Министерство образования и науки Республики Казахстан
Институт математики и математического моделирования

Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 75-летию академика НАН РК Тынысбека Шариповича Кальменова.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Алматы 2021

Традиционная международная апрельская конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 75-летию академика НАН РК Тынысбека Шариповича Кальменова

Содержание

1 Дифференциальные уравнения, теория функций и функциональный анализ

Руководители: профессор Асанова А.Т.
профессор Нурсултанов Е.Д.
член-корреспондент НАН РК Садыбеков М.А.

Об одной задаче для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с двумя линиями изменения типа и дробного дифференцирования

О.Х. АБДУЛЛАЕВ[1,a], Н.А. БАХРИДДИНОВА[2,b]

[1] *Институт Математики им.В.И.Романовского, Ташкент, Узбекистан*
[2] *Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан*
E-mail: [a]*obidjon.mth@gmail.com,* [b]*nigorabaxriddinova31@gmail.com*

В данной работе рассматривается нагруженное уравнение параболо-гиперболического типа

$$
0=\begin{cases} u_{xx} -_C D_{oy}^{\alpha} u + f_1(x,y)u^{p_1}(x,y), & \text{при } x>0,\ y>0 \\ u_{xx}-u_{yy}+f_2(x,y)u^{p_2}(x+y,0), & \text{при } x>0,\ y<0 \\ u_{xx}-u_{yy}+f_3(x,y)u_y^{p_3}(0,x+y), & \text{при } x<0,\ y>0 \end{cases} \tag{1}
$$

с оператором Капуто

$$
{}_C D_{0y}^{\alpha} f(y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^y (y-z)^{-\alpha} f'(z)dz, \quad 0<\alpha<1,
$$

где $f_i(x,y;u(x,0))$, $(i=1,2,3)-$ заданные функции, p_i, $(i=1,2,3)$, $\alpha-$ действительные постоянные.

Основная цель данной работы - исследовать однозначную разрешимость краевой задачи с интегральным условием склеивания для уравнения (1).

Рассмотрим уравнение (1) в конечной области $\Omega\subset R^2$, ограниченной сегментами A_1A_2, A_2B_2 на прямых $y=h$, $x=1$ при $x>0$, $y>0$; и B_1C_2, A_1C_2 на характеристиках $x+y=0$, $x-y=l$ уравнения (1) при $x>0$, $y<0$, а также сегментами B_1C_1, B_2C_1 на характеристиках $y-x=h$, $x+y=0$ уравнения (1) при $x<0$, $y>0$. Параболическую часть смешанной области Ω обозначим через Ω_0, а гиперболические части через Ω_1 при $x>0$ и Ω_2 при $x<0$.

Задача I. Требуется найти решение $u(x,y)$ уравнения (1) из класса функций: $u(x,y)\in C(\bar\Omega)\cap C^2(\Omega_2\cap\Omega_1)$; $u_{xx}, {}_C D_{oy}^{\alpha}u\in C\left(\Omega_0\right)$; удовлетворяющие краевым условиям:

$$
u(l,t)=\varphi_1(y),\ \ 0\le y\le h;
$$

$$
\frac{d}{dx}u\left(\frac{x}{2};-\frac{x}{2}\right)=a_1(x)u_y(x,0)+a_2(x)u_x(x,0)+a_3(x)u(x,0)+a_4(x)0\le x\le l;
$$

$$
\frac{d}{dy}u\left(-\frac{y}{2};\frac{y}{2}\right)=b_1(y)u_x(0,y)+b_2(y)u_y(0,y)+b_3(y)u(0,y)+b_4(y)0\le y\le h;
$$

и интегральному условию склеивания:

$$
\lim_{y\to+0} {}_c D_{0y}^{\alpha} u(x,y) = \lambda_1(x)u_y(x,-0)+\lambda_2(x)u_x(x,-0)+
$$

$$
+\lambda_3(x)u(x,0)+\lambda_4(x),\ 0<x<l
$$

$$
u_x(-0,y)=\mu_1(y)u_x(+0,y)+\mu_2(y)u(0,y)+\mu_3(y),\ 0<y<h
$$

где $a_i(x)$, $b_i(y)$, $\lambda_i(x)$, $(i=1,2,3,4)$ $\mu_j(y)$, $(j=1,2,3)$ $\varphi_1(y)$ - заданные функции, причем $\sum\limits_{k=1}^{3}\lambda_k^2(x)\neq 0$, $\sum\limits_{k=1}^{3}a_k^2(x)\neq 0$, $\sum\limits_{k=1}^{3}b_k^2(x)\neq 0$ и $\mu_1^2(x)+\mu_2^2(x)\neq 0$.

Отметим, что аналогичная задача с локальными краевыми и разрывными условиями склеивания для уравнения (1), но без нагруженной части (т.е. при $f_i(x,y)\equiv 0\,(i=1,2,3)$), была исследована Б. Кадыркуловым [1].

При определенных условиях на заданные функции доказывается существование и единственность поставленной задачи. Исследование существования решения задачи сведется к разрешимости нелинейных интегральных уравнений.

Funding: Авторы были поддержаны грантом $FZ - 20200929375$ МИР РУз.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, оператор Капуто, нелокальные условия, нелинейное интегральное уравнение, смешанный тип.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B45, 35R11

Литература

[1] Kadirkulov Bakhtiyor J. Boundary problems for mixed parabolic-hyperbolic equations with two lines of changing type and fractional derivative, *Electronic Journal of Differential Equations*, **2014**:57 (2014), 7 p.

— ⁂ —

Об одной нелокальной задаче для нагруженного уравнения смешанного типа с оператором Капуто

Обиджон АБДУЛЛАЕВ[1,a], Айгул МАТЧАНОВА[2,b]

[1] *Институт математики им.В.И.Романовского, Ташкент, Узбекистан*
[2] *Институт ионно-плазменных и лазерных технологий им.У.А.Арифова, Ташкент, Узбекистан*
E-mail: [a]*obidjon.mth@gmail.com*, [b]*oygul87-87@mail.ru*

В данной работе рассматривается нагруженное уравнение параболо-гиперболического типа

$$0=\begin{cases} u_{xx} -_C D^{\alpha}_{ot}u+\mu_1^2 u+f_1(x,t;u(x,0)), & \text{при } t>0 \\ u_{xx}-u_{tt}-\mu_2^2 u+f_2(x,t;u(x,0)), & \text{при } t<0 \end{cases} \tag{1}$$

с оператором Капуто ${}_C D^{\alpha}_{0t}f(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t (t-z)^{-\alpha}f'(z)dz$, $\quad 0<\alpha<1$, где $f_i(x,t;u(x,0))$ - заданные функции, $\mu_i\neq 0$, $\alpha-$ действительные постоянные.

Известно, что локальные и нелокальные задачи уравнений параболо-гиперболического типа с оператором Капуто след решения которых был включен в различные интегро-дифференциальные операторы дробного порядка, такие как Риман-Лиувилль, Эрдейли-Кобер и др. исследованы в работах [1],[2] и [3]. Хотелось бы отметить, что уравнения приведенном выше подчеркнутых работ имеют только линейные нагруженные члены, причем без слагаемое с $\mu_i^2 u(x,t)$.

Основная цель данной работы, исследовать однозначную разрешимость нелокальной краевой задачи с интегральным условием склеивания для уравнения (1).

Пусть $\Omega-$ область, ограниченная отрезками: $A_1A_2=\{(x,t):\ \ x=l,\ 0<t<h\}$, $B_1B_2=\{(x,t):\ \ x=0,\ 0<t<h\}$, $B_2A_2=\{(x,t):\ \ t=h,\ 0<x<l\}$ при $t>0$, и характеристиками: $A_1C:\ x-t=l$, $B_1C:\ x+t=0$ уравнения (1) при $t<0$, где $A_1\left(l;0\right)$, $A_2\left(l;h\right)$, $B_1\left(0;0\right)$, $B_2\left(0;h\right)$, и $C\left(\frac{l}{2};\frac{-l}{2}\right)$. $\Omega_1=\Omega\cap(t>0)$, $\Omega_2=\Omega\cap(t<0)$, $I_1=\left\{x:\ 0<x<\frac{l}{2}\right\}$, $I_2=\left\{x:\ \frac{l}{2}<x<l\right\}$.

