag{2}$$

Здесь $Q_1$ и $Q_2$ – коэффициенты редукции масс основных тел, которые для треугольных точек могут принимать только положительные значения [1], зависящие от интенсивности их излучения и парусности изучаемой частицы, характеризуемой отношением площади поперечного сечения к ее массе. Как и в классической, дифференциальные уравнения (1) задачи не имеют общего решения. Однако известны частные решения, отвечающие положениям относительного равновесия. Если классическая задача допускает пять точных частных решений, то в фотогравитационной задаче существуют трехпараметрические семейства девяти частных решений, три из них (коллинеарные точки либрации) расположены на оси $Ox$, два (треугольные точки либрации) – в орбитальной плоскости, а четыре (компланарные точки либрации) – вне плоскости орбитального движения основных тел.

Исследуем устойчивость треугольных точек либрации в предположении, что орбита основных тел круговая, а тело $P$ бесконечно малой массы в начальный момент времени испытывает только возмущения, не выводящие его из плоскости вращения основных тел $S_1$ и $S_2$.

В уравнения (1) вводим возмущения по формулам:

$$x = x^* + q_1, \ y = y^* + q_2, \ \overline{p}_1 = \overline{p}_1^* + p_1, \ \overline{p}_2 = \overline{p}_2^* + p_2, \ q_3 = p_3 = z_0^* = \overline{p}_3^* = 0, \tag{3}$$

где

$$x^* = 0,5(Q_1^{2/3} - Q_2^{2/3} - 1) - \mu, \ \ y^* = \pm 0,5\sqrt{2(Q_1^{2/3} + Q_2^{2/3}) - (Q_1^{2/3} - Q_2^{2/3}) - 1},$$

$$\overline{p}_1^* = \mp 0,5\sqrt{2(Q_1^{2/3} + Q_2^{2/3}) - (Q_1^{2/3} - Q_2^{2/3}) - 1}, \ \overline{p}_2^* = 0,5(Q_1^{2/3} - Q_2^{2/3} + 1) - \mu, \tag{4}$$

и раскладывая гамильтониан в ряд по степеням возмущений $q_i$ и $p_i$ в окрестности рассматриваемой точки, принимаемой за начало координат, получим:

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \ldots . \tag{5}$$

Здесь $H_m$ – однородные полиномы степени $m$ $(m = 2, 3, 4, ...)$ относительно обобщенных координат $q_i$ и импульсов $p_i$, так что

$$H_m = \sum_{\nu + l = m} h_{\nu_1\,\nu_2\,l_1\,l_2} q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} p_1^{l_1} p_2^{l_2}. \tag{6}$$

Тогда в выражении (5) формы $H_2, H_3$ и $H_4$ с учетом (3) и (4) примут следующий вид:

$$H_2 = \frac{1}{2}(\overline{p}_1^2 + \overline{p}_2^2) + p_1 q_2 - p_2 q_1 + h_{200} q_1^2 + h_{020} q_2^2 + h_{110} q_1 q_2, \tag{7}$$

$$H_3 = h_{300}q_1^3 + h_{030}q_2^3 + h_{210}q_1^2 q_2 + h_{120}q_1 q_2^2, \tag{8}$$

$$H_4 = h_{400}q_1^4 + h_{040}q_2^4 + h_{004}q_3^4 + h_{310}q_1^3 q_2 + h_{130}q_1 q_2^3 + h_{220}q_1^2 q_2^2. \tag{9}$$

где

$$h_{20} = -\frac{1}{2}[\frac{3}{4}(1-\mu)\frac{Q_{11}^2}{Q_1^{2/3}} + \frac{3}{4}\mu\frac{Q_{22}^2}{Q_2^{2/3}} - 1],$$

$$h_{11} = -\frac{3}{4}\sqrt{Q_{12}}[(1-\mu)\frac{Q_{11}}{Q_1^{2/3}} - \mu\frac{Q_{22}}{Q_{12}^{2/3}}],$$

$$h_{02} = -\frac{1}{2}[\frac{3}{4}(1-\mu)\frac{Q_{12}}{Q_1^{2/3}} + \frac{3}{4}\mu\frac{Q_{12}}{Q_2^{2/3}} - 1],$$

$$h_{30} = \frac{1}{16}[(1-\mu)(5Q_{11}^2 - 12Q_1^{2/3})\frac{Q_{11}}{Q_1^{4/3}} + \mu(5Q_{22}^2 - 12Q_2^{2/3})\frac{Q_{22}^2}{Q_2^{4/3}}],$$

$$h_{21} = -\frac{1}{16}\sqrt{Q_{12}}[(1-\mu)(Q_1^{2/3} - \frac{5}{4}Q_{11}^2)/Q_1^{4/3} + \mu(Q_2^{2/3} - \frac{5}{4}Q_{22}^2)/Q_2^{4/3}],$$

$$h_{12} = -\frac{5}{8}[(1-\mu)(0,8Q_1^{2/3} - Q_{12})\frac{Q_{11}}{Q_1^{4/3}} - \mu(0,8Q_2^{2/3} - Q_{12})\frac{Q_{22}}{Q_2^{4/3}}], \tag{10}$$

$$h_{03} = -\frac{5}{16}\sqrt{Q_{12}}[(1-\mu)(2,4Q_1^{2/3} - Q_{12})/Q_1^{4/3} + \mu(2,4Q_1^{2/3} - Q_{12})/Q_2^{4/3}],$$

$$h_{40} = -\frac{1}{8}[(1-\mu)(3Q_1^{4/3} - 7,5Q_1^{4/3}Q_{11}^2 + 35Q_{11}^4/16)/Q_1^2 + \mu(3Q_2^{4/3} - 7,5Q_2^{2/3}Q_{22}^2 + 35Q_{22}^4/16)/Q_2^2],$$

$$h_{31} = -\frac{5}{16}\sqrt{Q_{12}}[(1-\mu)Q_{11}(1,75Q_{11}^2 - 3Q_1^{2/3})/Q_1^2 + \mu Q_{22}(1,75Q_{22}^2 - 3Q_2^{2/3})/Q_2^2],$$

$$h_{22} = -\frac{5}{16}[(1-\mu)(0,8Q_1^{4/3} - Q_1^{2/3}Q_{12} - Q_{11}^2(Q_1^{2/3} - 1,75Q_{12}))/Q_1^2 +$$
$$+\mu(0,8Q_2^{2/3} - Q_2^{2/3}Q_{12} - Q_{22}^2(Q_2^{2/3} - 1,75Q_{12}))/Q_2^2],$$

