

ISSN 1682—0525

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ

Том 15 № 3 (57) 2015

Институт математики и математического моделирования
Алматы

ISSN 1682—0525

Министерство образования и науки Республики Казахстан

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ**

MATHEMATICAL JOURNAL

Том 15 № 3 (57) 2015

Институт математики и математического моделирования
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Институт математики и математического моделирования

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 15, № 3 (57), 2015

Журнал выходит 4 раза в год

Издается с 2001 года

Главный редактор:

М.А. Садыбеков

Заместитель главного редактора:

А.Т. Асанова

Редакционная коллегия:

Л.А. Алексеева, Д.Б. Базарханов, Б.С. Байжанов, Г.И. Бижанова, Н.К. Блиев,
В.Г. Воинов, Н.С. Даирбеков, М.Т. Дженалиев, Д.С. Джумабаев,
А.С. Джумадилаев, Т.Ш. Кальменов, К.Т. Мынбаев, А.Ж. Найманова,
М. Отелбаев, И.Н. Панкратова, М.Г. Перетяцкий, И.А. Тайманов (Россия),
М.И. Тлеубергенов, С.Н. Харин.

Ответственный секретарь: Ж.К. Джобулаева

Адрес редакции:

Институт математики и математического моделирования КН МОН РК,

ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010,

тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), факс: 8 (727) 2 72 70 93,

e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, <http://www.math.kz>

Журнал зарегистрирован в Комитете связи, информатизации и информации Министерства по инвестициям и развитию Республики Казахстан, Свидетельство № 15579-Ж от 25 сентября 2015г.

© Институт математики и математического моделирования МОН РК, 2015г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 15	№ 3 (57)	2015
<hr/>		
<i>Алексеева Л.А., Ахметжанова М.М.</i> Фундаментальные и обобщенные решения уравнений динамики термоупругих стержней. 2. Первая краевая задача стационарных колебаний 5		
<i>Асанова А.Т., Иманчиев А.Е.</i> О разрешимости семейства краевых задач Валле-Пуссена для обыкновенных дифференциальных уравнений 23		
<i>Baizhanov B.S., Batura T.V., Murzin F.A., Nemchenko M.Yu., Perfiliev A.A.</i> Similarity estimation algorithms for natural language sentences 33		
<i>Байзаков А.Б., Акерова Дж.А.</i> О разрешимости задачи Коши для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка 47		
<i>Бекетаева А.О.</i> Моделирование взаимодействия падающей ударной волны с пограничным слоем 56		
<i>Есиркегенов Н.А., Садыбеков М.А.</i> Корректная задача с данными на всей границе области для одномерного волнового уравнения 72		
<i>Жунусова Ж.Х.</i> Поверхность к односолитонному решению нелинейного уравнения Шредингера 84		
<i>Иманбаев Н.С.</i> Об устойчивости свойства базисности системы корневых векторов оператора Штурма-Лиувилля при интегральном возмущении краевых условий в неусиленно регулярных задачах типа Самарского-Ионкина 96		
<i>Кошанов Б.Д., Утеев Т.Б.</i> О разрешимости краевой задачи магнитной газодинамики с цилиндрической и сферической симметриями 108		
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ		
<i>Назарбай Кадырович Блиев (к 80-летию со дня рождения) 122</i>		

CONTENTS

Volume 15

No. 3 (57)

2015

<i>Alexeyeva L.A., Ahmedzhanova M.M. Fundamental and generalized solutions of the equations of the dynamics of thermoelastic rods. 2. The first boundary value problem of stationary vibrations</i>	5
<i>Asanova A.T., Imanchiev A.E. On solvability of Valle-Poussin boundary value problem for ordinary differential equations</i>	23
<i>Baizhanov B.S., Batura T.V., Murzin F.A., Nemchenko M.Yu., Perfiliev A.A. Similarity estimation algorithms for natural language sentences</i>	33
<i>Baizakov A.B., Akerova Dzh.A. Solvability of the Cauchy problem for nonlinear third order partial integro-differential equations</i>	47
<i>Beketaeva A.O. Simulation of the shock wave and boundary layer interaction</i>	56
<i>Yessirkegenov N.A., Sadybekov M.A. A problem for the one-dimensional wave equation with data on the whole boundary of the domain</i>	72
<i>Zhunussova Zh.Kh. Surface to onesoliton solution of nonlinear Schrodinger equation</i>	84
<i>Imanbaev N.S. On stability of the basis property of the system of root vectors of the Sturm-Liouville operator with an integral perturbation of the boundary conditions in a not strengthened regular problems of Samarskii-Ionkin type</i>	96
<i>Koshanov B.D., Uteev T.B. On solvability of the boundary value problem of the magnetic gas dynamics with cylindrical and spherical symmetries</i> ...	108
MATHEMATICAL LIFE	
<i>Nazarbay Kadyrovich Bliev (to his 80-th anniversary)</i>	122

УДК 539.3

Л.А. АЛЕКСЕЕВА, М.М. АХМЕТЖАНОВА

Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: alexeeva@math.kz

**ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ
УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ТЕРМОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ.
2. ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА СТАЦИОНАРНЫХ
КОЛЕБАНИЙ**

Рассматривается динамика термоупругого стержня конечной длины при периодических внешних силовых и тепловых воздействиях с фиксированной частотой. Для ее описания используются уравнения связанной термоупругости, учитывающие влияние температуры на упругие деформации и напряжения, а также влияние скорости упругой деформации на температурное поле в стержне. На основе метода обобщенных функций построены аналитические решения краевых задач динамики термоупругого стержня при различном типе граничных условий. Проведена компьютерная реализация решения первой краевой задачи при заданных перемещениях и температуре на концах стержня и действующих периодических по времени массовых силах и тепловых источниках. Приведены результаты расчетов перемещений и температуры стержня при разных частотах и проведен сравнительный анализ решений.

Ключевые слова: *термоупругость, стационарные колебание, стержень, краевая задача.*

Стержневые конструкции широко используются в машиностроении в качестве соединительных и передаточных звеньев для конструктивных

© Л.А. Алексеева, М.М. Ахметжанова, 2015.

Keywords: *thermoelasticity, stationary vibration, corner, boundary value problem*

2010 Mathematics Subject Classification: 46S10, 53C80

элементов самых разных машин и механизмов. В процессе эксплуатации они подвергаются переменным механическим и термическим воздействиям, которые создают сложное напряженно-деформированное состояние в конструктивных элементах, зависящее от их температуры и влияющее на их прочность и надежность. Поэтому определение термо-напряженного состояния стержневых конструкций с учетом их механических свойств (в частности, упругости) относится к числу актуальных научно-технических проблем.

Изучение термодинамических процессов методом математического моделирования приводит к краевым задачам для термоупругих сред. Существуют различные модели термоупругих сред. При изучении медленных динамических процессов чаще используется модель несвязанной термоупругости, в которой не учитывается влияние движения среды на ее температурное поле. Быстрые вибрационные процессы в конструкциях влияют на температурное поле в них. При изучении таких процессов следует использовать модель связанной термоупругости, которая здесь рассматривается для моделирования динамики термоупругих стержней.

В предыдущей статье [1] построены фундаментальные и обобщенные решения уравнений термоупругости в пространственно-одномерном случае, которые определяют напряженно-деформированное состояние и температуру бесконечного термоупругого стержня при действии различных силовых и тепловых источников стационарных колебаний, описываемых обобщенными функциями как регулярными, так и сингулярными, позволяющими исследовать действие сосредоточенных источников различного типа.

Здесь решаются краевые задачи динамики термоупругого стержня конечной длины при стационарных колебаниях. Рассмотрены четыре типа краевых условий на каждом из концов стержня, задающих комплексную амплитуду колебаний перемещений, напряжений, температуры и теплового потока. На основе метода обобщенных функций построены аналитические решения краевых задач при заданных четырех краевых условиях из возможных восьми на двух концах стержня.

Проведена компьютерная реализация решения 1-ой краевой задачи при заданных перемещениях и температуре на концах стержня. Для иллюстрации приведены графики решений.

1. ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ.

Рассмотрим термоупругий стержень длины $2L$, который характеризуется плотностью ρ , жесткостью EJ и термоупругими константами γ, η и κ . Перемещения сечений стержня и температурное поле стержня описываются системой гиперболо-параболических уравнений вида [2]

$$\begin{aligned} \rho c^2 u_{,xx} - \rho u_{,tt} - \gamma \theta_{,x} + \rho F_1 &= 0, \\ \theta_{,xx} - \kappa^{-1} \theta_{,t} - \eta u_{,xt} + F_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $u(x, t)$ – продольные перемещения стержня, $\theta(x, t)$ – относительная температура ($\theta = T(x, t) - T(x, 0)$), T – абсолютная температура, c – скорость распространения упругих волн в стержне, $c = \sqrt{\frac{EJ}{\rho}}$.

Предполагается, что на стержень могут действовать периодические во времени продольная сила и тепловой источник вида

$$F_j(x, t) = F_j(x) \exp(-i\omega t), \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

$F_2 = (\lambda_0 \kappa)^{-1} W(x, t)$, $W(x, t) = W(x) \exp(-i\omega t)$, где W – количество выделенного (поглощенного) тепла на единицу длины стержня за единицу времени, λ_0 – коэффициент теплопроводности.

Термоупругие напряжения в стержне определяются формулой Дюамеля-Неймана:

$$\sigma = \rho c^2 u_{,x} - \gamma \theta. \quad (3)$$

Всюду символ после запятой обозначает частную производную по указанной в индексе переменной ($u_{,x} = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_{,xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и т.п.).

Краевые условия на концах стержня ($x = x_1 = -L$, $x = x_2 = L$) могут быть различными. Здесь сформулируем их для четырех краевых задач, обычно рассматриваемых в классической теории термоупругости [2]:

1КЗ

$$u(x_j, t) = w_j \exp(-i\omega t), \quad \theta(x_j, t) = \theta_j \exp(-i\omega t); \quad j = 1, 2, \quad (4)$$

2КЗ

$$\sigma(x_j, t) = P_j \exp(-i\omega t), \quad \theta_x(x_j, t) = q_j \exp(-i\omega t); \quad j = 1, 2, \quad (5)$$

3КЗ

$$u(x_j, t) = w_j \exp(-i\omega t), \quad \theta_x(x_j, t) = q_j \exp(-i\omega t); \quad j = 1, 2, \quad (6)$$

4КЗ

$$\sigma(x_j, t) = P_j \exp(-i\omega t), \quad \theta(x_j, t) = \theta_j \exp(-i\omega t); \quad j = 1, 2, \quad (7)$$

где w_j, θ_j, P_j, q_j – комплексные амплитуды перемещений, температуры, напряжений и тепловых потоков соответственно, ω – частота колебаний.

Наряду с ними можно поставить краевые задачи, когда на одном конце стержня задаются условия одной краевой задачи, а на втором – условия другой. Здесь построим решение первой краевой задачи.

В силу гармоничности по времени действующих сил и граничных условий, решение задачи можно искать в виде

$$(u, \theta) = (u(x), \theta(x)) \exp(-i\omega t),$$

где комплексные амплитуды $(u(x), \theta(x))$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \rho c^2 u_{,xx} + \rho \omega^2 u - \gamma \theta_{,x} + \rho F_1(x) &= 0, \\ \theta_{,xx} + i\omega \kappa^{-1} \theta + i\omega \eta u_{,x} + F_2(x) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Определим комплексные амплитуды решения, удовлетворяющие (5) и одному из условий (4)-(7) соответственно решаемой КЗ.

Для решения задачи используем теорию обобщенных функций [3]. На ее основе, с использованием матрицы фундаментальных решений $U(x, \omega)$, получим аналитическое решение КЗ, которое имеет вид [4] для $|x| < L$:

$$\begin{aligned} u(x) &= F_1 * U_1^1 + F_2 * U_1^2 + \\ &+ c^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \left\{ (p_k - \check{\gamma} \theta_k) U_1^1(x - (-1)^k L, \omega) + u_k(\omega) U_{1,x}^1(x - (-1)^k L, \omega) \right\} + \\ &+ \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \left\{ (q_k + i\omega \eta w_k) U_1^2(x - (-1)^k L, \omega) + \theta_k(\omega) U_{1,x}^2(x - (-1)^k L, \omega) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta(x) &= F_1 * U_2^1 + F_2 * U_2^2 + \\ &+ c^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \left\{ (p_k - \tilde{\gamma}\theta_k) U_2^1(x - (-1)^k L, \omega) + w_k U_{2,x}^1(x - (-1)^k L, \omega) \right\} + \\ &+ \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} (q_k + i\omega\eta w_k) U_2^2(x - (-1)^k L, \omega) + \theta_k U_{2,x}^2(x - (-1)^k L, \omega), \end{aligned}$$

где $\tilde{\gamma} = \gamma/\rho c^2$.

Свертки для регулярных сил и тепловых источников имеют вид:

$$F_j * U_k^j = H(L - \|x\|) \int_{-L}^L F_j(y) U_k^j(x - y, \omega) dy.$$

Для сингулярных \hat{F}_1, \hat{F}_2 следует пользоваться определением свертки [3].

Формулы (9), (10) определяют перемещение и температуру внутри стержня по известным перемещениям, напряжениям, температуре и тепловым потокам на его концах. Однако, для каждой краевой задачи известны только четыре граничных значения комплексных амплитуд. Для оставшихся четырех неизвестных краевых условий из этой системы нетрудно получить разрешающую систему уравнений, исходя из условий на концах стержня и асимптотических условий U и ее производной в нуле.

2. МАТРИЦА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ $U(x, \omega)$

Фундаментальная матрица $U(x, \omega)$ ранее построена нами в [1] с использованием преобразования Фурье обобщенных функций. Она имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} U_1^j(x, \omega) &= \frac{\delta_1^j \operatorname{sgn}(x)}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} \left\{ i\omega \kappa^{-1} \left(\frac{\sin x \sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2}} - \frac{\sin x \sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_1}} \right) \right. \\ &\quad \left. + (\sqrt{\lambda_1} \sin x \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} \sin x \sqrt{\lambda_2}) \right\} \\ &\quad - \frac{\tilde{\gamma} \delta_2^j \operatorname{sgn}(x)}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} \left(\cos x \sqrt{\lambda_1} - \cos x \sqrt{\lambda_2} \right), \quad j = 1, 2, \end{aligned}$$

$$U_2^j(x, \omega) = \frac{\operatorname{sgn}(x)}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} \left\{ i\omega\eta\delta_1^j (\cos x\sqrt{\lambda_1} - \cos x\sqrt{\lambda_2}) - \omega^2 \left(\frac{\sin x\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_1}} - \frac{\sin x\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2}} \right) \delta_2^j + c^2 (\sqrt{\lambda_1} \sin x\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} \sin x\sqrt{\lambda_2}) \delta_2^j \right\}, \quad j = 1, 2,$$

где

$$\lambda_{1,2} = \frac{\omega}{2c^2} \left\{ (\omega + i\gamma\eta) + ic^2k^{-1} \pm \sqrt{(\omega + i(\gamma\eta + c^2k^{-1}))^2 - 4i\omega c^2k^{-1}} \right\}$$

зависят только от трех термоупругих констант среды:

$$c, \quad \alpha = \gamma\eta, \quad \beta = c^2k^{-1}.$$

Размерность $[\alpha] = [\beta] = [\omega]$. Ее компоненты U_k^j непрерывны в точке $x = 0$, а их производные в этой точке терпят разрыв первого рода:

$$\tilde{U}_{1,x}^j(\pm 0, \omega) = \pm \frac{1}{2}\delta_1^j, \quad \tilde{U}_{2,x}^j(\pm 0, \omega) = \pm \frac{c^2}{2}\delta_1^j.$$

Ее асимптотические свойства подробно описаны в [4]. На их основе и формул (9), (10) в статье [3] построена общая разрешающая система уравнений для определения амплитуд неизвестных граничных функций с использованием граничных условий соответственно решаемой краевой задаче.

3. РАЗРЕШАЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Разрешающая система уравнений на концах стержня представима в матричном виде:

$$A1 \times \begin{pmatrix} w_1 \\ p_1 \\ \theta_1 \\ q_1 \end{pmatrix} + A2 \begin{pmatrix} w_2 \\ p_2 \\ \theta_2 \\ q_2 \end{pmatrix} = b, \quad (9)$$

где

$$A1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ - (U_{1,x}^1 - i\omega\eta U_1^2)_{(2L)} & -U_1^1(2L, \omega) & (-\tilde{\gamma}U_1^1 - U_{1,x}^2)_{(2L)} & -U_1^2(2L, \omega) \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ (-U_{2,x}^1 + i\omega\eta U_2^2)_{(2L)} & -U_2^1(2L, \omega) & (-\tilde{\gamma}U_2^1 - U_{2,x}^2)_{(2L)} & -U_2^2(2L, \omega) \end{pmatrix},$$

$$A2 = \begin{Bmatrix} (U_1^1, x + i\omega\eta U_1^2)_{(-2L)} & U_1^1(-2L, \omega) & (-\tilde{\gamma}U_1^1 + U_1^2, x)_{(-2L)} & U_1^2(-2L, \omega) \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ (U_2^1, x + i\omega\eta U_2^2)_{(-2L)} & U_2^1(-2L, \omega) & -(\tilde{\gamma}U_2^1 + U_2^2, x)_{(-2L)} & U_2^2(-2L, \omega) \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{Bmatrix},$$

$$b = \begin{Bmatrix} (F_1 * \bar{U}_1^1 + F_2 * \bar{U}_1^2)_{x=-L} \\ (F_1 * \bar{U}_1^1 + F_2 * \bar{U}_1^2)_{x=-L} \\ (F_1 * \bar{U}_2^1 + F_2 * \bar{U}_2^2)_{x=L} \\ (F_1 * \bar{U}_2^1 + F_2 * \bar{U}_2^2)_{x=L} \end{Bmatrix}.$$

Здесь в нижних индексах за скобкой указаны значения x , для которого вычисляются выражения в скобках. Из этой системы легко построить линейную систему алгебраических уравнений для любой из рассмотренных краевых задач, оставляя в левой части слагаемые с неизвестными краевыми значениями искомых функций и перенося в правую часть с известными.

4. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА 1 И ЕЕ РЕШЕНИЕ

Рассмотрим первую краевую задачу: известны температура и перемещения на концах стержня (4). В этом случае разрешающая система уравнений имеет вид

$$\{A_{ij}(L, \omega)\}_{4 \times 4} \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ p_2 \\ q_2 \end{pmatrix} = -\{B_{ij}(L, \omega)\} \begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix},$$

где элементы матриц A и B выражаются через элементы матриц $A1$ и $A2$ формулами:

$$A = \begin{Bmatrix} A1_{12} & A1_{14} & A2_{12} & A2_{14} \\ A1_{22} & A1_{24} & A2_{22} & A2_{24} \\ A1_{32} & A1_{34} & A2_{32} & A2_{34} \\ A1_{42} & A1_{44} & A2_{42} & A2_{44} \end{Bmatrix}, \quad B = \begin{Bmatrix} A1_{11} & A1_{13} & A2_{11} & A2_{13} \\ A1_{21} & A1_{23} & A2_{21} & A2_{23} \\ A1_{31} & A1_{33} & A2_{31} & A2_{33} \\ A1_{41} & A1_{43} & A2_{41} & A2_{43} \end{Bmatrix}.$$

Решение задачи 1 реализовано в системе MathCad. Здесь рассмотрен закрепленный на концах стержень, температура которого на концах колеблется с определенной частотой. Расчеты проведены для среды с безразмерными параметрами: $L = 1$, $\gamma = 1$, $\eta = 1$, $k = 1$, $c = 3$, $\rho = 1$.

На рисунках 1, 3, 5, 7 (а,б) представлены амплитуды перемещений и температуры по длине стержня для разных частот: $w = 0.1, 1, 10, 100$.

На рисунках 2, 4, 6, 8 (а,б) изображены действительные и мнимые части комплексных амплитуд перемещений и температуры, которые описывают реальное состояние стержня при $t = 0 + 2\pi n/\omega$ (через четверть периода).

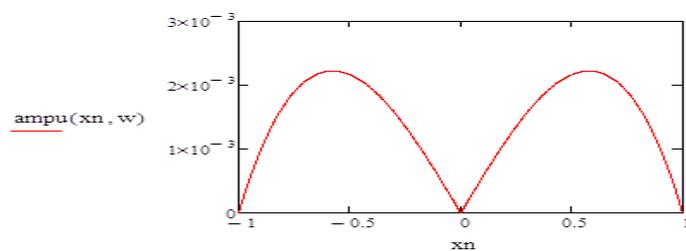
По перемещениям наблюдается образование стоячих волн. При низких частотах ($\omega = 0.1$) середина стержня неподвижна, максимальные продольные смещения наблюдаются на четверти длины от концов стержня. А максимальная температура – в середине стержня.

При низких частотах максимальная температура в середине стержня выше, чем температура на его концах. При повышении частоты количество локальных экстремумов возрастает и амплитуда температуры увеличивается в сравнении с ее значением на концах стержня, появляются узловые точки, где и перемещения, и температура близки или равны нулю. Но экстремумы амплитуд перемещений и температур сдвинуты относительно друг друга (там, где перемещения нулевые, наблюдается максимум амплитуды температуры).

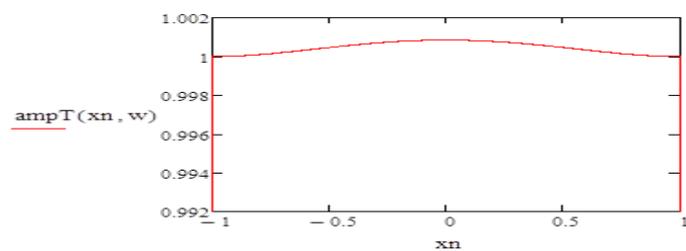
В таблице 1 представлены максимальные амплитуды перемещений и температуры в рассмотренном диапазоне частот. С ростом частоты амплитуда перемещений резко возрастает, а затем начинает падать. Это же наблюдается и для температуры. При колебаниях температуры на концах максимальная амплитуда колебаний температуры в стержне повышается на 20%.

Таблица 1 – Максимальные амплитуды перемещений и температуры

w	U max	T max
0.1	0.0022	1.001
1	0.032	1.168
10	0.443	1.2
100	0.28	1.04



а



б

Рисунок 1 – Амплитуды перемещений (а) и температуры (б) по длине стержня: $\omega=0.1$

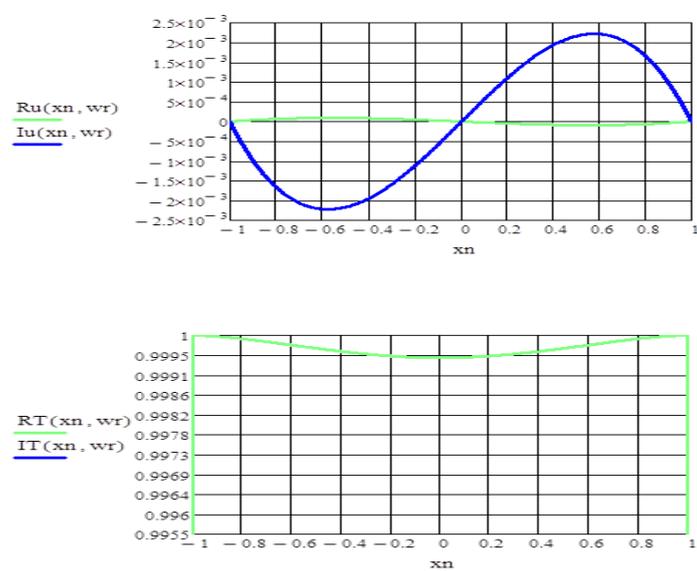
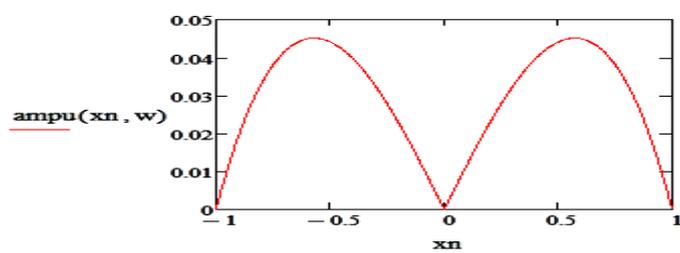
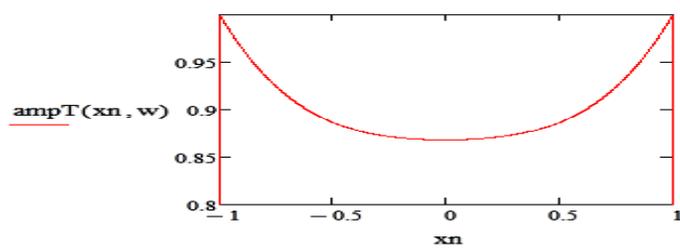


Рисунок 2 – Перемещения и температура по длине стержня при $t = 2\pi n/\omega$
и $t = 2\pi n/\omega + \pi/2\omega$: $\omega=0.1$

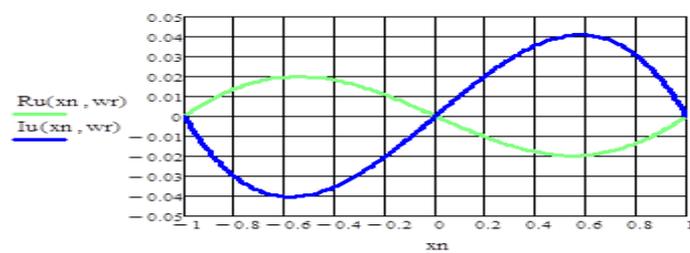


а

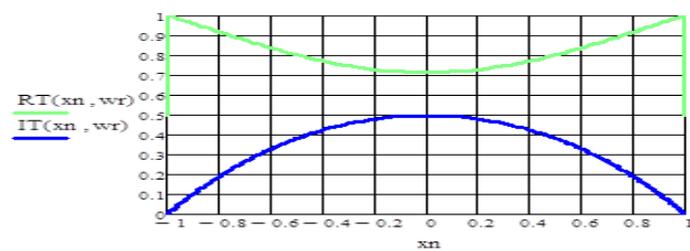


б

Рисунок 3 – Амплитуды перемещений (а) и температуры (б) по длине стержня: $\omega=1$

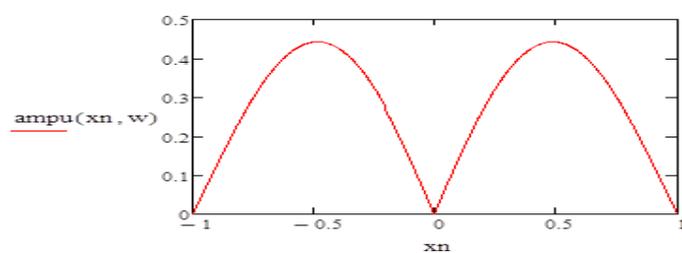


а



б

Рисунок 4 – Перемещения и температура по длине стержня при $t = 2\pi n/\omega$ и $t = 2\pi n/\omega + \pi/2\omega$: $\omega=1$



а

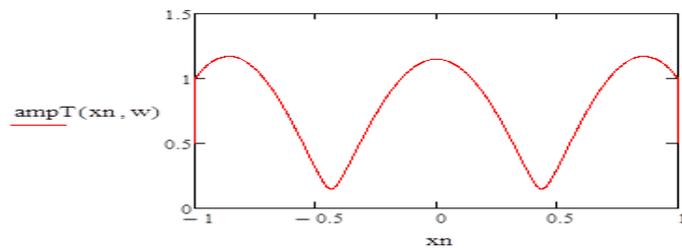


Рисунок 5 – Амплитуды перемещений (а) и температуры (б) по длине стержня: $\omega=10$

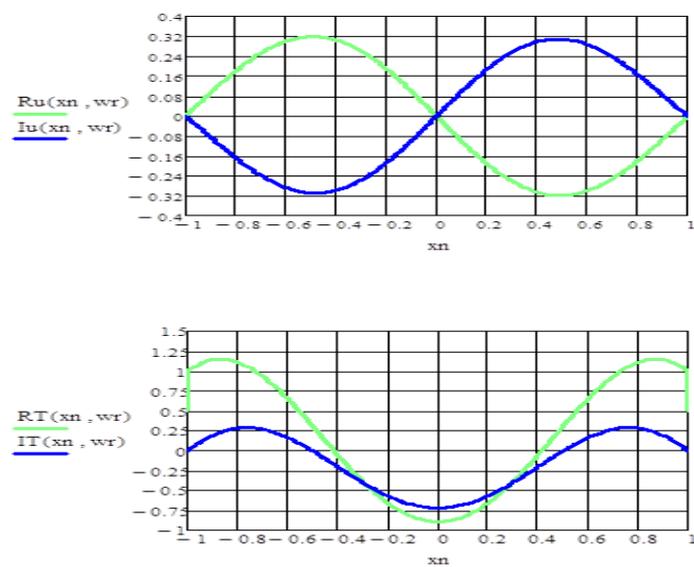
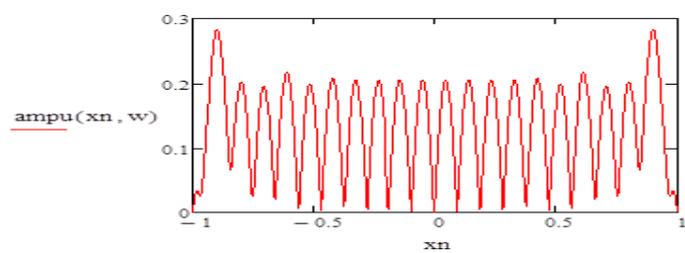
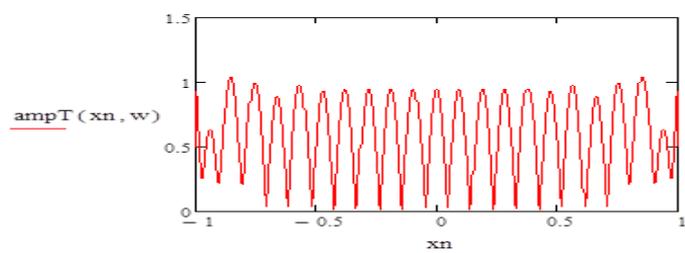


Рисунок 6 – Перемещения и температура по длине стержня при $t = 2\pi n/\omega$ и $t = 2\pi n/\omega + \pi/2\omega$: $\omega=10$



а



б

Рисунок 7 – Амплитуды перемещений (а) и температуры (б) по длине стержня: $\omega=100$

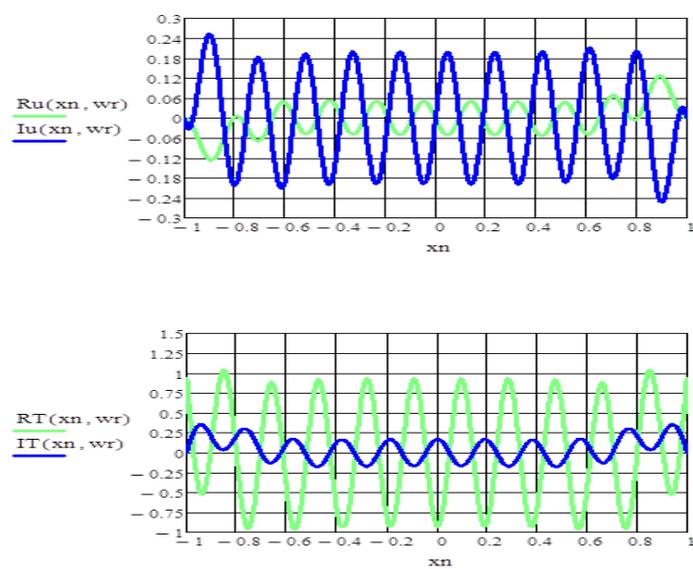


Рисунок 8 – Перемещения и температура по длине стержня при $t = 2\pi n/\omega$ и $t = 2\pi n/\omega + \pi/2\omega$: $\omega=100$

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Алексеева Л.А., Ахметжанова М.М. Фундаментальные и обобщенные решения уравнений динамики термоупругих стержней. 1. Стационарные колебания // Математический журнал. – 2014. – Т. 14, №2. – С. 5-20.
- 2 Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. – М.: Мир, 1970.
- 3 Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М., 1978.
- 4 Алексеева Л.А. Стационарные краевые задачи динамики термоупругих стержней // Известия НАН РК. Сер. физ.-матем. – 2014. – №3. – С. 144-152.