Задача I. Требуется найти решение $u(x,t)$ уравнения (1) из класса функций: $W_1=\{u(x,t):\ u(x,t)\in C(\bar\Omega)\cap C^2(\Omega_2);\ u_{xx},{}_C D^{\alpha}_{ot}u\in C(\Omega_1);$.
$.u_x\in C^1(\bar\Omega_1\setminus A_2B_2)\}$ удовлетворяющие краевым условиям:

$$\alpha_1 u(l,t)+\alpha_2 u_x(l,t)=\varphi_1(t),\quad \beta_1 u(0,t)+\beta_2 u_x(0,t)=\varphi_2(t),\quad 0\le t<h; \tag{2}$$

$$\gamma_1 A^{1,\mu_2}_{0x}\left[\frac{d}{dx}u\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\right)\right]+\gamma_2 A^{1,\mu_2}_{x1}\left[\frac{d}{dx}u\left(\frac{x+l}{2},\frac{x-l}{2}\right)\right]=\psi_1(x),\ 0\le x\le l;$$

и интегральное условие склеивания:

$$\lim_{t\to+0} {}_cD^{\alpha}_{0t}u(x,t) = \lambda_1(x)u_t(x,-0) + \lambda_2(x)u_x(x,-0)+$$

$$+\lambda_3(x)u(x,0) + \lambda_4(x),\ 0 < x < l$$

где $A^{n,\mu}_{mx}[f(x)] \equiv f(x) - \int\limits_m^x f(t)\left(\frac{t-m}{x-m}\right)^n \frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\mu\sqrt{(x-m)(x-t)}\right]dt,\ \psi_1(x),\ \varphi_i(t)\,(i = 1,2)$, $\lambda_k(x)\,(k=\overline{1,4})$ - заданные функции, и $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i = const$, причем $\alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0$, $\beta_1^2+\beta_2^2\neq 0$, $\gamma_1^2+\gamma_2^2\neq 0$, $\sum\limits_{k=1}^{3}\lambda_k^2(x)\neq 0$, а $J_0(z)-$ функция Бесселя первого рода.

Задача I, исследуется в случаях: $i)\ \ \alpha_2=0,\ \ \beta_2\neq 0,\ \ \gamma_1\neq 0$; $ii)\ \ \alpha_2\neq 0,\ \ \beta_2=0,\ \ \gamma_2\neq 0$; $iii)\ \ \alpha_2,\beta_2\neq 0,\ \ \gamma_1=0$ или $\gamma_2=0$.

При определенных условиях на заданные функции и на коэффициенты краевых условий, доказывается однозначная разрешимость поставленной задачи.

Funding: Авторы были поддержаны грантом $FZ-20200929375$ МИР РУз.

Ключевые слова: Дробное дифференцирование, нагруженное уравнение, нелокальная задача, интегральное условие склеивания, однозначная разрешимость.

2010 Mathematics Subject Classification: 35M10, 34B45, 35R11

Литература

[1] Sadarangani K., Abdullaev O.Kh. A non-local problem with discontinuous matching condition for loaded mixed type equation involving the Caputo fractional derivative, *Advances in Difference Equations*, Springer, AIDE-D-16-00217R3.(2016).

[2] Abdullaev O.Kh. Some Problems for the Degenerate Mixed Type Equation Involving Caputo and Atangana-Baleanu Operators Fractional Order, *Progr. Fract. Differ. Appl.*, Natural publishing, **1**:2 (2020), 1–14.

[3] Abdullaev O.Kh. About a problem for the degenerate mixed type equation involving Caputo and Erdelyi-Kober operators fractional order, *Ukr. Math. Jour.*, **71**:6 (2019), 723–738.

— ⁂ —

О классификации особых точек одной динамической системы

Нурлан АБИЕВ[1,a]

[1] *Таразский региональный университет, Тараз, Казахстан*
E-mail: [a]*abievn@mail.ru*

В [1,2] изучалась динамическая система

$$\dot{x}_i = F_i := -2x_i\left(\mathbf{r_i} - \left(\mathbf{r_1}a_1^{-1}+\mathbf{r_2}a_2^{-1}+\mathbf{r_3}a_3^{-1}\right)\left(a_1^{-1}+a_2^{-1}+a_3^{-1}\right)^{-1}\right), \tag{1}$$

возникающая относительно параметров $x_i = x_i(t) > 0$, $i = 1,2,3$, инвариантной римановой метрики на обобщенных пространствах Уоллаха, где $a_i \in (0,1/2]$, $\mathbf{r_i} = \frac{1}{2x_i} + \frac{a_i}{2}\left(\frac{x_i}{x_jx_k} - \frac{x_k}{x_ix_j} - \frac{x_j}{x_ix_k}\right)$ — главные значения кривизны Риччи метрики, $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$. Используя условие $x_1^{1/a_1}x_2^{1/a_2}x_3^{1/a_3} = 1$, систему (1) можно эквивалентно заменить системой

$$\dot{x}_i = f_i(x_1,x_2), \quad i = 1,2, \tag{2}$$

где $f_i(x_1,x_2) \equiv F_i(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2))$, $\varphi(x_1,x_2) = x_1^{-a_3/a_1}x_2^{-a_3/a_2}$. Вырожденная особая точка системы (2) может иметь типы: *полу- гиперболический* ($\lambda_1 = 0,\ \lambda_2\neq 0$); *нильпотентный* ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ J\neq 0$); *линейно нулевой* ($J = 0$), где λ_i — собственные значения J и

$|\lambda_1| < |\lambda_2|$. В работах [1,2] была получена классификация особых точек системы (2) при $a_i \in (0, 1/2]$. Здесь мы утверждаем, что результат теоремы 1 из [1] и результаты первых двух пунктов теоремы 5 из [2] сохраняют свою силу и в более общем случае.

Теорема. *Пусть $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ и $\mathcal{A} := a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 \neq 0$. Тогда система* (2) *не имеет особых точек нильпотентного типа и допускает особую точку линейно нулевого типа в том и только в том случае, если $a_1 = a_2 = a_3 = 1/4$.*

В качестве следствия получаем, что при $a_i \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A} \neq 0$ и $(a_1, a_2, a_3) \neq (1/4, 1/4, 1/4)$, все вырожденные особые точки системы (2) имеют полу-гиперболический тип.

Замечание. Любопытно то, что в общем случае $a_i \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A} \neq 0$, утверждение третьего пункта теоремы 5 из [2], гарантирующее отсутствие у системы (2) фокусов и центров (как вырожденных, так и невырожденных), не имеет места.

Ключевые слова: нормализованный поток Риччи, обобщенные пространства Уоллаха, инвариантные римановы метрики, динамическая система, особая точка

2010 Mathematics Subject Classification: 53C30, 53C44, 37C10, 34C05

Литература

[1] Abiev N.A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu.G., Siasos P. The dynamics of the Ricci flow on generalized Wallach spaces, *Differ. Geom. Appl.*, **35** (2014), 26–43.