$$h_{13} = -\frac{5}{16}\sqrt{Q_{12}}[(1-\mu)Q_{11}(1,75Q_{12} - 3Q_1^{2/3})/Q_1^2 - \mu Q_{22}(1,75Q_{12} - 3Q_2^{2/3})/Q_2^2],$$

$$h_{04} = -\frac{5}{32}[(1-\mu)(2,4Q_1^{4/3} - 6Q_1^{2/3}Q_{12} + 1,75Q_{12}^2)/Q_1^2 + \mu(2,4Q_2^{4/3} - 6Q_2^{2/3}Q_{12} + 1,75Q_{12}^2)/Q_2^2],$$

$$Q_{12} = 2(Q_1^{2/3} + Q_2^{2/3}) - (Q_1^{2/3} - Q_2^{2/3})^2 - 1,\ Q_{11} = 1 + Q_1^{2/3} - Q_2^{2/3},\ Q_{22} = 1 - Q_1^{2/3} + Q_2^{2/3}.$$

Рассмотрим случай, когда $H_2$ не является знакоопределенной функцией, а характеристическое уравнение системы не имеет корней с ненулевой вещественной частью (в противном случае тривиальное решение системы неустойчиво по Ляпунову). Как видно из (4), $H_2$ не является знакоопределенной функцией, и следовательно, из устойчивости линейной системы не следует устойчивость полной системы. Полагая, что в системе отсутствуют резонансы 3-го и 4-го порядков, после применения преобразования Биркгофа и ограничиваясь разложением до четвертого порядка включительно, функцию Гамильтона можно записать в виде:

$$H^* = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1 r_2 + c_{02}r_2^2,\ 2r_i = q_i^2 + p_i^2\ (i = 1,2). \tag{11}$$

Согласно теореме Арнольда-Мозера [6] при одновременном выполнении условий:

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \neq 0, \tag{12}$$

$$C(\omega_1, \omega_2) = c_{20}\omega_2^2 + c_{11}\omega_1\omega_2 + c_{02}\omega_1^2 \neq 0, \tag{13}$$

где $k_1, k_2$ – целые числа, удовлетворяющие условию $0 < |k_1| + |k_2| \leq 4$ $(k = |k_1| + |k_2|$ – порядок резонанса), а $c_{ij}$ – коэффициенты нормальной формы, зависящие от частот $\omega_1$ и $\omega_2$ линейной системы, для всех значений массового параметра $\mu$ из области устойчивости линейной системы всюду сохраняется устойчивость по Ляпунову исходной системы (1). Исключение составляют множества точек, отвечающие резонансам 3-го и 4-го порядков, которые определяются выражениями

$$\mu_1 = \frac{1}{2}[1 - \frac{\sqrt{\frac{225Q_{12}}{4Q_1^{2/3}Q_2^{2/3}} - 16}}{\frac{\sqrt{Q_{12}}}{2\sqrt[3]{Q_1}\sqrt[3]{Q_2}}}], \tag{14}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2}[1 - \frac{\sqrt{\frac{25Q_{12}}{4Q_1^{2/3}Q_2^{2/3}} - 1}}{\frac{5\sqrt{Q_{12}}}{2\sqrt[3]{Q_1}\sqrt[3]{Q_2}}}]. \tag{15}$$

При резонансе нормализованный гамильтониан примет вид:

$$H = 2\omega_2 r_1 - \omega_2 r_2 + A(\omega_1, \omega_2) r_2 \sqrt{r_1} sin(\varphi_1 + 2\varphi_2) + O((r_1 + r_2)^2), \tag{16}$$

где $A(\omega_1, \omega_2) = -\sqrt{\omega_2(x_{1002}^2 + y_{1002}^2)}$.

В обобщенной фотогравитационной ограниченной плоской задаче трех тел выражение имеет вид:

$$A(\omega_1, \omega_2) = -[\omega_2 \frac{25}{64}((1-\mu)(0,8Q_1^{2/3} - Q_{12})Q_{11}/Q_1^{4/3} - \mu(0,8Q_2^{2/3} - Q_{12})Q_{22}/Q_2^{4/3})^2]^{1/2}, \tag{17}$$

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}[1 - \sqrt{\frac{36\mu(1-\mu)[2(Q_1^{2/3} + Q_2^{2/3}) - (Q_{11} - 1)^2 - 1]}{4Q_1^{2/3}Q_2^{2/3}}}]^{1/2},$$

которое при положительных значениях $Q_1$ и $Q_2$ нигде не обращается в нуль. Откуда следует, что в ограниченной фотогравитационной задаче трех тел в области устойчивости линейной системы треугольные точки либрации всюду устойчивы по Ляпунову, за исключением множества точек, определяемого соотношением (12), для которых реализуется резонанс третьего порядка.

При наличии в системе резонанса четвертого порядка $\omega_1 = 3\omega_2$ с помощью преобразования Биркгофа в исходном гамильтониане уничтожим члены третьей степени. Нормализованный при этом гамильтониан в полярных координатах примет следующий вид:

$$H^* = 3\omega_2 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + B(\omega_1, \omega_2) r_2 \sqrt{r_1 r_2} cos(\varphi_1 + 3\varphi_2) + O((r_1 + r_2)^{5/2}).$$