Статья поступила в редакцию 27.07.2015

Алексеева Л.А., Ахметжанова М.М. ТЕРМОСЕРПІМДІ ӨЗЕКТЕГІ ҚОЗҒАЛЫС ТЕҢДЕУІЛЕРІНІҢ ФУНДАМЕНТАЛДЫ ЖӘНЕ ЖАЛПЫЛАМА ШЕШІМДЕРІ. 2. СТАЦИОНАРЛЫ ТЕРБЕЛІСТЕРДІҢ БІРІНШІ ШЕТТІК ЕСЕБІ.

Үзіндығы ақырлы термосерпімді өзектің бекітілген жиіліктегі периодты сыртқы күштік және жылулық әсерлер кезіндегі қозғалысы қарастырылады. Оны сипаттау үшін байланыстырылған термосерпімділік теңдеулер қолданылады, мұнда температураның серпімді деформацияларға және кернеулерге әсері, оған қоса серпімді деформация жылдамдығының өзектің температура өрісіне әсері ескерілген. Әр түрлі шекаралық шарттар үшін термосерпімділік өзек қозғалысының шеттік есебінің аналитикалық шешімі жалпылама функциясының тәсілі негізінде құрастырылды. Өзек ұштарындағы берілген орын ауыстырулар мен температура және массалық күштер мен жылу көздерінің уақыт бойынша периодты әсер ететін жағдайлары үшін бірінші шеттік есептің компьютерлік жүзеге асырылуы орындалды. Өзектің орын ауыстырулары мен температурасының әр түрлі жиіліктері үшін есептеулер нәтижелері келтірілді және шешімдердің салыстырмалы талдауы жүргізілді.

Alexeyeva L.A., Ahmedzhanova M.M. FUNDAMENTAL AND GENERALIZED SOLUTIONS OF THE EQUATIONS OF THE DYNAMICS OF THERMOELASTIC RODS. 2. THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM OF STATIONARY VIBRATIONS

Here the dynamics of thermoelastic rods of a finite length under the action of periodic external force and thermal impacts with a fixed frequency is considered. To describe this the model of connected thermoelasticity is used which is taking into account the impact of temperature on the elastic deformation and stresses, as well as the effect of elastic deformation in the temperature field in the rod. Based on the method of generalized functions the analytical solutions of boundary value problems of the dynamics of thermoelastic rod with different type of boundary conditions has been constructed. The computer implementation of the solution of the first boundary value problem has been elaborated when the displacements and the temperature at the ends of the rod and acting periodic by time mass forces and heat sources are given. The results of calculations of the displacements and the temperature of the rod at various frequencies are presented and comparative analysis of the solutions are performed.

УДК 517.956

А.Т. АСАНОВА, А.Е. ИМАНЧИЕВ

Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: anartasan@gmail.com, anarasanova@list.ru
Актюбинский региональный государственный университет им. К.Жубанова
030000, Актобе, пр. А.Молдагуловой, 34, e-mail: imanchiev_ae@mail.ru

О РАЗРЕШИМОСТИ СЕМЕЙСТВА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается семейство краевых задач Валле-Пуссена для обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка с переменными коэффициентами. Установлены достаточные условия существования единственного решения исследуемой задачи в терминах исходных данных. Предложен алгоритм нахождения приближенного решения семейства краевых задач Валле-Пуссена для обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка.

Ключевые слова: семейство задач Валле-Пуссена, дифференциальное уравнение высокого порядка, однозначная разрешимость, метод решения.

Рассматривается семейство краевых задач Валле-Пуссена для обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка с переменными коэффициентами в прямоугольной области $[0, T] \times [0, \omega]$:

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} = \sum_{i=1}^{n-1} A_i(t, x) \frac{\partial^{n-i} u}{\partial t^{n-i}} + A_n(t, x)u + f(t, x), \quad (1)$$

© А.Т. Асанова, А.Е. Иманчиев, 2015.

Keywords: family of Vallee-Poussin problem, high order differential equation, unique solvability

2010 Mathematics Subject Classification: 34A30, 34B08, 34B10

$$u(t_i, x) = d_i^{(0)}(x), \quad \frac{\partial u(t_i, x)}{\partial t} = d_i^{(1)}(x), \quad \dots, \quad \frac{\partial^{\nu_i-1} u(t_i, x)}{\partial t^{\nu_i-1}} = d_i^{(\nu_i-1)}(x), \quad (2)$$

$i = \overline{1, m}$, $x \in [0, \omega]$, где коэффициенты $A_k(t, x)$ – непрерывные на $\Omega = [0, T] \times [0, \omega]$ функции, $k = \overline{1, n}$, правая часть $f(t, x)$ – непрерывная на Ω функция, $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_{m-1} < t_m = T$, $\sum_{i=1}^m \nu_i = n$.

Решением семейства задач Валле-Пуссена (1), (2) называется функция $u(t, x)$, непрерывная на Ω , имеющая непрерывные частные производные до n -го порядка на Ω и удовлетворяющая дифференциальному уравнению высокого порядка (1) при всех $(t, x) \in \Omega$, краевым условиям (2) на линиях t_i , $i = \overline{1, m}$.

Многоточечные краевые задачи относятся к одной из важных и активно развивающихся областей качественной теории дифференциальных уравнений в связи с многочисленными приложениями в теории колебаний, в теории импульсных систем, вариационном исчислении, оптимальном управлении и теории сплайнов. Рассматриваемая многоточечная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения высокого порядка – задача Валле-Пуссена (1), (2) имеет прямое отношение к теории интерполирования и используется в теории многоопорных балок [1]–[4]. При исследовании многоточечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка возникает ряд трудностей, связанных с промежуточными точками, входящими в краевые условия, например, нарушение гладкости функции Грина, отсутствие сопряженной задачи и др. Для решения указанных проблем предлагаются разные подходы и способы [1]–[5]. Одним из путей преодоления трудностей является разработка конструктивных методов исследования многоточечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, не прибегая к фундаментальной матрице и функции Грина. В работах [6], [7] многоточечная краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений исследовалась методом параметризации [8]. На его основе были получены необходимые и достаточные условия однозначной корректной разрешимости рассматриваемой задачи в терминах исходных данных и построены алгоритмы нахождения ее решения.

В настоящей работе исследуется семейство краевых задач Валле-Пуссена для обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка,

где роль параметра играет переменная x , непрерывно изменяющаяся на отрезке $[0, \omega]$. Семейства краевых задач Валле-Пуссена для обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка часто встречаются при решении начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка [9]–[11]. Нахождение эффективных признаков разрешимости семейства краевых задач Валле-Пуссена относится к актуальной проблеме теории начально-краевых задач для уравнений в частных производных высокого порядка. На основе метода введения функциональных параметров [12] построены алгоритмы нахождения приближенного решения исследуемой задачи. Получены достаточные условия однозначной разрешимости семейства краевых задач Валле-Пуссена (1), (2) в терминах коэффициентов дифференциального уравнения. Результаты данной работы при отсутствии переменной x , анонсированы в [13]. Установлены достаточные условия существования единственного решения в терминах коэффициентов дифференциального уравнения.

Схема метода введения дополнительных параметров.

Пусть $\lambda_1(x) = u(t_1, x)$, $\lambda_2(x) = \frac{\partial u(t_1, x)}{\partial t}$, ..., $\lambda_n(x) = \frac{\partial^{n-1} u(t_1, x)}{\partial t^{n-1}}$.

В задаче (1), (2) осуществим следующую замену функции $u(t, x)$:

$$u(t, x) = z(t, x) + \sum_{k=1}^n \frac{(t-t_1)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda_k(x)$$

и переходим к эквивалентной задаче:

$$\frac{\partial^n z}{\partial t^n} = \sum_{i=1}^n A_i(t, x) \frac{\partial^{n-i} z}{\partial t^{n-i}} + \sum_{i=1}^n A_i(t, x) \sum_{k=1}^i \frac{(t-t_1)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda_k(x) + f(t, x), \quad (3)$$

$$z(t_1, x) = 0, \quad \frac{\partial z(t_1, x)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 z(t_1, x)}{\partial t^2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{n-1} z(t_1, x)}{\partial t^{n-1}} = 0, \quad (4)$$

$$z(t_i, x) + \sum_{k=1}^n \frac{(t_i - t_1)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda_k(x) = d_i^{(0)}(x),$$

$$\frac{\partial z(t_i, x)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(t_i - t_1)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda_{k+1}(x) = d_i^{(1)}(x), \quad \dots,$$

$$\frac{\partial^{\nu_i-1} z(t_i, x)}{\partial t^{\nu_i-1}} + \sum_{k=1}^{n-\nu_i+1} \frac{(t_i - t_1)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda_{k+\nu_i-1}(x) = d_i^{(\nu_i-1)}(x), \quad i = \overline{1, m}. \quad (5)$$

Решением задачи (3)–(5) является $(n+1)$ -компонентная система $(z(t, x), \lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x))$, где функция $z(t, x)$ непрерывна по t, x на Ω , имеет непрерывные частные производные по t до n -го порядка на Ω , функции $\lambda_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, непрерывны по x на $[0, \omega]$, удовлетворяют семейству дифференциальных уравнений с функциональными параметрами (3), начальным условиям (4), краевым условиям (5).

Задачи (1), (2) и (3)–(5) эквивалентны. Если функция $z(t, x)$ – решение семейства краевых задач (1), (2), то $(n+1)$ -компонентная система $(z(t, x), \lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x))$, где

$$\lambda_1(x) = u(t_1, x), \quad \lambda_2(x) = \frac{\partial u(t_1, x)}{\partial t}, \quad \dots, \quad \lambda_n(x) = \frac{\partial^{n-1} u(t_1, x)}{\partial t^{n-1}},$$

будет решением задачи (3)–(5). И наоборот, если $(n+1)$ -компонентная система $(\tilde{z}(t, x), \tilde{\lambda}_1(x), \tilde{\lambda}_2(x), \dots, \tilde{\lambda}_n(x))$ – решение задачи (3)–(5), то функция

$$\tilde{u}(t, x) = \tilde{z}(t, x) + \sum_{k=1}^n \frac{(t - t_1)^{k-1}}{(k-1)!} \tilde{\lambda}_k(x)$$

будет решением исходного семейства краевых задач (1), (2).

При фиксированных значениях параметров $\lambda_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, задача (3), (4) является семейством задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка с начальными условиями на линии $t = t_1$. Соотношения (5) позволяют определить неизвестные параметры $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Решение задачи Коши – функция $z(t, x)$ удовлетворяет интегральному соотношению

$$z(t, x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_1}^t (t-s)^{n-1} \varphi(s, x) ds, \quad (t, x) \in \Omega, \quad (6)$$

где $\varphi(t, x) = \frac{\partial^n z}{\partial t^n}$.

Из представления (6) можем определить производные

$$\frac{\partial^l z(t, x)}{\partial t^l} = \frac{1}{(n-l-1)!} \int_{t_1}^t (t-s)^{n-l-1} \varphi(s, x) ds, \quad (t, x) \in \Omega, \quad l = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Функция $\varphi(t, x)$ удовлетворяет семейству интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$\varphi(t, x) = \int_{t_1}^t K(t, s, x) \varphi(s, x) ds + F(t, x), \quad (t, x) \in \Omega, \quad (8)$$

где ядро $K(t, s, x)$ и функция $F(t, x)$ определены соответственно выражениями

$$K(t, s, x) = \sum_{i=1}^n A_i(t, x) \frac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!}, \quad (t, x) \in \Omega, \quad s \in [0, T], \quad (9)$$

$$F(t, x) = f(t, x) + \sum_{i=1}^n A_i(t, x) \sum_{k=1}^i \frac{(t-t_1)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda_k(x), \quad (t, x) \in \Omega. \quad (10)$$

Вместо $\varphi(s, x)$ в (6), (7) подставив соответствующее выражение из (8), при $t = s$ получим

$$z(t, x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_1}^t (t-s)^{n-1} \int_{t_1}^s K(s, s_1, x) \varphi(s_1, x) ds_1 ds + \\ + \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_1}^t (t-s)^{n-1} F(s, x) ds, \quad (t, x) \in \Omega. \quad (11)$$

$$\frac{\partial^l z(t, x)}{\partial t^l} = \frac{1}{(n-l-1)!} \int_{t_1}^t (t-s)^{n-l-1} \int_{t_1}^s K(s, s_1, x) \varphi(s_1, x) ds_1 ds + \\ + \frac{1}{(n-l-1)!} \int_{t_1}^t (t-s)^{n-l-1} F(s, x) ds, \quad (t, x) \in \Omega, \quad l = \overline{1, n}. \quad (12)$$

Определим из (11), (12) значения функции $u(t, x)$ и ее производных до $(\nu_i - 1)$ -го порядка на линии $t = t_i$ и, подставив в соответствующие соотношения из (5), получим систему линейных функциональных уравнений относительно $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$:

$$\int_{t_1}^{t_i} \frac{(t_i - s)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{j=1}^n A_j(s, x) \sum_{k=1}^j \frac{(s-t_1)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda_k(x) ds +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^n \frac{(t_i - t_1)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda_k(x) = d_i^{(0)}(x) - \int_{t_1}^{t_i} \frac{(t_i - s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s, x) ds - \\
& \quad - \int_{t_1}^{t_i} \frac{(t_i - s)^{n-1}}{(n-1)!} \int_{t_1}^s K(s, s_1, x) \varphi(s_1, x) ds_1 ds, \\
& \quad \int_{t_1}^{t_i} \frac{(t_i - s)^{n-2}}{(n-2)!} \sum_{j=1}^n A_j(s, x) \sum_{k=1}^j \frac{(s - t_1)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda_k(x) ds + \\
& + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(t_i - t_1)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda_{k+1}(x) = d_i^{(1)}(x) - \int_{t_1}^{t_i} \frac{(t_i - s)^{n-2}}{(n-2)!} f(s, x) ds - \\
& \quad - \int_{t_1}^{t_i} \frac{(t_i - s)^{n-2}}{(n-2)!} \int_{t_1}^s K(s, s_1, x) \varphi(s_1, x) ds_1 ds, \quad \dots, \\
& \quad \frac{1}{(n - \nu_i)!} \int_{t_1}^{t_i} \frac{(t_i - s)^{n-\nu_i}}{(n - \nu_i)!} \sum_{j=1}^n A_j(s, x) \sum_{k=1}^j \frac{(s - t_1)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda_k(x) ds + \\
& + \sum_{k=1}^{n-\nu_i+1} \frac{(t_i - t_1)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda_{k+\nu_i-1}(x) = d_i^{(\nu_i-1)}(x) - \int_{t_1}^{t_i} \frac{(t_i - s)^{n-\nu_i}}{(n - \nu_i)!} f(s, x) ds - \\
& \quad - \int_{t_1}^{t_i} \frac{(t_i - s)^{n-\nu_i}}{(n - \nu_i)!} \int_{t_1}^s K(s, s_1, x) \varphi(s_1, x) ds_1 ds, \quad i = \overline{1, m}. \quad (13)
\end{aligned}$$

В соотношениях (13) матрицу, составленную из коэффициентов при $\lambda_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, обозначим через $Q(t_1, t_2, \dots, t_m, x)$. Тогда систему уравнений (13) можно переписать в виде

$$Q(t_1, t_2, \dots, t_m, x) \lambda(x) = -F(t_1, t_2, \dots, t_m, x) - G(t_1, t_2, \dots, t_m, x, \varphi), \quad (14)$$

где $x \in [0, \omega]$, $F(t_1, t_2, \dots, t_m, x)$ – n -вектор-функция, составленная из $d_i^{(j-1)}(x)$, $j = \overline{1, \nu_i}$, и интегралов функции $f(t, x)$, $G(t_1, t_2, \dots, t_m, x, \varphi)$ – n -вектор-функция, составленная из слагаемых, содержащих интегралы неизвестной функции $\varphi(t, x)$.

Соотношения (8) и (14) составляют замкнутую $(n+1)$ -компонентную систему уравнений относительно $\varphi(t, x)$, $\lambda_j(x)$, $j = \overline{1, n}$.

Если известна функция $\varphi(t, x)$, то из (14) можно определить параметры $\lambda_j(x)$, $j = \overline{1, n}$, при обратимости матрицы $Q(t_1, t_2, \dots, t_m, x)$ для всех $x \in [0, \omega]$, а из соотношения (6) – функцию $z(t, x)$ и, составляя сумму $z(t, x) + \sum_{k=1}^n \frac{(t-t_1)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda_k(x)$, находим $u(t, x)$ – решение исходной задачи (1), (2). Обратно, если известны параметры $\lambda_j(x)$, $j = \overline{1, n}$, то из семейства интегральных уравнений Вольтерра второго рода (8) находим функцию $\varphi(t, x)$, затем из соотношения (6) определяем функцию $z(t, x)$ и, снова составляя сумму $z(t, x) + \sum_{k=1}^n \frac{(t-t_1)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda_k(x)$, определяем $u(t, x)$ – решение задачи (1), (2).

Так как неизвестными являются как функция $\varphi(t, x)$, так и параметры $\lambda_j(x)$, $j = \overline{1, n}$, для нахождения решения системы уравнений (8), (14) применяется итерационный процесс на основе следующего алгоритма.

0-шаг. Пусть матрица $Q(t_1, t_2, \dots, t_m, x)$ обратима для всех $x \in [0, \omega]$. Из системы (14) при $\varphi(t, x) = 0$ находим начальные приближения $\lambda_j^{(0)}(x)$, $j = \overline{1, n}$. Из семейства интегральных уравнений (8) при $\lambda_j(x) = \lambda_j^{(0)}(x)$, $j = \overline{1, n}$, находим $\varphi^{(0)}(t, x)$ для всех $(t, x) \in \Omega$, затем из соотношения (6) определяем $z^{(0)}(t, x)$ для всех $(t, x) \in \Omega$.

1-шаг. Из системы (14) при $\varphi(t, x) = \varphi^{(0)}(t, x)$ находим $\lambda_j^{(1)}(x)$, $j = \overline{1, n}$. Из семейства интегральных уравнений (8) при $\lambda_j(x) = \lambda_j^{(1)}(x)$, $j = \overline{1, n}$, находим $\varphi^{(1)}(t, x)$ для всех $(t, x) \in \Omega$, снова из соотношения (6) определяем $z^{(1)}(t, x)$ для всех $(t, x) \in \Omega$ и т.д.

k -шаг. Из системы (14) при $\varphi(t, x) = \varphi^{(k-1)}(t, x)$ находим $\lambda_j^{(k)}(x)$, $j = \overline{1, n}$. Из семейства интегральных уравнений (8) при $\lambda_j(x) = \lambda_j^{(k)}(x)$, $j = \overline{1, n}$, находим $\varphi^{(k)}(t, x)$ для всех $(t, x) \in \Omega$, снова из соотношения (6) определяем $z^{(k)}(t, x)$ для всех $(t, x) \in \Omega$.

Введем обозначения

$$\alpha(t, x) = \max_{s \in [0, T]} |K(t, s, x)|, \quad \beta(x) = \max_{t \in [0, T]} \sum_{i=1}^n |A_i(t, x)| \sum_{k=1}^i \frac{(t-t_1)^{k-1}}{(k-1)!},$$

$$\theta = \max_{i=1, m} \max_{j=1, \nu_i} \frac{(t_i-t_1)^{n-j+1}}{(n-j+1)!}.$$

Следующее утверждение обеспечивает реализуемость и сходимость предложенного алгоритма, условия которого одновременно гарантируют

существование единственного решения задачи (1), (2).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(n \times n)$ -матрица $Q(t_1, t_2, \dots, t_m, x)$ обратима для всех $x \in [0, \omega]$ и выполняются условия

1) $\| [Q(t_1, t_2, \dots, t_m, x)]^{-1} \| \leq \gamma(x)$, где $\gamma(x)$ – положительная, непрерывная на $[0, \omega]$ функция;

2) $q(x) = \gamma(x) \cdot \theta \cdot \beta(x) \cdot \max_{i=1, m} [e^{\alpha(t_i, x)(t_i - t_1)} - 1] \leq \chi < 1$, где χ – const.

Тогда семейство краевых задач Валле-Пуссена для обыкновенных дифференциальных уравнений (1), (2) имеет единственное решение.

Доказательство теоремы проводится по схеме доказательства теоремы 1 из [6] и предложенного алгоритма.

Таким образом, теорема устанавливает условия однозначной разрешимости семейства краевых задач Валле-Пуссена для обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка в терминах коэффициентов $A_i(t, x)$, $i = \overline{1, n}$, расстояний между линиями $t = t_j$ и $t = t_1$, где $j = \overline{1, m}$. Предлагаемый алгоритм позволяет найти приближенное решение функционального уравнения (14) при найденных приближениях решений семейств задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами (3), (4). Условия теоремы обеспечивают сходимость построенных приближенных решений к точному решению семейств краевых задач Валле-Пуссена (1), (2).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Рассматриваемое семейство краевых задач Валле-Пуссена можно свести к семейству многоточечных краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений со специальной коэффициентной матрицей и матрицами в граничном условии. К полученной задаче можно применить результаты работы [12].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Используя классический подход – представление решения семейства интегральных уравнений Вольтерра второго рода (8) через ее резольвенту, определение функциональных параметров $\lambda_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, можно свести к решению некоторого функционального уравнения, построенного аналогично (14) с известной правой частью. Такой подход был реализован применительно к задаче Валле-Пуссена для обыкновенного дифференциального уравнения высокого порядка при отсутствии переменной x в работе [14].

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Покорный Ю.В. О некоторых оценках функции Грина многоточечной краевой задачи // Матем. заметки. – 1968. – Т. 4, № 4. – С. 533-540.
- 2 Покорный Ю.В. О неклассической задаче Валле-Пуссена // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. 14, № 6. – С. 1018-1027.
- 3 Кигурадзе И.Т. Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Современные проблемы математики. Новейшие достижения. – М.: Наука, 1987. – Т. 30, – С. 3-103.
- 4 Agarwal R.P. Focal Boundary value problems for differential and difference equations. – Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1998.
- 5 Покорный Ю.В. О нулях функции Грина задачи Валле-Пуссена // Матем. сборник. – 2008. – Т. 199, № 6. – С. 105-136.
- 6 Иманчиев А.Е. Необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости линейной многоточечной краевой задачи // Изв. МОН РК, НАН РК. Сер. физ.-матем. – 2002. – № 3. – С. 79-84.
- 7 Джумабаев Д.С., Иманчиев А.Е. Корректная разрешимость линейной многоточечной краевой задачи // Матем. журнал. – 2005. – Т. 5, №1(15). – С. 30-38.
- 8 Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1989. – Т. 29, №1. – С. 50-66.
- 9 Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. Думка, 1984.
- 10 Кигурадзе Т.И., Кусано Т. О корректности начально-краевых задач для линейных гиперболических уравнений высших порядков с двумя независимыми переменными // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, №4. – С. 516-526.
- 11 Kiguradze T. The Valle-Poussin problem for higher order nonlinear hyperbolic equations // Computers Mathematics with Applications. – 2010. – V. 59. – P.994-1002.
- 12 Асанова А.Т. О разрешимости семейства многоточечных краевых задач для системы дифференциальных уравнений и их приложения к нелокальным краевым задачам // Матем. журнал. – 2013. – Т. 13, №3. – С. 38-42.
- 13 Асанова А.Т., Иманчиев А.Е. Об алгоритмах нахождения решения краевой задачи Валле-Пуссена для обыкновенного дифференциального уравнения // Матем. 16-й Межд. научн. конф. им. акад. М. Кравчука "Дифференц. и инт. уравнения, их прим." – Киев. – 2015. – Т.1. – С.16-20.
- 14 Иманчиев А.Е. О разрешимости краевой задачи Валле-Пуссена для обыкновенного дифференциального уравнения // Сб. научн. сем. "Проблемы дифференц. уравн. и матем. физики", посв. 70-летию проф. Ж.А. Сартабанова. – Актобе, 2012. – С. 81-85.

Статья поступила в редакцию 05.10.2015

Асанова А.Т., Иманчиев А.Е. ЖӘЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН ВАЛЛЕ-ПУССЕН ШЕТТІК ЕСЕПТЕР ӘУЛЕТІНІҢ ШЕШІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ

Коэффициенттері айнымалы жоғарғы ретті жәй дифференциалдық теңдеулер үшін Валле-Пуссен шеттік есептер әулеті қарастырылады. Зерттеліп отырған есептің жалғыз шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары бастапқы берілімдер терминінде тағайындалған. Жоғарғы ретті жәй дифференциалдық теңдеулер үшін Валле-Пуссен шеттік есептер әулетінің жуық шешімін табу алгоритмі ұсынылған.

Asanova A.T., Imanchiev A.E. ON SOLVABILITY OF VALLE-POUSSIN BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

The family of Valle-Poussin boundary value problems for high order ordinary differential equations with variable coefficients is considered. The sufficient conditions of the existence of a unique solution of the problem in the terms of the initial data are established. The algorithm of obtaining the approximate solution of the family of Valle-Poussin boundary value problem for high order ordinary differential equations is proposed.

УДК 519.68; 681.513.7; 612.8.001.57; 007.51/.52

B.S. BAIZHANOV, T.V. BATURA, F.A. MURZIN, M.YU. NEMCHENKO, A.A. PERFILEV

A.P. Ershov Institute of Informatics Systems, Novosibirsk, Russia
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
Suleyman Demirel University, Almaty, Kazakhstan
e-mail: baizhanov@hotmail.com, tbaturo@ngs.ru, murzin@iis.nsk.su,
nemchenko.imim@mail.ru, a_perfilev@mail.ru

SIMILARITY ESTIMATION ALGORITHMS FOR NATURAL LANGUAGE SENTENCES

The article examines the problem of creating algorithms for estimation of semantic similarity between sentences of a text and a search query. One of the methods described in this work allows to match paraphrased variants of sentences based on analysis of their syntactic structure. The algorithm is based on processing and using link diagrams created by Link Grammar Parser. The second method allows to estimate relevance of sentences by representing them as first order predicate calculus formulae. On the basis of this representation it is possible to check a number of logical properties of these sentences allowing to determine their similarity.

Ключевые слова: *Information retrieval system; Link Grammar Parser; syntactic analysis; semantics; relevance*

1 INTRODUCTION

Under conditions of rapid growth of volumes of information resources, there is a necessity of quality improvement of information search. It forces the

© B.S. Baizhanov, T.V. Batura, F.A. Murzin, M.Yu. Nemchenko, A.A. Perfilev, 2015.

Keywords: *Information retrieval system; Link Grammar Parser; syntactic analysis; semantics; relevance*

2010 Mathematics Subject Classification: 33C10, 34B30, 35J, 35P10

developers of search systems to improve the algorithms of search and document ranking so that they be capable to consider the query semantics.

Many researchers tend to the necessity of carrying out deep semantic analysis in order to make some semantic images of texts on the basis of which it is possible to carry out ranking of documents [1, 2]. This approach, undoubtedly, is the most reasonable; however, it requires careful and long-term work on creation of suitable tools for automatic text processing [3]. In particular, the detailed description of various fields of knowledge can be required. Therefore, search of partial solutions, one of which is presented in this work, is also expedient.

The main goal is to construct algorithms which can deduce an adequate estimation of the text relevance by getting into its structure. It is important that the given estimation would be deduced on the basis of the context of search query, and would not be limited only by keywords, their similarity or frequency.

The method described in this work allows us to compare the natural language constructions and in some cases to identify even the paraphrased variants of sentences on the basis of the analysis of their syntactic structures. Thus we can compare a search query with a text in order to find out its relevance to this search query. The method is based on processing and using the diagrams of links created by Link Grammar Parser software [4], [5].

The basic algorithm for calculating the degree of correspondence between link diagrams and natural language constructions was described in [6], [7]. The studies were completely focused on the English-language sources. Based on the above ideas, the information retrieval system ViNet Search was implemented. Testing has shown that the proposed algorithm efficiently solve the problems of information retrieval.

Then the approach was essentially generalized. Here were considered methods based on using logical rules. It was shown that the basic algorithm considers only the so-called invariant connectors, not taking into consideration more complicated logics. For the English language, we have 19 rules. Thus, some of them allow three to five modifications. As a result, approximately 30 rules may be used.

But it is also possible to make a conclusion that further development of this method will not lead to substantial improvement of the obtained results.

One of the reasons is that the possibilities of Link Grammar Parser at the current stage of work are almost completely exhausted. And, in spite of the fact that Link Grammar Parser possesses a number of advantages (high speed, partial coverage of semantics, many examples of its successful application in the systems of Internet texts filtration), it makes us to stay at the level of syntax with partial semantics coverage. Therefore, if we want to have essential advancement, it is necessary to move to a higher level, to knowledge engineering.

2 METASEARCH SYSTEM INETSEARCH

The system iNetSearch is installed on the user part and requires the Internet connection. It uses the results of inquiries to existing search systems (for example, the search service nigma.ru was used for testing, because this system forwards an query to other search systems, thereby increasing the possible area of search). The implemented system iNetSearch corrects the search results and specifies (filters) them.

The search base of iNetSearch contains the text content of Internet-pages, which are taken from the download manager built into the system. The input sentences are translated into syntactic diagrams. The compiler carries out lemmatization of words adding some meta-information and adds syntactic links between them attributing types to these links. The syntactic parser allows us to consider attributing dependences between subordinate sentences. Thus we obtain rather essential information about a sentence. The syntactic parser generates the diagrams of syntactic analysis used in the system. They reflect the syntactic interrelation between words.

The main goal consists of estimating the relevance of the text to the search query. It becomes as follows. There are the available diagrams of a syntactic analysis for the given query and for a specific proposal from the text. In the basic algorithm it is supposed, that if these diagrams are similar on a lexicon and on a structure of links than we suppose, that sentences (and as a whole the text) are relevant to query. In a case when the rephrasing are considered, the generalized algorithm on the basis of the logic approach has a more refined form, but basically the same idea is used.

3 A SOFTWARE SYSTEM LINK GRAMMAR PARSER

Link Grammar Parser is a syntactic analyzer of the English language developed in 1990th at the Carnegie Mellon University, USA. Note that, in general, the underlying theory differs from the classical theory of syntax. Having received a sentence, the system attributes it with a syntactic structure which consists of a set of marked links connecting the pairs of words. The detailed description of the system can be found in [4], [5].