[2] Абиев Н.А., Арванитойоргос А., Никоноров Ю.Г., Сиасос П. Нормализованный поток Риччи на обобщенных пространствах Уоллаха, *Мат. форум*, **8**:4 (2014), 25–42.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

Об оценках порядка приближения функций многих переменных в обобщенном пространстве Лоренца

Г. АКИШЕВ[1,2,a]

[1] *Казахстанский филиал МГУ имени М.В. Ломоносова, Нур-Султан, Казахстан*
[2] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*akishev_g@mail.ru*

Рассмотрим $X(\bar{\varphi})$ анизотропное симметричное пространство 2π– периодических функций m переменных, с нормой

$\|f\|^*_{X(\bar{\varphi})} = \|\dots\|f^{*_1,\dots,*_m}\|_{X(\varphi_1)}\dots\|_{X(\varphi_m)}$, где $f^{*_1,\dots,*_m}(t_1,...,t_m)$ – невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\bar{x})|$ по каждой переменной $x_j \in [0,1]$ при фиксированных остальных переменных (см. [1]) и $X(\varphi_j)$ – симметричное пространство по переменной x_j, с фундаментальной функцией φ_j. В частности, через $L^*_{\bar{\psi},\bar{\tau}}$ обозначим пространство всех функций m переменных f для которых величина

$$\|f\|^*_{\bar{\psi},\bar{\tau}} =$$

$$\Big[\int_0^1 \psi_m^{\tau_m}(t_m)\Big[\dots\Big[\int_0^1 \psi_1^{\tau_1}(t_1)\left(f^{*_1,\dots,*_m}(t_1,...,t_m)\right)^{\tau_1}\frac{dt_1}{t_1}\Big]^{\frac{\tau_2}{\tau_1}}\Big]^{\frac{\tau_m}{\tau_{m-1}}}\frac{dt_m}{t_m}\Big]^{\frac{1}{\tau_m}}$$

конечна, где функции ψ_j не убывают, вогнуты на $[0,1]$, $\psi_j(0) = 0$,
$1 < \tau_j < \infty$, $j = 1, \dots, m$.

Введем обозначения : $a_{\overline{n}}(f)$–коэффициенты Фурье функции $f \in L_1$ по системе $\{e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}\}$,
$\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x}) = \sum\limits_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})} a_{\overline{n}}(f)\, e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}$, где $\langle\bar{y},\bar{x}\rangle = \sum\limits_{j=1}^{m} y_jx_j$,
$\rho(\bar{s}) = \left\{\overline{k} = (k_1,...,k_m) \in \mathbb{Z}^m : \quad 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = 1,...,m\right\}$.

Рассмотрим функциональный класс Никольского–Бесова

$$S^{\bar{r}}_{X(\bar{\varphi}),\bar{\theta}}B = \Big\{ f \in X(\bar{\varphi}): \quad \|f\|^*_{X(\bar{\varphi})} + \Big\| \Big\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{X(\bar{\varphi})} \Big\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+} \Big\|_{l_{\bar{\theta}}} \leq 1 \Big\},$$

где $\bar{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)$, $\bar{r} = (r_1, ..., r_m)$, $1 \leq \theta_j \leq +\infty$, $0 < r_j < +\infty$, $j = 1, ..., m$.

Пусть дан вектор $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, $\gamma_j > 0$, $j = 1, \ldots, m$.
Положим $Q^{\bar{\gamma}}_n = \cup_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}\rangle < n} \rho(\bar{s})$, $T(Q^{\bar{\gamma}}_n) = \{t(\bar{x}) = \sum\limits_{\bar{k}\in Q^{\bar{\gamma}}_n} b_{\bar{k}} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x}\rangle}\}$, $E^{(\bar{\gamma})}_n(f)_{X(\bar{\varphi})}$ — наилучшее приближение функции $f \in X(\bar{\varphi})$ полиномами из множества $T(Q^{\bar{\gamma}}_n)$.

Точные по порядку оценки наилучшего приближения функций различных классов в пространстве Лебега $L_p(\mathbb{T}^m)$ хорошо известны [2]. Эти вопросы в пространстве $L^*_{\bar{q},\bar{\tau}}(\mathbb{T}^m)$ исследованы в [3], [4].

Положим $\mu_j(s) = \frac{\psi_j(2^{-s})}{\varphi_j(2^{-s})}$, $\alpha_\varphi = \underline{\lim}_{t\to 0} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)}$, $\beta_\varphi = \overline{\lim}_{t\to 0} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)}$.

Теорема. *Пусть* $1 \leq \theta_j < +\infty$, $1 < \tau_j < +\infty$, $r_j > 0$, $\gamma_j = \frac{r_j}{r_1}$ *и функции* φ_j, ψ_j *удовлетворяют условиям* $1 < \alpha_{\psi_j} \leq \beta_{\psi_j} < \alpha_{\varphi_j} \leq \beta_{\varphi_j} < 2$, $j = 1, ..., m$ *и*

$$\Big[\sum_{s_j=0}^{\infty} \Big(\mu_j(s_j) 2^{-s_j r_j} \Big)^{\varepsilon_j} \Big]^{\frac{1}{\varepsilon_j}} < +\infty,$$

где $\varepsilon_j = \tau_j \beta'_j$, $\beta'_j = \frac{\beta_j}{\beta_j - 1}$, $j = 1, ..., m$, *если* $\beta_j = \frac{\theta_j}{\tau_j} > 1$, $\varepsilon_j = +\infty$, *если* $\theta_j \leq \tau_j$, $j = 1, ..., m$. *Если* $1 < \tau_j < \theta_j < +\infty$, $j = 1, ..., m$, *то*

$$E^{(\bar{\gamma})}_n (S^{\bar{r}}_{X(\bar{\varphi}),\bar{\theta}}B)_{\bar{\psi},\bar{\tau}} \equiv \sup_{f\in S^{\bar{r}}_{X(\bar{\varphi}),\bar{\theta}}B} E^{(\bar{\gamma})}_n(f)_{\bar{\psi},\bar{\tau}} \leq C \Big\| \Big\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j r_j} \mu_j(s_j) \Big\}_{\bar{s}\in Y^m(\bar{\gamma},n)} \Big\|_{l_{\bar{\varepsilon}}},$$

где $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m)$. *Если* $\theta_j \leq \tau_j < +\infty$, $j = 1, ..., m$, *то*

$$E^{(\bar{\gamma})}_n (S^{\bar{r}}_{X(\bar{\varphi}),\bar{\theta}}B)_{\bar{\psi},\bar{\tau}} \leq C \sup \Big\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j r_j} \mu_j(s_j): \quad \bar{s} \in \mathbb{Z}^m_+, \langle \bar{s}, \bar{\gamma}\rangle \geq n \Big\}.$$

Здесь $Y^m(\bar{\gamma}, n) = \{\bar{s} \in \mathbb{Z}^m_+, \langle \bar{s}, \bar{\gamma}\rangle \geq n\}$.

Funding:Работа выполнена в рамках грантового финансирования МОН РК (Проект AP08855579).

Ключевые слова: пространстве Лоренца, класс Никольского–Бесова, наилучшее приближение, гиперболический крест.

2010 Mathematics Subject Classification: 42A05, 42A10, 46E30

Литература

[1] Blozinski A.P. Multivariate rearragements and Banach function spaces with mixed norms, *Trans.Amer.math.soc.*, **263** (1981), 146–167.

[2] Dinh Dũng, Temlyakov V.N., Ullrich T. *Hyperbolic Cross Approximation*, Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona. Springer, Basel/ Berlin (2018).

[3] Акишев Г. Приближение функциональных классов в пространствах смешанной нормой, *Мат. сб.*, **197** (2006), 17–40.