Здесь $B(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{3}\omega_2\sqrt{3(x_{1003}^2 + y_{1003}^2)}$. Следует заметить, что если в классической задаче для конкретного значения $\mu$ коэффициенты $B(\omega_1, \omega_2)$, $c_{20}$, $c_{11}$ и $c_{02}$ принимают постоянные значения (что намного упрощает исследование задачи), то в фотогравитационной задаче эти же коэффициенты не остаются постоянными и являются функциями координат $x, y$ или $Q_1$ и $Q_2$, вследствие чего задача резко усложняется. Используя результаты А.П. Маркеева [7] получим, что при резонансе четвертого порядка $\omega_1 = 3\omega_2$, определяемом множеством точек из области устойчивости линейной системы, треугольные точки либрации при

$$a)\ |F_1| > |F_2| - \text{устойчивы по Ляпунову}, \tag{18}$$

$$b)\ |F_1| < |F_2| - \text{неустойчивы}, \tag{19}$$

где $F_1 = c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}$, $F_2 = 3\sqrt{3}B(\omega_1, \omega_2)$. Здесь коэффициенты $c_{ij}$, являющиеся инвариантами функции Гамильтона (5) относительно канонических преобразований, зависят от коэффициентов $h_{\nu_1\nu_2 l_1 l_2}$ однородных полиномов (6) степени $m$ ($m = 3, 4$), которые в нашем случае являются функциями параметров системы-коэффициентов редукции $Q_1$ и $Q_2$ и безразмерного массового параметра $\mu$. Вследствие громоздкости выражений этих коэффициентов, полученных в результате нормализации, исследования проводились на компьютере при помощи специально разработанной программы. Численным исследованием было доказано, что для всевозможных значений параметров системы резонансные множества точек 3-го порядка в обобщенной фотогравитационной ограниченной задаче трех тел всегда неустойчивы. Построена область устойчивости треугольных точек для значения массового параметра $\mu = 0,01$ (рис.1).

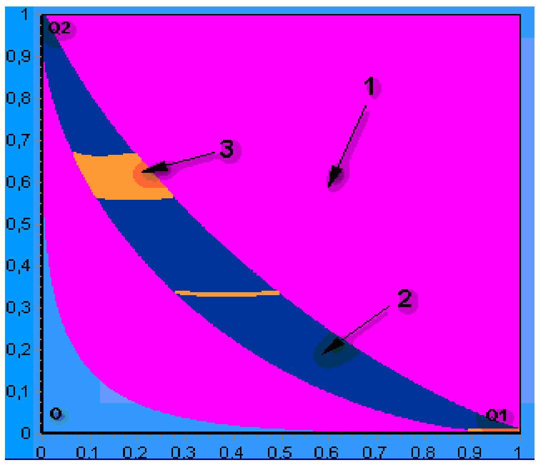


Рис. 1: Область устойчивости треугольных точек либрации при $\mu = 0,01$. 1 – область устойчивости в линейном приближении; 2 – устойчивые множества точек при резонансе четвертого порядка; 3 – неустойчивые резонансные подмножества четвертого порядка.

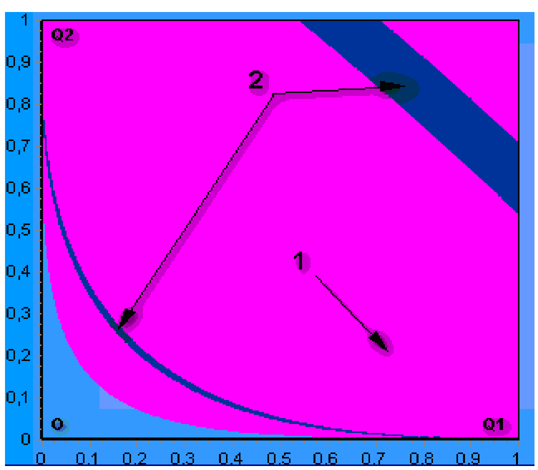


Рис. 2: Область устойчивости треугольных точек либрации при $\mu = 0,01$. 1 – область устойчивости в линейном приближении; 2 – множества точек, где $C(\omega_1, \omega_2) = 0$.

Установлено, что в случае $\mu = 0,01$ резонанс $\omega_1 = 2\omega_2$ 3-го порядка не реализуется. Найдены участки области, соответствующие резонансу $\omega_1 = 3\omega_2$, где выполняется неравенство $|c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}| > 3\sqrt{3}B(\omega_1, \omega_2)$, что свидетельствует об устойчивости по Ляпунову исследуемых точек либрации в плоском варианте задачи (в случае пространственной задачи имеет место устойчивость в 4-ом порядке); на других участках области, где неравенство меняет знак на обратный, имеет место неустойчивость исследуемых точек. Указаны области (рис.2), в которых условие (13) не выполняется. Таким образом, на основе КАМ-теории доказано, что в области устойчивости в первом приближении треугольные точки в плоской задаче трех тел всюду устойчивы по Ляпунову, за исключением множества точек, в которых реализуются резонансы $\omega_1 = 2\omega_2, \omega_1 = 3\omega_2$ и не выполняется условие $C(\omega_1, \omega_2) \neq 0$ теоремы Арнольда-Мозера. Следовательно, вопрос об устойчивости треугольных точек либрации в плоской фотогравитационной задаче трех тел решен до конца.

## Цитированная литература


1. **Куницын.А.Л., Турешбаев А.Т.** //Письма в Астрон.журн. 1985. Т. 11, № 2. С. 145–148.
2. **Турешбаев А.Т.** //Письма в Астрон. журн. 1986. Т. 12, № 9. С. 722–725.
3. **Лукьянов Л.Г.** //Астрон. журн. 1988. Т. 65, № 2. С. 422–432.
4. **Kunitsin A.L., Tureshbaev A.T.** //Celest. Mech. 1985. V. 35. P. 105–112.
5. **Пережогин А.А., Турешбаев А.Т.** //Астрон. журн. 1989. Т. 66. С. 859–865.
6. **Арнольд В.И.** Математические методы классической механики. М., 1974.
7. **Маркеев А.П.** Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.,1978.


*Поступила в редакцию 16.07.2010г.*

Математический журнал. *Алматы. 2010. Том 10. № 3 (37) . С. 107—110*

*УДК 517.9*

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ГРАНИЧНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ СКАЧКАМИ

А. Б. Уаисов

Казахский национальный университет им. аль-Фараби
050012 Алматы Масанчи, 39/47 murathan.dauylbaev@kaznu.kz

В работе исследуется сингулярно возмущенная краевая задача при условии, что действительные части корней дополнительного характеристического уравнения имеют противоположные знаки. Построено асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной краевой задачи с граничными начальными скачками.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon^2 y''' + \varepsilon A(t)\, y'' + B(t)\, y' + C(t)\, y = F(t) \tag{1}$$

$$y(0,\varepsilon) = a_0\,, \quad y'(0,\varepsilon) = a_1, \quad y'(1,\varepsilon) = b_1\,, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0-$ малый параметр, $b_1,\ a_i (i = 0,1)-$ известные постоянные.