Link Grammar Parser includes approximately 60000 dictionary forms. It allows us to analyze a huge part of syntactic constructions, including numerous rare expressions and idioms. The parser work is stable; it can skip a part of a sentence, it cannot understand and define some structure for the rest of the sentence. It is capable to process an unknown lexicon, and do reasonable assumptions about the syntactic category of unknown words based on the context and writing. The parser contains data about various names, numerical expressions, and punctuation marks.

The rules of words connection are described in the set of dictionaries. For each word in a dictionary, it is fixed what are its connectors with other words in a sentence. A connector has a name with which the considered unit (word) can enter a sentence. For example, the mark S corresponds to communication between a subject and a predicate, O is a connector between an object and a predicate. There are more than one hundred most important basic connectors. To denote the direction of a connector, the sign "–" is used to indicate a right connector and the sign "–" to indicate a left connector. Left-directed and right-directed connectors of the same type (see Fig. 1) make up a connection (link).

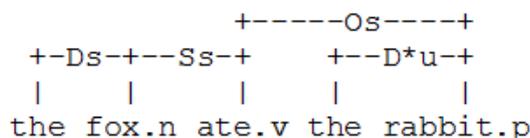


Figure 1 – An example of syntactic analysis of a sentence

The obtained diagrams, as a matter of fact, are analogues to the so-called trees of submission of sentences. In the trees of submission, it is possible to raise a question from the main word in the sentence to the minor one. Thus,

words are built in a treelike structure. The syntactic analyzer can give out two or more diagrams of analysis of the same sentence. This phenomenon is called a syntactic synonym.

The main reason why the analyzer is called a semantic system is the unique set of connectors (about 100 basic ones, and some of them have three or four variants). In some cases, the authors of the system pass on to almost semantic classifications constructed exclusively on syntactic principles.

For example, the following classes of English adverbs are allocated in the system: situational adverbs concerning the whole sentence (clausal adverbs); time adverbs; introductory adverbs which stand in the beginning of the sentence and are separated by a comma (openers); the adverbs modifying adjectives, etc. As for the advantages of the system, it is necessary to notice that the procedure of finding the variants of the syntactic representation is organized very effectively. The process of construction is not top-down or bottom-up, but all the hypotheses about the relations are considered simultaneously: at the beginning, all possible connections are constructed by dictionary formulas, and then the possible subsets of these communications are allocated.

Of course, it leads to some algorithmic opacity of the system, because it is very difficult to track all relations at once. Secondly, it leads not to a linear dependence of the speed of the algorithm on the number of words, but to exponential one, because the set of all variants of syntactic structures of the sentence containing N words in the worst case is equipotent to the set of all spanning trees of the full graph with N nodes.

The last feature of the algorithm forces the developers to use a timer to stop the procedure which works too long. However, all these lacks are compensated by a linguistic transparency of the system in which rather simple valences of words may be registered, and the order of gathering the valences in the algorithm is not strictly fixed, i.e. the connections are constructed simultaneously, which completely corresponds to our linguistic intuition.

Let us note also the negative moments.

1. The practical testing of the system shows that, during the analysis of complicated sentences of length more than 25–30 words, a combinatorial explosion is possible, and in this case the result of the analyzer work is the "panic" graph which, as a rule, has several variants of syntactic structures, which is inadequate from the linguistic point of view.

2. The application of the ideas described above is complicated for inflective languages, such as the Russian language, in view of the considerably increasing volume of dictionaries because of the morphological complexity of inflective languages. Each morphological form should be described by a separate formula, where the bottom index of a connector name should provide a coordination procedure. This leads to an increasing number of connectors. For agglutinative languages (for example, Turkic), the system becomes even more complicated.

4 THE BASIC ALGORITHM OF THE COMPARISON OF SENTENCES

We assume that two sentences $\bar{x} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle, \bar{y} = \langle y_1, \dots, y_m \rangle$ are given, i.e. the sentences are considered as vectors whose components are words. We suppose that their analysis is made by means of the system Link Grammar Parser. Let us consider the set of all pairs $\langle i_1, i_2 \rangle, \langle j_1, j_2 \rangle$ such that the words x_{i_1}, x_{i_2} and y_{j_1}, y_{j_2} are connected by links of the same type. Thereby the words x_{i_1}, y_{j_1} and x_{i_2}, y_{j_2} are close according to some criterion, for example, their normalized forms are identical, they are synonyms, words are similar by writing, etc. Some variability of the algorithm is possible here. Also, it is possible to ignore the auxiliary words: articles, unions, pretexts, interjections, etc. Let us assume now that I is a set of the pairs mentioned above and taken into consideration, and its cardinality $|I| = n$.

Next, let n_1, n_2 be the numbers of links obtained as the result of the analysis of the sentences \bar{x}, \bar{y} , respectively. As a measure of similarity of two sentences, it is possible to introduce $\mu_0(\bar{x}, \bar{y}) = n / \max(n_1, n_2)$ or $\mu_1(\bar{x}, \bar{y}) = 2n / (n_1 + n_2)$. In the following section, the approach will be essentially generalized. It will be shown that the basic algorithm considers only the so-called invariant connectors, not taking into consideration more complicated logics.

Thus, the method described above allows us to introduce certain measures of the closeness (similarity) between sentences. These measures take into account both lexicon and syntactic relations between words. The minimum variant giving good results is when only eight connectors are used (see Table 1).

Six links have been allocated that can dramatically aggravate the situation. Therefore it is useful to omit them. Approximately 45 connectors were analyzed.

Experiments with different types of sentences and links took almost one year. It was observed that there is no need to use too many links. First, the use of some links leads us to the analysis of diagrams which correspond badly to intuition and principles of classical linguistics, and it is not clear what we can do with them further. Second, there is also a complexity aspect. If there are fewer links, the algorithm works faster. Therefore, a compromise is necessary.

Table 1 – The list of the most important links of the system Link Grammar Parser (разностей плотности) от числа узлов для WENO и ENO схемы

LINK	DESCRIPTION
C	connects subordinating conjunctions, verbs or adjectives with the subjects of subordinated sentences
CC	is used to connect coordinating conjunctions
S	connects subject-nouns to verbs
SI	connects a subject to a verb in the sentences with an inversion of the main parts of a sentence
SF	connects a subject expressed by "it" or "there" to a verb
SFI	connects a subject expressed by "it" or "there" to a verb in a question sentence with an inversion of the main parts of a sentence
SX	is used to connect the pronoun "I" to the verbs "was" and "am"
SXI	is used to connect the pronoun "I" to the verbs "was" and "am" in the cases of a subject-verb permutation

5 LOGICAL METHODS OF EVALUATION OF THE SENTENCE SIMILARITY

As before, we suppose that L is a set of words in a natural language. For any word $x \in L$ we will denote its normalized form by $Norm(x)$. The formula $Syn(x, y)$ means that x, y are synonyms.

There are two forms of equivalence:

$$1) x_1 \approx x_2 \leftrightarrow x_1 = x_2 \vee Syn(x_1, x_2)$$

$$2) x_1 \equiv x_2 \leftrightarrow Norm(x_1) = Norm(x_2).$$

A sentence may be considered as a vector with words as its components, $\bar{x} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. The function $Norm$ can be naturally extended onto

sentences: $Norm(\bar{x}) = \langle Norm(x_1), \dots, Norm(x_n) \rangle$.

The text $T = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \rangle$ is a sequence of sentences.

Let the formula $\bar{x} \models P(x_i, x_j)$ mean that, in the link diagram of the sentence $\bar{x} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ obtained by Link Grammar Parser, there is a connector of the type P going from the word x_i to the word x_j . The sign \models means that we consider a model. The basic set of the model is the set of pairs $\{\langle 1, x_1 \rangle, \dots, \langle n, x_n \rangle\}$. Because the same word can occur in the sentence two or more times, it is necessary to consider the pairs instead of separate words. This imply that $\bar{x} \models \varphi$, where φ is, for example, a formula of the first order logic, is a correct designation. Indeed, \bar{x} is a designation both for a vector and a model at the same time.

Let us assume that two sentences are given: $\bar{x} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ and $\bar{y} = \langle y_1, \dots, y_m \rangle$. It is interesting to consider the function f such that $dom(f) \subseteq \{1, \dots, n\}$, $range(f) \subseteq \{1, \dots, m\}$ with additional properties of the form: $f(i) = j \rightarrow x_i \approx y_j$ and $f(i) = j \rightarrow x_i \equiv y_j$, and others. When comparing two sentences, or more exactly, when performing the analysis of their similarity, verification of some logic properties is carried out. For example, let us consider $f(i_1) = j_1$, $f(i_2) = j_2$. The examples of such properties are given below.

1. The invariance of a connector

$$\bar{x} \models P(x_{i_1}, x_{i_2}) \rightarrow \bar{y} \models P(y_{j_1}, y_{j_2}).$$

2. The replacement of a connector by a disjunction of others

$$\bar{x} \models P(x_{i_1}, x_{i_2}) \rightarrow \bar{y} \models \bigvee_t Q_t(y_{j_1}, y_{j_2}).$$

3. The splitting of a connector into two connectors

$$\bar{x} \models P(x_{i_1}, x_{i_2}) \rightarrow \exists k (\bar{y} \models Q(y_{j_1}, y_k) \wedge R(y_k, y_{j_2})).$$

4. The splitting of a connector into two connectors with an inversion

$$\bar{x} \models P(x_{i_1}, x_{i_2}) \rightarrow \exists k (\bar{y} \models Q(y_{j_2}, y_k) \wedge R(y_k, y_{j_1})).$$

Taking into consideration that \bar{y} is a designation for a corresponding model, the third formula can be rewritten in the form $\bar{x} \models P(x_{i_1}, x_{i_2}) \rightarrow \bar{y} \models \exists y Q(y_{j_1}, y) \wedge R(y, y_{j_2})$. Analogously, the fourth formula can be written in a similar form.

An example of analysis of two sentences, one of which is the paraphrased variant of another, is shown below (see Fig. 2).

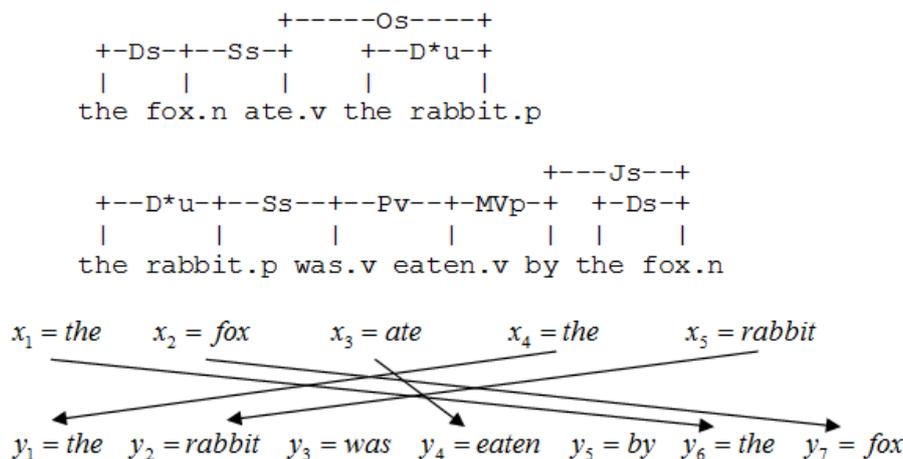


Figure 2 – The results obtained by Link Grammar Parser

Thus, we have $f(1) = 6$, $f(2) = 7$, $f(3) = 4$, $f(4) = 1$, $f(5) = 2$.

As a result, we obtain:

- 1) $Norm(ate) = Norm(eaten)$ or $ate \equiv eaten$;
- 2) the connectors Ds and D*u remain, i.e. they are invariant;
- 3) $\bar{x} \models Ss(fox, ate) \rightarrow \bar{y} \models Mvp(eaten, by) \wedge Js(by, fox)$, i.e. a splitting of the connectors Ss with an inversion takes place;
- 4) $\bar{x} \models Os(ate, rabbit) \rightarrow \bar{y} \models Ss(rabbit, was) \wedge Pv(was, fox)$, i.e. there is a splitting with an inversion, but of another connector Os.

To summarize, it is possible to say that there are rules of the form $R_i : \bar{x} \models \varphi_i(x_1, x_2) \rightarrow \bar{y} \models \psi_i(y_1, y_2)$.

Further, a function f is constructed and it is verified whether there are indexes $i_1, i_2, j_1 = f(i_1), j_2 = f(i_2)$ such that the rule R_i is satisfied on the concrete words from the sentences \bar{x}, \bar{y} , i.e. $\bar{x} \models \varphi_i(x_{i_1}, x_{i_2}) \rightarrow \bar{y} \models \psi_i(y_{j_1}, y_{j_2})$. For simplicity, it is possible to say that the rule is satisfied on the pair $\langle i_1, i_2 \rangle$.

Let us consider a set of all such pairs $\langle i_1, i_2 \rangle$ on which one rule is satisfied. We denote this set by I , and its cardinality is $|I| = n$. Let us notice that the analyzer Link Grammar Parser assumes the presence of only one connector between two words. Therefore, no more than one rule is satisfied. Let n_1, n_2 be the number of connectors obtained as a result of the analysis of

the sentences \bar{x}, \bar{y} , respectively. As a measure of similarity of two sentences, it is possible to introduce $\mu_0(\bar{x}, \bar{y}) = n / \max(n_1, n_2)$ or $\mu_1(\bar{x}, \bar{y}) = 2n / (n_1 + n_2)$. This approach generalizes the approach used in the basic algorithm. More exactly, the basic algorithm takes into account only invariant connectors, not considering more complicated logics.

Let us consider an example of the comparison of two sentences (see Fig. 3).

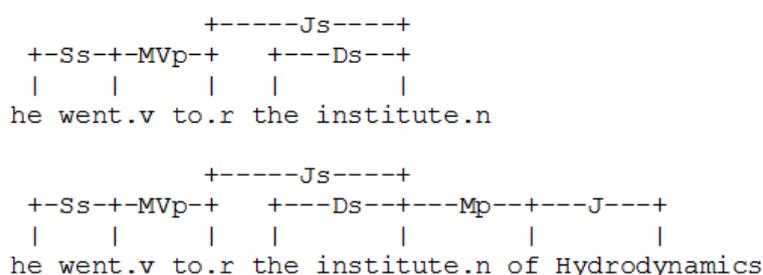


Figure 3 – The comparison of two sentences

It is easy to see that $n_1 = 4$, $n_2 = 6$. Further we see that all the four connectors Ss, MVp, Ds, and Js from the first sentence remain (are invariant), therefore $n = 4$. As a result, we obtain $\mu_0(\bar{x}, \bar{y}) = 4 / \max(4, 6) = 4 / 6 = 2 / 3$ and $\mu_1(\bar{x}, \bar{y}) = 2 \cdot 4 / (4 + 6) = 8 / 10 = 4 / 5$. Thus we see that these measures of similarity are different.

For the English language, we have 15 rules in addition to the three rules mentioned above. Thus, some of them allow three to five modifications. As a result, approximately 30 rules may be used.

With respect to other languages, it is expedient to speak about classes of languages. For example, the types of links and rules are practically identical for the Russian and Polish languages. In the Polish language, in addition to six cases (the same as in Russian), there is an additional vocative case. Thus, it is possible to enter additional types of links. And for example, the types of links and rules are essentially different for the Russian and German languages. There are German constructions which are absent in Russian, but it is desirable to consider them.

According to the morphological typology, there are analytic and synthetic languages. Synthetic languages are divided into agglutinative, fusional, and polysynthetic. Omitting the details, we say that the considered approach is

most easily implemented for analytic languages, for example, English. The situation is more complicated for synthetic languages, in particular for fusional (for example, Russian) and agglutinative (for example, Turkic) languages. There are two variants for these types of languages. The first variant is to use a small set of links that is enough for retrieval systems. The second, more difficult variant is to use a large number of links. It is appropriate to use the second variant in translators. Polysynthetic languages include Paleo-Asiatic (for example, Chukchi and Eskimo) and some African languages. In this case, the situation is even more difficult, but the described approach is applicable.

Taking into consideration possible errors, it would be desirable to know how the algorithm itself will perform the analysis of similarity of such sentences: "the fox eats rabbits" and "the fox does not eat rabbits". Will the second sentence be considered equivalent to the first one?

It is a very interesting question how to differ automatically the positive and negative statements about the same thing. Omitting the details, we can say that the above two sentences will not be considered as similar. But if the sentences are long and the words in these sentences are the same except for their beginnings ("the fox eats" and "the fox does not eat"), then the proposed algorithm will identify these statements as equivalent. Certainly, it is possible to modify the formula for the evaluation of the similarity of sentences, for example, to assign a heavy weight to a link connecting a particle "not" with the verb entering the denominator of the formula. It is clear that further in-depth investigation is necessary.

To summarize, we notice that [8] and [9], where various measures of proximity between logical formulas are considered, have appreciably affected our research considered in this section.

6 CONCLUSION

To demonstrate efficiency of iNetSearch, experiments have been made using this system. Ten simple inquiries from the field of inorganic chemistry have been generated. For each query, the lists of addresses with their description, usually returned to the user by a search system, have been loaded. On the basis of these short snippets, the resource estimation has been made. For comparison with another search system (namely, with the system nigma.ru, since it can readdress inquiries to other systems), the statistics of queries relative to ten

sentences of inquiries has been made. The system left relevant references, rejecting irrelevant by its estimation. As a result of testing, on the average, the system allocated 5-15 qualitative relevant references out of 100 references received from nigma.ru, accepted about 5 incorrect references as relevant and rejected others as irrelevant, which corresponds to reality. This demonstrates that the system could make filtration at a good level.

Further, two methods for natural language constructions have been compared the basic, used in the initial version of the iNetSearch system, and a new one, which takes into account the sentences rephrasing. The original method is based on comparison of links diagrams for an query and a phrase from the document under estimation, and comparison uses some generalizations and simplifications for taking into account the possibilities of paraphrasing. The inquiries, paraphrases of which had to be found, were made on various subjects. The sources of the inquiries are as follows: a collection of scientific papers on more than 20 subjects and a collection of educational texts.

As a result, we see high efficiency of the approach here presented. On the other hand, the method that uses rephrasing allowed us to improve the results of the iNetSearch system, but testing showed that this improvement is insignificant in comparison with the basic algorithm. It is also possible to make a conclusion that further development of this method will not lead to substantial improvement of the obtained results. One of the reasons is that the possibilities of Link Grammar Parser at the current stage of work are almost completely exhausted. And, in spite of the fact that Link Grammar Parser possesses a number of advantages (high speed, partial coverage of semantics, many examples of its successful application in the systems of Internet texts filtration), it makes us to stay at the level of syntax with partial semantics coverage. Therefore, if we want to have essential advancement, it is necessary to move to a higher level, to knowledge engineering.

REFERENCES

1 Salton G. Automatic Information Organization and Retrieval. – New York: McGraw-Hill, 1968. – 514 p.

2 Lezin G.V., Tuzov V.A. The semantic analysis of the text in Russian: semantico-syntactical model of the sentence // Economic-mathematical researches:

mathematical models and information technologies. – SPb.: Nauka, 2003. – Is. 3. – P. 282-303. (in Russian).

3 Batura T.V., Murzin F.A. The machine-oriented logic methods of representation of semantics of the text in natural language. – The monograph / A.P. Ershov Institute of Informatics Systems SB RAS. – Novosibirsk: Publishing Company of NGTU, 2008. – ISBN 978-5-7782-1138-4. – 248 p. (in Russian)

4 Temperley D., Sleator D., Lafferty J. Link Grammar Documentation [Electronic resource]. – 1998. Mode of access:

<http://www.abisource.com/projects/link-grammar/> (accessed 10 October 2015)

5 Sleator D., Temperley D. Parsing English with a Link Grammar. Pittsburgh: School of Computer Science Carnegie Mellon Univ., 1991. – 93 p.

6 Murzin F., Perfliev A., Shmanina T. Methods of syntactic analysis and comparison of constructions of a natural language oriented to use in search systems // Bull. Nov. Comp. Center, Comp. Science, 2010. – Is. 31. – P. 91-109.

7 Murzin F., Perfliev A., Shmanina T. Methods of syntactic analysis and comparison of constructions of a natural language oriented to use in search systems // Vestnik of Novosibirsk State Univ. Ser.: Information Technologies. – Novosibirsk, 2012. – V. 9. Is. 4. – P. 13-28. (in Russian).

8 Lubov G.S. Methods of processing of polytypic experimental data. – Sobolev Institute of Mathematics SB RAS. N.: Nauka, 1981. – 160 p. (in Russian).

9 Vikentiev A.A., Vikentiev R.A. On the metrics for formulas containing polytypic variables and measures of denyty // Proc.of the Second Int. Youth School-Conf. "Theory and numer. methods of the decision of inverse and incorrect problems". – 2011. – Part 1. – P. 192-209. [Electronic resource]. Mode of access:

<http://semr.math.nsc.ru/v8/c182-410.pdf> (accessed 10 October 2015) (in Russian)

Received 12.10.2015

Байжанов Б.С., Батура Т.В., Мурзин Ф.А., Немченко М.Ю., Перфильев А.А. АЛГОРИТМЫ ОЦЕНКИ СХОДСТВА ПРЕДЛОЖЕНИЙ НА ЭСТЕТИЧЕСКОМ ЯЗЫКЕ

В статье рассмотрена задача построения алгоритмов для оценки семантической близости предложений текста и поискового запроса. Один из методов, описанных в данной работе, позволяет сопоставлять перефразированные варианты предложений, основываясь на анализе их синтаксических структур. Алгоритм основан на обработке и использовании диаграмм связей, создаваемых системой Link Grammar Parser. Второй метод

позволяет оценивать релевантность предложений посредством представления их в виде формул исчисления предикатов первого порядка. На основе такого представления осуществляется проверка ряда логических свойств этих предложений, позволяющих говорить об их сходстве.

Байжанов Б.С., Батура Т.В., Мурзин Ф.А., Немченко М.Ю., Перфильев А.А. ТАБИҒИ ТІЛДЕГІ СӨЙЛЕМДЕРДІҢ ҰҚСАСТЫҚТАРЫН БАҒАЛАУ АЛГОРИТМДЕРІ Мақалада мәтін сөйлемдері мен іздеу сұранысының семантикалық жақындығын бағалауға арналған алгоритмдер құрастыру есебі қарастырылған. Осы жұмыста сипатталған әдістердің бірі сөйлемдердің басқаша тұжырымдалған нұсқаларын, олардың синтаксистік құрылымдарын талдау арқылы сәйкестендіруге мүмкіндік береді. Алгоритм Link Grammar Parser жүйесі жасаған байланыстар диаграммаларын өңдеуге және пайдалануға негізделген. Екінші әдіс сөйлемдердің сәйкестігін бірінші ретті предикаттарды есептеу формулалары түріндегі кейіптемелері арқылы бағалауға мүмкіндік береді. Осындай кейіптеме негізінде осындай сөйлемдердің бірқатар логикалық қасиеттерінің ұқсастықтары туралы айтуға мүмкіндік беретін тексеру жүзеге асырылады.

УДК 517.956

А.Б. Байзаков, Дж.А. Акерова

Кыргызский Национальный Университет им. Ж.Баласагына
720040, Бишкек, ул. Боконбаева, 99, e-mail: sje.kg.2009@mail.ru

**О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ
НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО
ПОРЯДКА**

Найдены достаточные условия разрешимости задачи Коши для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка и построено интегральное представление таких решений. Ключевые слова: *интегральное уравнение, нелинейное интегро-дифференциальное уравнение в частных производных третьего порядка, принцип сжатых отображений, условие Липшица.*

В данной работе исследуется разрешимость задачи Коши для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка вида

$$u_t(t, x) + \alpha[u(t, x) - u_{xx}(t, x)] - u_{xxt}(t, x) = f(t, x, u, u_t, u_x) + \int_0^t N(t, s, x, u(s, x)) ds \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(0, x) = \varphi(x). \quad (2)$$

© А.Б. Байзаков, Дж.А. Акерова, 2015.

Keywords: *integral equation, nonlinear third order partial integro-differential equations, contraction mapping principle, Lipchitz condition.*

2010 Mathematics Subject Classification: 34A30, 34B08, 34B10

УСЛОВИЕ (А). Предположим, что в областях $G = \{(t, x, u, w, v) : t \in [0, T], -\infty < x, u, w, v < \infty\}$, $G_1 = \{(t, x, u) : t \in [0, T], -\infty < x, u < \infty, T > 0\}$, функции $f(t, x, u, u_t, u_x), N(t, s, x, u)$ непрерывны и ограничены,

$$\|f(t, x, u, u_t, u_x)\| \leq M, \quad N(t, s, x, u) \leq \bar{N} \quad (3)$$

и удовлетворяют условию Липшица по переменным u, u_t, u_x :

$$\begin{aligned} \|f(t, x, \bar{u}, \bar{u}_t, \bar{u}_x) - f(t, x, u, u_t, u_x)\| &\leq L (\|\bar{u} - u\| + \|\bar{u}_t - u_t\| + \|\bar{u}_x - u_x\|), \\ N \|(t, x, \bar{u}) - N(t, x, u)\| &\leq L_1 (\|\bar{u} - u\|), \end{aligned} \quad (4)$$

L, L_1 – некоторые положительные постоянные; начальная функция $\varphi(x) \in \bar{C}^2(\mathbb{R})$, $\alpha \geq 1$.

Решение задачи Коши (1)–(2) будем искать в виде

$$u(t, x) = \varphi(x) + \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)} K(x-\rho) Q(s, \rho) d\rho ds, \quad (5)$$

где $K(x-\rho)$ – некоторая известная функция, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$K(0) \neq 0, \quad K'(0)/K(0) > 0, \quad (6)$$

$Q(t, x)$ – новая искомая функция. Из (5) последовательно находим частные производные по t и x :

$$\begin{aligned} u_t &= \int_{-\infty}^x K(x-\rho) Q(t, \rho) d\rho - \alpha \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)} K(x-\rho) Q(s, \rho) d\rho ds = \\ &= \int_{-\infty}^x K(x-\rho) Q(t, \rho) d\rho - \alpha[u(t, x) - \varphi(x)]; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} u_x &= \varphi'(x) + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} K(0) Q(s, x) ds + \\ &+ \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)} K'_x(x-\rho) Q(s, \rho) d\rho ds; \end{aligned} \quad (8)$$

$$u_{xx} = \varphi''(x) + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} K(0) Q'_x(s, x) ds + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} K'_x(0) Q(s, x) ds +$$

$$+ \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)} K''_{xx}(x-\rho) Q(s, \rho) d\rho ds; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} u_{xxt} &= K(0)Q'_x(t, x) - \alpha \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} K(0)Q'_x(s, x) ds + K'_x(0)Q(t, x) - \\ &\quad - \alpha \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} K'_x(0)Q(s, x) ds + \int_{-\infty}^x K''_{xx}(x-\rho) Q(t, \rho) d\rho - \\ &\quad - \alpha \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)} K''_{xx}(x-\rho) Q(s, \rho) d\rho ds = K(0)Q'_x(t, x) + K'(0)Q(t, x) - \\ &\quad - \alpha \left[\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} K(0)Q'_x(s, x) ds + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} K'_x(0)Q(s, x) ds + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)} K''_{xx}(x-\rho) Q(s, \rho) d\rho ds \right] + \int_{-\infty}^x K''_{xx}(x-\rho) Q(t, \rho) d\rho = \\ &= K(0)Q'_x(t, x) + K'(0)Q(t, x) - \alpha [u_{xx} - \varphi''(x)] + \\ &\quad + \int_{-\infty}^x K''_{xx}(x-\rho) Q(t, \rho) d\rho. \quad (10) \end{aligned}$$

Тогда из (10), учитывая (9), получим

$$\begin{aligned} -u_{xxt} - \alpha u_{xx} &= - [K(0)Q'_x(t, x) + K'(0)Q(t, x)] - \alpha \varphi''(x) - \\ &\quad - \int_{-\infty}^x K''_{xx}(x-\rho) Q(t, \rho) d\rho. \quad (11) \end{aligned}$$

Из (8) имеем

$$u_t + \alpha u = \int_{-\infty}^x K(x-\rho) Q(t, \rho) d\rho + \alpha \varphi(x). \quad (12)$$

Следовательно, складывая почленно (11) и (12), получаем

$$\begin{aligned} u_t + \alpha [u - u_{xx}] - u_{xxt} &= \\ &= - [K(0)Q'_x(t, x) + K'(0)Q(t, x)] + \alpha \varphi(x) - \alpha \varphi''(x) + \\ &\quad + \int_{-\infty}^x [K(x-\rho) - K''(x-\rho)] Q(t, \rho) d\rho = \end{aligned}$$

$$= f(t, x, u, u_t, u_x) + \int_0^t N(t, s, x, u) ds.$$

Отсюда, учитывая (5), (7), (8), имеем

$$\begin{aligned} K(0)Q'_x(t, x) + K'(0)Q(t, x) &= -f(t, x, u, u_t, u_x) - \int_0^t N(t, s, x, u) ds + \alpha\varphi(x) - \\ &- \alpha\varphi''(x) + \int_{-\infty}^x [K(x - \rho) - K''(x - \rho)] Q(t, \rho) d\rho = -f[t, x, \varphi(x) + \\ &+ \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)} K(x - \rho) Q(s, \rho) d\rho ds, \int_{-\infty}^x K(x - t) Q(t, \rho) d\rho - \\ &- \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)} K(x - \rho) Q(s, \rho) d\rho ds, \varphi'(x) + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} K(0) Q(s, x) ds + \\ &+ \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)} K'_x(x - \rho) Q(s, \rho) d\rho ds] + \alpha\varphi(x) - \alpha\varphi''(x) + \\ &+ \int_{-\infty}^x [K(x - \rho) - K''_{xx}(x - \rho)] Q(t, \rho) d\rho - \int_0^t N[t, s, x, \varphi(x) + \\ &+ \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)} K(x - \rho) Q(s, \rho) d\rho ds]. \end{aligned}$$

Последнее уравнение будем рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно $Q(t, x)$ с известной правой частью. Тогда имеем

$$\begin{aligned} Q(t, x) &= - \int_{-\infty}^x e^{-\frac{K'(0)}{K(0)}(x-\gamma)} \{ f[t, \gamma, \varphi(\gamma) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\gamma} e^{-\alpha(t-s)} K(\gamma - \rho) Q(s, \rho) d\rho ds + \\ &+ \int_{-\infty}^{\gamma} K(\gamma - \rho) Q(t, \rho) d\rho - \int_0^t \int_0^{\gamma} e^{-\alpha(t-s)} K(\gamma - \rho) Q(s, \rho) d\rho ds(\gamma) + \\ &+ \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} K(0) Q(s, \gamma) ds + \int_0^t \int_{-\infty}^{\gamma} e^{-\alpha(t-s)} K'(\gamma - \rho) Q(s, \rho) d\rho ds] + \\ &+ \alpha\varphi(\gamma) - \alpha\varphi''(\gamma) + \int_{-\infty}^{\gamma} [K(\gamma - \rho) - K''(\gamma - \rho)] Q(t, \rho) d\rho - \end{aligned}$$

$$- \int_0^t N[t, s, \gamma, \varphi(x) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\gamma} e^{-\alpha(t-s)} K(\gamma - \rho) Q(s, \rho) d\rho ds] d\gamma \equiv PQ. \quad (13)$$

Пусть Ω – множество непрерывных по обоим аргументам функций $Q(t, x)$ в полосе $\{t \in [0, T], -\infty < x < +\infty\}$, причем $\|Q\| \leq h$, где h – некоторое положительное число, которое определяется позже, $\|\cdot\|$ обозначает норму, определенную в пространстве $C\{[0, T], x \in R\}$.