[4] Бекмаганбетов К.А. О порядках приближения класса Бесова в метрике анизотропных пространств Лоренца, *Уфимский мат. жс.*, **1**:2 (2009), 9–16.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Критерий единственности решения задачи Трикоми для многомерного уравнения Лаврентьева-Бицадзе

С.А. АЛДАШЕВ[1,a]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a] *aldash51@mail.ru*

Введение. Известно, что колебания упругих мембран в пространстве моделируются уравнениями в частных производных. Если прогиб мембраны считать функцией $u(x,t)$, $x = (x_1, ..., x_m)$, $m \geq 2$, то по принципу Гамильтона приходим к многомерному волновому уравнению. Полагая, что в положении изгиба мембрана находиться в равновесии, из принципа Гамильтона также получаем многомерное уравнение Лапласа. Следовательно, колебания упругих мембран в пространстве можно моделировать в качестве многомерного уравнения Лаврентьева-Бицадзе ([1,2]). Теория краевых задач для гиперболо-эллиптических уравнений на плоскости хорошо изучена (см. например, монографию [2,3] и приведенные в них библиографию). Проблема корректности смешанных задач для гиперболо-эллиптических уравнений в многомерных ограниченных областях все еще остается открытым ([4]). Многомерный аналог задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе был поставлен в [4,5] (см. также [6]). В работах [7,8] доказано, эта задача имеет не единственное решение. Естественно, возникает важный вопрос: в какой смешанной области решение задачи Трикоми является единственной? В настоящей работе приводится смешанная область, в который решение задачи Трикоми тривиальное. Получен также критерий единственности классического решения. Здесь также следует отметить работу [9] , где изучается задачи Трикоми в трехмерной области.

Постановка задачи и результат. Пусть Ω_ε - конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная при $t > 0$ сферической поверхностью Γ : $|x|^2 + t^2 = 1$, а при $t < 0$ конусами $K_\varepsilon : |x| = -t + \varepsilon,\ K_1 : |x| = 1 + t,\ \frac{\varepsilon-1}{2} \leq t \leq 0$, где $|x|$ - длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$, а $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Обозначим через Ω^+ и Ω_ε^- части области Ω_ε, лежащие в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$, через $S^\varepsilon-$ общую часть границ области Ω^+, Ω_ε - представляющих собой множество $\{t = 0,\ 0 < |x| < 1\}$ точек из E_m. Часть конусов K_ε, K_1, ограничивающих области Ω_ε^-, обозначим через S_ε, S_1 соответственно. В области Ω_ε рассмотрим многомерное уравнение Лаврентьева–Бицадзе

$$\Delta_x u + (sgnt)u_{tt} = 0, \qquad (1)$$

где Δ_x - оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m$, $m \geq 2$. В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, ..., x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, ..., \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, ...,\ m-1$, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1})$. В качестве многомерной задачи Трикоми рассматривается следующая **Задача 1.** Найти решение уравнения (1) в области Ω_ε при $t \neq 0$ из класса $C(\overline{\Omega}_\varepsilon) \cap \cap C^2(\Omega^+ \cup \Omega_\varepsilon^-)$ удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{\Gamma \cup S_\varepsilon} = 0.$$

Тогда справедлива

Теорема 1. *Решение задачи 1* $u(r,\theta,t) \equiv 0 \Leftrightarrow \varepsilon > 0$.

Ключевые слова: критерий, задача Трикоми, многомерное уравнение, классическое решение, сферические функции.

2010 Mathematics Subject Classification: 35L81

Литература

[1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*, Наука, Москва (1966).
[2] Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных*, Наука, Москва (1981).
[3] Нахушев А.М. *Задачи со смещением для уравнения в частных производных*, Наука, Москва (2006).
[4] Бицадзе А.В. *Уравнения смешанного типа*, Изд-во АН СССР, Москва (1959).

[5] Бицадзе А.В. К проблеме уравнений смешанного типа в многомерных областях, *ДАН СССР*, **110**:6 (1956), 901–902.

[6] Пулькин С.В. Сингулярная задача Трикоми, *Труды третьего всесоюзного математического съезда*, **1**:1 (1956), 65–66.

[7] Алдашев С.А. Неединственность решения пространственной задачи Геллерстедта для одного класса многомерного уравнения Лаврентьева-Бицадзе, в: *Мат-лы межд. конф. "Дифференциальные уравнения". Функциональные пр-ва. Теории приближений посв. 100 летию академика С.Л. Соболева*, ИМ СО РАН, Новосибирск (2008), 93.

[8] Алдашев С.А. Неединственность решения пространственной задачи Геллерстедта для одного класса многомерных гиперболо-эллиптических уравнений, *Укр. матем. журнал*, **62**:2 (2010), 265–269.

[9] Моисеев Е.И., Нефедов П.Х., Холомеева А.А. Аналоги задач Трикоми и Франкля в трехмерных областях для уравнения Ларентьева-Бицадзе, *Дифференц. уравнения*, **50**:12 (2014), 1672–1675.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Краевая задача для уравнения четвертого порядка содержащая высокую производную в начальной и финальной условиях

Д. АМАНОВ[1,a], О.Ш. КИЛИЧОВ[2,b]

[1] *Ферганский государственный университет, Узбекистан*
[2] *Институт Математики АН РУз, Ташкент, Узбекистан*
E-mail: [a]damanov@yandex.ru, [b] oybek2402@mail.ru

В области $\Omega = \{(x,t): \ 0 < x < p, \ 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - u_{xxxx} = f(x,t) \tag{1}$$

где $f(x,t)-$ заданная известная функция.

Задача. В области Ω найти решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0,t) = 0, \ u(p,t) = 0, \ 0 \le t \le T, \tag{2}$$

$$u_{xx}(0,t) = 0, \ u_{xx}(p,t) = 0, \ 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x,0) = \varphi(x), \ 0 \le x \le p, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x,T) = \psi(x), \ 0 \le x \le p, \tag{5}$$

где $k \ge 2-$ фиксированное натуральное число.

Единственность решения задачи (1)-(5) доказывается спектральным методом используя полноты функции $X_n(x)$ [1], для доказательства существования решения применяется метод Фурье.

Ключевые слова: краевая задача, метод Фурье, существование решения, единственность решения.

2010 Mathematics Subject Classification: 35J15

Литература

[1] Моисеев Е.И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи, *Дифференциальные уравнения*, **35**:8 (1999), 1094–1100.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Условия излучения одномерной задачи Зоммерфельда

Дидар АМИРУЛЫ

Институт математики и математического моделирование, Алматы, Казахстан
КазНУ им. Аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: didar.matai@mail.ru

В работе [1] при некоторых ограниченных на комплексных параметрах λ найден явный вид этих граничных условий через граничное условие потенциала Гельмгольца, задаваемое интегралом в конечная область Ω интегралом

$$u\left(x,\lambda\right)=\int_{-1}^{1}\varepsilon\left(x-\xi,\lambda\right)\rho\left(\xi,\lambda\right)d\xi \tag{1}$$

где $\varepsilon(x-\xi,\lambda)$ - фундаментальные решения уравнения Гельмгольца,

$$-\Delta_x\varepsilon\left(x\right)-\lambda\varepsilon=\delta\left(x\right)$$

$\rho(\xi,\lambda)-$ плотность потенциала, $\lambda-$ комплексное число, а $\delta-$ дельта-функция Дирака.

Эти границы условия обладают тем свойством, что стационарные волны, идущие из области Ω в $\partial\Omega$, проходят через $\partial\Omega$ без отражения, т.е. являются прозрачными граничными условиями.

В работе [2] в общем случае в R^n, $n\geq 3$ решена проблема сведения задачи Зоммерфельда к граничной задаче в конечной области. При выполнении необходимых условиях для потенциала Гельмгольца (1) также найдена его плотность $\rho(\xi,\lambda)$.

Методы исследование многомерным задачем Зоммерфельда не одномерным случае требует специальные исследование. При этом условия излучения Зоммерфельда в однородном случае также отличается от многомерной случай. Все эти отличия связаны с особенностями фундаментальных решении.