В работе [1] были установлены следующие предельные равенства:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y(t,\varepsilon) = \bar{y}(t)\,, \quad 0 \le t \le 1, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} y^{(j)}(t,\varepsilon) = \bar{y}^{(j)}(t)\,,\ \ 0 < t < 1,\ j = 1,2, \tag{3}$$

где $y(t,\varepsilon)$ – решение задачи (1), (2), $\bar{y}(t)$ – решение соответствующей вырожденной задачи. Из (3) видно, что $\bar{y}^{(j)}(t)\,,\ j = 1,2$, можно использовать в качестве асимптотического приближения к $y^{(j)}(t,\varepsilon)\,, j = 1{,}2$, только на промежутке $0 < t_0(\varepsilon) \le t \le t_1(\varepsilon) < 1$, причем эти предельные равенства ничего не говорят о точности этих приближений. Естественно поставить вопрос о получении равномерного приближения с любой степенью точностью по малому параметру.

Для построения асимптотики решения задачи (1),(2) потребуем выполнения следующих условий:

I. *Пусть коэффициенты* $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ *и правая часть* $F(t)$ *уравнения (1) достаточное число раз дифференцируемы на отрезке* $0 \le t \le 1$.

II. $B(t) \ne 0$ *при* $t \in [0,1]$.

Keywords: *Asymptotic expansion, singular perturbation, ordinary differential equations, boundary valued problem.*
2010 Mathematics Subject Classification: 34B40

*III. Дополнительное характеристическое уравнение*

$$\mu^3 + A(t)\mu^2 + B(t)\mu = 0$$

*имеет различные корни* $\mu_1 = 0,\ \ \mu_2,\ \ \mu_3$, *причем* $Re\,\mu_2 < 0,\ \ Re\,\mu_3 > 0.$

*IV.*

$$a_0 C(0) + a_1 B(0) \neq F(0),$$

$$\left[a_0 \exp\left(-\int\limits_0^1 \frac{C(x)}{B(x)}dx\right) + \int\limits_0^1 \frac{F(s)}{B(s)} \exp\left(-\int\limits_s^1 \frac{C(x)}{B(x)}dx\right)ds\right] \cdot C(1) + b_1 B(1) \neq F(1).$$

Исходя из оценки (18) работы [1], заключаем, что асимптотическое разложение решения задачи (1),(2) следует искать в виде:

$$y\,(t,\varepsilon) = y_\varepsilon\,(t) + \varepsilon\, u_\varepsilon\,(\tau) + \varepsilon\, w_\varepsilon\,(s)\,,\ \tau = \frac{t}{\varepsilon},\ \ s = \frac{t-1}{\varepsilon},\ 0 \le t \le 1, \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} y_\varepsilon\,(t) &= y_0\,(t) + \varepsilon y_1\,(t) + \varepsilon^2 y_2\,(t) + \ldots, \\ u_\varepsilon\,(\tau) &= u_0\,(\tau) + \varepsilon u_1\,(\tau) + \varepsilon^2 u_2\,(\tau) + \ldots\ , \\ w_\varepsilon\,(s) &= w_0\,(s) + \varepsilon w_1\,(s) + \varepsilon^2 w_2\,(s) + \ldots\ . \end{aligned} \tag{5}$$

Подставляя (4) с учетом (5) в (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon$, получаем:

$$B\,(t)\,y_0'\,(t) + C\,(t)\,y_0\,(t) = F\,(t)\,, \tag{$6_0$}$$

$$B\,(t)\,y_1'\,(t) + C\,(t)\,y_1\,(t) = -A\,(t)\,y_0''(t), \tag{$6_1$}$$

$$B\,(t)\,y_k'\,(t) + C\,(t)\,y_k\,(t) = -A\,(t)\,y_{k-1}''\,(t) - y_{k-2}'''\,(t)\,, \tag{$6_k$}$$

$$\frac{d^3u_0}{d\tau^3} + A(0)\frac{d^2u_0}{d\tau^2} + B(0)\frac{du_0}{d\tau} = 0, \tag{$7_0$}$$

$$\frac{d^3u_1}{d\tau^3} + A(0)\frac{d^2u_1}{d\tau^2} + B(0)\frac{du_1}{d\tau} = \Phi_1\,(\tau)\,, \tag{$7_1$}$$

$$\frac{d^3u_k}{d\tau^3} + A(0)\frac{d^2u_k}{d\tau^2} + B(0)\frac{du_k}{d\tau} = \Phi_k\,(\tau)\ \ ,\ k = 2, 3, \ldots, \tag{$7_k$}$$

где

$$\Phi_1\,(\tau) = -\frac{A'\,(0)\,\tau}{1!}\ddot{u}_0\,(\tau) - \frac{B'\,(0)\,\tau}{1!}\dot{u}_0\,(\tau)\ \ + C(0)u_0\,(\tau)\ ,$$

$$\Phi_k\,(\tau) = -\sum_{j=1}^{k} \frac{A^{(j)}\,(0)\,\tau^j}{j!}\ddot{u}_{k-j}\,(\tau) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{B^{(j)}\,(0)\,\tau^j}{j!}\dot{u}_{k-j}\,(\tau) - \sum_{j=1}^{k} \frac{C^{(j-1)}\,(0)\,\tau^{j-1}}{(j-1)!}u_{k-j}\,(\tau).$$

Здесь точки сверху означают производные по $\tau$.

Аналогично, находим:

$$\frac{d^3w_0}{ds^3} + A(1)\frac{d^2w_0}{ds^2} + B(1)\frac{dw_0}{ds} = 0, \tag{$8_0$}$$

$$\frac{d^3w_1}{ds^3} + A(1)\frac{d^2w_1}{ds^2} + B(1)\frac{dw_1}{ds} = P_1\,(s)\,, \tag{$8_1$}$$

$$\frac{d^3w_k}{ds^3} + A(1)\frac{d^2w_k}{ds^2} + B(1)\frac{dw_k}{ds} = P_k\,(s)\ \ ,\ k = 2, 3, \ldots, \tag{$8_k$}$$

где

$$P_1(s) = -\frac{A'(1)\,s}{1!}\ddot{w}_0(s) - \frac{B'(1)\,s}{1!}\dot{w}_0(s) + C(1)w_0(s),$$

$$P_k(s) = -\sum_{j=1}^{k}\frac{A^{(j)}(1)\,s^j}{j!}\ddot{w}_{k-j}(s) - \sum_{j=0}^{k-1}\frac{B^{(j)}(1)\,s^j}{j!}\dot{w}_{k-j}(s) - \sum_{j=1}^{k}\frac{C^{(j-1)}(1)\,s^{j-1}}{(j-1)!}w_{k-j}(s).$$

Здесь точки сверху означают производные по $s$.