Существование решений нелинейного интегрального уравнения Вольтерра II рода (13) будем доказывать, используя принцип сжатых отображений. Правую часть (13) рассмотрим как оператор PQ , действующий на функцию $Q(t, x)$ в Ω .

Из (13), учитывая (4), проведем оценки

$$\|PQ\| \leq \left| \int_{-\infty}^x e^{-\frac{K'(0)}{K(0)}(x-\gamma)} (\bar{M} + dh) d\gamma \right|,$$

где $\bar{M} = \max_G |f(t, x, u, u_t, u_x) + \alpha\varphi(x) - \alpha\varphi''(x) + \bar{N}T_0|$,

$$d = \left\| \int_{-\infty}^x [K(x - \rho) - K''(x - \rho)] d\rho \right\|, T_0 \leq T.$$

Пусть

$$d \frac{|K(0)|}{|K'(0)|} < \frac{1}{2}. \quad (14)$$

Тогда выберем h, T_0 так, чтобы выполнялось соотношение

$$\bar{M} \frac{|K(0)|}{|K'(0)|} + d \frac{|K(0)|}{|K'(0)|} h \leq h. \quad (15)$$

При таком выборе h оператор PQ переводит шар $\|Q\| \leq h$ в себя: $PQ : \Omega \rightarrow \Omega$.

Используя (4), оценим разность

$$\begin{aligned} \|PQ_1 - PQ_2\| \leq & \left\{ \int_{-\infty}^x e^{-\frac{K'(0)}{K(0)}(x-\gamma)} L \left[\int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)} |K(\gamma - \rho)| d\rho ds + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_{-\infty}^{\gamma} |K(\gamma - \rho)| d\rho + \int_0^t \int_{-\infty}^{\gamma} e^{-\alpha(t-s)} |K(\gamma - \rho)| d\rho ds + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} |K(0)| ds + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\gamma} e^{-\alpha(t-s)} |K'(\gamma - \rho)| d\rho ds] d\gamma + \\ + \int_{-\infty}^x |K(x-\rho) - K''(x-\rho)| d\rho + L_1 T_0 \int_0^{T_0} \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)} |K(\gamma-\rho)| d\rho ds \} \|Q_1 - Q_2\|.$$

Пусть $T_0 \leq T$. Наложим на функцию $K(x - \rho)$ еще одно дополнительное условие

$$\int_{-\infty}^x |e^{-\frac{K'(0)}{K(0)}(x-\gamma)} L [\int_0^{T_0} \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(T_0-s)} |K(\gamma - \rho)| d\rho ds + \int_{-\infty}^{\gamma} |K(\gamma - \rho)| d\rho + \\ + \int_0^{T_0} \int_{-\infty}^{\gamma} e^{-\alpha(T_0-s)} |K(\gamma - \rho)| d\rho ds + \int_0^{T_0} e^{-\alpha(T_0-s)} |K(0)| ds + \\ + \int_0^{T_0} \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(T_0-s)} |K'(\gamma - \rho)| d\rho ds] d\gamma + \\ + \int_{-\infty}^x |K(x - \rho) - K''(x - \rho)| d\rho + \\ + L_1 T_0 \int_0^{T_0} \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(T_0-s)} |K(\gamma - \rho)| d\rho ds | < 1. \quad (16)$$

В частности, требованиям (6), (14), (16) удовлетворяет функция $K(x - \rho) = e^{-\beta(x-\rho)}$, $\beta > 0$, причем β удовлетворяет некоторому неравенству, которое следует из (16).

В самом деле,

$$K'_x(x - \rho) = -\beta e^{-\beta(x-\rho)}, \\ |K(0)| = 1, \quad \left| \frac{K'_x(0)}{K(0)} \right| = \beta > 0.$$

Из (16) имеем

$$\int_{-\infty}^x \left| e^{-\beta(x-\gamma)} L \left[2 \int_0^{T_0} \int_{-\infty}^{\gamma} e^{-\alpha(T_0-s)} e^{-\beta(\gamma-\rho)} d\rho ds + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{-\infty}^{\gamma} e^{-\beta(\gamma-\rho)} d\rho + \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha T_0}) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{T_0} \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(T_0-s)} \beta e^{-\beta(\gamma-\rho)} d\rho ds \Big] d\gamma + \\
& + \int_{-\infty}^x (1 - \beta^2) e^{-\beta(x-\rho)} d\rho + L_1 T_0 \int_0^{T_0} \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(T_0-s)} e^{-\beta(\gamma-\rho)} d\rho ds \Big] = \\
& = L \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\gamma)} \left[2 \frac{1 - e^{-\alpha T_0}}{\alpha \beta} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha T_0}) + \frac{1}{\alpha} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1 - \beta^2}{\beta} + L_1 T_0 \frac{1}{\alpha \beta} \right] d\gamma \leq \frac{L}{\beta} \left[2 \frac{1 - e^{-\alpha T_0}}{\alpha \beta} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha T_0}) + \frac{1}{\beta} + L_1 T_0 \frac{1}{\alpha \beta} \right] \equiv B(\alpha, \beta, T_0).
\end{aligned}$$

В данном случае условие (14) имеет вид

$$\int_{-\infty}^x (1 - \beta^2) e^{-\beta(x-\rho)} d\rho \times \frac{1}{\beta} = \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} < \frac{1}{\beta^2}.$$

Очевидно, что для достаточно больших $\beta > \beta_0$ предположение (14) выполнено. Также ясно, что существует $\beta_0 > 0$ такое, что при $\beta > \beta_0$, $T_0 \leq T$ имеем $B(\alpha, \beta, T_0) < 1$. Что и требовалось доказать.

Согласно принципу сжатых отображений из (16) следует, что нелинейное интегральное уравнение (13) при условиях (14), (15) имеет единственное и ограниченное решение $Q(t, x)$. Подставив найденную функцию в (5), имеем решение задачи Коши (1)–(2).

Исследуем теперь дифференциальные свойства решений задачи Коши (1)–(2). Для всех $\{t \in [0, T_0], -\infty < x < +\infty\}$ из равенства (5) вытекает неравенство

$$\begin{aligned}
\|u(t, x)t\| & \leq \|\varphi(x)\| + \left\| \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)} K(x-\rho) Q(s, \rho) d\rho ds \right\| \leq \\
& \leq \varphi_0 + \frac{Kh}{\alpha} = M_0 = const,
\end{aligned}$$

где $K = \max \int_{-\infty}^x |K(x-\rho)| d\rho$.

Аналогично из (7)–(10) можно доказать, что все производные, входящие в уравнение (1), равномерно ограничены.

Теперь сформулируем полученный результат.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть выполнено условие (A). Тогда задача Коши для нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка (1)–(2) разрешима и имеет интегральное представление в виде (5). Кроме того, все производные, входящие в уравнение (1), равномерно ограничены.*

ЛИТЕРАТУРА

1 Иманалиев М.И., Иманалиев Т.М., Какишов К. О задачах Коши для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными шестого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2007. – Вып. 36. – С. 19-28.

2 Иманалиев М.И., Байзаков А.Б. О разрешимости задачи Коши для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных // Поиск. Сер.ест.-техн. наук. – Алматы, 2009. – №1. – С. 209-213.

3 Байзаков А.Б., Айтбаев К.А. Разрешимость Задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2009. – Вып. 41. – С. 13-20.

4 Imanaliev M.I., Baizakov A.B., Kudyraliev T.R. Sufficient conditions for the existence of solutions of the Cauchy problem for partial differential equations of the third order // Proc. of the V Congress of the Turkic World math. Bishkek, 2014. – V.1. – P.121-126.

5 Aitbaev K.A. On the existence of the solutions of Cauchy problem for nonlinear partial differential equations // Proceedings of the V Congress of the Turkic World Math. – Bishkek, 2014. – P. 150-154.

Статья поступила в редакцию 04.08.2015

Байзақов А.Б., Акерова Дж.А. ҮШІНШІ РЕТТІ ДЕРБЕС ТУЫН-
ДЫЛЫ СЫЗЫҚСЫЗ ИНТЕГРАЛДЫҚ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢ-
ДЕУЛЕР ҮШІН КОШИ ЕСЕБІНІҢ ШЕШІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ

Үшінші ретті дербес туындылы сызықсыз интегралдық-
дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есебінің шешімділігінің
жеткілікті шарттары табылған және осындай шешімдердің интегралдық
кейіптемесі тұрғызылған.

Baizakov A.B., Akerova Dzh.A. SOLVABILITY OF THE CAUCHY
PROBLEM FOR NONLINEAR THIRD ORDER PARTIAL INTEGRO-
DIFFERENTIAL EQUATIONS

The sufficient conditions of solvability of the Cauchy problem for nonlinear
third order partial integro-differential equations are established and the integral
representation of such solutions is constructed.

УДК 519.63

А.О. БЕКЕТАЕВА

Институт математики и математического моделирования
050040, Алматы, ул.Пушкина, 125, e-mail: azimaras@mail.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПАДАЮЩЕЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

С помощью предложенного алгоритма решения осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса для течения совершенного многокомпонентного газа на основе WENO-схемы численно моделируется взаимодействие падающей ударной волны с пограничным слоем. Для моделирования падающего скачка уплотнения во входном сечении ставятся условия из решения невязкой задачи о косой ударной волне. Произведено сравнение с опытными данными. Изучено взаимодействие падающей ударной волны с пограничным слоем в условиях отрывного и безотрывного течения в зависимости от числа Маха набегающего потока.

Ключевые слова: *сверхзвуковое течение, совершенный газ, пограничный слой, уравнения Навье-Стокса, ударная волна.*

1 ВВЕДЕНИЕ

Взаимодействие ударной волны с пограничным слоем является важной теоретической и прикладной проблемой, актуальной для сверхзвуковых летательных аппаратов. В случае достаточно сильного взаимодействия возникают области отрыва потока, изменяющие динамические и тепловые нагрузки, что является критическим для летательного аппарата. Структура потока в области взаимодействия существенно зависит от режимных

© А.О. Бекетаева, 2015.

Keywords: *Supersonic flow, ideal gas, boundary layer, Navier-Stokes equations, shock wave*

2010 Mathematics Subject Classification: 42A10

параметров таких, как, например, числа Маха набегающего потока и интенсивность скачка уплотнения. Задача взаимодействия падающей ударной волны с пограничным слоем изучена достаточно хорошо [1]–[7]. К экспериментальным работам относится [1], где выполнено исследование отрывного течения в зоне взаимодействия падающей косой ударной волны с турбулентным пограничным слоем при числе Маха $M_\infty = 2$ и числе Рейнольдса $Re = 2,7 - 3,5 * 10^3$. Получены данные о распределении давления вдоль поверхности модели. В работе приводятся данные детальных термоанемометрических измерений в набегающем пограничном слое, области взаимодействия и в зоне восстановления. Обнаружена нестационарность отрывной зоны и отраженной ударной волны. Показано влияние краевых эффектов на квазидвумерную структуру отрывного течения. В работе [4] экспериментально исследовалось взаимодействие скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем. Диагностика потока проводилась с помощью бесконтактного оптического метода визуализации – шпирен-метода. В ходе исследования было изучено влияние нагрева поверхности на длину отрыва пограничного слоя. Выявлено, что при нагреве поверхности зависимость длины отрыва от температурного отношения аппроксимируется линейным законом. Среди теоретических работ следует отметить [5], где приведены результаты расчетов, полученных методом крупных вихрей. Основное внимание уделяется изучению структуры течения, размеров отрывной зоны, а также динамических и тепловых нагрузок, реализующихся при этом взаимодействии. Влияние падающей ударной волны на турбулентный пограничный слой численно исследовано в [6], где интенсивность ударной волны изменялась с помощью регулировки угла генератора скачка уплотнения. В работе реализовывались такие модели турбулентности, как $k-\varepsilon$, $k-\varepsilon/k-\omega$ гибридная модель и модель с одним уравнением для турбулентной вязкости. Авторами работы [7] рассмотрено численное моделирование взаимодействия скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем на пластине. Исследовано влияние на взаимодействие таких факторов, как степень турбулентности внешнего потока и толщина пограничного слоя на боковых стенках канала. Численное моделирование выполнялось на основе интегрирования системы уравнений Навье-Стокса, осредненных по Рейнольдсу, и двухпараметрической модели турбулентности SST $k-\omega$. Как известно, при взаимодействии пограничного слоя с падающей ударной

волной в основании скачка формируется сложная λ -образная структура [8] и происходит отрыв пограничного слоя. Схематическая картина взаимодействия ударной волны с пограничным слоем на стенке приведена на рисунке 1. Здесь 1 – головной скачок уплотнения, падающий на стенку, 2 – волна сжатия, 3 – отраженный скачок уплотнения, 4 – веер волн разрежения, 5 – волна сжатия, возникающая в месте присоединения отрывного потока, S – точка отрыва потока, R – точка присоединения потока. Из рисунка следует, что головной скачок 1, достигая верхней границы, создает положительный градиент давления, который оказывается достаточным для отрыва пограничного слоя на верхней стенке. При этом сверхзвуковая область пограничного слоя отклоняется и порождает волну сжатия 4, которая распространяется в виде отраженного скачка 5. При рассмотрении турбулентного отрыва особое внимание необходимо уделять механизмам отрыва и присоединения потока, интенсивности скачка уплотнения и влиянию режимных параметров на характеристики потока. Цель данной работы – численное моделирование взаимодействия падающей ударной волны с пограничным слоем на стенке, а также изучение влияния числа Маха набегающего потока и угла генератора скачка уплотнения на ударно-волновую структуру.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается сверхзвуковое течение воздуха в канале при наличии падающей ударной волны, для удобства вычисления рассматривается только нижняя стенка (рисунок 1). Система двумерных осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса для многокомпонентной газовой смеси относительно декартовых координат в консервативной форме представляется в виде

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial (\vec{E} - \vec{E}_v)}{\partial x} + \frac{\partial (\vec{F} - \vec{F}_v)}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\vec{U} = (\rho, \rho u, \rho w, E_t, \rho Y_k)^T,$$

$$\vec{E} = (\rho u, \rho u^2 + P, \rho u w, (E_t + P) u, \rho u Y_k)^T,$$

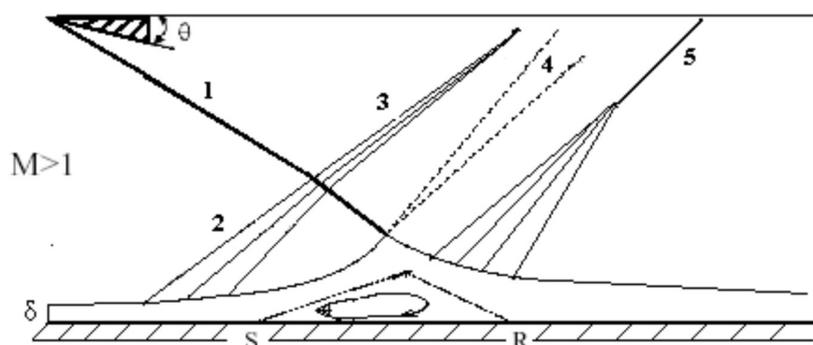


Рисунок 1 – Схема течения

$$\vec{F} = (\rho w, \rho u w, \rho w^2 + P, (E_t + P) w, \rho w Y_k)^T,$$

$$\vec{E}_v = (0, \tau_{xx}, \tau_{xz}, u\tau_{xx} + w\tau_{xz} - q_x, J_{xk})^T,$$

$$\vec{F}_v = (0, \tau_{xz}, \tau_{zz}, u\tau_{xz} + w\tau_{zz} - q_z, J_{zk})^T,$$

$$P = \frac{\rho T}{\gamma_\infty M_\infty^2 W}, \quad W = \left(\sum_{k=1}^{N_p} \frac{Y_k}{W_k} \right)^{-1}, \quad \sum_{k=1}^{N_p} Y_k = 1,$$

$$E_t = \frac{\rho}{\gamma_\infty M_\infty^2} h - P + \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2), \quad h = \sum_{k=1}^{N_p} Y_k h_k, \quad h_k = h_k^0 + \int_{T_0}^T c_{pk} dT,$$

$$c_{pk} = C_{pk}/W_k, \quad \tau_{xx} = \frac{\mu}{Re} \left(2u_x - \frac{2}{3}(u_x + w_z) \right),$$

$$\tau_{xx} = \frac{\mu}{Re} \left(2w_z - \frac{2}{3}(u_x + w_z) \right), \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{\mu}{Re} (u_z + w_x),$$

$$q_x = \left(\frac{\mu}{PrRe} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^{N_p} h_k J_{xk}, \quad q_z = \left(\frac{\mu}{PrRe} \right) \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^{N_p} h_k J_{zk},$$

$$J_{xk} = -\frac{\mu}{ScRe} \frac{\partial Y_k}{\partial x}, \quad J_{zk} = -\frac{\mu}{ScRe} \frac{\partial Y_k}{\partial z}.$$

Система уравнений (1) записана в безразмерном виде в общепринятых обозначениях, в качестве определяющих приняты параметры потока $u_\infty, \rho_\infty, T_\infty$; давление P и полная энергия E_t отнесены к значению $\rho_\infty u_\infty^2$; удельная энтальпия h_k – к $R^0 T_\infty / W_\infty$; молярные удельные теплоемкости C_{pk} – к R^0 ; характерным параметром длины является диаметр сопла. Величина Y_k – массовая концентрация k -ой компоненты; индекс массовой концентрации $k = 1$ соответствует O_2 , $k = 2$ – H_2 , $k = 3$ – N_2 ; $N_p = 3$ – число компонент смеси газов. W_k – молекулярный вес k -ой компоненты; Re, Pr, Sc – числа Рейнольдса, Прандтля и Шмидта, соответственно; $\tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz}, \tau_{zx}$ – тензоры вязких напряжений; q_x, q_z, J_{xk}, J_{zk} – тепловые и диффузионные потоки (диффузионные потоки вычисляются по закону Фика); $\mu = \mu_l + \mu_t$ – эффективная вязкость (определяется через сумму ламинарной и турбулентной вязкости). Для определения μ_t используется модель Болдуина-Ломакса.

2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

На входе:

$$Y_k = Y_{k\infty}, W_k = W_{k\infty}, P = P_\infty, T = T_\infty, \\ u = M_\infty \sqrt{\gamma_\infty R_0 T_\infty / W_\infty}, w = 0, \quad x = 0, \quad 0 \leq z \leq H.$$

На нижней стенке задается условие прилипания и теплоизоляции. Во входном сечении вблизи стенки канала задается пограничный слой, толщина которого определяется по формуле: $\delta_1 = 0,37x (Re)^{-0,2}$. Также задается

пристенный слой $\delta_2 = 0,1\delta_1$. Продольная составляющая скорости принимает следующий вид:

$$u = 0,1 \left(\frac{z}{\delta_2} \right) + 0,9 \left(\frac{z}{\delta_2} \right)^2, \quad x = 0, \quad 0 \leq z \leq \delta_2,$$

в развитом турбулентном пограничном слое профиль продольной скорости задается степенным законом:

$$u = \left(\frac{z}{\delta_1} \right)^{1/7} x = 0, \quad x = 0, \quad \delta_2 \leq z \leq \delta_1.$$

В зависимости от распределения скорости значения температуры и плотности примут вид

$$T = T_w + u(1 - T_w), \quad \rho = \frac{1}{T},$$

где $T_w = \left(1 + r \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \right)$ – температура на стенке, $r = 0,88$.

На верхней границе – условие симметрии, и на выходной границе задаются условия неотражения [9]. При задании падающей ударной волны во входном сечении вблизи верхней границы для газодинамических параметров ставились условия из решения задачи о косом скачке уплотнения:

$$P = P_\infty \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_\infty^2 (\sin \beta)^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad \rho = \frac{\frac{\gamma+1}{2} M_\infty^2 (\sin \beta)^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 (\sin \beta)^2},$$

где θ – угол наклона генератора скачка уплотнения, β – угол, образованный линией скачка с направлением набегающего потока (найден из зависимости θ от β для семейства линий с различными значениями Маха потока [10]).

3. МЕТОД РЕШЕНИЯ

На стенке в пограничном слое вводится сгущение сетки для более точного численного решения. Тогда система уравнений (1) в преобразованной системе координат запишется в виде

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \eta} = \frac{\partial \tilde{E}_{v2}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{E}_{vm}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_{v2}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{F}_{vm}}{\partial \eta}, \quad (2)$$

где $\tilde{U} = \vec{U}/J$, $\tilde{E} = \xi_x \vec{E}/J$, $\tilde{F} = \eta_z \vec{F}/J$, $\tilde{E}_{v2} = \xi_x \vec{E}_{v2}/J$, $\tilde{E}_{vm} = \xi_x \vec{E}_{vm}/J$, $\tilde{F}_{v2} = \eta_z \vec{F}_{v2}/J$, $\tilde{F}_{vm} = \eta_z \vec{F}_{vm}/J$. $J = \partial(\xi, \eta)/\partial(x, z)$ – Якобиан преобразования.

Параметры преобразования координат подробно описаны в [11].

Конвективные члены аппроксимируются с использованием WENO-схемы, идея построения которой основана на ENO-схеме, подробно изложенной в работе [11]. В предлагаемой WENO-схеме при интерполировании кусочно-постоянной полиномиальной функции применяются полиномы Ньютона третьего порядка, построенные с использованием выпуклой комбинации шаблонов. В результате чего порядок аппроксимации WENO-схемы возрастает до четвертого. Решение системы уравнений (2) и определение температуры осуществляются в соответствии с работой [11].

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И ИХ АНАЛИЗ

Параметры вычислительной области следующие: высота и ширина $H = 20\text{см}$ и $L = 120\text{см}$. При численном расчете во входном сечении задается толщина пограничного слоя $\delta_1 = 3.5$, вычисленная для $x = 300\text{см}$. Сгущение сетки вблизи стенки осуществляется таким образом, что для первого от стенки узла сетки выполняется условие: $z^+ = 1.5$, для пристенного слоя приходится 5-8 узловых точек по направлению оси z , а расчет всего пограничного слоя выполняется с использованием 35-40 узлов расчетной сетки. Расчет всей области производится на сетке с узлами 401×281 . Для апробации численного метода был выполнен следующий эксперимент: рассматривается сверхзвуковое течение воздуха вдоль тонкой пластины с генератором скачка уплотнения на верхней границе с параметрами задачи, соответствующими экспериментам работы [6], где число Маха набегающего потока $M_\infty = 5$, число Рейнольдса $Re = 40 \cdot 10^6$, температура стенки $T_w = 300\text{К}$. Эксперимент проводился для угла генератора скачка $\alpha = 10^0$, который соответствовал безотрывному течению пограничного слоя. На рисунке 2 представлены результаты сравнения с экспериментами коэффициента трения (рис. 2а) и давления (рис. 2б) на стенке; здесь черные квадраты – эксперимент и сплошная линия – результаты данной

работы. Из графиков можно отметить удовлетворительное согласие экспериментов и расчетов. Также на фигуре 3 показаны шпирен фотографии и распределения плотности для углов генератора скачка $\alpha = 10^0$ и $\alpha = 14^0$. Так при, безотрывном течении для $\alpha = 10^0$ видно падение ударной волны 1 на стенку и ее отражение. При $\alpha = 14^0$ для отрывного течения наблюдается формирование сложной λ -образной структуры отрыва пограничного слоя. Здесь 1 – головной скачок уплотнения, падающий на стенку, 2 – волна сжатия, 3 – отраженный скачок уплотнения, 5 – волна сжатия, возникающая в месте присоединения отрывного потока. Из графиков следует качественное согласование расчетных и экспериментальных данных. Далее производилось исследование взаимодействия скачка уплотнения (угол генератора $\alpha = 10^0$) с пограничным слоем на стенке при изменении числа Маха набегающего потока. Анализ влияния числа Маха потока на поле вектора скорости отражен на рисунке 4 (4а – $M_\infty = 5$, 4б – $M_\infty = 4,5$, 4в – $M_\infty = 4$, 4г – $M_\infty = 3,5$). Результаты показывают, что при числах Маха, равных 5 и 4,5, происходит безотрывное взаимодействие падающей ударной волны с пограничным слоем (фигуры 4а и 4б). При уменьшении числа Маха потока до 4 и ниже уже можно наблюдать возвратное течение на стенке (рис. 4а и 4б). Увеличение числа Маха потока заметно уменьшает дозвуковую область вблизи стенки и интенсивности скачка уплотнения недостаточно для формирования области отрыва. Уменьшение числа Маха потока с 4 до 3,5 приводит к увеличению зоны отрыва потока на стенке, что можно наблюдать из распределения линий тока, представленных на графике 5 (5а – $M_\infty = 4$, 5б – $M_\infty = 3,5$). При изменении числа Маха с 4 до 3,5 зона отрыва увеличивается по длине в 1,55, а по высоте – в 1,2 раза. При уменьшении скорости основного потока угол наклона косога скачка уплотнения увеличивается, что, в свою очередь, влечет более интенсивное взаимодействие ударной волны с пограничным слоем. Картина распределения изобар, представленная на рисунке 6 (6а – $M_\infty = 5$, 6б – $M_\infty = 4,5$, 6в – $M_\infty = 4$, 6г – $M_\infty = 3,5$), демонстрирует ударно-волновую структуру течения. Здесь видно, что при $M_\infty = 5$ и $M_\infty = 4,5$ происходит падение и отражение скачка уплотнения от стенки (1 и 5 на графиках 6а и 6б). Тогда как для случаев $M_\infty = 4$ и $M_\infty = 3,5$ (фигуры 6в и 6г) уже возникает λ -образная ударно-волновая структура течения. Распределение давления на стенке, представленное на рисунке 7 (линия 1 – $M_\infty = 5$, линия 2 – – –

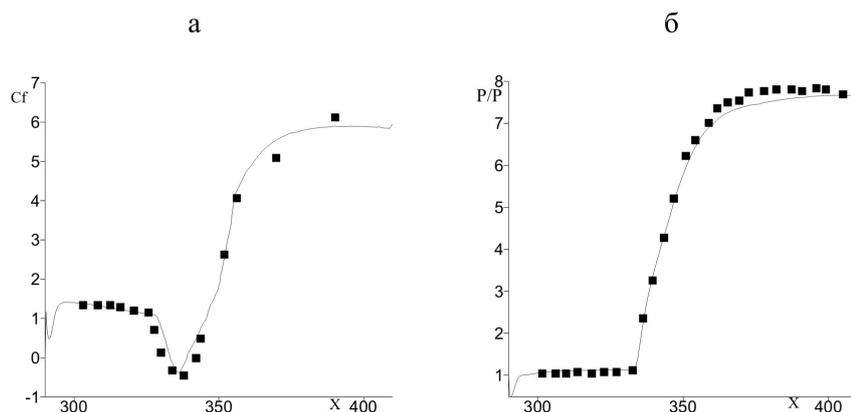


Рисунок 2 – Коэффициент трения и распределение давления на стенке

$M_\infty = 4$, линия 3 – $M_\infty = 4$, и линия 4 – $M_\infty = 3,5$) показывает, что давление на стенке растет с возрастанием числа Маха потока. Для отрывных течений происходит дополнительное повышение давления за счет отрыва пограничного слоя на стенке.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанная численная модель для расчета турбулентных течений на основе WENO-схемы позволяет моделировать течение сверхзвукового многокомпонентного газа при наличии падающей ударной волны. Сопоставление расчетов с опытными данными показывает удовлетворительное согласование результатов. С помощью проведенных численных экспериментов выявлено, что для угла генератора скачка уплотнения $\alpha = 10^\circ$ с увеличением числа Маха потока с $M_\infty = 4,5$ и выше формируется безотрывное взаимодействие падающей ударной волны с пограничным слоем вследствие уменьшения дозвуковой области вблизи стенки, в результате чего интенсивности скачка уплотнения недостаточно для формирования области отрыва. Изучена динамика образования зоны отрыва в зависимости от увеличения скорости набегающего потока, а также проведен анализ