Лемма. Функция

$$\varepsilon(x-\xi)=\frac{\sin\lambda|x-\xi|}{2\lambda}$$

является фундаментальным решением уравнении

$$\frac{d^2}{dx^2}\varepsilon(x-\xi)+\lambda^2\varepsilon(x-\xi)=\delta(x-\xi).$$

Теорема 1. Одномерный потенциал Гельмгольца

$$u(x)=\int_0^1\varepsilon(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi$$

при любом f удовлетворяет граничную условию

$$u'(0)+u'(1)+u(1)\lambda\sin\lambda=0,$$

$$-\frac{\sin\lambda}{2\lambda}u'(1)+u(1)\cos\lambda+u(0)=0.$$

Теорема 2. Пусть $f(\xi)\equiv 0$ вне конечном интервале $(a,b)\in R^1$, тогда существует единственное решение уравнении Гельмгольца задаваемый формулы

$$u(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik|x-\xi|}}{ik}f(\xi)d\xi$$

удовлетворяющее условия излучения Зоммерфельда

$$\lim_{b\to\infty}(-u'(b)+iku(b))=0,\quad \lim_{b\to\infty}u(b)=0,$$

$$\lim_{a\to\infty}(-u'(a)+iku(a))=0,\quad \lim_{a\to\infty}u(a)=0.$$

Ключевые слова: фундаментальные решение, уравнения Гельмгольца, условия Зоммерфельда.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B09

Литература

[1] Т.Ш. Кальменов, Д. Сураган *К спектральным вопросам объемного потенциала* Доклады академии наук России, **428**:4 (2009), 16–19.

[2] Т.Ш. Кальменов, С.И. Кабанихин., А. Лес *Задача Зоммерфельда и обратная задача для уравнения Гельмгольца*, J.Inverse Ill-Posed Probl, **29**:1 (2021), 49–64.

— ⁂ —

Теорема о мультипликаторах двойных рядов Фурье-Хаара

А.Н. БАШИРОВА[1,a]

[1] *ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан*
E-mail: [a]*anar_bashirova@mail.ru*

X, Y - пространства функций, определенных на отрезке $[0,1]$, таких, что $X \hookrightarrow L_1$. Пусть $\{\varphi_k\}$ - полная ортонормированная система. Пусть функции $f\in X$ соответствует ее ряд Фурье по данной системе $\{\varphi_k\}$

$$f\sim\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k,$$

где a_k - коэффициенты Фурье функции f по системе $\{\varphi_k\}$. Будем говорить, что последовательность комплексных чисел $\lambda=\{\lambda_k\}$ является мультипликатором Фурье из пространства X в пространство Y, если для функции $f\in X$ с рядом Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k$ найдется функция $f_\lambda\in Y$, ряд Фурье которой совпадает с рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k a_k\varphi_k$ и оператор $\Lambda f=f_\lambda$ является ограниченным оператором из X в Y. Множество $m(X\to Y)$ всех определенных таким образом мультипликаторов является линейным пространством с нормой $\|\lambda\|_{m(X\to Y)}=\|\Lambda\|_{X\to Y}$.

Пусть $\chi=\{\chi_{k_i}^{j_i}(x)\}_{(k_i,j_i)\in\Omega}$ - система Хаара. Ряд Фурье-Хаара для функции $f(x_1,x_2)\in L_1[0,1]^2$ имеет вид

$$f(x_1,x_2)\sim\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{j_1=1}^{2^{k_1}}\sum_{j_2=1}^{2^{k_2}}a_{k_1,k_2}^{j_1,j_2}(f)\chi_{k_1}^{j_1}(x_1)\chi_{k_2}^{j_2}(x_2),$$

где $a_{k_1,k_2}^{j_1,j_2}(f)$ – коэффициенты Фурье-Хаара функции f.

Целью данной работы является получение теоремы о мультипликаторах двойных рядов Фурье-Хаара в анизотропных пространствах Лоренца.

Пусть $f(x_1,x_2)$ - измеримая на $[0,1]^n$ функция, через $f^{*_1*_2}(t_1,t_2)$ обозначим функцию, полученную применением невозрастающей перестановки к функции $f(x_1,x_2)$ последовательно по переменным x_1,x_2.

Пусть $\bar{p} = (p_1, p_2)$, $\bar{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$ такие, что если $0 < p_i \le \infty$, то $0 < \tau_i \le \infty$, если $p_i = \infty$, то и $\tau_i = \infty$, $i = 1, 2$.

Анизотропным пространством Лоренца $L_{\bar{p},\bar{\tau}}([0,1]^2)$ [2] назовем множество функций, для которых конечна величина

$$\|f\|_{L_{\bar{p},\bar{\tau}}([0,1]^2)} = \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_2^{\frac{1}{p_2}} t_1^{\frac{1}{p_1}} f^{*_1 *_2}(t_1, t_2)\right)^{\tau_1} \frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{\tau_2}}.$$

Здесь и далее, когда $\tau = \infty$, интеграл $\left(\int\limits_0^1 (\varphi(t))^\tau \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\tau}}$ понимается как $\sup\limits_{t>0} \varphi(t)$.

Тогда верна следующая теорема:

Теорема. *Пусть* $1 < \bar{p} < \bar{q} < \infty$, $0 < \bar{r}, \bar{s} \le \infty$, $\frac{1}{\tau_i} = \left(\frac{1}{s_i} - \frac{1}{r_i}\right)_+ =$ $= \max\left\{\frac{1}{s_i} - \frac{1}{r_i}, 0\right\}$, $i = 1, 2$. *Тогда последовательность комплексных чисел* $\lambda = \{\lambda_{k_1 k_2}^{j_1 j_2}\}_{(k_i, j_i) \in \Omega}$ *является мультипликатором из* $L_{\bar{p},\bar{r}}[0,1]^2$ *в* $L_{\bar{q},\bar{s}}[0,1]^2$ *тогда и только тогда, когда*

$$\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)k_1+\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)k_2} \sup_{\substack{1 \le j_i \le 2^{k_i} \\ i=1,2}} \left|\lambda_{k_1 k_2}^{j_1 j_2}\right|\right)^{\tau_1}\right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1}}\right)^{\frac{1}{\tau_2}} < \infty$$

и верно

$$\|\lambda\|_{m(L_{\bar{p},\bar{r}}[0,1]^2 \to L_{\bar{q},\bar{s}}[0,1]^2)} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)k_1+\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)k_2} \sup_{\substack{1 \le j_i \le 2^{k_i} \\ i=1,2}} \left|\lambda_{k_1 k_2}^{j_1 j_2}\right|\right)^{\tau_1}\right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1}}\right)^{\frac{1}{\tau_2}}.$$

Здесь и далее в случае, когда $\tau_i = +\infty$, *соответствующая сумма в выражении справа заменяется на супремум.*

Funding: Автор был поддержан грантом AP09260223 МОН РК.

Ключевые слова: ряды Фурье, система Хаара, мультипликаторы рядов Фурье-Хаара, анизотропное пространство Лоренца.

2010 Mathematics Subject Classification: 42B15, 42B05, 46E30

Литература

[1] Лелонд О.В., Семенов Е.М., Уксусов С.Н.Пространство мультипликаторов Фурье-Хаара, *Сиб. мат. журн.*, **46**:1 (1998), 83–102

[2] Нурсултанов Е.Д. Интерполяционные теоремы для анизотропных функциональных пространств и их приложения, *Докл. РАН*, **394**:1 (2004), 22–25.

[3] Bashirova A.N., Kalidolday A.H., Nursultanov E.D. Interpolation theorem for anisotropic net spaces, *https:// arxiv.org/abs/2009.00609*, (2020).