Для однозначного определения $y_k(t)$, $u_k(\tau)$, $w_k(s)$ подставим разложения (4), (5) в краевые условия (2), и приравнивая выражения, стоящие при одинаковых степенях $\varepsilon$, получаем:

$$y_0(0) = a_0, \tag{9}$$

$$y_0'(0) + \dot{u}_0(0) = a_1, \quad y_0'(1) + \dot{w}_0(0) = b_1, \tag{10}$$

$$y_k(0) + u_{k-1}(0) = 0,$$

$$y_k'(0) + \dot{u}_k(0) = 0, \quad y_k'(1) + \dot{w}_k(0) = 0, \quad k \geq 1.$$

Из задачи $(6)_0$, (9) однозначно определяется $y_0(t)$ при $0 \leq t \leq 1$:

$$y_0(t) = a_0 \exp\left(-\int_0^t \frac{C(x)}{B(x)}dx\right) + \int_0^t \frac{F(p)}{B(p)} \exp\left(-\int_p^t \frac{C(x)}{B(x)}dx\right)dp.$$

Обратимся теперь к уравнению $(7)_0$ и равенству (10). В $(7)_0$ используя корень $\mu = \mu_2$ и первое условие из (10), где $Re\,\mu_2 < 0$, получаем:

$$\dot{u}_0(\tau) = (a_1 - y_0'(0))e^{\mu_2(0)\tau}, \ \tau \geq 0. \tag{11}$$

Используя требования

$$u_0(\tau) \to 0, \text{ при } \tau \to +\infty,$$

из (11), получим:

$$u_0(\tau) = \frac{a_1 - y_0'(0)}{\mu_2(0)}e^{\mu_2(0)\tau}, \ \tau \geq 0, \tag{12}$$

где

$$u_0(0) = \frac{a_1 - y_0'(0)}{\mu_2(0)}. \tag{13}$$

Кроме того, из (11) находим

$$\ddot{u}_0(\tau) = \mu_2(0)(a_1 - y_0'(0))e^{\mu_2(0)\tau}, \ \tau \geq 0. \tag{14}$$

Аналогично, из $(8_0)$ используя корень $\mu = \mu_3$, требования $w_0(\tau) \to 0$ при $s \to -\infty$, и второе условие из (10), где $Re\,\mu_3 > 0$, получаем:

$$\ddot{w}_0(\tau) = \mu_3(1)(b_1 - y_0'(1))e^{\mu_3(1)s}, \ \dot{w}_0(s) = (b_1 - y_0'(1))e^{\mu_3(1)s}, \ s \leq 0, \tag{15}$$

$$w_0(s) = \frac{b_1 - y_0'(1)}{\mu_3(1)}e^{\mu_3(1)s}, \ s \leq 0, \tag{16}$$

где

$$w_0(0) = \frac{b_1 - y_0'(1)}{\mu_3(1)}. \tag{17}$$

Из формул (11)-(17) для $w_0(s)$, $\dot{w}_0(s)$, $\ddot{w}_0(s)$, $u_0(\tau)$, $\dot{u}_0(\tau)$, $\ddot{u}_0(\tau)$ получим экспоненциальные оценки:

$$\left|\overset{(j)}{u}_0(\tau)\right| \le Ke^{\mu_2(0)\tau},\ \tau \ge 0, \quad \left|\overset{(j)}{w}_0(s)\right| \le Ke^{\mu_3(1)s},\ s \le 0,\ \ j = 0, 1, 2.$$

Итак, построены члены асимптотики нулевого порядка.

Определение следующих членов асимптотики проходит по такой же схеме для любого $k \ge 1$. Причем для коэффициентов $u_k(\tau), w_k(s)$ справедливы оценки:

$$\left|\overset{(j)}{u}_k(\tau)\right| \le Ke^{\bar{\mu}_2(0)\tau},\ \tau \ge 0, \left|\overset{(j)}{w}_k(s)\right| \le Ke^{\bar{\mu}_3(1)s},\ s \le 0,\ \ j = 0, 1, 2.$$

Для доказательства справедливости асимптотического разложения решения задачи (1), (2) определим члены разложения (4),(5) до номера $N$ включительно и образуем частичную сумму $Y_N(t,\varepsilon)$:

$$Y_N(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k y_k(t) + \varepsilon \sum_{k=0}^{N} u_k\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\varepsilon^k + \varepsilon \sum_{k=0}^{N} w_k\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)\varepsilon^k. \tag{18}$$

**Лемма.** *Пусть выполнены условия I-IV. Тогда функция $Y_N(t,\varepsilon)$, выражаемая формулой (18), удовлетворяет сингулярно возмущенной задаче (1),(2) с точностью порядка $O\left(\varepsilon^{N+1}\right)$ при $\varepsilon \to 0$ :*

$$L_\varepsilon Y_N(t,\varepsilon) - F(t) = O\left(\varepsilon^{N+1}\right),\ 0 \le t \le 1,$$

$$Y_N'(0,\varepsilon) - a_1 = O\left(e^{\frac{\mu_2}{\varepsilon}}\right),\ \ Y_N(1,\varepsilon) - b_0 = O\left(\varepsilon^{N+1}\right),\ \ Y_N'(1,\varepsilon) - b_1 = O\left(e^{-\frac{\mu_3}{\varepsilon}}\right).$$

**Теорема.** *Пусть выполнены условия I-IV. Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ на сегменте $0 \le t \le 1$ решение задачи (1),(2) существует, единственно и удовлетворяет оценке:*

$$y(t,\varepsilon) = Y_N(t,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{N+1}\right),\ 0 \le t \le 1.$$

Из теоремы следует, что в точках $t = 0$ и $t = 1$ производная $y''(t,\varepsilon)$ имеет полюсы по $\varepsilon$:

$$y''(0,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad y''(1,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

а решение $y(t,\varepsilon)$ обладает явлением начального скачка первого порядка:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y'(0,\varepsilon) - y_0'(0) = \Delta_0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} y'(1,\varepsilon) - y_0'(1) = \Delta_1,$$

где

$$\Delta_1 = b_1 - \frac{F(1)}{B(1)} + \frac{C(1)}{B(1)} \cdot \left[a_0 \exp\left(\int_0^1 \frac{C(x)}{B(x)}dx\right) - \int_0^1 \frac{F(s)}{B(s)} \exp\left(-\int_s^1 \frac{C(x)}{B(x)}dx\right)ds\right],$$

$$\Delta_0 = a_1 - \frac{F(0)}{B(0)} + \frac{C(0)}{B(0)} \cdot a_0.$$

## Цитированная литература

1. **Нургабыл Д.Н., Уаисов А.Б.** //Известия НАН РК. 2010. № 3. С. 24–29.