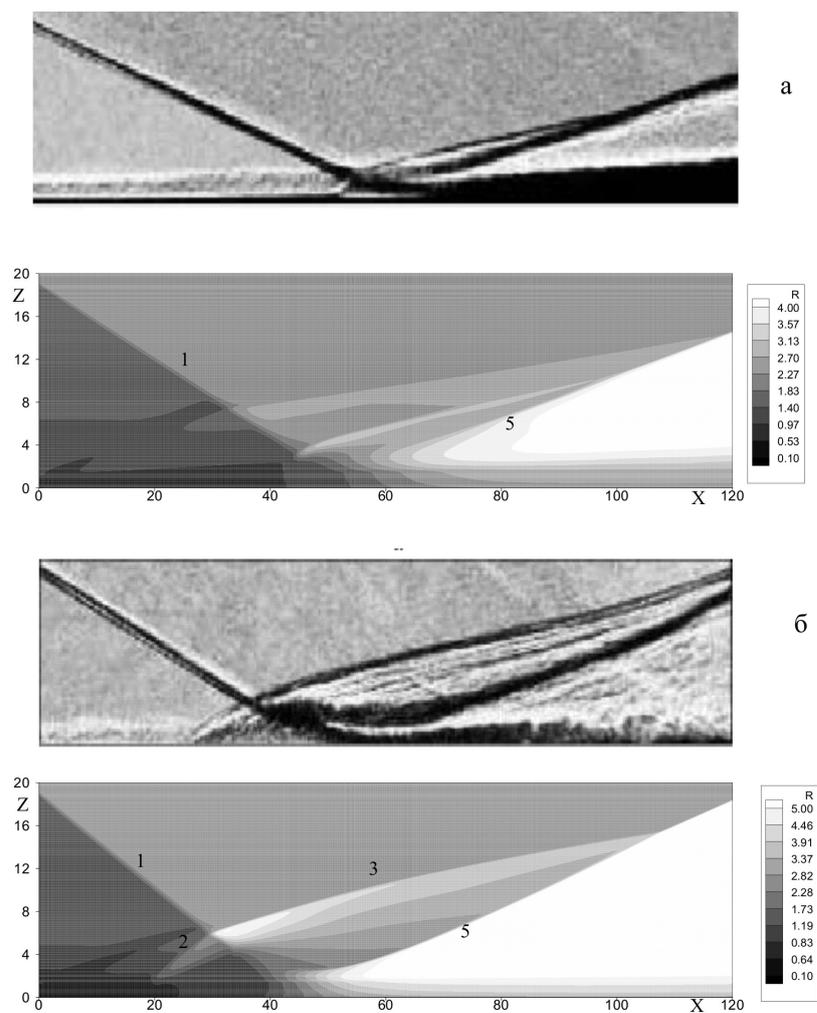


Рисунок 3 – Теневые фотографии течения и распределение плотности

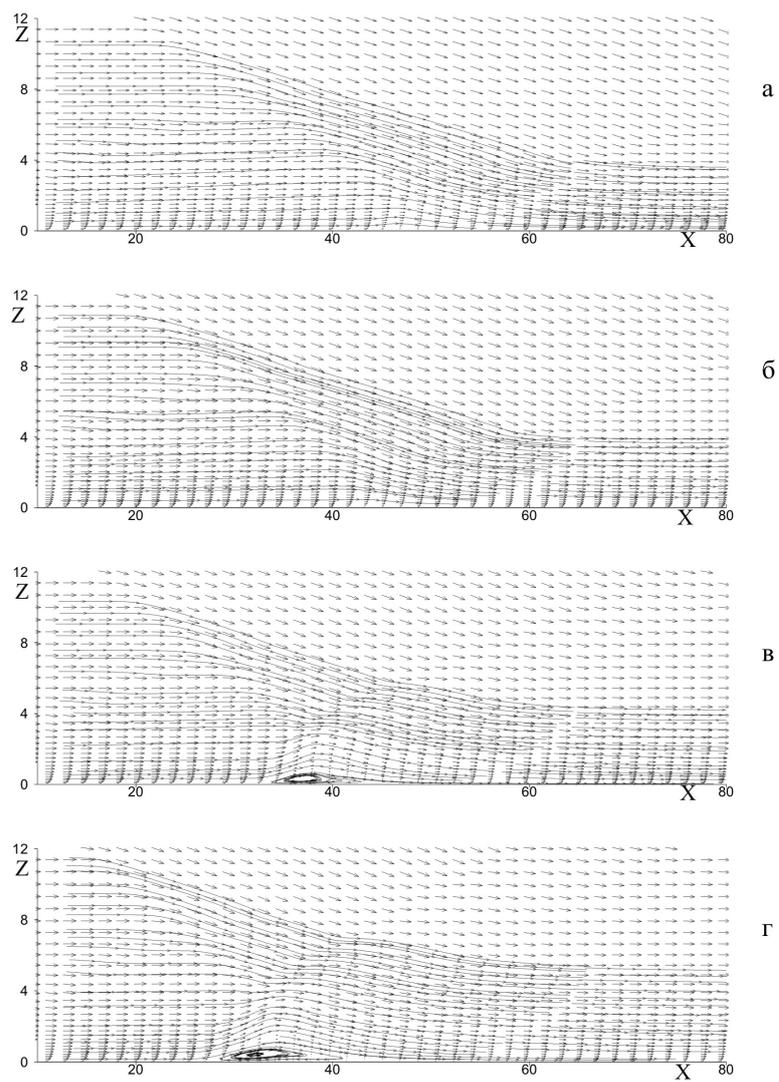


Рисунок 4 – Поле вектора скорости

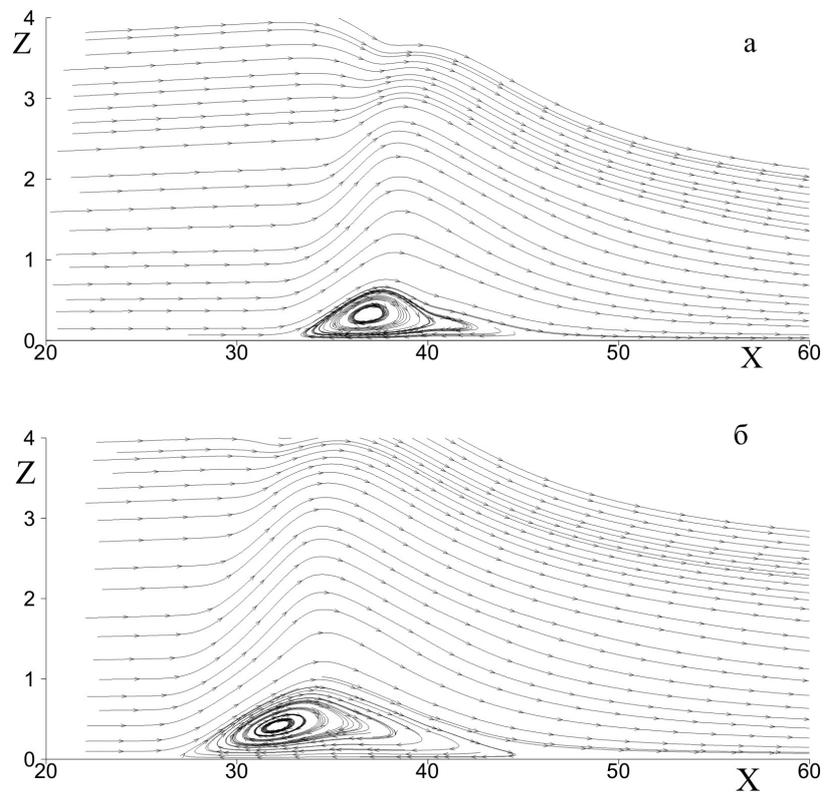


Рисунок 5 – Распределение линий тока

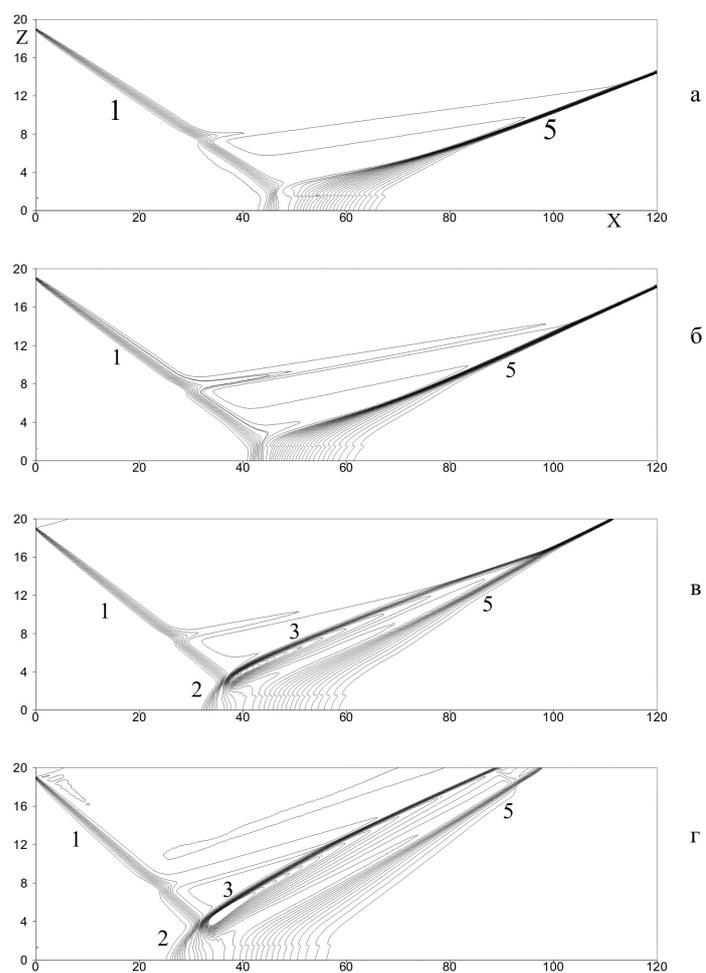


Рисунок 6 – Распределение изобар

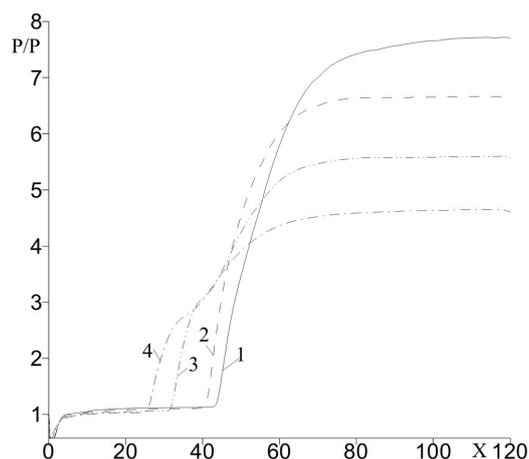


Рисунок 7 – Давление на стенке

избыточного давления на стенке в зависимости от числа Маха сверхзвукового течения.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Поливанов П.А., Сидоренко А.А., Маслов А.А. Экспериментальное исследование взаимодействия ударной волны с турбулентным пограничным слоем // Вестник НГУ. – 2008. – Т. 3, № 2. – С. 3-14.
- 2 Bura R.O., Yao Y.F., Roberts G.T. and Sandham N.D. Investigation of supersonic and hypersonic shock-wave/boundary-layer interactions // Shock Waves. – 2005. – Springer. – P. 695-700.
- 3 Hadjadj A. Shock wave boundary layer interaction // Shock Waves. – 2009. – № 19. – P. 449-452.
- 4 Глушнев А.В., Савельев А.С., Сон Э.Е. Взаимодействие скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем на нагретой поверхности // Теплофизика высоких температур. – 2013. – Т. 51, № 6. – С. 891-896.
- 5 Knight D., Yan H., Panaras A., Zheltovodov A. RTO WG 10: CFD validation for shock wave turbulent boundary layer interactions // AIAA Paper. – 2002. – 0437.

6 Федорова Н.Н., Федорченко И.А. Расчет взаимодействия падающего косо-го скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем на пластине // Прикладная механика и техническая физика. – 2004. – Т. 45, № 3 – С. 61-71.

7 Ершов С.В., Поливанов П.А., Сидоренко А.А., Дервянко А.И. Численное решение задачи о взаимодействии скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем // Аэро- и гидромеханика в энергетических машинах. – 2010. – Т. 13, № 2. – С. 16-23.

8 Краснов Н.Ф., Кошевой В.Н., Калугин В.Т. Аэродинамика отрывных течений. – М.: Высш. шк., 1988. – С. 351.

9 Poinso T.J., Lele S.K. Boundary Conditions for Direct Simulation of Compressible Viscous Flows // J. Comput. Phys. – 1992. – № 101. – P. 104-129.

10 Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газов. – М.: Наука, 1987. – С. 840.

11 Бекетаева А.О., Найманова А.Ж. Применение ENO (Essentially Non-Oscillatory) схемы для моделирования течения многокомпонентной газовой смеси // Вычислительные технологии. – 2007. – Т. 12, № 4. – С. 17-25.

Статья поступила в редакцию 25.06.2015

Бекетаева Ә.О. ШЕКАРАЛЫҚ ҚАБАТ ПЕН ҚҰЛАМАЛЫ ТОЛҚЫН СОҚҚЫСЫНЫҢ ӨЗАРА ӘРЕКЕТТЕСУІН МОДЕЛЬДЕУ

Жетілдірілген көпкомпонентті газ ағындары үшін Фавр бойынша орташаланған Навье-Стокс теңдеуін шешудің ұсынылған алгоритмі көмегімен шекаралық қабат пен құламалы толқын соққысының өзара әрекеттесуінің сандық моделі WENO-сұлбасы негізінде жүзеге асады. Кіре беріс қимасындағы нығыздаманың құламалы секірісін модельдеу үшін қиғаш толқын туралы үйкеліссіз есептің шешімінен алынған шарттар қойылды. Тәжірибеден алынған берілімдермен салыстыру жасалды. Құламалы толқын соққысының шекаралық қабатпен өзара әрекеттесуі екпінді ағынның Мах санына тәуелді болатын үзілмелі және үзілмейтін ағын жағдайларында зерттелді.

Beketaeva A.O. SIMULATION OF THE SHOCK WAVE AND BOUNDARY LAYER INTERACTION

Numerical simulation of 2-d supersonic shock wave and boundary layer interaction have been carried out by solving the Favre averaged Navier-Stokes equations for the flow of a perfect multi-component gas using WENO-scheme. To simulate the shock wave in the inlet section the conditions for the solution

of a non-viscous problem on a oblique shock wave are set. The results are compared with the experimental data. The shock wave and boundary layer interaction under the conditions of separated and unseparated flow, depending on the free-stream Mach number are studied.

УДК 517.95

Н.А. ЕСИРКЕГЕНОВ, М.А. САДЫБЕКОВ

Институт математики и математического моделирования

050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: makhmud-s@mai.ru

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

050040, Алматы, проспект аль-Фараби, 71, e-mail: nurgisa@hotmail.com

КОРРЕКТНАЯ ЗАДАЧА С ДАННЫМИ НА ВСЕЙ ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В настоящей работе нами предлагаются две новые постановки краевых задач для волнового уравнения в прямоугольной области, в которой краевые условия задаются на всей границе области. Доказывается корректность сформулированных задач в классическом и обобщенном смыслах. Для обоснования их корректности необходимо иметь эффективное представление общего решения задачи. В этом направлении нами получена удобная формула представления общего решения волнового уравнения в прямоугольной области, основанная на классической формуле Даламбера. При этом построенное общее решение уже заведомо удовлетворяет краевым условиям по пространственной переменной. Далее, задавая различные краевые условия по временной переменной, мы получаем некоторые функциональные или функционально-дифференциальные уравнения. Таким образом, доказательство корректности сформулированных задач сведено к вопросу существования и единственности решения соответствующего функционального уравнения.

Ключевые слова: *Волновое уравнение, корректность задач, классическое решение, сильное решение, формула Даламбера.*

© Н.А. Есиркегенов, М.А. Садыбеков, 2015.

Keywords: *Wave equation, well-posedness of problems, classic solution, strong solution, formula of d'Alembert*

2010 Mathematics Subject Classification: 33C10, 34B30, 35J, 35P10

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Omega \subset R^2$ – прямоугольная область, ограниченная прямыми: $AB : 0 \leq x \leq a, y = 0$; $BC : x = a, 0 \leq y \leq b$; $CD : 0 \leq x \leq a, y = b$ и $AD : x = 0, 0 \leq y \leq b$.

В области Ω рассмотрим неоднородное волновое уравнение

$$u_{xx} - u_{yy} = f(x, y). \quad (1)$$

Хорошо известно, что задача Дирихле для волнового уравнения (1) в прямоугольной области не является корректной [1]. Конкретно, в случае области Ω легко видеть, что однородное уравнение (1) с условиями Дирихле

$$u|_{AB \cup BC \cup AD} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{CD} = 0 \quad (3)$$

имеет счетное число ненулевых решений вида $u_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$, $m, n = 1, 2, \dots$ при выполнении условий $na = mb$.

Задача Дирихле для волнового уравнения является одной из наиболее сложных моделей математической физики. Волновое уравнение описывает почти все разновидности малых колебаний в распределенных механических системах таких, как продольные звуковые колебания в газе, жидкости, твердом теле; поперечные колебания в струнах и т.п. Компоненты электромагнитных векторов и потенциалов и, следовательно, многие электромагнитные явления (от квазистатики до оптики) в той или иной мере объясняются свойствами решений волнового уравнения.

Впервые неединственность решения задачи Дирихле для волнового уравнения была отмечена в работах Ж. Адамара [2], А. Губера [3]. В своей работе Д. Боржин и Р. Даффин [4] рассмотрели задачу Дирихле для однородного уравнения (1) в прямоугольнике $\{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq X\}$. Используя преобразование Лапласа, они показали, что если число T/X – иррациональное, то имеет место единственность решения задачи в классе непрерывно дифференцируемых функций с суммируемыми по Лебегу вторыми производными. А в работе [5], когда T/X является алгебраическим числом степени $n \geq 2$, получено условие существования и единственности решения задачи Дирихле.

В работе [6] для гиперболических уравнений второго порядка с интегральными условиями в прямоугольнике доказаны существование и единственность обобщенного решения.

В работе [7] доказана корректность краевых задач для волнового уравнения в прямоугольной области в случае $a/b = 2$, в которой краевые условия задаются на всей границе области.

Отметим также, что в последнее время усилился интерес к исследованию классических начально-краевых задач для волнового уравнения в прямоугольных областях в связи с задачами по исследованию оптимизации граничного управления процессами колебаний струны (см., например, [8]-[10]).

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

ЗАДАЧА 1. В области Ω при $a/b = 2$ найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (4)$$

$$u_y(x, 0) = \nu(x), \quad 0 \leq x \leq a \quad (5)$$

и краевым условиям

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq \frac{a}{2}. \quad (6)$$

Задача 1 является классической первой начально-краевой задачей.

Решение задачи Коши для уравнения (1) с начальными условиями (4) и (5) существует и единственно. Но оно однозначно определяется не во всей области Ω , а только в ее части $\Omega_1 = \{(x, y) : (x, y) \in \Omega, y \leq x \leq a - y\}$. А в области $\Omega \setminus \Omega_1$ решение не определяется однозначно из данных Коши (4), (5). Оно определяется однозначно только с использованием краевых условий рассматриваемых задач.

Пусть $u(x, y)$ – решение Задачи 1. Введем в рассмотрение новую функцию $\tilde{u}(x, y)$, определенную в области $\tilde{\Omega}$, которая содержит в себе исходную область Ω : $\tilde{\Omega} = \{(x, y) : 0 \leq y \leq \frac{a}{2}, y - \frac{a}{2} \leq x \leq \frac{3a}{2} - y\}$.

Функцию $\tilde{u}(x, y)$ зададим по формуле

$$\tilde{u}(x, y) = \begin{cases} -u(-x, y), & -\frac{a}{2} \leq x \leq 0; \\ u(x, y), & 0 \leq x \leq a; \\ -u(2a - x, y), & a \leq x \leq \frac{3a}{2}. \end{cases} \quad (7)$$

Учитывая краевые условия (6), нетрудно убедиться в том, что функция $\tilde{u}(x, y)$ будет непрерывной и непрерывно дифференцируемой при переходе линий $x = 0$ и $x = a$. А так как функция $u(x, y)$ является гладкой в области Ω , то функция $\tilde{u}(x, y)$ будет гладкой в области $\tilde{\Omega}$.

Найдем уравнение, которому удовлетворяет в области $\tilde{\Omega}$ функция $\tilde{u}(x, y)$. Нетрудно убедиться непосредственным вычислением в том, что эта функция удовлетворяет в области $\tilde{\Omega}$ неоднородному волновому уравнению

$$\tilde{u}_{xx} - \tilde{u}_{yy} = \tilde{f}(x, y), \quad (8)$$

где

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} -f(-x, y), & -\frac{a}{2} \leq x \leq 0; \\ f(x, y), & 0 \leq x \leq a; \\ -f(2a - x, y), & a \leq x \leq \frac{3a}{2}. \end{cases} \quad (9)$$

Из начальных условий (4) и (5) с учетом (7) получаем начальные условия для функции $\tilde{u}(x, y)$ в области $\tilde{\Omega}$:

$$\tilde{u}(x, 0) = \tilde{\tau}(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (10)$$

$$\tilde{u}_y(x, 0) = \tilde{\nu}(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (11)$$

где функции $\tilde{\tau}(x)$ и $\tilde{\nu}(x)$ задаются равенствами

$$\tilde{\tau}(x) = \begin{cases} -\tau(-x), & -\frac{a}{2} \leq x \leq 0; \\ \tau(x), & 0 \leq x \leq a; \\ -\tau(2a - x), & a \leq x \leq \frac{3a}{2}. \end{cases} \quad (12)$$

$$\tilde{\nu}(x) = \begin{cases} -\nu(-x), & -\frac{a}{2} \leq x \leq 0; \\ \nu(x), & 0 \leq x \leq a; \\ -\nu(2a - x), & a \leq x \leq \frac{3a}{2}. \end{cases} \quad (13)$$

В области $\tilde{\Omega}$ решение задачи Коши (8), (10), (11) существует, единственно и выражается классической формулой Даламбера:

$$\tilde{u}(x, y) = \frac{\tilde{\tau}(x+y) + \tilde{\tau}(x-y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} \tilde{\nu}(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int_0^y \left\{ \int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} \tilde{f}(\xi, \eta) d\xi \right\} d\eta. \quad (14)$$

Непосредственным вычислением легко проверить, что функция $\tilde{u}(x, y)$ удовлетворяет уравнению (8) и начальным условиям (10) и (11).

Покажем теперь, что в силу (12) и (13), а также с учетом (9) функция $\tilde{u}(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям (6) Задачи 1.

Вычисляем

$$\tilde{u}(0, y) = \frac{\tilde{\tau}(y) + \tilde{\tau}(-y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{-y}^y \tilde{\nu}(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int_0^y \left\{ \int_{-y+\eta}^{y-\eta} \tilde{f}(\xi, \eta) d\xi \right\} d\eta. \quad (15)$$

В силу (12) легко получить

$$\tilde{\tau}(y) + \tilde{\tau}(-y) = \tau(y) - \tau(y) = 0. \quad (16)$$

Из (13) простой заменой переменной в интеграле находим

$$\int_{-y}^y \tilde{\nu}(\xi) d\xi = \int_{-y}^0 \tilde{\nu}(\xi) d\xi + \int_0^y \tilde{\nu}(\xi) d\xi = \int_y^0 \nu(\xi) d\xi + \int_0^y \nu(\xi) d\xi = 0. \quad (17)$$

В третьем слагаемом из (15) делаем очевидные замены переменных. Так как $0 \leq y - \eta \leq a/2$, $-a/2 \leq \eta - y \leq 0$, то получаем

$$\begin{aligned} - \int_0^y \left\{ \int_{-y+\eta}^{y-\eta} \tilde{f}(\xi, \eta) d\xi \right\} d\eta &= - \int_0^y \left\{ \int_{-y+\eta}^0 \tilde{f}(\xi, \eta) d\xi \right\} d\eta - \int_0^y \left\{ \int_0^{y-\eta} \tilde{f}(\xi, \eta) d\xi \right\} d\eta = \\ &= - \int_0^y \left\{ \int_{y-\eta}^0 f(\xi, \eta) d\xi \right\} d\eta - \int_0^y \left\{ \int_0^{y-\eta} f(\xi, \eta) d\xi \right\} d\eta = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Суммируя найденное в (16)-(18), получаем из (15), что $\tilde{u}(0, y) = 0$. То есть, первое из краевых условий (6) выполнено.

Аналогично проверяется выполнение второго краевого условия из (6).

Следовательно, формула (14) дает решение Задачи 1. Выпишем ее решение в области $\tilde{\Omega}$ через функции f, τ, ν . Для этого в формулу (14) подставим значения $\tilde{f}, \tilde{\tau}, \tilde{\nu}$, выражаемые по формулам (9), (12) и (13).

Введем обозначения: $\Omega_1 = \{(x, y) : (x, y) \in \Omega, y < x < a - y\}$, $\Omega_2 = \{(x, y) : (x, y) \in \Omega, x < y\}$ и $\Omega_3 = \{(x, y) : (x, y) \in \Omega, x + y > a\}$.

Тогда непосредственным вычислением получаем представления решения Задачи 1.

В области Ω_2

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y) = & \frac{\tau(x+y) - \tau(y-x)}{2} + \frac{1}{2} \int_{y-x}^{x+y} \nu(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int_0^{y-x} \left\{ \int_{y-x-\eta}^{x+y-\eta} f(\xi, \eta) d\xi \right\} d\eta - \\ & - \frac{1}{2} \int_{y-x}^y \left\{ \int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} f(\xi, \eta) d\xi \right\} d\eta. \end{aligned} \quad (19)$$

В области Ω_1

$$\tilde{u}(x, y) = \frac{\tau(x+y) + \tau(x-y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} \nu(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int_0^y \left\{ \int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} f(\xi, \eta) d\xi \right\} d\eta. \quad (20)$$

В области Ω_3

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y) = & \frac{\tau(x-y) - \tau(2a-x-y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{2a-x-y} \nu(\xi) d\xi - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^{x+y-a} \left\{ \int_{x-y+\eta}^{2a-x-y+\eta} f(\xi, \eta) d\xi \right\} d\eta - \\ & - \frac{1}{2} \int_{x+y-a}^y \left\{ \int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} f(\xi, \eta) d\xi \right\} d\eta. \end{aligned} \quad (21)$$

3. ФОРМУЛИРОВКА И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА.

Пусть $E = (b, b)$, $F = (a-b, b)$ – точки на границе CD .

ЗАДАЧА 2. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (2) и условиям на границе CD :

$$u|_{CE} = 0, \quad (22)$$

$$u_y|_{DE} = 0. \quad (23)$$

Наряду с Задачей 2 рассмотрим следующую Задачу 3.

ЗАДАЧА 3. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (2) и условиям на границе CD :

$$u_y|_{CF} = 0, \quad (24)$$

$$u|_{DF} = 0. \quad (25)$$

Как обычно, функцию $u \in L_2(\Omega)$ назовем *сильным решением* Задачи 2 (Задачи 3), если существует последовательность функций $u_n \in W_2^2(\Omega)$, удовлетворяющих краевым условиям задачи, такая, что u_n и Lu_n сходятся в $L_2(\Omega)$ к u и f соответственно.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $b = 1, a = n \in N$ и $n \geq 2$. а) Тогда классическое решение задачи (1), (2), (22) и (23) существует, единственно, принадлежит классу $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ и устойчиво по норме пространства $C^1(\bar{\Omega})$ для функции $f \in C^1(\bar{\Omega})$, удовлетворяющей необходимому условию согласования:

$$\int_0^1 f(y, y) dt = 0; \quad (26)$$

$$f(n, 0) = 0; \quad (27)$$

$$f(n, 1) = 0. \quad (28)$$

б) Для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ задача (1), (2), (22) и (23) имеет единственное сильное решение. Это решение принадлежит классу $u \in W_2^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ и удовлетворяет оценке:

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L_2(\Omega)}. \quad (29)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $b = 1, n \in N$ и $n \geq 2$. а) Классическое решение задачи (1), (2), (24) и (25) существует, единственно, принадлежит классу $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ и устойчиво по норме пространства $C^1(\bar{\Omega})$ для функции $f \in C^1(\bar{\Omega})$, удовлетворяющей необходимому условию согласования:

$$\int_0^1 f(n - y, y) dy = 0; \quad (30)$$

$$f(0, 0) = 0; \quad (31)$$

$$f(0, 1) = 0. \quad (32)$$

б) Для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ задача (1), (2), (24) и (25) имеет единственное сильное решение. Это решение принадлежит классу $u \in W_2^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ и удовлетворяет оценке:

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L_2(\Omega)}. \quad (33)$$

Доказательство. Доказательство приведем только для теоремы 1. Доказательство теоремы 2 проводится аналогично. Так как $a = n \geq 2, b = 1$, мы используем представления решения (19)–(21) в ходе доказательства теоремы 1.

а) Учитывая из (2), что $u|_{AB} = \tau(x) = 0$, подставим представление решения (19) в краевое условие (23). Тогда:

$$\nu(x+1) - \nu(1-x) + F'_{1y}(x, 1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (34)$$

где

$$F_1(x, y) = - \int_0^{y-x} \left\{ \int_{y-x-\eta}^{x+y-\eta} f(\xi, \eta) d\xi \right\} d\eta - \int_{y-x}^y \left\{ \int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} f(\xi, \eta) d\xi \right\} d\eta.$$

Теперь подставим представление решения (20) в краевое условие (22). Тогда

$$\int_{x-1}^{x+1} \nu(\xi) d\xi + F_2(x, 1) = 0, \quad 1 \leq x \leq n-1.$$

Берем производную по x , тогда получаем

$$\nu(x+1) - \nu(x-1) + F'_{2x}(x, 1) = 0, \quad 1 \leq x \leq n-1, \quad (35)$$

где

$$F_2(x, t) = - \int_0^y \left\{ \int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} f(\xi, \eta) d\xi \right\} d\eta.$$

В уравнении (35) для каждого из $n-2$ отрезков $[i, i+1], i = \overline{1, n-2}$ делаем замену $x = i+1-t, 0 \leq t \leq 1$:

$$\nu(i+2-t) - \nu(i-t) + F'_{2x}(i+1-t, 1) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, i = \overline{1, n-2}. \quad (36)$$

Теперь подставим представление решения (21) в краевое условие (22). Тогда

$$\int_{x-1}^{2n-x-1} \nu(\xi) d\xi + F_3(x, 1) = 0, \quad n-1 \leq x \leq n.$$

Берем производную по x , тогда получаем

$$-\nu(2n-x-1) - \nu(x-1) + F'_{3x}(x, 1) = 0, \quad n-1 \leq x \leq n, \quad (37)$$

где

$$F_3(x, t) = -\int_0^{x+y-n} \left\{ \int_{x-y+\eta}^{2n-x-y+\eta} f(\xi, \eta) d\xi \right\} d\eta - \int_{x+y-n}^y \left\{ \int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} f(\xi, \eta) d\xi \right\} d\eta.$$

В уравнении (37) делаем замену $x = n - t$, $0 \leq t \leq 1$:

$$-\nu(n+t-1) - \nu(n-t-1) + F'_{3x}(n-t, 1) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (38)$$

Таким образом, существование и единственность решения задачи (1), (2), (22), (23) эквивалентно существованию и единственности функции $\nu(x) = u_y(x, 0)$, удовлетворяющей уравнениям (34), (36) и (38).

Мы имеем n неоднородных уравнений для n неизвестных функций $\nu(x_i)$, $i-1 \leq x_i \leq i$, $i = \overline{1, n}$. Тогда существование и единственность функции $\nu(x)$ эквивалентны следующему:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2(-1)^{n-1} \neq 0.$$

Итак, мы доказали существование и единственность решения задач (1), (2), (22) и (23).

Теперь покажем устойчивость по норме пространства $C^1(\overline{\Omega})$. В силу (26)–(28) и из уравнений (34), (36), (38) получим, что

$$\nu(i-0) = \nu(i+0), \quad i = \overline{1, n-1}; \quad (39)$$

$$\nu_x(i-0) = \nu_x(i+0), \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (40)$$

Поэтому решение задачи (1), (2), (22) и (23) устойчиво по норме пространства $C^1(\overline{\Omega})$.

б) Из существования и единственности классического решения задачи (1), (2), (22) и (23) стандартными методами получаем существование единственного сильного решения задачи (1), (2), (22) и (23).

Из представления решения задачи легко заметить, что сильное решение зависит от $\nu(x)$ и $f(x, y)$. Так как $\det A \neq 0$, то из уравнений (34), (36) и (38) видно что, функция $\nu(x)$ зависит только от $f(x, y)$.

Тогда

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_2^1(\Omega)} &\leq C_1 \|\nu(x)\|_{L_2(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L_2(\Omega)} = C_1 \|A^{-1}f\|_{L_2(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L_2(\Omega)} \leq \\ &\leq C_3 \|A^{-1}\| \|f\|_{L_2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования КН МОН РК, грант № 0824/ГФ4.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Hadamard J. Sur les problemes aux derivees partielles et leur signification physique // Bull. Univ. Princeton. – 1902. – V. 13. – P. 49-52.
- 2 Hadamard J. Equations aux derivees partielles. Les conditions definies en general. Le cas hyperbolique // Enseignement Math. – 1936. – V. 35, № 6. – P. 5-42.
- 3 Huber A. Die erste Randwertaufgabe fur geschlossene Bereiche bei der Gleichung $u_{xy} = f(x, y)$ // Monatshefte fur Mathematik und Physik. – 1932. – V. 39, № 1. – P. 79-100.
- 4 Bourgin D.G., Duffin R. The Dirichlet problem for the vibrating string equation // Bull. Amer. Math. Soc. – 1939. – V. 45, № 12. – P. 851-858.
- 5 Сабитов К.Б. Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2013. – 352 с.

6 Pulkina L.S. A non-local problem with integral conditions for hyperbolic equations // Electronic Journal of Differential Equations. – 1999. – V. 1999, № 45. – P. 1-6.

7 Есиркегенов Н.А. Об одной задаче для волнового уравнения с данными на всей границе // Вестник КазНУ. Сер. мат., мех., инф. – 2013. – Т. 79, № 4. – С. 43-51.