[4] Bashirova A.N., Nursultanov E.D. The Hardy-Littlewood theorem for double Fourier-Haar series from Lebesgue spaces $L_{\bar{p}}[0,1]$ with mixed metric and from net spaces $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$, *https:// arxiv.org/abs/ 2009.01105*, (2020).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Теоремы вложения для пространств Никольского–Бесова со смешанной метрикой

Куаныш БЕКМАГАНБЕТОВ[1], Кабылгазы КЕРВЕНЕВ[2], Ержан ТОЛЕУГАЗЫ[1,a]

[1] Казахстанский филиал МГУ имени М.В. Ломоносова, Нур-Султан, Казахстан
[2] Карагандинский университет имени акад. Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан
E-mail: [a]toleugazy.yerzhan@gmail.com

Пусть $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$, $1\le \mathbf{q}=(q_1,\ldots,q_n)\le\infty$.
Через $l^{\alpha}_{\mathbf{q}}(A)$ будем обозначать множество кратных последовательностей $\{a_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{R}^n}$ со значениями в A, для которых конечна следующая величина

$$\|a\|_{l^{\alpha}_{\mathbf{q}}(A)}=\left(\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n}\left(2^{(\alpha,\mathbf{k})}\|a_{\mathbf{k}}\|_A\right)^{\mathbf{q}}\right)^{\mathbf{1}/\mathbf{q}},$$

здесь $(\alpha,\mathbf{k})=\sum_{j=1}^n\alpha_j k_j$.

Пусть мультииндекс $\mathbf{1}\le\mathbf{p}=(p_1,\ldots,p_n)\le\infty$.
Пространством Лебега $L_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^n)$ со смешанной метрикой называется множество функций (см. [1]), для которых конечна следующая величина

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^n)}=\left(\int_0^{2\pi}\left(\ldots\left(\int_0^{2\pi}|f(x_1,\ldots,x_n)|^{p_1}\mathrm{d}x_1\right)^{p_2/p_1}\ldots\right)^{p_n/p_{n-1}}\mathrm{d}x_n\right)^{1/p_n}.$$

Выражение $\left(\int_0^{2\pi}|f(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}$ при $p=\infty$ понимается как $\sup\limits_{0\le t<2\pi}|f(t)|$.

Для тригонометрического ряда $f\sim\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^{\mathbf{n}}}a_{\mathbf{k}}e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}$ обозначим через

$$\Delta_{\mathbf{s}}(f,\mathbf{x})=\sum_{\mathbf{k}\in\rho(\mathbf{s})}a_{\mathbf{k}}e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})},$$

где $\rho(\mathbf{s})=\{\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{Z}^n:\left[2^{s_i-1}\right]\le|k_i|<2^{s_i}, i=1,\ldots,n\}$.

Пространством Никольского-Бесова $B^{\alpha\mathbf{q}}_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^n)$ со смешанной метрикой, по аналогии с [2], назовем множество рядов f, для которых конечна норма

$$\|f\|_{B^{\alpha\mathbf{q}}_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^n)}=\left\|\{\Delta_{\mathbf{s}}(f)\}_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^{\mathbf{n}}_+}\right\|_{l^{\alpha}_{\mathbf{q}}(L_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^n))}.$$

Нами получены теоремы вложения для пространств Никольского–Бесова со смешанной метрикой и анизотропных пространств Лоренца.

Теорема 1. *Пусть* $-\infty<\alpha_{\mathbf{0}}=(\alpha_1^0,\ldots,\alpha_n^0)\le\alpha_{\mathbf{1}}=(\alpha_1^1,\ldots,\alpha_n^1)<\infty$, $\mathbf{1}\le\mathbf{q}=(q_1,\ldots,q_n)\le\infty$ *и* $\mathbf{1}<\mathbf{p_0}=(p_1^0,\ldots,p_n^0),\mathbf{p_1}=(p_1^1,\ldots,p_n^1)<\infty$. *Тогда при* $\alpha_{\mathbf{0}}-\mathbf{1}/\mathbf{p_0}=\alpha_{\mathbf{1}}-\mathbf{1}/\mathbf{p_1}$ *справедливо вложение*

$$B^{\alpha_{\mathbf{1}}\mathbf{q}}_{\mathbf{p_1}}(\mathbb{T}^n)\hookrightarrow B^{\alpha_{\mathbf{0}}\mathbf{q}}_{\mathbf{p_0}}(\mathbb{T}^n).$$

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{1}<\mathbf{p}=(p_1,\ldots,p_n)<\mathbf{q}=(q_1,\ldots,q_n)<\infty$, $\mathbf{1}\le\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_n)\le\infty$. *Тогда при* $\alpha=\mathbf{1}/\mathbf{p}-\mathbf{1}/\mathbf{q}$ *имеет место вложение*

$$B^{\alpha\tau}_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^n)\hookrightarrow L_{\mathbf{q}\tau}(\mathbb{T}^n).$$

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{1} < \mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n) < \mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) < \infty$, $\mathbf{1} \leq \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \leq \infty$. *Тогда при* $\alpha = \mathbf{1}/\mathbf{p} - \mathbf{1}/\mathbf{q}$ *имеет место вложение*

$$L_{\mathbf{q}\tau}(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow B_{\mathbf{p}}^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^n).$$

Замечание. Можно показать, что условия Теорем 1, 2 и 3 неулучшаемы.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP08855579 КН МОН РК.

Ключевые слова: пространства Никольского-Бесова со смешанной метрикой, анизотропные пространства Лоренца, теоремы вложения.

2010 Mathematics Subject Classification: 46E35, 26B35

Литература

[1] Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, Москва (1975).

[2] Бекмаганбетов К.А., Нурсултанов Е.Д. Теоремы вложения анизотропных пространств Бесова $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}([0, 2\pi)^n)$, *Известия РАН. Серия математическая*, **73**:4 (2009), 3–16.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Теория разрешимости задачи Коши-Паламодова в пространствах обобщенных функций

Амангельди М. БЕРДИМУРАТОВ[1,a]

[1] *Лысьвенский филиал кПермского национального исследовательского политехнического университетаъ, Лысьва, Россия*
E-mail: [a]*aman2460@mail.ru*

УДК 51:517.9

Аннотация. В этом тезисе изучается проблема продолжения обобщенных решений для уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами. Проблемой продолжения решений таких систем занимались Л. Эренпрайс и Б. Мальгранж в этих работах была установлена возможность продолжения решений из окрестности границы области во внутрь области для переопределенных систем.

В.П. Паламодов установил, более точные теоремы о возможности продолжения обобщенных решений заданных в окрестности границы области в наиболее важных ситуациях.

Введение

Рассмотрим произвольную однородную систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в матричной форме:

$$P(D)u = 0, \tag{1}$$

где $u = (u_1, ..., u_s)$ - неизвестная вектор функция, $P_{ij}(D)$, $i = \overline{1,t}$, $j = \overline{1,s}$ - произвольные линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, а числа t и s произвольны.

Постановка задачи

При каких условиях всякое обобщенное решение системы (1), определенное в окрестности диска $G(r)$, может быть продолжено в окрестность тела $\Delta^\delta(r)$. Эту задачу можно рассматривать как некоторый аналог классической задачи Коши-Паламодова для обобщенных решений: вместо значений решения и его производных решение задается сразу в некоторой окрестности [1] (гл.VI,§4, теор. 1, сл.1).

Теорема. *Пусть* $P(D)$ *однородный гиперболический оператор порядка* m, $\nu \neq R_y^n$ *и* $y_0 \in R_y^n \backslash \nu$, *а* r *– произвольное число. Тогда существует число* $\delta > 0$ *такое, что* $\forall$ *окрестность* L *диска* $G(r)$, *лежащего в гиперплоскости* H_{y_0}. $\exists$ *окрестность* T *тела* $\Delta^\delta(r)$ *такая,* *что всякую обобщенную функцию u из класса $[D'_L]^s$ являющуюся обобщенным решением системы (1) на L, можно продолжить обобщенной функцией v из класса $[D'_T]^s$ являющейся обобщенным решением системы (1) на T.*

Заключение

Получено, условие на характеристическое множество дифференциального оператора с постоянными коэффициентами обеспечивающее разрешимость задачи Коши-Паламодова в классе обобщенных функций конечного порядка.