*Поступила в редакцию 25.08.2010 г.*

## РЕФЕРАТЫ — ABSTRACTS

УДК: 517 2010 MSC: 46S10

Alexeyeva L.A. **The Differential algebra of biquaternions. Generalized solutions of biwave equations. 2** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 3 (37). P. 5 – 13.

The functional space of biquaternions is considered on Minkovskiy space. By introducting differential operators – bigradients, biquaternional wave (*biwave*) equations and their generalized decisions are considered. With use the theory of distributions the solutions of the biwave equation and the solutions of the Cauchy problem are built. The shock waves and conditions on its fronts are considered. The generalized solutions of the equation are built in the cases of stationary vibrations and of steady-state, typical for the problems of the field theories. The biwave Maxwell equation which is equivalent to Maxwell system is considered.
References – 7.

УДК: 517 2010 MSC: 46S10

Алексеева Л.А. **Бикватерниондардың дифференциалдық алгебрасы. Битолқындардың теңдеулердің жалпыланған шешімдері. 2** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 3 (37). Б. 5 – 13.

Минковский кеңістігіндегі бикватерниондардың функциялық кеңістігі қарастырылады. Дифференциалдық операторларды – биградиенттерді кіргізу арқылы бикватерниондық толқын (битолқын) теңдеулердің жалпылама шешімдері қарастырылған. Соққылық толқындармен және толқынның шегіндегі шарттар қарастырылған. Өзгермейтін тербелістің және статикалық (өріс теориясының есептеріне тән) жағдайларда теңдеулердің жалпылама шешімдері құрастырылған. Мысал ретінде Максвеллдің теңдеулер жүйесіне пара-пар битолқын теңдеуі мен оның жалпылама шешімдері қарастырылған.
Әдебиеттер тізімі – 7.

УДК: 519.6 2010 MSC: 46S10

Aleuova Z. Zh., Sartabanov Zh. A. **Pseudoperiodic solutions of the systems with matrix, which depends on parameter** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 3 (37). P. 14 – 19.

Sufficient conditions for existence and uniqueness of the pseudoperiodic solutions of quasilinear system with a matrix depending on parameters are established.
References – 7.

УДК: 519.6 2010 MSC: 46S10

Алеуова З.Ж., Сартабанов Ж.А. **Матрицасы параметрден тәуелді болған жағдайдағы жүйелердің псевдопериодты шешімдері** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 3 (37). Б. 14 – 19.

Матрицасы параметрден тәуелді болған жағдайдағы квазисызықты жүйелердің псевдопериодты шешімдерінің бар болуының және жалғыз болуының жеткілікті шарттары табылған.
Әдебиеттер тізімі – 7.

УДК: 519.7 2010 MSC: 68T10, 60G35

Amirgaliyev Ye. N., Musabaev R.R. **Development of the methods and speech synthesis algorithms on the example of the Kazakh language** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 3 (37). P. 20 – 28.

In the work results of working out of the unified methods of synthesis of a speech signal under the phonetic text on an example of the Kazakh language are presented. Modelling and working out of the information system realizing given methods can be used in realization of man -machine interfaces as a part of various information systems.
References – 8.

УДК: 519.7 2010 MSC: 68T10, 60G35

Әмірғалиев Е.Н., Мұсабаев Р.Р. **Казақ тілі мысалында сөздер мен сөйлемдерді синтездеу әдістері мен алгоритмдерін құру** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 3 (37). Б. 20 – 28.

Мақалада фонемдік мәтін үшін (қазақ тілі мысалында) сөздердің (сөйлемдердің) сигналдардың синтезін бір қалыпқа түсірілген әдістері берілген. Оларды іске асыратын ақпараттық жүйенің модельдері мен алгоритмдері түрлі ақпараттық жүйелер құрамына кіретін адам-машина интерфейсін жүзеге асыру барысында қолданылады.
Әдебиеттер тізімі – 8.

УДК: 512.55 2010 MSC: 17B05

Bakirova A.B. **Symmetric cocycles of the Lie algebra of type B2** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 3 (37). P. 29 – 36.

In the paper we describe the space of symmetric cocycles for the Lie algebra of the B2 over the field K.
References – 1.

УДК: 512.55 2010 MSC: 17B05

Бакірова А.Б. **Ли алгебрасындағы B2 типті симметриялы коциклдер** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 3 (37). Б. 29 – 36.

Жұмыста $K$ өрісіндегі $B_2$ типті Ли алгебрасы үшін симметриялы коциклдердің кеңістігі сипатталған.
Әдебиеттер тізімі – 1.

УДК: 517.95 2010 MSC: 35K20, 35A20, 35A07, 35B65

Бижанова Г.И. **Классическое решение нерегулярной задачи сопряжения для уравнений теплопроводности** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 3 (37). P. 37 – 48.

Изучается одномерная задача сопряжения для уравнений теплопроводности при рассогласовании начальных и граничных данных. Устанавливается, что невыполнение условий согласования приводит к появлению в решении задачи специальных функций (повторных интегралов вероятности), которые являются сингулярными в окрестности границы областей при $t \to 0$. После выделения из решения этих функций доказываются в весовых и классических пространствах Гельдера существование, единственность и оценки решения задачи, к которой свелась исходная.

References – 9.

УДК: 517.95 2010 MSC: 35K20, 35A20, 35A07, 35B65

Бижанова Г.И. **Жылу өткізгіштік теңдеуі үшін регулярлы емес түйіндестіру есебінің классикалық шешімі** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 3 (37). Б. 37 – 48.