8 Ильин В.А., Моисеев Е.И. Оптимизация граничного управления смещением или упругой силой на одном конце струны за произвольное достаточно большое время // Автомат. и телемех. – 2008. – Т. 69, № 3. – С. 7-16.

9 Моисеев Е.И., Холмеева А.А. Оптимальное граничное управление смещением колебаниями струны с нелокальным условием четности второго рода // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47, № 1. – С. 126-133.

10 Моисеев Е.И., Холмеева А.А. Разрешимость смешанной задачи для волнового уравнения с динамическим граничным условием // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 10. – С. 1392-1397.

Статья поступила в редакцию 03.10.2015

Есиркегенов Н.А., Садыбеков М.А. БІР ӨЛШЕМДІ ТОЛҚЫН ТЕҢДЕУІ ҮШІН ОБЛЫС ШЕКАРАСЫНЫҢ БАРЛЫҒЫНДА БЕРІЛІМ-ДЕРІ БАР КОРРЕКТІЛІ ЕСЕП

Бұл жұмыста тіктөртбұрышты облыстағы толқын теңдеуі үшін шеттік шарттары оның шекарасының барлығында берілген екі жаңа шеттік есепті ұсынамыз. Осы есептің қисындылығы классикалық және жалпыланған мағынада дәлелденді. Олардың қисындылығын негіздеу үшін есептің жалпы шешімінің тиімді кейіптемесі болуы керек. Осы бағытта тіктөртбұрышты облыстағы толқын теңдеуінің жалпы шешімінің кейіптемесінің ықшамды формуласы классикалық Даламбер формуласына негізделіп алынды. Құрастырылған жалпы шешім кеңістік айнаымалысы бойынша шеттік шарттарды алдын ала қанағаттандырып отыр. Уақыт бойынша әртүрлі шеттік шарттар қойып, біз белгілі бір функционалдық немесе функционалдық-дифференциалдық теңдеулер аламыз. Сонымен тұжырымдалған есептердің қисындылығын дәлелдеу сәйкес функционалдық теңдеудің шешімінің бар және жалғыз болу мәселесіне алып келеді.

Yessirkegenov N.A., Sadybekov M.A. A PROBLEM FOR THE ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATION WITH DATA ON THE WHOLE BOUNDARY OF THE DOMAIN

In this paper we propose two new boundary value problems for the wave equation in a rectangular domain in which boundary conditions are given on the whole boundary. We prove the correctness of boundary value problems in the classical and generalized senses. In order to show the correctness of these problems it is necessary to have an effective representation of the general solution of the problem. In this direction we obtain a convenient representation of the general solution for the wave equation in a rectangular domain based on D'Alembert classical formula. The constructed general solution automatically satisfies the boundary conditions by the spatial variable. Further, assigning different boundary conditions for temporary variable, we get some functional or functional-differential equations. Thus, the proof of the correctness of the problems is reduced to the question of the existence and the uniqueness of solutions of the corresponding functional equations.

УДК 517.927

Ж.Х. ЖУНУСОВА

Казахский национальный университет имени аль-Фараби
050040, Алматы, проспект аль-Фараби, 71, e-mail: zhzhkh@mail.ru

ПОВЕРХНОСТЬ К ОДНОСОЛИТОННОМУ РЕШЕНИЮ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Рассмотрено нелинейное уравнение Шредингера. Найдена поверхность в смысле Фокаса-Гельфанда, соответствующая односолитонному решению нелинейного уравнения Шредингера в случае конечной плотности.

Ключевые слова: *нелинейное уравнение, иммерсия, конечная плотность, односолитонное решение.*

1 ВВЕДЕНИЕ

За последние двадцать лет большое количество исследований посвящено изучению нелинейных уравнений. Некоторые нелинейные волновые уравнения могут появляться в различных задачах физики [1]-[5]. Например, такими уравнениями являются хорошо известные уравнения Кортевега де Вриза, Шредингера, \sin -Гордона.

Теория солитонов является мощным аппаратом для изучения нелинейных уравнений, включая их геометрический смысл. С геометрической точки зрения солитонные системы рассматриваются, как иммерсии бесконечномерных пространств. Другими словами, иерархия солитонных уравнений рассматривается как система, определяющая иммерсию (или погружение) многообразия V^n в пространство V^m , где $n < m$. Связь между

© Ж.Х. Жунусова, 2015.

Keywords: *nonlinear equation, immersion, finite density, onesoliton solution*

2010 Mathematics Subject Classification: 34A34

теорией солитонов и теорией поверхностей устанавливается введением эволюционных уравнений, ассоциированных с алгеброй. Связь (1+1)-мерных солитонных уравнений с теорией поверхностей дается уравнением Гаусса-Кодацци-Майнарди. В этом случае солитонные уравнения рассматриваются, как некоторые интегрируемые редукции уравнения Гаусса-Кодацци-Майнарди.

В данной работе мы рассматриваем простейшие аспекты солитонных иммерсий в многомерном пространстве в смысле Фокаса-Гельфанда [1]. В современной литературе понятие иммерсии достаточно широко распространено и относится не только к теории солитонов. Переход от исходной задачи к более простой задаче называется иммерсией. Слово "иммерсия" происходит от латинского слова *immersio* и переводится на русский язык, как "погружение" [6]. Строгого определения данного понятия нет.

Согласно работе Фокаса-Гельфанда [1] приведем описание солитонной иммерсии. В (1+1)-мерном случае нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных даются в виде условий нулевой кривизны:

$$U_t - V_x + [U, V] = 0,$$

где $[U, V] = UV - VU$, матрица U задана, а матрица V выражается в терминах элементов матрицы U . Также нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных являются условием совместности системы линейных уравнений

$$\phi_x = U\phi, \phi_t = V\phi.$$

В этом случае существует поверхность с иммерсионной функцией $P(x, t)$, определяемая следующими формулами:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \phi^{-1}X\phi, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = \phi^{-1}Y\phi.$$

Поверхность, определенная посредством $P(x, t)$, идентифицируется с поверхностью в трехмерном пространстве, определенной координатами $x_j = P_j(x, t)$, $j = 1, 2, 3$ [1]. Репер на поверхности дается тройкой [1]:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \phi^{-1}X\phi, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = \phi^{-1}Y\phi, \quad N = \phi^{-1}J\phi,$$

где $J = \frac{[X,Y]}{|[X,Y]|}$, $|X| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$. Здесь по определению

$$\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2} \text{tr}(XY),$$

где X, Y являются некоторыми матрицами. Первая и вторая фундаментальные формы в смысле Фокаса-Гельфанда даются как [1]

$$I = \langle X, X \rangle dx^2 + 2 \langle X, Y \rangle dxdt + \langle Y, Y \rangle dt^2, \quad (1)$$

$$II = \left\langle \frac{\partial X}{\partial x} + [X, U], J \right\rangle dx^2 + 2 \left\langle \frac{\partial X}{\partial t} + [X, V], J \right\rangle dxdt + \left\langle \frac{\partial Y}{\partial t} + [Y, V], J \right\rangle dt^2. \quad (2)$$

Как показано в работе [1], функция иммерсии P может быть определена, как

$$P = \gamma_0 \phi^{-1} \phi_\lambda + \phi^{-1} M_1 \phi = \sum_{j=1}^3 P_j f_j,$$

где M_1 является матричной функцией, определенной по λ, x, t . Здесь $f_j = -\frac{i}{2} \sigma_j$ является базисом соответствующей алгебры, σ_j являются матрицами Паули и $[f_i, f_j] = f_k$. В этом случае X, Y можно записать, как

$$X = \gamma_0 U_\lambda + M_{1x} + [M_1, U], Y = \gamma_0 V_\lambda + M_{1t} + [M_1, V].$$

2. СОЛИТОННЫЕ ИММЕРСИИ В (1+1)-ИЗМЕРЕНИИ

Пусть матрицы X, Y, J имеют вид

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

В этом случае элементы матрицы J выражаются через элементы матриц X и Y в соответствии со следующими формулами:

$$c_{11} = \frac{a_{12}b_{21} - b_{12}a_{21}}{|[X, Y]|}, \quad c_{21} = \frac{a_{21}(b_{11} - b_{22}) + b_{21}(a_{22} - a_{11})}{|[X, Y]|},$$

$$c_{12} = \frac{b_{12}(a_{11} - a_{22}) + a_{12}(b_{22} - b_{11})}{|[X, Y]|}, \quad c_{22} = \frac{a_{21}b_{12} - b_{21}a_{12}}{|[X, Y]|}. \quad (4)$$

Тогда первая фундаментальная форма (1) двумерной поверхности будет

$$I = Edx^2 + 2Fdxdt + Gdt^2,$$

где

$$E = -\frac{1}{2}(a_{11}^2 + 2a_{12}a_{21} + a_{22}^2), \quad F = -\frac{1}{2}(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}), \quad (5)$$

$$G = -\frac{1}{2}(b_{11}^2 + 2b_{12}b_{21} + b_{22}^2). \quad (6)$$

В качестве примера солитонного уравнения, приводящего к такой иммерсии, рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера

$$i\psi_t + \psi_{xx} + 2\beta|\psi|^2\psi = 0,$$

где $\beta = +1$, ψ является комплексной функцией. В этом случае матрицы U, V имеют вид [3]

$$U = \frac{\lambda\sigma_3}{2i} + U_0, \quad U_0 = i \begin{pmatrix} 0 & \bar{q} \\ q & 0 \end{pmatrix},$$

$$V = \frac{i\lambda^2}{2}\sigma_3 + i|q|^2\sigma_3 - i\lambda \begin{pmatrix} 0 & \bar{q} \\ q & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \bar{q}_x \\ -q_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 1. *Вторая фундаментальная форма в смысле Фокаса-Гельфанда, соответствующая солитонному решению q нелинейного уравнения Шредингера в случае конечной плотности, имеет вид*

$$II = Ldx^2 + 2Mdxdt + Ndt^2, \quad (8)$$

где

$$L = -\frac{1}{2}\{a_{11x}c_{11} + a_{12x}c_{21} + a_{21x}c_{12} + a_{22x}c_{22} - \lambda i(a_{21}c_{12} - a_{12}c_{21}) +$$

$$+iq(a_{12}c_{11} + a_{22}c_{12} - a_{11}c_{12} - a_{12}c_{22}) + i\bar{q}(a_{21}c_{22} + a_{11}c_{21} - a_{22}c_{21} - a_{21}c_{11}), \quad (9a)$$

$$M = -\frac{1}{2}\{a_{11t}c_{11} + a_{12t}c_{21} + a_{21t}c_{12} + a_{22t}c_{22} + i(\lambda^2 + 2|q|^2)(a_{21}c_{12} - a_{12}c_{21}) + (q_x + \lambda iq)(a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} - a_{12}c_{11} - a_{22}c_{12}) + (\bar{q}_x - \lambda i\bar{q})(a_{11}c_{21} + a_{21}c_{22} - a_{21}c_{11} - a_{22}c_{21})\}, \quad (9b)$$

$$N = -\frac{1}{2}\{b_{11t}c_{11} + b_{12t}c_{21} + b_{21t}c_{12} + b_{22t}c_{22} + i(\lambda^2 + 2|q|^2)(b_{21}c_{12} - b_{12}c_{21}) + (q_x + \lambda iq)(b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} - b_{12}c_{11} - b_{22}c_{12}) + (\bar{q}_x - \lambda i\bar{q})(b_{11}c_{21} + b_{21}c_{22} - b_{21}c_{11} - b_{22}c_{21})\}, \quad (9c)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляем матрицы (3), (7) в (2). После некоторых вычислений получим (8), (9). Лемма доказана.

3. ОДНОСОЛИТОННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА, СООТВЕТСТВУЮЩЕЕ ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим частный случай иммерсии при $\gamma_0 = 1$, $M_1 = 0$. В данном случае имеем

$$X = U_\lambda = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = V_\lambda = -i \begin{pmatrix} -\lambda & \bar{q} \\ q & \lambda \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\bar{q}}{\sqrt{q\bar{q}}} \\ \frac{q}{\sqrt{q\bar{q}}} & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

и $P = \phi^{-1}\phi_\lambda$. Чтобы вычислить явные выражения для функций иммерсии P , рассмотрим односолитонное решение нелинейного уравнения Шредингера в случае конечной плотности, которое имеет вид

$$q(x, t) = \rho \frac{1 + e^{i\theta} \exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\}}{1 + \exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\}}, \quad (11)$$

где $v = -\omega \cos \frac{\theta}{2}$, $x_0 = \frac{1}{\nu_1} \ln i \gamma_1$; $\omega, \theta, \gamma_1, \nu_1$ являются некоторыми параметрами модели.

ТЕОРЕМА 1. Односолитонному решению нелинейного уравнения Шредингера в случае конечной плотности соответствует поверхность в смысле Фокаса-Гельфанда со следующими коэффициентами первой фундаментальной формы:

$$E = \frac{\nu_1^2 \exp^2\{\nu_1(x - vt - x_0)\}}{(1 + \exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\})^4} \left[\frac{4\rho^2 x^2}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^4} (2 - e^{i\theta} - e^{-i\theta}) + \frac{4(e^{i\theta} - 1)^2 [1 + \nu_1 x (1 - e^{i\theta} \exp^2\{\nu_1(x - vt - x_0)\})]^2}{(1 + e^{i\theta} \exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\})^4} \right], \quad (12a)$$

$$F = \frac{2\rho^2 \nu_1^2 v x \exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\} (e^{i\theta} + e^{-i\theta} - 2)}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^4 (1 + \exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\})^3} + \frac{4\nu_1^3 v x \exp^2\{\nu_1(x - vt - x_0)\} (e^{i\theta} - 1)^2 (e^{i\theta} - \exp^2\{\nu_1(x - vt - x_0)\} - 1)}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2 (1 + \exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\})^4 (1 + e^{i\theta} \exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\})^4} \times \\ \times (1 + \nu_1 x - \nu_1 x e^{i\theta} \exp^2\{\nu_1(x - vt - x_0)\}), \quad (12b)$$

$$G = \frac{v^2 \nu_1^2 \exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\}}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^4 (1 + \exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\})^4} [\rho^2 (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^2 (1 + 2\exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\})^2 + \rho^2 (e^{i\theta} - e^{-i\theta} - 2)^2 + \frac{4\nu_1^2 x^2 (e^{i\theta} - 1)^2 (e^{i\theta} \exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\} - 1)^2}{(1 + e^{i\theta} \exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\})^4}], \quad (12c)$$

где $\lambda_1 = const$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решение линейной системы найдем в виде

$$\psi = \phi e^{-\left(\frac{\lambda\sigma_3}{2i}x + \frac{i\lambda^2}{2}\sigma_3 t\right)}. \quad (13)$$

Учитывая (13) и применяя (7), имеем

$$\psi_x = \left(\frac{\lambda\sigma_3}{2i} + U_0\right)\psi - \psi \frac{\lambda\sigma_3}{2i} = \frac{\lambda\sigma_3}{2i}\psi - \psi \frac{\lambda\sigma_3}{2i} + U_0\psi = \left[\frac{\lambda\sigma_3}{2i}, \psi\right] + U_0\psi. \quad (14)$$

Возьмем

$$\psi = I - \frac{\tilde{A}}{\lambda - \lambda_1^*}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1^* - const. \quad (15)$$

Подставим (15) в (14), получим

$$\psi_x = U_0 - \frac{U_0 \tilde{A}}{\lambda - \lambda_1^*} - \frac{1}{2i} [\sigma_3, \tilde{A}] - \frac{\lambda_1^*}{2i(\lambda - \lambda_1^*)} [\sigma_3, \tilde{A}]. \quad (16)$$

С другой стороны, из (15) следует

$$\psi_x = -\frac{\tilde{A}_x}{\lambda - \lambda_1^*}. \quad (17)$$

Из (16) и (17) имеем

$$-\frac{\tilde{A}_x}{\lambda - \lambda_1^*} = U_0 - \frac{U_0 \tilde{A}}{\lambda - \lambda_1^*} - \frac{1}{2i} [\sigma_3, \tilde{A}] - \frac{\lambda_1^*}{2i(\lambda - \lambda_1^*)} [\sigma_3, \tilde{A}]. \quad (18)$$

Таким образом,

$$\tilde{A}_x = U_0 \tilde{A} + \frac{\lambda_1^*}{2i} [\sigma_3, \tilde{A}], U_0 = \frac{1}{2i} [\sigma_3, \tilde{A}]. \quad (19)$$

Заметим, что

$$[\sigma_3, \tilde{A}] = \sigma_3 \tilde{A} - \tilde{A} \sigma_3 = 2 \begin{pmatrix} 0 & \tilde{b} \\ -\tilde{c} & 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Затем, подставляя (20) в (19), получим

$$U_0 = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 0 & \tilde{b} \\ -\tilde{c} & 0 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Подставляя (20) в (19), имеем

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_x & \tilde{b}_x \\ \tilde{c}_x & \tilde{d}_x \end{pmatrix} = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} \tilde{b}\tilde{c} & \tilde{b}\tilde{d} \\ -\tilde{c}\tilde{a} & -\tilde{c}\tilde{b} \end{pmatrix} + \frac{\lambda_1^*}{i} \begin{pmatrix} 0 & \tilde{b} \\ -\tilde{c} & 0 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Из (7) и (21) получим

$$i \begin{pmatrix} 0 & \bar{q} \\ q & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} i\bar{q} = \frac{1}{i}b \\ iq = -\frac{1}{i}c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\bar{q} \\ c = q. \end{cases} \quad (23)$$

Таким образом, мы нашли матрицу \tilde{A} в явном виде с компонентами (22). Используя (11), получим

$$\tilde{a} = -\frac{i\nu_1 x \exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\}(e^{i\theta}-1)}{(1+\exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})(1+e^{i\theta}\exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})} - \lambda_1^*. \quad (24)$$

Из (22) следует: $\tilde{a} = -\frac{i\tilde{c}_x}{c} - \lambda_1^* \Rightarrow \tilde{a} = -\frac{1}{i} \int \bar{q} q dx$. Используя (11), получим

$$\tilde{a}_x = \frac{1}{i} \tilde{b} \tilde{c} \Rightarrow \tilde{a}_x = \frac{1}{i} (-\bar{q}) q. \quad (25)$$

Тогда

$$\tilde{a} = -\frac{i q_x}{q} - \lambda_1^*. \quad (26)$$

Поэтому, из (22), (23) следует

$$\tilde{d} = \frac{i\tilde{b}_x}{\tilde{b}} - \lambda_1^* \Rightarrow \tilde{d} = \frac{i(-\bar{q})_x}{(-\bar{q})} - \lambda_1^* \Rightarrow \tilde{d} = \frac{i\bar{q}_x}{\bar{q}} - \lambda_1^*. \quad (27)$$

Используя (11), получим

$$\tilde{d} = \frac{i\nu_1 x \exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\}(e^{-i\theta}-1)}{(1+\exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})(1+e^{-i\theta}\exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})} - \lambda_1^*. \quad (28)$$

Из (22), (23) следует

$$\tilde{d}_x = -\frac{1}{i} \tilde{c} \tilde{b}, \quad (29)$$

Более того, из (28), (29) следует

$$\tilde{d} = \frac{1}{i} \int q \bar{q} dx. \quad (30)$$

Учитывая (30), получим (25) в виде

$$\tilde{d} = -\tilde{a}. \quad (31)$$

Таким образом, матрица \tilde{A} для односолитонного решения (11) нелинейного уравнения Шредингера принимает вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -\frac{i\nu_1 x \exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\}(e^{i\theta}-1)}{(1+\exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})(1+e^{i\theta}\exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})} - \lambda_1^* \\ \rho \frac{1+e^{i\theta}\exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\}}{1+\exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\}} \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} & -\rho \frac{1+e^{-i\theta} \exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\}}{1+\exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\}} \\ & \frac{i\nu_1 x \exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\}(e^{-i\theta}-1)}{(1+\exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})(1+e^{-i\theta} \exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})} - \lambda_1^* \end{aligned} \right) . \quad (32)$$

Теперь возьмем $\phi = I - \frac{A}{(\lambda - \lambda_1)^2}$, где λ_1 является постоянной, тогда из (10) имеем

$$P = \phi^{-1} \phi_\lambda = \left(I + \frac{\tilde{A}}{\lambda - \lambda_1} \right) \frac{\tilde{A}}{(\lambda - \lambda_1)^2}. \quad (33)$$

С другой стороны, получим

$$P = \sum_{j=1}^3 P_j f_j = -\frac{i}{2} \sum_{j=1}^3 P_j \sigma_j = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} P_3 & -\frac{i}{2} P_1 - \frac{1}{2} P_2 \\ -\frac{i}{2} P_1 + \frac{1}{2} P_2 & \frac{i}{2} P_3 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Из (33), (34) посредством (29) имеем $P_3 = \frac{2i\tilde{a}}{(\lambda - \lambda_1)^2}$. Теперь с помощью (31) найдем P_3 в явном виде для решения нелинейного уравнения Шредингера в случае конечной плотности:

$$P_3 = \frac{2\nu_1 x \exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\}(e^{i\theta}-1)}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2 (1 + \exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})(1 + e^{i\theta} \exp\{\nu_1(x-vt-x_0)\})} - \frac{2i\lambda_1^*}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2}. \quad (35)$$

Из (33), (34) имеем $P_2 = \frac{\tilde{c}-\tilde{b}}{(\lambda - \lambda_1)^2}$. Таким образом,

$$P_1 = \frac{i(\tilde{c} + \tilde{b})}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2}, \quad P_2 = \frac{(\tilde{c} - \tilde{b})}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2}, \quad P_3 = \frac{2i\tilde{a}}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2}.$$

Из (33), (11), используя известные формулы

$$sh\zeta = \frac{e^\zeta - e^{-\zeta}}{2}; \quad ch\zeta = \frac{e^\zeta + e^{-\zeta}}{2}; \quad cos\zeta = \frac{e^{i\zeta} + e^{-i\zeta}}{2}; \quad sin\zeta = \frac{e^{i\zeta} - e^{-i\zeta}}{2i}, \quad (36)$$

где $\zeta = \nu_1(x - vt - x_0)$, получим явные значения P_1, P_2, P_3 матрицы P :

$$P_1 = \frac{i\rho(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\}}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2 (1 + \exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\})}, \quad (37a)$$

$$P_2 = \frac{\rho(2 + e^{i\theta} \exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\}) + e^{-i\theta} \exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\}}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2(1 + \exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\})}. \quad (37b)$$

Теперь вычислим коэффициенты первой фундаментальной формы, т.е.

$$E = P_{1x}^2 + P_{2x}^2 + P_{3x}^2. \quad (38)$$

Для этого вычислим P_{1x}, P_{2x}, P_{3x} . Теперь возводим в квадрат первые производные и подставим в (38), тогда

$$E = \frac{\nu_1^2 \exp^2\{\nu_1(x - vt - x_0)\}}{(1 + \exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\})^4} \left[\frac{4\rho^2 x^2}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^4} (2 - e^{i\theta} - e^{-i\theta}) + \frac{4(e^{i\theta} - 1)^2 [1 + \nu_1 x (1 - e^{i\theta} \exp^2\{\nu_1(x - vt - x_0)\})]^2}{(1 + e^{i\theta} \exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\})^4} \right].$$

Подобным образом, согласно формулам

$$F = P_{1x}P_{1t} + P_{2x}P_{2t} + P_{3x}P_{3t}, \quad G = P_{1t}^2 + P_{2t}^2 + P_{3t}^2,$$

получим значение F :

$$F = \frac{2\rho^2 \nu_1^2 v x \exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\} (e^{i\theta} + e^{-i\theta} - 2)}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^4 (1 + \exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\})^3} + \frac{4\nu_1^3 v x \exp^2\{\nu_1(x - vt - x_0)\} (e^{i\theta} - 1)^2 (e^{i\theta} - \exp^2\{\nu_1(x - vt - x_0)\} - 1)}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2 (1 + \exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\})^4 (1 + e^{i\theta} \exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\})^4} \times \\ \times (1 + \nu_1 x - \nu_1 x e^{i\theta} \exp^2\{\nu_1(x - vt - x_0)\}), \\ G = \frac{v^2 \nu_1^2 \exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\}}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^4 (1 + \exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\})^4} [\rho^2 (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^2 (1 + \\ + 2 \exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\})^2 + \rho^2 (e^{i\theta} - e^{-i\theta} - 2)^2 + \\ + \frac{4\nu_1^2 x^2 (e^{i\theta} - 1)^2 (e^{i\theta} \exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\} - 1)^2}{(1 + e^{i\theta} \exp\{\nu_1(x - vt - x_0)\})^4}]. \quad (39)$$

Используя (35), (37a), (37b), найдем коэффициенты второй фундаментальной формы L, M, N . Для этого нам нужно вычислить

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_t}{\sqrt{\Lambda}}, \quad \sqrt{\Lambda} = \sqrt{EG - F^2}. \quad (40)$$

Непосредственной подстановкой значений (35), (37a), (37b) в (40) найдем компоненты вектора \mathbf{n} . Вычислим с помощью (39) значение

$$\sqrt{\Lambda} = (EG - F^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Теперь найдем

$$P_{1xx}, P_{2xx}, P_{3xx}.$$

Затем можем найти L . Подобным образом находим M, N . Далее можем найти гауссову и среднюю кривизны K и H . Теперь из (5), (6), используя (10), для данного случая γ_0 , $M_1 = 0$ мы имеем коэффициенты первой фундаментальной формы, соответствующей (11), как

$$E = \frac{1}{4}, \quad F = -\frac{\lambda}{2}, \quad G = \lambda^2 + \bar{q}q.$$

Соответственно из (9), используя (10), мы найдем коэффициенты второй фундаментальной формы. Теперь можем вычислить

$$\Lambda = EG - F^2 = \frac{1}{4}\bar{q}q.$$

Теорема доказана.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, мы исследовали солитонную иммерсию в (1+1)-измерении. В качестве примера, задающего такую иммерсию, рассмотрели (1+1)-мерное нелинейное уравнение Шредингера. Найдена первая фундаментальная форма с соответствующими коэффициентами (12) для интегрируемой поверхности, соответствующей односолитонному решению нелинейного уравнения Шредингера в случае конечной плотности. Определена гауссова и средняя кривизны данной поверхности. Более того, предположили, что иммерсия 3- и 4-мерного многообразия, произвольно вложенного в R^m , допускает интегрируемые случаи.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Ceyhan O., Fokas A.S., Gurses M. Deformations of surfaces associated with integrable Gauss-Mainardi-Codazzi equations // J. Math. Phys. – 2000. – V. 41, № 4. – P. 2551-2270.

2 Жунусова Ж.Х. О решении доменной стенки интегрируемого спинового уравнения // Вестник КазНУ, сер.мат.,мех.,инф. – 2014. – №2(81). – С. 46-51.

3 Zhunussova Zh.Kh. Reconstruction of a soliton solution for a class of nonlinear equation // Abstr. of 6-th Int. Conf. "Inverse Problems: Modeling Simulation". Antalya, Turkey. – 2012. – P. 283.

4 Zhunussova Zh. Reconstruction of surface corresponding to domain wall solution // Proc. of 4-th Int. Conf. "Modern problems of Applied math. and information technol." – Samarkand, Uzbekistan, 2014. – P. 283.

5 Zhunussova Zh.Kh. About exact solution of the nonlinear equation // Известия НАН РК, сер. физ.-матем. – 2010. – №3. – С. 11-13.

Статья поступила в редакцию 06.04.2014

Жунусова Ж.Х. СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ШРЕДИНГЕР ТЕНДЕУІНІҢ БІРСОЛИТОНДЫҚ ШЕШІМІНЕ СӘЙКЕС БЕТ

Сызықты емес Шредингер тендеуі қарастырылған. Сызықты емес Шредингер тендеуінің бір солитондық шешіміне сәйкес Фокас-Гельфанд мағынасындағы беті ақырлы тығыздық жағдайы үшін табылған.

Zhunussova Zh.Kh. SURFACE TO ONESOLITON SOLUTION OF THE NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION

Nonlinear Schrödinger equation is considered. Surface in the sense of Fokas-Gelfand corresponding to onesoliton solution of nonlinear Schrödinger equation is found in the case of a finite density.

УДК 517.95

Н.С. ИМАНБАЕВ

Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: imanbaevnur@mail.ru
Казахстанский инженерно-педагогический университет дружбы народов
160012, Шымкент, ул. Джангельдина, 13

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СВОЙСТВА БАЗИСНОСТИ
СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ ОПЕРАТОРА
ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНОМ
ВОЗМУЩЕНИИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ В НЕУСИЛЕННО
РЕГУЛЯРНЫХ ЗАДАЧАХ ТИПА
САМАРСКОГО-ИОНКИНА**

В работе рассматривается оператор, заданный дифференциальным выражением двукратного дифференцирования и краевыми условиями типа Самарского-Ионкина. Эти условия являются регулярными, но не усиленно регулярными краевыми условиями. Исследуется вопрос устойчивости и неустойчивости свойства базисности системы собственных и присоединенных функций возмущенного оператора, получаемого при интегральном возмущении одного из краевых условий.

Ключевые слова: оператор Штурма-Лиувилля, базисность, собственные и присоединенные функции, собственное значение, несамосопряженная задача, краевые условия, возмущение, устойчивость, задача Самарского-Ионкина.

© Н.С. Иманбаев, 2015.

Keywords: *Sturm-Liouville operator, eigenfunctions, associated functions, eigenvalue, nonself-adjoint problem, boundary conditions, perturbation, stability, Samarskii-Ionkin problem.*

2010 Mathematics Subject Classification: 34B05, 34L05, 34L20

1 ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваем дифференциальный оператор, заданный дифференциальным выражением

$$L_0(u) = -u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad q(x) \in C[0, 1], \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

и краевыми условиями общего вида

$$U_1(u) = a_{11}u'(0) + a_{12}u'(1) + a_{13}u(0) + a_{14}u(1) = 0, \quad (2)$$

$$U_2(u) = a_{21}u'(0) + a_{22}u'(1) + a_{23}u(0) + a_{24}u(1) = 0. \quad (3)$$

В случае, когда краевые условия (2), (3) являются усиленно регулярными, из результатов В.П. Михайлова [1] и Г.М. Кесельмана [2] следует базисность Рисса в $L_2(0, 1)$ систем собственных и присоединенных функций (СиПФ) задачи. В случае, когда краевые условия являются регулярными, но не усиленно регулярными, вопрос о базисности систем СиПФ до конца окончательно еще не решен.

Введем в рассмотрение матрицу из коэффициентов краевых условий (2), (3):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}.$$

Через $A(ij)$ будем обозначать матрицу, составленную из i -го и j -го столбцов матрицы A , $A_{ij} = \det A(ij)$. Пусть краевые условия (2), (3) являются регулярными, но не усиленно регулярными. Согласно [3, с. 73] при выполнении условий:

$$A_{12} = 0, \quad A_{14} + A_{23} \neq 0, \quad A_{14} + A_{23} = \mp(A_{13} + A_{24}), \quad (4)$$

краевые условия (2), (3) будут эквивалентны регулярным, но не усиленно регулярным краевым условиям.