Ключевые слова: гиперболический оператор, конус выпуклый, диск выпуклый, гиперплоскость, алгебраическое многообразие, характеристическое множество, компакт.

Литература

[1] Паламодов В.П. *Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами*, Наука, Москва (1967).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Краевые задачи для псевдогиперболических уравнений

Г.В. ДЕМИДЕНКО[1,a]

[1] *Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия*
E-mail: [a]demidenk@math.nsc.ru

В монографии [1] исследовались краевые задачи для классов уравнений, не разрешенных относительно старшей производной,

$$L_0(D_x)D_t^l u + \sum_{k=0}^{l-1} L_{l-k}(D_x)D_t^k u = f(t,x), \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $L_0(D_x)$ — квазиэллиптический оператор. В литературе такие уравнения часто называют уравнениями соболевского типа. Большой интерес к таким уравнениям был инициирован исследованиям С. Л. Соболева [2] проблемы о малых колебаниях вращающейся жидкости. В настоящее время существует много теоретических и прикладных исследований задач для уравнений, не разрешенных относительно старшей производной. Уравнения вида (1) возникают при моделировании различных процессов [1]. В конце прошлого века с ростом количества статей по этим уравнениям "стала очевидной" некоторая классификации уравнений вида (1). Проанализировав большое число работ, авторы [1] выделили три класса уравнений: уравнения соболевского типа, псевдопараболические уравнения и псевдогиперболические уравнения.

При изучении задачи Коши для псевдогиперболических уравнений (1) с постоянными коэффициентами в работах [1, 3] впервые были получены энергетические оценки и доказана теорема о разрешимости в весовых соболевских пространствах. Отметим, что уравнения вида (1), рассмотренные в [1, 3], не содержали младших членов (в обобщенном смысле). Обобщение этих результатов для класса уравнений, содержащих младшие члены, получено в работе [4] Некоторый класс псевдогиперболических уравнений, удовлетворяющих условию изотропности, был рассмотрен в [5]. Авторы [5] установили энергетические оценки и доказали теоремы о разрешимости в некоторых весовых соболевских пространствах.

В этой работе мы изучаем краевые задачи для псевдогиперболических уравнений с постоянными коэффициентами и младшими членами. Отметим, что в отличие от гиперболических и параболических уравнений, наличие младших членов в уравнениях, не разрешенных относительно старшей производной может существенно повлиять на разрешимость задач (см. [1]).

Ключевые слова: псевдогиперболические уравнения, краевые задачи, уравнения соболевского типа, энергетические оценки.

2010 Mathematics Subject Classification: 35L82

Литература

[1] Демиденко Г.В., Успенский С.В. *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной*, Научная книга, Новосибирск (1998).

[2] Соболев С.Л. *Избранные труды.* Т. 1, 2. Изд-во Ин-та математики, Филиал "Гео" Изд-ва СО РАН, Новосибирск (2003, 2006).

[3] Demidenko G.V. On solvability of the Cauchy problem for pseudohyperbolic equations, *Siberian Advances in Mathematics*, **11**:4 (2001), 25-Ц40.

[4] Демиденко Г.В. Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений, *Сибирский математический журнал*, **56**:6 (2015), 1289–1303.

[5] Fedotov I., Volevich L.R. The Cauchy problem for hyperbolic equations not resolved with respect to the highest time derivative, *Russian Journal of Mathematical Physics*, **13**:3 (2006), 278–292.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Об одной полунелокальной краевой задаче периодического типа для трехмерного уравнения Трикоми в неограниченной призматической области

С.З. ДЖАМАЛОВ[1,a], Р.Р. АШУРОВ[1,b], Х.Ш. ТУРАКУЛОВ[1,c]

[1] *Институт Математики АН РУз, Ташкент, Узбекистан*
E-mail: [a]*siroj63@mail.ru*, [b]*ashurovr@gmail.com*, [c]*hamidullo20181987@gmail.com*

Как известно, в работе А.В. Бицадзе показано, что задача Дирихле для уравнения смешанного типа некорректна [1]. Естественно возникает вопрос: нельзя ли заменить условия задачи Дирихле другими условиями, охватывающими всю границу, которые обеспечивают корректность задачи? Впервые такие краевые задачи для уравнения смешанного типа были предложены и изучены в работе Ф.И.Франкля [2]. Как близкие по постановке к изучаемым, задачи для уравнения смешанного типа первого рода исследована в ограниченных областях в работах [3]-[5].

В данной работе с использованием результатов работ [4]-[5] изучаются однозначная разрешимость и гладкость обобщенного решения одной полунелокальной краевой задачи в неограниченной области. В области

$$Q = (-1,1) \times (0,T) \times \mathbb{R} =$$
$$= Q_1 \times \mathbb{R} = \{(x,t,z); x \in (-1,1), 0 < t < T < +\infty, z \in \mathbb{R}\},$$

рассмотрим уравнение Трикоми:

$$Lu = xu_{tt} - \Delta u + a(x,t)\,u_t + c(x,t)\,u = f(x,t,z), \tag{1}$$

где $\Delta u = u_{xx} + u_{zz}$- оператор Лапласа . Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в области Q.

Полунелокальная краевая задача периодического типа. Найти обобщенное решение $u(x,t,z)$ уравнения (1) из пространства $W_{2,1}^2(Q)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$\gamma D_t^p\, u|_{t=0} = D_t^p\, u|_{t=T}\,, \tag{2}$$

$$u|_{x=-1} = u|_{x=1} = 0, \tag{3}$$

при $p = 0,1$, где $D_t^p u = \frac{\partial^p u}{\partial t^p}$, $D_t^0 u = u$, $\gamma-$некоторое постоянное число, отличное от нуля, величина которого будет уточнена ниже.

Определение 1. Обобщенным решением задачи (1)-(3) будем называть функцию $u(x,t,z) \in W_{2,1}^2(Q)$, удовлетворяющее почти всюду уравнению (1) с условиями (2)-(3) .

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия для коэффициентов уравнения (1);* $2a(x,t)+\mu x > \delta_1 > 0$, $\mu\, c(x,t) - c_t(x,t) > \delta_2 > 0$, *для всех* $(x,t) \in \overline{Q_1}$, где $\mu = \frac{2}{T}\ln|\gamma| > 0$ *при* $|\gamma| > 1$, $a(x,0) = a(x,T)$, $c(x,0) = c(x,T)$. *Тогда для любой функции* $f \in W_{2,1}^1(Q)$, *такой, что* $\gamma \cdot f(x,0,z) = f(x,T,z)$, *существует единственное обобщенное решение задачи (1)-(3) из пространства* $W_{2,1}^2(Q)$, *и для нее справедливы следующие оценки:*

I). $\|u\|^2_{W^1_{2,1}(Q)} \le c_1\, \|f\|^2_{W^0_{2,1}(Q)}$

II). $\|u\|^2_{W^2_{2,1}(Q)} \le c_2\, \|f\|^2_{W^1_{2,1}(Q)}$

в дальнейшем через c_i *– обозначим положительные вообще говоря, разные постоянные числа, отличные от нуля.*

Здесь через $W^l_{2,s}(Q)$ *обозначено гильбертово пространство с нормой*

$$\|u\|^2_{W^l_{2,s}(Q)} = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^2)^s \cdot \|\hat{u}(x,t,\lambda)\|^2_{W^l_2(Q_1)}\, d\lambda, \qquad (A)$$

где $W^l_2(Q_1)$ *пространства Соболева,* $s, l-$*любые конечные положительные целые числа, а через*

$$\hat{u}(x,t,\lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t,z)\, e^{-i\lambda z} dz$$

обозначено преобразование Фурье, функции $u(x,t,z)$.