Бастапқы және шекаралық функциялардың үйлесімсіздік жағдайындағы жылу өткізгіштік теңдеуі үшін, бір өлшемді түйіндестіру есебі қарастырылады. Үйлесім шарты орындалмағандықтан есептің шешімінде, $t \to 0$ жағдайындағы шекараның маңайында сингуляр, арнайы функцияның (қайталама ықтималдық интегралы) пайда болуына әкеліп соғатындығы анықталады. Бұл функцияларды шешімнен ажыратып алғаннан соң, зілденген және классикалық Гельдер кеңістігінде бар болуы, жалғыздығы және алғашқы есепке келтірілген есептің шешімінің бағалаулары дәлелденеді.

Әдебиеттер тізімі – 9.

УДК: 517.9 2010 MSC: 74H10

Bopaev K.B., Junusova A.T. **Stability of the solution of difference-dynamical systems with regard to part of variables in critical case** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 3 (37). P. 49 – 53.

The problem of stability of the solution of $k+2+l$ order difference-dynamical systems with regard to $k+2$ variables is considered. The problem of reduction stability of trivial solution of $k+2$ order difference-dynamical systems with regard to part of variables to stability of the "truncated" system of second order in critical case, when a secular equation has a pair of complex roots module of which are equal to unit and remaining $k$ roots are module of which less than unit.

References – 2.

УДК: 517.9 2010 MSC: 74H10

Бопаев Қ.Б., Жүнүсова А.Т. **Дүдәмәл жағдайдағы айырымдық динамикалық жүйелердиң айнымалылар бөлігіне қатысты шешімнің орнықтылығы** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 3 (37). Б. 49 – 53.

Жұмыста $k+2$ айнымалылар бойынша $(k+2+l)$-ші ретті айырымдық динамикалық жүйелер шешімдерінің орнықтылығы жайлы есеп қарастырылады. Мінездемелік теңдеуі модулі бойынша 1-ге тең комплекс түйіндес түбірлері бар, ал қалған түбірлері модулі бойынша 1-ден кіші болатын $(k+2)$-ші ретті айырымдық динамикалық жүйелердің айнымалылар бөлігіне қатысты тривиалдық шешімдерінің орнықтылығы екінші ретті "қысқартылған"жүйенің дүдәмәл жағдайындағы орнықтылығына алып келген есебі шешілді.

Әдебиеттер тізімі – 2.

УДК: 517.962 2010 MSC: 45J5

Yeskendirova Y.V. **Stability Of difference-dynamical systems on the First Approach** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 3 (37). P. 54 – 56.

In the work by means of a method of a variation of constant and discrete inequalities stability of difference-dynamical systems is investigated.

References – 4.

УДК: 517.962 2010 MSC: 45J5

Ескендірова Е.В. **Айрымдық-динамикалық жүйелерінің бірінші жуықшасы бойынша орнықтылығы** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 3 (37). Б. 54 – 56.

Жұмыста тұрақтыларды вариациялау әдісі және дискретті теңсіздіктер арқылы айрымдық-динамикалық жүйенің орнықтылығы зерттеледі.

Әдебиеттер тізімі – 4.

УДК: 517.946 2010 MSC: 34K29,60H10

Zhakhina R.U., Tasmambetov Zh.N. **The finite solutions of the admissible systems of the second order partial differential equations in quotient of the derived** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 3 (37). P. 57 – 66.

In the work by Frobeniys-Latishev method necessary, as well as necessary and sufficient conditions for existence of finite solutions of the admissible systems of second order partial differential equations are obtained.

References – 8.

УДК: 517.946 2010 MSC: 34K29,60H10

Жахина Р.У., Тасмамбетов Ж.Н. **Екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің мүмкін болатын жүйелердің ақырлы шешімдері** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 3 (37). Б. 57 – 66.

Жұмыста Фробениус-Латышева әдісі арқылы екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің мүмкін болатын жуйелердің ақырлы шешімдерінің бар болуының қажетті немесе қажетті және жеткілікті шарттары орнатылған.

Әдебиеттер тізімі – 8.

УДК: 517.958 2010 MSC: 35L20

Zakiryanova G.K. **Dynamical analogues of Green and Gauss formulas for hyperbolic equations** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 3 (37). P. 67 – 74.

The solutions in class of shock wave are considered for a strong hyperbolic equation. The conditions on wave fronts are obtained by generalized functions method. Two initial boundary problems are posed and their uniqueness is proved. Dynamical analogues of Green and Gauss formulas for hyperbolic equation are constructed.

References – 7.

УДК: 517.958 2010 MSC: 35L20

Закирьянова Г.Қ. **Гиперболалық теңдеулер үшін динамикалық Грин және Гаусс формулаларының аналогтары** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 3 (37). Б. 67 – 74.

Қатаң гиперболалық теңдеу үшін соққы толқындар класындағы шешімдері қарастырылған. Жалпылама функциялар әдісі негізінде толқындар аумақтарындағы шарттар алынған.

Екі бастапқы шектік есеп қойылды және олардың шешімдерінің жалғыздығы дәлелденді. Гиперболалық теңдеу үшін Грин және Гаусс формулаларының динамикалық аналогтары құрастырылды.

Әдебиеттер тізімі – 7.

УДК: 519.624 2010 MSC: 34B10

Imanchiev A.E. **On solvability of the Cauchy-Nikoletti problem for ordinary differential equation** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 3 (37). P. 75 – 84.

The Cauchy-Nikoletti problem for systems of nonlinear ordinary differential equations is studied by parametrization method. The necessary and sufficient conditions existence for "izolated" solution of the problem are obtained in the terms of initial data.

References – 14.

УДК: 519.624 2010 MSC: 34B10

Иманчиев А.Е. **Жәй дифференциалдық теңдеу үшін Коши-Николетти есебінің шешілімділігі туралы** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 3 (37). Б. 75 – 84.

Сызықсыз жәй дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін Коши-Николетти есебі параметрлеу әдісімен зерттеледі. Қарастырылып отырған есептің "оқшауланған" шешімінің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары бастапқы берілімдер терминінде алынған.

Әдебиеттер тізімі – 14.

УДК: 532.5:519.8 2010 MSC: 42A10

Mukimbekov M.Zh., Sherkeshbaeva B.K. **Constructing the mathematical model of process of working out of oil pools with high-tough oil** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 3 (37). P. 85 – 91.

In the work the constructing mathematical model of steam heat action on oil stratum is considered.

References – 8.

УДК: 532.5:519.8 2010 MSC: 42A10

Мукимбеков М.Ж., Шеркешбаева Б.К. **Тұтқырлығы жоғары мұнайы бар мұнай кен орындарын өңдеу процессінің математикалық моделін құрастыру** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 3 (37). Б. 85 – 91.