В [4] А.С. Макиным предложено все регулярные, но не усиленно регулярные краевые условия разделить на четыре типа. При этом им выделен один тип не усиленно регулярных краевых условий, при которых система СиПФ задачи (1)–(3) образует базис Рисса при любых потенциалах $q(x)$. В случае $q(x) \equiv 0$ задача о базисности системы СиПФ задачи с общими

регулярными краевыми условиями полностью решена в [5]. В работе [4] III-тип краевых условий определен в следующем виде:

$$A_{14} \neq A_{23}, A_{34} = 0.$$

Эти условия всегда эквивалентны краевым условиям, задаваемым матрицей A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Этот случай и будет предметом наших исследований в настоящей работе.

2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Задача (1)–(3) с краевыми условиями III- типа при $q(x) \equiv 0$ является несамосопряженной задачей в $L_2(0, 1)$. Для случая несамосопряженного исходного оператора вопрос о сохранении свойств базисности при некотором (слабом в определенном смысле) возмущении исследовался в [6].

Свойство базисности Рисса системы собственных и присоединенных функций периодических и анти-периодических задач Штурма-Лиувилля исследовалось в [7]. В этой работе получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций периодических и анти-периодических задач Штурма-Лиувилля – задач с граничными условиями, которые являются не усиленно регулярными в случаях, когда $q(x)$ является комплекснозначной, абсолютно непрерывной функцией и $q(0) \neq q(1)$. С помощью этих асимптотических формул доказано, что корневые функции этих операторов образуют базис Рисса в пространстве $L_2(0, 1)$ [8], [9].

В [10], [11] исследованы вопросы устойчивости базисных свойств периодической задачи для уравнения (1) при интегральном возмущении краевого условия (2) I-го типа, то есть при выполнении условий $A_{14} = A_{23}$, $A_{34} = 0$. А также в работе [12] аналогичные вопросы изучены при $q(x) \equiv 0$. В настоящей работе рассматривается близкая к исследованиям [12] спектральная задача при $q(x) \equiv 0$ с интегральным возмущением краевого условия (3), которое относится к III-му типу:

$$L_1(u) \equiv -u''(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < 1, \quad (1')$$

$$U_1(u) \equiv u'(0) - u'(1) = 0, \quad (2')$$

$$U_2(u) \equiv u(0) = \int_0^1 \overline{p(x)}u(x)dx, \quad p(x) \in L_2(0,1). \quad (3')$$

Если $p(x) \equiv 0$, то задача (1')–(3') называется задачей Самарского-Ионкина [6].

Из работы [13] следует, что система СиПФ задачи (1')–(3') полна и минимальна в $L_2(0,1)$. При этом система СиПФ при любых $p(x)$ образует базис Рисса со скобками. Нашей задачей является демонстрация того, что свойство базисности в $L_2(0,1)$ системы СиПФ задачи (1')–(3') является неустойчивым при малых изменениях ядра $p(x)$ интегрального возмущения.

В [14] предложена методика построения характеристического определителя спектральной задачи при интегральном возмущении краевого условия. Вопросы условной базисности и исследование спектральных свойств нелокальных задач рассмотрены в [15]. Свойства базисности в $L_p(-1,1)$ корневых функций нелокальной задачи для уравнения с инволюцией изучены в [16]. Неустойчивость свойств базисности корневых функций оператора Шредингера с нелокальным возмущением краевого условия исследовалась в [17].

В [18], [19] рассмотрены некоторые спектральные свойства регулярных задач Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях. Доказаны теоремы о разложении по собственным функциям в модифицированном гильбертовом пространстве $L_2(a,b)$.

3 ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ЗАДАЧИ

Здесь воспользуемся методикой нашей работы [14] построения характеристического определителя задачи с интегральным возмущением краевого условия.

Одной из особенностей рассматриваемой задачи является то, что сопряженной к (1')–(3') является спектральная задача для нагруженного дифференциального уравнения:

$$L_1^*(v) = -v''(x) + p(x)v'(0) = \bar{\lambda}v(x),$$

$$V_1(v) \equiv v'(1) = 0, \quad V_2(v) \equiv v(0) - v(1) = 0. \quad (5)$$

Построим сначала характеристический определитель спектральной задачи. Представляя общее решение уравнения (1') при $\lambda \neq 0$ по формуле

$$u(x, \lambda) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x$$

и удовлетворяя его крайевым условиям (2'), (3'), получаем линейную систему относительно коэффициентов C_1, C_2 :

$$\begin{cases} C_1 \sin \sqrt{\lambda} + C_2 (1 - \cos \sqrt{\lambda}) = 0, \\ C_1 \left[1 - \int_0^1 \overline{p(x)} \cos \sqrt{\lambda}x dx \right] - C_2 \int_0^1 \overline{p(x)} \sin \sqrt{\lambda}x dx = 0. \end{cases}$$

Ее определитель и будет характеристическим определителем задачи (1')–(3'):

$$\Delta_1(\lambda) = \begin{vmatrix} \sin \sqrt{\lambda} & (1 - \cos \sqrt{\lambda}) \\ 1 - \int_0^1 \overline{p(x)} \cos \sqrt{\lambda}x dx & - \int_0^1 \overline{p(x)} \sin \sqrt{\lambda}x dx \end{vmatrix}. \quad (6)$$

При $p(x) = 0$ получается характеристический определитель невозмущенной задачи Самарского-Ионкина. Обозначим его через $\Delta_0(\lambda) = 1 - \cos \sqrt{\lambda}$.

Число $\lambda_0^0 = 0$ является однократным собственным значением невозмущенной задачи Самарского-Ионкина, а $u_0(x) = +\sqrt{3}x$ – соответствующей собственной функцией.

Остальные собственные значения невозмущенной задачи (1')–(3') являются двукратными: $\lambda_k^0 = (2k\pi)^2$, $k = 1, 2, 3, \dots$, а $u_{k0}^0 = \sqrt{2} \sin 2k\pi x$ – соответствующая им собственная функция, $u_{k1}^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}x \cos 2k\pi x$ – присоединенная функция. С учетом условия биортогональности $(u_{k1}^0, v_{k1}^0) = 1$ имеем $v_{k1}^0 = 4\sqrt{2} \cos 2k\pi x$ собственную и $v_{k0}^0 = 2\sqrt{2}(1-x) \sin 2k\pi x$ – присоединенную функции сопряженной задачи к задаче Самарского-Ионкина.

Функцию $p(x)$ представим в виде биортогонального разложения в ряд Фурье по системе $\{v_{k0}^0, v_{k1}^0\}$:

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{k0} v_{k0}^0 + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k1} v_{k1}^0 = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{k0} 2\sqrt{2}(1-x) \sin 2k\pi x + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k1} 4\sqrt{2}(1-x) \cos 2k\pi x. \end{aligned} \quad (7)$$

Используя (7), найдем более удобное представление определителя $\Delta_1(\lambda)$. Для этого сначала вычислим входящие в (6) интегралы. Несложные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} \int_0^1 \overline{p(x)} \cos \sqrt{\lambda} x dx &= 4\sqrt{2\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{a_{k1}}}{\lambda - (2k\pi)^2} + \\ &+ 2\sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k\pi \overline{a_{k0}}}{\lambda - (2k\pi)^2} \left[1 - \frac{2\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}}{\lambda - (2k\pi)^2} \right] \right), \\ \int_0^1 \overline{p(x)} \sin \sqrt{\lambda} x dx &= -2\sqrt{2\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{a_{k0}}}{\lambda - (2k\pi)^2} - 2\sqrt{2} \sin \sqrt{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k\pi \overline{a_{k0}}}{\lambda - (2k\pi)^2} + \\ &+ 4\sqrt{2\lambda} (1 - \cos \sqrt{\lambda}) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{a_{k1}}}{\lambda - (2k\pi)^2}. \end{aligned}$$

Используя полученное, определитель (6) стандартными преобразованиями приводится к виду:

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda) \cdot A(\lambda), \quad \text{где } A(\lambda) = \left[1 + 4\sqrt{2}\pi \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_{k0}} \frac{k}{\lambda - (2k\pi)^2} \right]. \quad (8)$$

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 1. *Характеристический определитель спектральной задачи (1)–(3) при $q(x) \equiv 0$, то есть (1')–(3') с возмущенными краевыми условиями, представим в виде (8), где $\Delta_0(\lambda)$ – характеристический определитель невозмущенной спектральной задачи Самарского-Ионкина, a_{k0} – коэффициенты Фурье биортогонального разложения (7) функции $p(x)$ по системе СиПФ сопряженной невозмущенной спектральной задачи Самарского-Ионкина.*

Функция $A(\lambda)$ из (8) имеет полюса первого порядка в точках $\lambda = \lambda_k^0$, а функция $\Delta_0(\lambda)$ имеет нули второго порядка в этих же точках. Поэтому функция $\Delta_1(\lambda)$, представленная по формуле (8), является целой аналитической функцией переменного λ .

Характеристический определитель, который является целой аналитической функцией, связанной с задачей на собственные значения для дифференциального оператора третьего порядка с нелокальными краевыми условиями, исследовался в работе [20].

4 ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

Очевидно, что, если при некотором индексе j коэффициенты разложения (7) $a_{j0} = 0$, тогда $\lambda_j^1 = \lambda_j^0$ является двукратным собственным значением возмущенной задачи (1')–(3'). Поэтому более просто характеристический определитель (8) выглядит в случае, когда $p(x)$ представляется в виде (7) с конечной первой суммой. То есть, когда существует такой номер N , что $a_{k0} = 0$ для всех $k > N$. В этом случае формула (8) принимает вид

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda) \left[1 + 4\sqrt{2}\pi \sum_{k=1}^N \overline{a_{k0}} \frac{k}{\lambda - (2k\pi)^2} \right] \quad (9)$$

Из этого частного случая формулы (8) несложно обосновать следующее

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для любых наперед заданных чисел: комплексного $\hat{\lambda}$ и натурального \hat{m} всегда существует такая функция $p(x)$, что $\hat{\lambda}$ будет являться собственным значением задачи (1')–(3') кратности \hat{m} .*

Из формулы (8) имеем две серии собственных значений возмущенной задачи (1')–(3'):

$$\lambda_k^{(1)} = \lambda_k^0 = (2k\pi)^2; \quad \lambda_k^{(2)} = \left[2k\pi + \overline{a_{k0}} \left(\sqrt{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \right) \right]^2.$$

Из анализа формулы (9) также легко видеть, что $\Delta_1(\lambda_k^0) = 0$ для всех $k > N$. То есть все собственные значения λ_k^0 , $k > N$, невозмущенной задачи Самарского-Ионкина являются собственными значениями возмущенной спектральной задачи (1')–(3'). Также нетрудно убедиться, что сохраняется и кратность собственных значений λ_k^0 , $k > N$.

Более того, из условий ортогональности $p(x) \perp u_{j0}^0$, $p(x) \perp u_{j1}^0$ при всех $j > N$ следует, что в этом случае

$$\int_0^1 \overline{p(x)} u_{j0}^0(x) dx = \int_0^1 \overline{p(x)} u_{j1}^0(x) dx = 0.$$

Поэтому собственные $u_{j0}^0(x)$ и присоединенные $u_{j1}^0(x)$ функции невозмущенной задачи Самарского-Ионкина при всех $j > N$ удовлетворяют краевым условиям (2'), (3') и, следовательно, являются собственными и присоединенными функциями возмущенной задачи (1')–(3'). Значит, в этом случае система СиПФ возмущенной задачи (1')–(3') и система СиПФ невозмущенной задачи Самарского-Ионкина (образующая базис Рисса) отличаются друг от друга лишь по конечному числу первых членов. Следовательно, система СиПФ возмущенной задачи (1')–(3') также образует базис Рисса в $L_2(0, 1)$.

Множество функций $p(x)$, представимых в виде конечного ряда (7), является плотным в $L_2(0, 1)$. Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A_{14} \neq A_{23}$, $A_{34} = 0$, то есть краевые условия (2'), (3') принадлежат типу III. Тогда множество функций $p(x) \in L_2(0, 1)$ таких, что система СиПФ возмущенной задачи Самарского-Ионкина (1')–(3') образует базис Рисса в $L_2(0, 1)$, является плотным в $L_2(0, 1)$.

5 НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СВОЙСТВА БАЗИСНОСТИ

Покажем теперь, что свойство базисности системы СиПФ возмущенной задачи Самарского-Ионкина (1')–(3') является неустойчивым при сколь угодно малом интегральном возмущении краевого условия (3').

ТЕОРЕМА 3. Если $A_{14} \neq A_{23}$, $A_{34} = 0$, то есть краевые условия (2'), (3') принадлежат типу III, тогда множество функций $p(x) \in L_2(0, 1)$ таких, что система СиПФ возмущенной задачи Самарского-Ионкина (1')–(3') не образует даже обычного базиса в $L_2(0, 1)$, также является плотным в $L_2(0, 1)$.

Доказательство. Очевидно, что множество функций $p(x) \in L_2(0, 1)$, представимых в виде ряда (7), коэффициенты которого асимптотически (то есть, начиная с некоторого номера) обладают свойством $a_{k0} \neq 0$, $a_{k1} = 0$, будет плотным в $L_2(0, 1)$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что для таких функций $p(x)$ система СиПФ задачи не образует обычного базиса.

Пусть j – достаточно большой номер так, что $a_{j0} \neq 0$, $a_{j1} = 0$. Тогда из (8) нетрудно видеть, что $\lambda_j^0 = (2j\pi)^2$ является простым собственным значением задачи (1')–(3'). Непосредственным вычислением легко получить,

что соответствующей этому значению собственной функцией сопряженной задачи (5) является $v_j^1(x) = \sqrt{2} \cos(2j\pi x)$ и $\|v_j^1(x)\|^2 = 1$.

Найдем собственную функцию задачи (1')–(3'). Для достаточно больших $\lambda = \lambda_j^0 = (2j\pi)^2$ первое уравнение системы из пункта 3 обращается в тождество, а второе уравнение преобразуется к виду

$$C_1 \left[1 - \frac{\sqrt{2} \overline{a_{j0}}}{4\pi j} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1, k \neq j}^{\infty} \overline{a_{k0}} \frac{k}{j^2 - k^2} \right] - C_2 \frac{\overline{a_{j0}}}{\sqrt{2}} = 0.$$

Так как $a_{j0} \neq 0$, то отсюда выражаем C_2 через C_1 . Поэтому собственная функция задачи (1')–(3') имеет вид:

$$u_j^1(x) = C_1 \left\{ \cos(2j\pi x) + \frac{\sqrt{2}}{a_{j0}} \left[1 - \frac{\sqrt{2} \overline{a_{j0}}}{4\pi j} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1, k \neq j}^{\infty} \overline{a_{k0}} \frac{k}{j^2 - k^2} \right] \sin(2j\pi x) \right\}.$$

Константу C_1 выбираем из условия биортогональности $(u_j^1(x), v_j^1(x)) = 1$.

Легко видеть, что $C_1 = \sqrt{2}$. Окончательно нашли собственную функцию задачи (1')–(3'):

$$u_j^1(x) = \sqrt{2} \cos(2j\pi x) - \left[\frac{1}{\sqrt{2}j\pi} - \frac{2}{a_{j0}} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1, k \neq j}^{\infty} \overline{a_{k0}} \frac{k}{j^2 - k^2} \right) \right] \sin(2j\pi x).$$

Непосредственным вычислением находим ее норму в $L_2(0, 1)$:

$$\|u_j^1(x)\|^2 = 1 + \frac{1}{2} \left| \frac{1}{\sqrt{2}j\pi} - \frac{2}{a_{j0}} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1, k \neq j}^{\infty} \overline{a_{k0}} \frac{k}{j^2 - k^2} \right) \right|^2.$$

Из теоремы Юнга [21, теорема 276, с. 240] следует, что

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \sum_{k=1, k \neq j}^{\infty} \overline{a_{k0}} \frac{k}{j^2 - k^2} = 0,$$

поэтому

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \|u_j^1(x)\|^2 = 1 + 2 \lim_{j \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{a_{j0}} \right|^2 = +\infty.$$

Следовательно,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_j^1\| \cdot \|v_j^1\| = \infty.$$

То есть не выполнено условие равномерной минимальности [22, с. 66] системы и, следовательно, она не образует даже обычного базиса в $L_2(0, 1)$. Теорема 3 доказана.

Так как сопряженные операторы одновременно обладают свойством базисности Рисса корневых функций, то отсюда получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $A_{14} \neq A_{23}$, $A_{34} = 0$, то есть краевые условия (2'), (3') принадлежат типу-III. Тогда множество P функций $p(x) \in L_2(0, 1)$, для которых система собственных функций задачи (5) для нагруженного дифференциального уравнения образует базис Рисса в $L_2(0, 1)$, всюду плотно в $L_2(0, 1)$. Множество $L_2(0, 1) \setminus P$ также всюду плотно в $L_2(0, 1)$.

Результаты настоящей работы, в отличие от [13], демонстрируют неустойчивость свойств базисности корневых функций задачи при интегральном возмущении краевых условий типа-III, являющихся регулярными, но не усиленно регулярными.

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования КН МОН РК, грант № 0825/ГФ4.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Михайлов В.П. О базисах Рисса в $L_2(0, 1)$ // ДАН. – 1962. – Т. 144. № 5. – С. 981-984.
- 2 Кесельман Г.М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов СССР, Математика. – 1964. – № 2, – С. 82-93.
- 3 Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 352 с.
- 4 Макин А.С. О спектральных разложениях, отвечающих несамосопряженному оператору Штурма-Лиувилля // ДАН. – 2006. – Т. 406. № 1. – С. 21-24.

5 Lang P., Locker J. Spectral Theory of Two-Point Differential Operators Determined by $-D^2$ // J. Math. Anal. Appl. – 1990. – V. 146, № 1. – P. 148-191.

6 Ильин В.А., Крицков Л.В. Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным операторам // Функциональный анализ. Итоги науки и техники. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. Обз. – М.:ВИНИТИ, 2006. – Т. 96. – С. 5-105.

7 Veliev O.A., Shkalikov A.A. On the Riesz basis property of eigen- and associated functions of periodic and anti-periodic Sturm-Liouville problems // Mat. Zametki. – 2009. – V. 85, № 5. – P. 671–686.

8 Kirac A.A. Riesz basis property of the root functions of non-selfadjoint operators with regular boundary conditions // Int. J. Math. Anal. (Ruse). – № 3. – 2009. – P. 1101–1109.

9 Kirac A.A. On the Riesz basisness of systems composed of root functions of periodic boundary value problems // Abstr. Appl. Anal. – 2015. – V. 2015, Article ID 945049, 7 pages.

10 Sadybekov M.A., Imanbaev N.S. On the basis property of root functions of a periodic problem with an integral perturbation of the boundary condition // Differ. Equ. – 2012. – V. 48, № 6. – P. 896–900.

11 Imanbaev N.S., Sadybekov M.A. On spectral properties of a periodic problem with an integral perturbation of the boundary condition // Eurasian Mathematical Journal. – 2013. – V. 4, № 3. – P. 53-62.

12 Макин А.С. О нелокальном возмущении периодической задачи на собственные значения // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, № 4. – С. 560-562.

13 Шкаликков А.А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестник МГУ. Математика и механика. – 1982. № 6. – С. 12-21.

14 Imanbaev N.S., Sadybekov M.A. Characteristic determinant of the spectral problem for the ordinary differential operator with the boundary load // Int. conf. on analysis and applied mathematics (ICAAM 2014). – AIP Conf. Proc. – 2014. – V. 1611. – P. 261-265.

15 Kal'menov T.Sh., Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M. Biorthogonal expansions in root functions of differential operators // Differ. Equ. – 2011. – V. 47, № 1. – P. 144-148.

16 Kritskov L.V., Sarsenbi A.M. Spectral properties of a nonlocal problem for the differential equation with involution // Differ. Equa. – 2015. – V. 51, № 8. – P. 984-990.

17 Imanbaev N.S., Kalimbetov B., Sarsenbi A.M. Study basicity of root functions of the Schrodinger operator with a non-local perturbation // Int. J. Pure Appl. Math. – 2013. – V. 89, № 3. – P. 433-438.

18 Bondarenko N. An Inverse Spectral Problem for the Matrix Sturm-Liouville Operator with a Bessel-Type Singularity // Int. J. Differ. Equation. – 2015. – Article ID 647396. – 4 pages.

19 Mukhtarov O.Sh., Aydemir K. Eigenfunction expansion for Sturm-Liouville Problems with transmission conditions at one interior point // Acta Math. Sci. B Engle. Ed. – 2015. – V. 35B, № 3. – P. 639-649.

20 Imanbaev N.S., Kanguzhin B.E., Kalimbetov B.T. On zeros the characteristic determinant of the spectral problem for a third-order differential operator on a segment with nonlocal boundary conditions // Adv. Difference Equa. – 2013. – V. 2013. – 5 pages.

21 Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г. Неравенства. – М.:ИЛ. – 1948. – 456 с.

22 Функциональный анализ / Под ред. Крейна С.Г. – М., 1972.

Статья поступила в редакцию 03.10.15

Иманбаев Н.С. САМАРСКИЙ-ИОНКИН ТЕКТЕС КҮШЕЙТІЛГЕН ЕМЕС РЕГУЛЯРЛЫ ЕСЕПТЕРДЕГІ ШЕТТІК ШАРТТАРЫ ИНТЕГРАЛДЫ АУЫТҚЫҒАН ЖАҒДАЙЛАР ҮШІН ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЫНЫҢ ТҮБІРЛЕС ВЕКТОРЛАР ЖҮЙЕСІНІҢ БАЗИСТІК ҚАСИЕТІНІҢ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ ЖАЙЛЫ

Бұл жұмыста екі рет дифференциалданатын дифференциалдық өрнекпен және Самарский-Ионкин тектес шеттік шарттармен берілген дифференциалдық оператор қарастырылған. Бұл шарттар регулярылы, бірақ күшейтілген емес регулярылы шеттік шарттар болып табылады. Шеттік шарттарының біреуін интегралды ауытқуынан пайда болған ауытқыған оператордың меншікті және қосалқы функциялар жүйесінің базистік қасиетінің орнықтылығы мен орнықсыздығы мәселесі зерттелген.

Imanbaev N.S. ON STABILITY OF THE BASIS PROPERTY OF THE SYSTEM OF ROOT VECTORS OF THE STURM-LIOUVILLE OPERATOR WITH AN INTEGRAL PERTURBATION OF THE BOUNDARY CONDITIONS IN A NOT STRENGTHENED REGULAR PROBLEM OF THE SAMARSKII-IONKIN TYPE

In this paper we consider an operator given by the differential expression of twofold differentiation and boundary conditions of the Samarskii-Ionkin type. These conditions are regular but not strengthened regular. We investigate the problem of stability and instability of the basis property of the system of eigenfunctions and associated functions of a perturbed operator obtained by integral perturbation of one of the boundary conditions.

УДК 517.95

Б.Д. КОШАНОВ, Т.Б. УТЕЕВ

Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: koshanov@list.ru, tole9118@gmail.com

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТНОЙ ГАЗОДИНАМИКИ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЯМИ

В данной работе исследуются начально-краевые задачи для уравнений движения вязкого теплопроводного газа с учетом магнитного поля. Кроме того, детально показан переход от основного трехмерного уравнения к эйлеровой переменной и последующей лагранжевой координате. Для уравнений теплопроводного газа в магнитном поле доказывается однозначная разрешимость в случае, когда область течения не включает ось (точку) симметрии. Одновременно рассматриваются движения с цилиндрическими и сферическими волнами.

Ключевые слова: *газодинамические уравнения, краевые задачи, сферическая симметрия*

1. УРАВНЕНИЯ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Целью данной работы является доказательство корректности ”в целом” по времени начально-краевой задачи для уравнений, описывающих одномерные течения вязкого теплопроводного газа с учетом магнитного поля. Известны результаты для движения вязкого теплопроводного

© Б.Д. Кошанов, Т.Б. Утеев, 2015.

Keywords: *gas dynamics equation, boundary value problem, spherical symmetry*

2010 Mathematics Subject Classification: 39A10, 35J66, 35J67

газа без учета влияния магнитного поля [1], с учетом влияния магнитного поля для движения с плоскими волнами [2].

1.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Основные уравнения магнитной газовой динамики [1]-[3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{u}) &= 0, \quad P = R\rho\theta, \\ \rho \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} \right] - \mu_e (\bar{H} \cdot \nabla) \bar{H} &= -\nabla \left(P + \frac{\mu_e}{2} \bar{H}^2 \right) + (\nabla \cdot \tau), \\ c_\nu \rho \left[\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \theta \right] &= \operatorname{div}(\varkappa \nabla \theta) - P \operatorname{div} \bar{u} + \mu_e \mu_H (\nabla \times \bar{H})^2 + (\tau \cdot \nabla) \cdot \bar{u}, \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} &= \nabla \times (\bar{u} \times \bar{H}) - \nabla \times [\mu_H (\nabla \times \bar{H})], \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\tau_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \mu_1 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta^{ij}$$

– тензор напряжения относительно коэффициентов вязкости, теплопроводности, проницаемости и напряженности магнитного поля будем предполагать постоянными,

$$\mu_1 + \frac{1}{3}\mu = 0, \quad (\mu, \mu_e, R, c_\nu, \varkappa, \mu_H) > 0.$$

Пусть x – радиальная координата в цилиндрической (сферической) системе координат и переменная, вдоль которой происходит движение плоских волн в декартовой прямоугольной системе. Течение частицы параллельно оси x и имеет только одну компоненту скорости u . Напряженность магнитного поля H является плоским и перпендикулярным к полю скорости u . Если бы H было параллельно скорости u , то оно не влияло бы на газодинамические уравнения. В этом случае не было бы явления взаимодействия.

Все величины в системе (1) являются функциями пространственной (радиальной) координаты x и времени t . Тогда уравнения (1) для одномерных движений примут вид:

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho}{x^m} \frac{\partial}{\partial x} (x^m u) = 0, \quad P = R\rho\theta,$$

$$\begin{aligned}
\rho \frac{du}{dt} + \mu_e \frac{H^2}{x} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(P + \mu_e \frac{H^2}{2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x^m} \frac{\partial(x^m u)}{\partial x} \right), \\
\rho \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{P}{x^m} \frac{\partial(x^m u)}{\partial x} + \frac{1}{x^m} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu x^m \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \\
+ \mu \left[\frac{1}{x^m} \frac{\partial(x^m u)}{\partial x} \right]^2 &+ \frac{\mu_e \mu_H}{x^2} \left[\frac{\partial(xH)}{\partial x} \right]^2 - \frac{3m}{2} \frac{\mu}{x^m} \frac{\partial(x^{m-1} u^2)}{\partial x}, \\
x^{m-1} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (x^{m-1} uH) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_H x^{m-2} \frac{\partial(xH)}{\partial x} \right),
\end{aligned} \tag{2}$$

где $m = 1, m = 2$ соответствуют движению с цилиндрическими и сферическими волнами.

Для убедительности покажем вывод четвертого уравнения (2) из начального уравнения (1). Будем полагать координаты вектора $\vec{H} = (H_r, H_\theta, H_z)$ в цилиндрических координатах. Тогда компоненты четвертого уравнения (1) примут вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_r}{\partial t} &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r H_\theta - u_\theta H_r) - \frac{\partial}{\partial z} (r u_z H_r - r u_r H_z) \right\} - \\
- \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\mu_H}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r H_\theta) - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[r \mu_H \left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \right] \right\}, \\
\frac{\partial H_\theta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} (u_\theta H_z - u_z H_\theta) - \frac{\partial}{\partial r} (u_r H_\theta - u_\theta H_r) - \\
- \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\mu_H}{r} \left[\frac{\partial H_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (r H_\theta)}{\partial z} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\mu_H}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r H_\theta) - \frac{\partial (H_r)}{\partial \theta} \right] \right\}, \\
\frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} [r (u_z H_r - u_r H_z)] - \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta H_z - u_z H_\theta) \right\} - \\
- \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu_H \left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\mu_H}{r} \left(\frac{\partial H_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (r H_\theta)}{\partial z} \right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

В данном случае $\vec{u} = (u_r = u, 0, 0)$, $\vec{H} = (0, H_\theta = H, 0)$, $r = x$, тогда из второго уравнения выше приведенных формул имеем для цилиндрических координат

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uH) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_H}{x} \frac{\partial(xH)}{\partial x} \right).$$

Аналогичным образом выводится и для сферических координат:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x}(xuH) = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x}(\mu_H \frac{\partial(xH)}{\partial x}).$$

Вернемся к уравнению (2). Некоторые константы, имеющиеся в системе (2), без ограничения общности положим за 1. Система уравнений (2) рассматривается на произвольном конечном отрезке времени $t \in [0, T]$, $0 < T < \infty$ в области $x \in [a, b]$, $a > 0$, без линии вырождения $x = 0$.

В начальный момент времени $t = 0$ считаются заданными скорость, плотность, абсолютная температура и напряженность магнитного поля:

$$(u, \rho, \theta, H)(x, 0) = (u_0(x), \rho_0(x), \theta_0(x), H_0(x)), x \in [a, b], \quad (3)$$

причем начальная плотность и абсолютная температура – строго положительные и ограниченные функции.

Граничные условия принимают следующие значения:

$$(u, \frac{\partial \theta}{\partial x}, H)(a, t) = (u, \frac{\partial \theta}{\partial x}, H)(b, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

Как и в случае плоских одномерных движений [6], задачу (2)–(4) удобно рассматривать в массовых лагранжевых переменных. Пусть при $t = 0$ положение частицы определялось координатой r , тогда для эйлеровой координаты $x(r, t)$ этой частицы справедливо представление

$$x(r, t) = r + \int_0^t u(r, \tau) d\tau. \quad (5)$$

Масса газа, заключенная в объеме, остается постоянной во времени, поэтому имеем

$$\frac{\partial x(r, t)}{\partial r} = \frac{r^m \rho_0(r)}{x^m \rho(r, t)}.$$

Согласно формуле (5)

$$\frac{\partial x(r, t)}{\partial t} = u(r, t). \quad (6)$$

Перейдем в задаче (2)–(4) к лагранжевым координатам (r, t) . Система уравнений несколько упрощается, если ввести обозначение

$$q = q(r) = \int_0^r \rho_0(r) r^m dr.$$

Тогда уравнения и краевые условия в новых массовых лагранжевых переменных примут вид (полагаем для простоты $\mu = \mu_e = \mu_H = c_\nu = 1$):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho^2 \frac{\partial(x^m u)}{\partial q} = 0, \quad P = R\rho\theta, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{H^2}{x\rho} = x^m \frac{\partial}{\partial q} \left(\rho \frac{\partial(x^m u)}{\partial q} \right) - x^m \frac{\partial P}{\partial q} - x^m H \frac{\partial H}{\partial q}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} = & x \frac{\partial}{\partial q} \left(x^{2m} \rho \frac{\partial \theta}{\partial q} \right) + \rho \left[\frac{\partial(x^m u)}{\partial q} \right]^2 + \\ & + \rho x^{2(m-1)} \left[\frac{\partial(xH)}{\partial q} \right]^2 - P \frac{\partial(x^m u)}{\partial q} - \frac{3m}{2} \frac{\partial(x^{m-1} u^2)}{\partial q}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + x\rho H \frac{\partial(x^{m-1} u)}{\partial q} = x\rho \frac{\partial}{\partial q} \left(\rho x^{2(m-1)} \frac{\partial(xH)}{\partial q} \right), \quad (10)$$

$$(u, \rho, \theta, H)(q, 0) = (u_0, \rho_0, \theta_0, H_0)(q), \quad q \in [0, b], \quad (11)$$

$$\left(u, \frac{\partial \theta}{\partial q}, H\right)(0, t) = \left(u, \frac{\partial \theta}{\partial q}, H\right)(b, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (12)$$

Функция $x(r, t)$ является искомой и поэтому в систему вместе с (7)–(10) входит уравнение (6), для которого начальным условием служит совпадение эйлеровой и лагранжевой координат в начальный момент:

$$x(q, 0) = r(q), \quad q \in [0, b]. \quad (13)$$

Из единственности решения задачи (6), (11), (13) вытекают свойства эйлеровой координаты:

$$x = x(r(q), t) = x(q, t),$$

$$x(q, t) \in [a, 1] \text{ при } t \in [0, T], \quad q \in [0, b].$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Под сильным решением задачи (6)-(13) будем понимать функции $\rho, u, \theta, H, P, x, y$, у которых существуют производные, входящие в уравнения (6)-(10), суммируемые в $Q = (0, b) \times (0, T)$ и удовлетворяющие данным уравнениям и краевым условиям (11)-(13) почти всюду. При этом $\rho(q, t)$ и $\theta(q, t)$ – строго положительные и ограниченные функции.

ТЕОРЕМА 1. Пусть начальные данные удовлетворяют включениям:

$$u_0(q) \in W_2^1(\Omega), (\rho_0(q), \theta_0(q), H_0(q)) \in W_2^1(\Omega),$$

$$0 < m_0 \leq (\rho_0(q), \theta_0(q)) \leq M_0 < \infty.$$

Тогда существует единственное сильное решение задачи (6)-(13) и для него имеют место оценки

$$\begin{aligned} & \|u\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))} + \|u_t\|_{L_2(Q)} + \|H\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\theta\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \\ & + \|\rho\|_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))} \leq C < \infty; \quad 0 < m \leq (\rho, \theta) \leq M < \infty, \end{aligned}$$

где $Q = \Omega \times [0, T], \Omega = (0, b)$.

1.2 ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ И УТВЕРЖДЕНИЯ

Для плотности $\rho(q, t)$, как и в случае плоских одномерных плотностей [1], сохраняются следующие свойства.

ЛЕММА 1. 1) Для любого $t \in [0, T]$

$$\int_0^b [\rho(q, t)]^{-1} dq = const > 0,$$

2) для любого $t \in [0, T]$ существует точка $z(t) \in [0, b]$ такая, что

$$\rho(z(t), t) = \alpha = const > 0.$$

Умножая (8), (9), (10) на $u, 1, \frac{H}{\rho}$ соответственно, интегрируя по частям в $\Omega = [0, b]$ и используя уравнение неразрывности, получаем следующую априорную оценку:

$$\int_0^b \left(\frac{u^2}{2} + \theta + \frac{H^2}{2\rho} \right) dq = \int_0^b \left(\frac{u_0^2}{2} + \theta_0 + \frac{H_0}{2\rho_0} \right) dq \leq C_1 < \infty. \quad (14)$$

Имеет место следующая

ЛЕММА 2. Для любого $t \in [0, T]$ справедлива оценка

$$E(t) + \int_0^t [V_1(\tau) + k_1 V_2(\tau) + k_2 V_3(\tau)] d\tau \leq E(0), \quad (15)$$

где

$$E(t) = \int_0^b \left[\frac{u^2}{2} + vH^2 + (v - \ln v - 1) + (\theta - \ln \theta - 1) \right] dq,$$

$$V_1(t) = \int_0^b \left\{ \frac{x^{2m}}{v\theta^2} \left[\frac{\partial \theta}{\partial q} \right]^2 + \frac{x^{2(m-1)}}{v\theta} \left[\frac{\partial(xH)}{\partial q} \right]^2 \right\} dq,$$

$$V_2(t) = \int_0^b \frac{1}{v\theta} \left[\frac{\partial(x^m u)}{\partial q} \right]^2 dq, \quad V_3(t) = \int_0^b \frac{vu^2}{x^2 \theta} dq, \quad v = \frac{1}{\rho},$$

k_i ($i = 1, 2$) – некоторые положительные константы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая (7), (8), (9), (10) на $1 - \frac{1}{v}$, u , $1 - \frac{1}{\theta}$, H соответственно, интегрируя по q в Ω , в результате имеем

$$\frac{dE(t)}{dt} + V_1(t) + V_2(t) = \frac{3m}{2} \int_0^b \frac{1}{\theta} \frac{\partial(x^{m-1}u^2)}{\partial q} dq. \quad (16)$$

Для получения оценки (15) из последнего соотношения, сначала рассмотрим случай $m = 1$. Учитывая связь между введенными координатами

$$\frac{\partial u}{\partial q} = \frac{1}{x} \frac{\partial(xu)}{\partial q} - \frac{uv}{x^2},$$

правая часть (16) с учетом последнего выражается как

$$\frac{3}{2} \int_0^b \frac{1}{\theta} (u^2)_q dq = 3 \int_0^b \frac{uu_q}{\theta} dq = 3 \int_0^b \frac{1}{\theta} \frac{u}{x} (xu)_q dq - 3 \int_0^b \frac{vu^2}{x^2\theta} dq.$$

Перегруппировав, имеем

$$\frac{dE(t)}{dt} + V_1(t) + V_2(t) + 3 \int_0^b \frac{vu^2}{x^2\theta} dq = 3 \int_0^b \frac{1}{\theta} \frac{u}{x} (xu)_q dq.$$

Используя неравенство Коши для правой части последнего уравнения, находим

$$\frac{dE(t)}{dt} + V_1(t) + \frac{1}{4}V_2(t) + \frac{3}{4}V_3(t) \leq 0.$$

Интегрирование по t дает соотношения (15).

Теперь докажем (15) для случая $m = 2$. Используя следующие формулы

$$u_q = \frac{(x^2u)_q}{x^2} - \frac{2uv}{x^3}, \quad (xu)_q = \frac{(x^2u)_q}{x} - \frac{uv}{x^2},$$

правая часть (16) преобразуется к виду

$$3 \int_0^b \frac{1}{\theta} (xu^2)_q dq = 3 \int_0^b \frac{1}{\theta} [xu \cdot u_q + u(xu)_q] dq = 6 \int_0^b \frac{u}{\theta} \frac{(x^2u)_q}{x} dq - 9 \int_0^b \frac{vu^2}{x^2\theta} dq.$$

Отсюда имеем

$$\frac{dE(t)}{dt} + V_1(t) + V_2(t) + 9 \int_0^b \frac{vu^2}{x^2\theta} dq = 6 \int_0^b \frac{u}{\theta} \frac{(x^2u)_q}{x} dq.$$

Используя неравенство Юнга ($p = 9, q = 9/8$) в правой части последнего уравнения, после группировки имеем

$$\frac{dE(t)}{dt} + V_1(t) + \frac{1}{3}V_2(t) + \frac{11}{3}V_3(t) \leq 0.$$

Интегрирование по t последнего уравнения дает соотношения (15). Тем самым, лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $m = 1$ и начальные данные удовлетворяют включениям, указанным в условии теоремы 1. Тогда существуют постоянные $m_0 > 0, M_0 < \infty$, зависящие от начальных данных задачи (7)-(10), (11), (12) такие, что $(m_v(t), m_\theta(t)) > m_0, (M_v(t), M_\theta(t)) \leq M_0$, кроме того,

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|v_q\| + \int_0^T (\|H_q\|^2 + \|(xu)_q\|^2 + \|v_t\|^2) dt \leq C < \infty,$$

$$\int_0^T M_\theta(\tau) d\tau + \int_0^T \|(ln\theta)_q\|^2 d\tau \leq C < \infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Утверждение леммы 3 верно и в случае $m = 2$.

1.3 Оценки для производных от искомым функций. Единственность сильного обобщенного решения

Оценки для производных от искомым функций проводятся стандартным образом соответствующими математическими выкладками. Для сокращения изложения материала мы их не приведем. Докажем единственность сильного решения в случае осевой симметрии ($m = 1$), аналогично проводятся все выкладки для сферической симметрии ($m = 2$). Предположим, что есть два различных решения $(u_i, \theta_i, H_i, v_i, P_i, x_i), i = 1, 2$, удовлетворяющие системе уравнений и краевым условиям (6)-(13). Разность этих решений (u, θ, H, v, P, x) удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q}(xu_1 + x_1v), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & x \frac{\partial u_1}{\partial q} \frac{1}{x_1} + x \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{x_1}{v_1} \frac{\partial u_1}{\partial q} \right) + x_2 \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{v}{v_1 v_2} \frac{\partial (x_1 u_1)}{\partial q} \right) + \\ & + x_2 \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{x}{v_2} \frac{\partial u_1}{\partial q} \right) + x_2 \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{u_1 v}{v_2 x} \right) + x_2 \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{u}{x_2} \right) + \\ & + x_2 \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{x_2}{v_2} \frac{\partial u}{\partial q} \right) + x \frac{\partial P_1}{\partial q} + x_2 \frac{\partial P}{\partial q} - x H_1 \frac{\partial H_1}{\partial q} + \\ & x_2 \left(H_1 \frac{\partial H_1}{\partial q} - H_2 \frac{\partial H_2}{\partial q} \right) - v \frac{H_1^2}{x_1} + v_2 \left(\frac{H_1^2}{x_1} - \frac{H_2^2}{x_2} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{x_2^2}{v_2} \frac{\partial \theta}{\partial q} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left[\left(\frac{x_1^2}{v_1} - \frac{x_2^2}{v_2} \right) \frac{\partial \theta_1}{\partial q} \right] - \\
 &- \left(\frac{\theta_1}{v_1} - \frac{\theta_2}{v_2} \right) \frac{\partial (x_1 u_1)}{\partial q} + \frac{\theta_2}{v_2} \frac{\partial}{\partial q} (x u_1 + x_2 u) - \frac{v}{v_1 v_2} \left[\frac{\partial (x_1 H_1)}{\partial q} \right]^2 + \\
 &+ \frac{1}{v_2} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial q} (x H_1 - x_2 H) \right]^2 - 2 \left[\frac{\partial}{\partial q} (x_2 H_2) \right]^2 + 2 \frac{\partial (x_1 H_1)}{\partial q} \cdot \frac{\partial (x_2 H_2)}{\partial q} \right\} - \\
 &- \frac{v}{v_1 v_2} \left(\frac{\partial (x_1 u_1)}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{v_2} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial q} (x u_1 - x_2 u) \right]^2 - \right. \\
 &\left. - 2 \left[\frac{\partial}{\partial q} (x_2 u_2) \right]^2 + 2 \frac{\partial (x_1 u_1)}{\partial q} \cdot \frac{\partial (x_2 u_2)}{\partial q} \right\} - \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial q} (u^2 - 2u_2^2 - 2u_1 u_2), \quad (19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{v_1} \frac{\partial (x_1 H_1)}{\partial q} \right) x v_2 + \frac{\partial}{\partial q} \left[- \frac{v}{v_1 v_2} \frac{\partial (x_1 H_1)}{\partial q} + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{v_2} \frac{\partial (x H_1 - x_2 H)}{\partial q} \right] x_2 v_2 - v x_2 \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{v_1} \frac{\partial (x_2 H_2)}{\partial q} \right) + \\
 &+ u_1 H x_2 + u H_2 x_2 - x u_2 H_2 + \frac{\partial (x_1 u_1)}{\partial q} H v_2 + \\
 &+ \frac{\partial (x u_1)}{\partial q} H_2 v_2 + \frac{\partial (x_2 u)}{\partial q} H_2 v_2 - v H_2 \frac{\partial (x_2 H_2)}{\partial q}, \quad (20)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = u, \quad (21)$$

$$(u, v, \theta, H, x)(q, 0) = 0, \quad (22)$$

$$\left(u, \frac{\partial \theta}{\partial q}, H \right) (0, t) = \left(u, \frac{\partial \theta}{\partial q}, H \right) (b, t) = 0.$$

Из (17) и (21) с учетом начальных условий следует, что

$$v = \int_0^t \left(x \frac{\partial u_1}{\partial q} + \frac{\partial x}{\partial q} u_1 + x_2 \frac{\partial v}{\partial q} + v \frac{\partial x_2}{\partial q} \right) d\tau, \quad (23)$$

$$x = \int_0^t u d\tau, \quad \frac{\partial x}{\partial q} = \int_0^t \frac{\partial u}{\partial q} d\tau.$$

Умножим уравнения (18), (19), (20) на u , H соответственно и проинтегрируем по q от 0 до b . Перегруппировав члены и применив интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^b \left(\frac{u^2}{2} + \theta + \frac{H^2}{2} \right) dq + \int_0^b \frac{x_2^2}{v_2} \left(\frac{\partial u}{\partial q} \right)^2 dq + \\ + \int_0^b \frac{x_2^2}{v_2} \left(\frac{\partial H}{\partial q} \right)^2 dq = \sum_{i=1} J_i. \end{aligned} \quad (24)$$

Дальнейшие действия проводятся так. Проинтегрируем каждый член в правой части (24) по частям, функции x , u , $\frac{\partial H}{\partial q}$ заменим по формулам (23), после чего применим неравенства Гельдера и Коши. Кроме того, будем пользоваться неравенством Фридрихса

$$\int_0^t \int_0^b u^2 dq d\tau \leq \frac{b^2}{2} \int_0^t \int_0^b \left(\frac{\partial u}{\partial q} \right)^2 dq d\tau,$$

а при мажорировании слагаемых в (24) – неравенством Юнга. В итоге от (23) придем к неравенству

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^b \left(\frac{u^2}{2} + \theta + \frac{H^2}{2} \right) dq + a^2 N^{-1} \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial q} \right)^2 \right\} dq \leq \\ \leq \left(\sum_i \varepsilon_i \right) \cdot \int_0^b \left(\frac{\partial u}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial q} \right)^2 dq + \int_0^b (u^2 + H^2) dq + \\ + \left(\sum_i c_{\varepsilon_i} \right) \int_0^t \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial q} \right)^2 \right\} dq d\tau. \end{aligned}$$

Выбирая ε_i так, чтобы $\sum_i \varepsilon_i \leq \frac{1}{2} a^2 N^{-1}$, получим для функции

$$\begin{aligned} y(t) \equiv \int_0^b (u^2 + \theta + H^2) dq + \\ + a^2 N^{-1} \int_0^t \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial q} \right)^2 \right\} dq d\tau \geq 0 \end{aligned}$$

неравенство следующего вида:

$$y'(t) \leq K(t)y(t).$$

Здесь $K(t)$ – суммируемая по t на $[0, T]$ функция. Отсюда следует, что $y(t) \leq 0$. Поэтому, на самом деле, $y(t) \equiv 0$ и, значит, $u_1 = u_2, \theta_1 = \theta_2, H_1 = H_2$. Из уравнений (23) для x и v вытекает: $x = x_1 - x_2 = 0, v = v_1 - v_2 = 0$, что и означает единственность решения. Теорема 1 полностью доказана.

Если краевые условия (12) на границе заменить краевыми условиями

$$\left(u, \frac{\partial \theta}{\partial q}, H\right)(0, t) = \left(\rho \frac{\partial(x^m u)}{\partial q} - P, \frac{\partial \theta}{\partial q}, H\right)(b, t) = 0, t \in [0, T], \quad (12)$$

то справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть начальные данные удовлетворяют включениям

$$u_0(q) \in W_2^1(\Omega), (\rho_0(q), \theta_0(q), H_0(q)) \in W_2^1(\Omega),$$

$$0 < m_0 \leq (\rho_0(q), \theta_0(q)) \leq M_0 < \infty.$$

Тогда существует единственное сильное решение задачи (6)-(13) и для него имеют место оценки

$$\begin{aligned} & \|u\|_{L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap W_2^1(\Omega))} + \|u_t\|_{L_2(Q)} + \|H\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \\ & + \|\theta\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\rho\|_{L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega))} \leq C < \infty; \\ & 0 < m \leq (\rho, \theta) \leq M < \infty, \text{ где } Q = \Omega \times [0, T], \Omega = (0, b). \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1 Николаев В.Б. Глобальная разрешимость уравнений движения вязкого газа с осевой и сферической симметрией // Динамика сплошной среды. – 1983. – Вып. 63. – С. 136-141.

2 Кажихов А.В., Смагулов Ш.С. Корректность и аппроксимация моделей магнитной газовой динамики // Известия АН КазССР. Сер. физ.-матем. – 1986. – № 6. – С. 17-19.

- 3 Бай Ши-и Магнитная газодинамика и динамика плазмы. – М.: Мир, – 1964, 301 с.
- 4 Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч.2. – М.: Физматгиз, 1963. – 727 с.
- 5 Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983. – 319 с.
- 6 Дурмагамбетов А.А., Кошанов Б.Д. Корректная разрешимость смешанных краевых задач для одномерного уравнения магнитной газовой динамики (МГД) с вырождающейся плотностью // Известия АН КазССР. Сер. физ.-матем. – 1990. – № 1. – С. 22-25.
- 7 Отелбаев М.О., Кошанов Б.Д. О разрешимости задачи магнитной газодинамики с цилиндрической и сферической симметрией // Деп. в КазНИИНТИ, 17.07.89, № 2534. – Алма-Ата. – 1989. – 5 с.
- 8 Кошанов Б.Д. Тез. докл. VII Всес. школы по кач. теории диффер. уравн. гидродин. – Барнаул, – 1989. – С. 36.
- 9 Кошанов Б.Д. Глобальная разрешимость уравнений движения МГД с цилиндрической и сферической симметрией // Тез. докл. межд. научн. конф. "Дифферен. уравн. и матем. модел. посв. 70-летию д.ф.-м.н., проф. В.Н. Врагова. – Улан-Удэ, 2015. – С. 162-163.

Статья поступила в редакцию 09.10.2015

Кошанов Б.Д., Утеев Т.Б. ЦИЛИНДРЛІК ЖӘНЕ СФЕРАЛЫҚ СИММЕТРИЯЛЫ МАГНИТТІ ГАЗДЫ ДИНАМИКАНЫҢ ШЕТТІК ЕСЕБІНІҢ ШЕШІЛІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ

Бұл мақалада тұтқыр жылуөткізгішті газдың қозғалыс теңдеулері үшін бастапқы-шеттік есептер магниттік өрісті ескере отырып зерттеледі. Оған қоса негізгі үш өлшемді теңдеуден Эйлер айнымалысына әрі одан кейінгі Лагранж координаттарына көшуі екжей-тегжейлі көрсетілген. Магниттік өрістегі жылуөткізгішті газдың теңдеулері үшін ағын аймағының симметрия өсін (нүктесін) қамтымайтын жағдайында бірімәнді шешілімділігі дәлелденген. Осылармен бірімезгілде цилиндрлік және сфералық толқындары бар қозғалыстар қарастырылады.

Koshanov B.D., Uteev T.B. ON SOLVABILITY OF BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE MAGNETIC GAS DYNAMICS WITH CYLINDRICAL AND SPHERICAL SYMMETRIES

In this work the correctness "as a whole" by time, of the initial-boundary value problems for the equations of motion of the viscous heat-conductive gas under of the magnetic field is proved. The transition from the basic three dimensional Euler equation to the Euler variable and then to Lagrangian coordinate is shown in details. The main results are proved simultaneously for the motion with cylindrical and spherical waves.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

НАЗАРБАЙ КАДЫРОВИЧ БЛИЕВ
(к 80-летию со дня рождения)



Исполнилось 80 лет академику НАН Республики Казахстан Назарбаю Кадыровичу Блиеву, известному ученому, специалисту в области теории обобщенных аналитических функций, краевых задач математической физики и сингулярных интегральных уравнений.

Н.К. Блиев родился 15 сентября 1935 года в поселке Жаркамыс Байганинского района Актюбинской области в семье служащего. В 1952 году он поступил на математическое отделение физико-математического факультета КазГУ им. С.М. Кирова (ныне КазНУ им. аль-Фараби). Под руководством академика К.П. Персидского в 1957 году он защитил дипломную работу по теории устойчивости и окончил с отличием КазГУ им. С.М.Кирова. Был направлен на работу в Гурьевский пединститут (ныне Атырауский университет), где работал преподавателем, затем старшим преподавателем до 1960 года.

В 1960 году он поступил в аспирантуру Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. Первым его научным руководителем был д.ф.-м.н. Владимир Сергеевич Виноградов – ученик академика АН СССР Ильи Нестеровича Векуа. Назарбай Кадырович начал заниматься изучением поведения решений эллиптических систем дифференциальных уравнений в

окрестности особых точек коэффициентов. Им были получены необходимые и достаточные условия существования аналитических решений вырождающихся эллиптических систем первого порядка в окрестности точек вырождения. Эти результаты положили начало другим исследованиям о возможности существования непрерывных решений, связанных с вопросами теории поверхностей в геометрии. Указанные результаты Н.К. Блиева были высоко оценены И.Н. Векуа, что послужило началом дальнейшего их тесного сотрудничества.

В 1965 году Н.К. Блиев успешно защитил кандидатскую диссертацию "О существовании аналитических решений у вырождающихся эллиптических систем в окрестности точки вырождения" в диссертационном совете МИ АН СССР.

Академик АН СССР И.Н. Векуа предложил ему заниматься проблемой о возможности продолжения теории обобщенных аналитических функций на крайние предельные случаи, а именно, на класс коэффициентов эллиптических систем, суммируемых в степени не более, чем два. В те годы Н.К. Блиев работал в лаборатории профессора Т.И. Аманова, являющегося и директором института, ученика академика АН СССР С.М. Никольского. Это навело его на мысль обратиться к шкале пространств Никольского-Бесова, которые еще не были приспособлены для изучения уравнений с переменными коэффициентами. Н.К. Блиеву удалось доказать утверждения о мультипликаторах и получить соотношения между параметрами пространств, в которых теория Векуа остается в силе. Это позволило внести уточнения в условия существования классических решений дифференциальных уравнений в частных производных, общих краевых задач типа Римана-Гильберта, задач сопряжения, квазиконформных отображений, являющихся непрерывно дифференцируемыми гомеоморфизмами Бельтрами. Им установлена нетеровость сингулярных интегральных уравнений в классах функций, непрерывных в терминах пространств Бесова, что усилило возможности и расширило круг приложений обобщенных аналитических функций.

Результаты Н.К. Блиева, относящиеся к дифференциальным уравнениям и краевым задачам в ограниченных областях, вошли в его докторскую диссертацию "Эллиптические системы дифференциальных уравнений первого порядка на плоскости в дробных пространствах и краевые

задачи", успешно защищенную в МИ АН СССР в 1980 году.

В дальнейшем исследования, касающиеся функциональных свойств обобщенных аналитических функций, вошли в монографию "Обобщенные аналитические функции в дробных пространствах", Алма-Ата: Наука, 1985. Данная монография получила широкое одобрение и предложение специалистов из дальнего зарубежья для издания на английском языке. Результаты для неограниченных областей содержатся в монографии, изданной в престижной международной серии "Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 86" на английском языке: N.K. Bliiev "Generalized analytic functions in fractional Spaces", USA, Addison Wesley Longman inc., 1997.

С 1963 года научная деятельность Н.К. Блиева связана с Институтом (до 1965 года бывшего Сектором) математики и механики АН Казахской ССР, в котором он последовательно проходит все ступени профессионального роста от младшего научного сотрудника до директора института: с октября 1963 года – МНС, с 1966 года – СНС, с 1978 года – заведующий лабораторией функционального анализа и теории функций, в 1988 г. избран директором института, с 2000 года – почетный директор, руководитель темы (по совместительству) Института математики НАН РК.

Получив эстафету директора института из рук академика НАН РК У.М. Султангазина, Н.К. Блиев внес свой вклад в научно-организационную деятельность института. Несмотря на экономические трудности тех перестроечных лет, а также начало получения независимости Казахстаном, он сумел организовать спокойную творческую атмосферу, активно поддерживая способных молодых математиков и способствуя участию ученых института в различных международных математических форумах. Это дало свои плоды. Институт (теоретической и прикладной математики в 1992-1999 годы) стал одним из ведущих институтов Отделения физико-математических наук НАН РК, усилилась тенденция международной научной деятельности и укрепились международные контакты. В 1995 году 11 сотрудников получили гранты СОРОСА, трое – грант INTAS. Появились стипендиаты различных международных математических обществ, 10 сотрудников института были членами международных научных ассоциаций. Институт в том году стал обладателем гранта INTAS. В эти годы ряд статей и монографий сотрудников института были изданы на англий-

ском языке.

Одновременно с научной деятельностью Н.К. Блиев много времени уделяет преподавательской работе. С 1964 года он работал по совместительству в КазГУ (ныне КазНУ им. аль-Фараби). В сентябре 2000 года, по приглашению ректора, Назарбай Кадырович полностью переходит на педагогическую работу и становится заведующим кафедрой функционального анализа и теории вероятностей КазНУ им. аль-Фараби. С 2009 года по настоящее время он является профессором кафедры фундаментальной математики механико-математического факультета КазНУ им. аль-Фараби.

Н.К. Блиев активно занимается научно-организаторской и общественной деятельностью. Он является членом редколлегий журналов "Известия НАН РК. Серия физико-математическая", "Математический журнал", "Вестник КазНУ им. аль-Фараби". Неоднократно он являлся членом диссертационных Советов по защите докторских и кандидатских диссертаций Института математики МОН РК.

В 1999–2002 годы он работал по совместительству академиком-секретарем Отделения физико-математических наук НАН РК. В течение нескольких сроков он был членом президиума ВАК (ГАК), председателем секции физико-математических наук Терминологического комитета при Кабинете Министров РК, членом Комитета по государственным премиям РК, Президиума НАН РК, заместителем ответственного редактора журнала "Известия НАН РК. Серия физико-математическая", главным редактором "Математического журнала", членом редколлегии журнала "Вестник МОН РК", Энциклопедии РК, Фонда развития науки, диссертационных советов Института математики АН Узбекистана, Актюбинского университета им. К. Жубанова. Был одним из организаторов и активно участвовал в организации и проведении ряда международных научных форумов в городах Алматы, Актобе, Семей и Караганды.

Им опубликовано более 140 научных работ, среди которых 1 монография, ряд статей в таких высокорейтинговых математических изданиях, как "Доклады АН СССР", "Сибирский математический журнал", "Complex Variables and Elliptic Equations" и др.

Заботясь о качественном и профессиональном образовании подрастающего поколения на государственном языке Н.К.Блиев написал на казахском языке учебное пособие "Метрикалық кеңістіктер". Алматы: "Қа-

зақ университеті 2005г. и учебник "Функционалдык анализ". Алматы: "Университет", КазНУ им. аль-Фараби, 2014г.

Среди его прямых учеников – 18 кандидатов и 3 доктора наук, которые имеют свои школы и учеников.

Научные заслуги Н.К. Блиева получили достойную оценку. В 1985 году он получил звание профессора, в 1989 году был избран членом-корреспондентом АН Казахской ССР, в 1996 году – академиком Российской академии естественных наук, а в 2004 году он становится академиком НАН РК. В 1998 году ему присвоено почетное звание "Заслуженный деятель науки и техники Республики Казахстан", в 1999 году он удостоен Международной премии Хорезми первой степени.

Н.К. Блиев выступал с докладами на Международном Конгрессе математиков (1983г., Варшава, Польша), Втором европейском конгрессе математиков (1996г., Будапешт, Венгрия), конференциях европейского математического общества (2004г., 2006г., Bedlewo, Польша), с Пленарным докладом на Международной конференции "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения" (2007 г., Новосибирск, Россия) и др.

В настоящее время Назарбай Кадырович продолжает научные исследования в области обобщенных аналитических функций в Институте математики и математического моделирования КН МОН РК: он являлся научным руководителем проекта "Обобщенные аналитические векторы и их приложения, разрешимость солитонных нелинейных уравнений размерности $(1+1)$ " по грантовому финансированию на 2012-2014 годы. В настоящее время он является научным руководителем проекта "Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши со сдвигом Карлемана в дробных пространствах" по грантовому финансированию на 2015-2017 годы.

Академик Н.К. Блиев полон сил и энергии для осуществления своих новых математических замыслов.

Коллектив Института и редакционная коллегия "Математического журнала" поздравляет Назарбая Кадыровича с 80-летним Юбилеем и желает ему крепкого здоровья, долгих лет жизни, новых творческих успехов в его плодотворной деятельности!

Редакционная коллегия

Правила "Математического журнала" для авторов статей

Общие положения

В "Математическом журнале" публикуются оригинальные статьи по основным разделам современной математики: теория функций, функциональный анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, алгебра, математическая логика, теория чисел, геометрия, топология, теория вероятностей и математическая статистика, вычислительная математика, математическая физика, математическое моделирование. Журнал выпускается ежеквартально, четыре номера составляют том.

Статья должна быть написана на высоком научном уровне, содержать новые, четко сформулированные математические результаты и их доказательства. Во введении необходимо привести имеющиеся результаты по теме представленной работы, дать краткое содержание статьи и отразить актуальность, новизну полученных автором результатов.

Статьи журнала размещаются в свободном доступе на сайте www.math.kz Института математики и математического моделирования МОН РК, их реферируют НЦ НТИ (Казахстан), *Zentralblatt Math* (Германия).

В "Математическом журнале" публикуются статьи объемом до 25 журнальных страниц. Статьи объемом более 25 страниц публикуются по специальному решению редколлегии журнала. Принимаются статьи, написанные на казахском, русском и английском языках. Статьи рецензируются.

Требования к оформлению статей

1. Рукопись статьи должна быть подготовлена в издательской системе \LaTeX -2 ϵ и представлена в виде двух твердых копий, а также в виде tex и pdf - файлов на любом электронном носителе или прислана по электронной почте zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru. Статья должна быть подписана всеми авторами. Правила оформления рукописи и стилевые файлы можно найти на сайте Института математики и математического моделирования МОН РК <http://www.math.kz> в разделе "Математический журнал".

2. В левом верхнем углу необходимо указать индекс УДК, далее инициалы

и фамилии авторов в алфавитном порядке, место работы с почтовыми адресами, а также электронные адреса, заглавие статьи. На отдельном листе прилагаются название статьи, фамилии и инициалы авторов, ключевые слова, реферат на русском, английском и казахском (для авторов из Казахстана) языках и индекс Mathematics Subject Classification 2010. Реферат должен отражать содержание статьи. Также представляются сведения об авторах, место работы, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с указанием кода города, адрес электронной почты.

3. Список литературы составляется в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы приводится в следующем виде:

ЛИТЕРАТУРА

1 Мынбаев К.Т., Отелбаев М.О. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. — М.: Наука, 1988. — 288 с. (для монографий)

2 Женсыкбаев А.А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи матем. наук. — 1981. — Т. 36, вып. (или №) 4. — С. 107–159.

Рукописи, не удовлетворяющие перечисленным выше требованиям, возвращаются авторам на оформление, доработку. Редакция оставляет за собой право на отклонение статьи, если ее содержание не отвечает требованиям журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 15, №3 (57), 2015

Собственник "Математического журнала":
Институт математики и математического моделирования
Министерства образования и науки Республики Казахстан

Журнал подписан в печать
и выставлен на сайте <http://www.math.kz>
Института математики и математического моделирования МОН РК
13.10.2015 г.

Тираж 300 экз. Объем 129 стр.
Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная № 1

Адрес типографии:
Институт математики и математического моделирования МОН РК
г. Алматы, ул. Пушкина, 125
Тел./факс: 8 (727) 2 72 46 32
e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru
web-site: <http://www.math.kz>