Жұмыста мұнай кен орындарына бу және жылумен әсер етудің математикалық моделі қарастырылады.

Әдебиеттер тізімі – 8.

УДК: 519.624 2010 MSC: 34B40

Nazarova K.Zh. **On an approach to finding initial approximation for solution of nonlinear two point boundary value problem** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 3 (37). P. 92 – 100.

The system of nonlinear equations with respect to parameters is constructed for finding initial approximation for solution of nonlinear two point boundary value problem. The way of finding the solutions of constructed system is proposed.

References – 11.

УДК: 519.624 2010 MSC: 34B40

Назарова К.Ж. **Бейсызықты екі нүктелі шеттік есеп шешімінің алғашқы жуықтауын табудың бір тәсілі туралы** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 3 (37). Б. 92 – 100.

Бейсызықты екі нүктелі шеттік есеп шешімінің алғашқы жуықтауын табу үшін параметрлері бойынша бейсызықты теңдеулер жүйесі құрастырылды. Құрастырылған жүйенің шешімдерін табудың бір тәсілі ұсынылды.

Әдебиеттер тізімі – 11.

УДК: 521.35 2010 MSC: 70F07

Tureshbaev A.T. **The nonlinear analysis of stability of libration triangular points in the photogravitational plain restricted problem of three bodies** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 3 (37). P. 101 – 106.

A photogravitational restricted problem of three bodies where both main gravitating bodies are sources of radiation of light energy is considered. A nonlinear analysis of stability of three-parametric family of triangular libration points (Lagrange solutions) in the space of system parameters taking into account resonance modes of 3rd and 4th order is carried out.

References – 7.

УДК: 521.35 2010 MSC: 70F07

Турешбаев А.Т. **Шектелген фотогравитациялық жазықтықтың үш дене есебінің үшбұрышты либрациялық нүктелерінің орнықтылығын сызықты емес талдау** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 3 (37). Б. 101 – 106.

Гравитациялық күштер көзі болып табылатын негізгі екі денеде жарық энергиясын шығаратын фотогравитациялық шектелген үш дене есебі қарастырылады. Жүйе параметрлерінің кеңістігінде 3-ші және 4-ші ретті резонанстарды ескере отырып, үш параметрлі үшбұрыштық либрациялық нүктелер жиыны орнықтылығы сызықты емес қойылымда зерттелінген.

Әдебиеттер тізімі – 7.

УДК: 517.9 2010 MSC: 34B40

Uaisov A.B. **Asymptotic expansion of the solution of singularly perturbed boundary value problem with boundary initial jumps** // Mathematical journal. 2010. Vol. 10. № 3 (37). P. 107 – 110.

In the work the singularly perturbed boundary value problem is studied provided that real parts of the roots of additional distinctive equation have opposite signs. An asymptotic expansion of the solution of a singularly perturbed boundary value problem with initial jumps is constructed.

References – 1.

УДК: 517.9 2010 MSC: 34B40

Уаисов А.Б. **Шекаралық бастапқы секірісті сингулярлы ауытқыған шеттік есеп шешімінің асимптотикалық жіктелуі** // Математикалық журнал. 2010. Т. 10. № 3 (37). Б. 107 – 110.

Жұмыста қосымша сипаттаушы теңдеудің түбірлерінің нақты бөліктері қарама-қарсы таңбалы болатын сингулярлы ауытқыған шеттік есеп зерттеледі. Шекаралық бастапқы секірісті сингулярлы ауытқыған шеттік есеп шешімінің асимптотикалық жіктелуі құрылған.

Әдебиеттер тізімі – 1.

# ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, направляемые в **"Математический журнал",** должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Статья может быть представлена в полном объеме или в виде краткого сообщения на русском или английском языках.

2. Статья представляется в двух экземплярах и является оригиналом для печати. В левом верхнем углу необходимо указать индекс **УДК,** далее название статьи и фамилии авторов по алфавиту. Необходимо указать организацию, от которой направлена статья, адрес и e-mail (при наличии).

3. К статье прилагаются в двух экземплярах на казахском, русском и английском языках (для статьи на английском языке только на английском): название статьи; фамилии и инициалы авторов; ключевые слова; автореферат с указанием индекса **2010 Mathematics Subject Classification**.

4. Кроме твердых копий необходимо представить в редакцию дискету с подготовленным в LaTeXtex-файлом статьи или переслать его электронной почтой e-mail: **journal@math.kz** (см. образец оформления статьи в **http://www.math.kz/** в разделе **"Математический журнал"**).

5. Объем статей (стандартный формат в LaTeX) не должен превышать 10 журнальных страниц (не более 20 машинописных стр. через 2 интервала), краткие сообщения — 3 журнальные страницы (не более 6 машинописных стр. через 2 интервала). Объем реферата — не более 1/4 стр. (0,5 машинописной стр.).

6. Нумерованные формулы следует писать в отдельной строке.

7. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте. При ссылке на монографию необходимо указать страницу (например, [1, с.45]). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде.

   **Цитированная литература**

   (a) **Мынбаев К. Т., Отелбаев М. О.** Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. М., 1988. (для монографий)

   (b) **Женсыкбаев А. А.** // Успехи матем.наук. 1981. Т. 36, вып. (или №) 4. С. 107 – 159.

   (c) **Kato J.**// Proceedings of World Congress of Nonlinear Analysis. Nampa. 1992. P. 57 – 61.

8. Статья должна быть подписана всеми авторами.

9. Следует также отдельно представить следующие сведения: Ф.И.О. (полностью), место работы, должность, адреса и телефоны (служ. и дом.), а также e-mail (при наличии).

Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание и оформление не отвечают требованиям журнала.

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

## Том 10 № 3 (37) 2010





*Адрес редколлегии и редакции:*
050010 Алматы, ул.Пушкина, 125, к.311
тел.: 8(727)2-72-43-93, *journal@math.kz, http://www.math.kz*

Подписано в печать 28.09.2010г.
Тираж 300 экз. Объем 119 стр.
Формат 62 94/16 см
Бумага офсетная № 1

г.Алматы
ул. Курмангазы/Мауленова, 110/81
Тел./факс: 2-72-60-11, 2-72-61-50
e-mail: print_express@bk.ru