Ключевые слова: уравнение Трикоми, полунелокальная краевая задача, преоброзование Фурье, методы "ε - регуляризации " и априорных оценок.

2010 Mathematics Subject Classification: 35M10

Литература

[1] Бицадзе А.В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа, *ДАН СССР*, **122**:2 (1953), 167–170.

[2] Франкль Ф.И. Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения, *Прикладная математика и механика*, **20**:2 (1956), 196–202

[3] Кальменов Т.Ш. О полупериодической задаче для многомерного уравнения смешанного типа, *Дифференциальные уравнения*, **14**:3 (1978), 546–548.

[4] Джамалов С.З. Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для многомерного уравнения смешанного типа первого рода, *Вестник Самарского государственного технического университета. Сер.физ.-мат.науки*, **21**:4 (2017),1–14.

[5] Джамалов С.З., Ашуров Р.Р. О гладкости одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения Чаплыгина в пространстве, *Казахский математ журнал*, **18**:2 (2015), 59–70.

— ⁂ —

О разрешимости граничной задачи для двумерной системы уравнений Навье-Стокса в конусе

Мувашархан ДЖЕНАЛИЕВ[1,a], Мади ЕРГАЛИЕВ[1,2,b]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2] *КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*muvasharkhan@gmail.com*, [b]*ergaliev.madi.g@gmail.com*

В работах [1]–[2] были исследованы вопросы разрешимости граничных задач для уравнения Бюргерса (для одномерного аналога системы уравнений Навье-Стокса) в вырождающихся областях.

В данном сообщении в соболевских классах мы изучаем вопросы разрешимости двумерной системы уравнений Навье-Стокса с однородными граничными условиями Дирихле в нецилиндрической вырождающейся области, представленной конусом с вершиной в начале координат.

Пусть $x = \{x_1, x_2\}$, и $Q_{xt} = \{x, t : \ |x| < t, \ 0 < t < T < \infty\}$ – перевернутый конус с вершиной в начале координат, Ω_t – сечение конуса при каждом фиксированном $t \in (0, T]$, Σ_{xt} – боковая поверхность конуса. Отметим, что в точке $t = 0$ область Q_{xt} вырождается в точку.

В области Q_{xt} рассматривается граничная задача для системы уравнений Навье-Стокса относительно двумерной вектор-функции скорости движения жидкости $u(x, t) = \{u_1(x, t), u_2(x, t)\}$ и функции-давления жидкости $p(x, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} - \nu \Delta u = f - \nabla p, \ \{x, t\} \in Q_{xt}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \ \{x, t\} \in Q_{xt}, \tag{2}$$

$$u = 0, \ \ \{x, \ t\} \in \Sigma_{xt}. \tag{3}$$

Пусть для почти всех $t \in (0, T]$, $\mathcal{V}_t = \{\varphi | \, \varphi \in (\mathcal{D}(\Omega_t))^2, \ \operatorname{div}\varphi = 0\}$,

$$H_t = \text{замыкание } \mathcal{V}_t \text{ в } (L_2(\Omega_t))^2, \ \ V_t = \text{замыкание } \mathcal{V}_t \text{ в } (W_2^1(\Omega_t))^2.$$

Для граничной задачи (1) – (3) установлена следующая теорема.

Теорема. *Пусть $f \in L_\infty(0, T; H_t) \cap L_2(0, T; H_t)$, $\partial_t f \in L_2(0, T; V_t')$. Тогда в конусе граничная задача для системы уравнений Навье-Стокса (1)–(3) допускает единственное решение $\{u(x, t), p(x, t)\}$ в пространстве*

$$u \in L_2(0, T; V_t) \cap H^1(0, T; V_t') \cap (W_2^{2,1}(Q_{xt}))^2, \ \ p \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega_t)/X_t),$$

где $W_2^1(\Omega_t)/X_t$ и $\|\psi(x)\|_{W_2^1(\Omega_t)/X_t} \equiv \inf\limits_{k \in X_t} \|\psi(x) + k\|_{W_2^1(\Omega_t)}$ являются соответственно фактор-пространством и фактор-нормой по подпространству X_t, состоящим из всевозможных постоянных $k = const$, определяемых на множестве Ω_t.

Отметим, что доказательство теоремы основано на априорных оценках, при установлении которых использованы результаты работ [3]–[6].

Финансирование: Авторы были поддержаны грантом AP09258892 (2021-2023) Комитета науки Министерства образования и науки РК.

Ключевые слова: Система уравнений Навье-Стокса, конус, условие Дирихле, априорная оценка.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K10, 35K55, 35K40

Литература

[1] Benia Y., and Sadallah B.-K. Existence of solutions to Burgers equations in a non-parabolic domain, *Electron. J. Diff. Equ.*, **2018**:20 (2018), 1–13.

[2] Amangaliyeva M.M., Jenaliyev M.T., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. On the solvability of nonhomogeneous boundary value problem for the Burgers equation in the angular domain and related integral equations, *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, **2017**: (2017), 123–141.

[3] Будак Б.М., Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Сборник задач и упражнений по уравнениям математической физики*, ФизМатЛит, Москва (1972).

[4] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. *Методы теории функций комплексного переменного*, ФизМатЛит, Москва (1965).

[5] Lions J.-L. *Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires*, Dunod, Paris (1969).

[6] Temam R. *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis*, North Holland Publishing Company, Amsterdam (1979).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

О задаче Дирихле для двумерного уравнения Бюргерса в конусе

Мувашархан ДЖЕНАЛИЕВ[1,a], Канжарбек ИМАНБЕРДИЕВ[1,2,b], Арнай КАСЫМБЕКОВА[1,2,c]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2] *КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]muvasharkhan@gmail.com, [b]kanzharbek75ikb@gmail.com
[c]kasar1337@gmail.com

Одномерная задача Дирихле в вырождающейся области была исследована в [1]–[4].

В данном сообщении в соболевских классах изучаются вопросы однозначной разрешимости граничной задачи Дирихле для двумерного уравнения Бюргерса в области, представленной конусом.

Постановка задачи и основной результат. Пусть $Q_{xt} = \{x,t: \ |x| = \sqrt{x_1^2+x_2^2} < kt, \ 0<t<T<\infty, \ 0<k<\infty\}$ есть область, которая вырождается при $t=0$, и $\Omega_t = \{|x|<kt\}$ является сечением области Q_{xt} для фиксированного значения переменной $t \in (0,T)$. $\Sigma_{xt} = \partial\Omega_t \times (0,T)$, где $\partial\Omega_t$ есть граница круга Ω_t.

Мы исследуем разрешимость граничной задачи для двумерного уравнения Бюргерса:

$$\partial_t u + u\left[\nabla u \cdot \vec{e}\right] - \nu\Delta u = f, \ \{x,t\} \in Q_{xt}, \tag{1}$$

$$u = 0, \ \{x,t\} \in \Sigma_{xt}, \tag{2}$$

где $\vec{e} = \{1,1\}$ – двумерный вектор с единичными компонентами, $[\nabla u \cdot \vec{e}] = \partial_{x_1} u + \partial_{x_2} u$.

$$f \in L_2(Q_{xt}), \ \nu = \text{const} > 0. \tag{3}$$

Теорема (Основной результат.) *Пусть $f \in L_2(Q_{xt})$ (3). Тогда граничная задача (1)–(2) имеет единственное решение*

$$u \in H_0^{2,1}(Q_{xt}) \equiv \left\{L_2(0,T;H^2(\Omega_t)\cap H_0^1(\Omega_t)) \cap H^1(0,T;L_2(\Omega_t))\right\}.$$

Отметим, что доказательство теоремы основано на априорных оценках, при установлении которых использованы результаты работ [5]–[7].

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP08855372 (2020-2022) МОН РК.

Ключевые слова: Уравнение Бюргерса, вырождающаяся область, условия Дирихле, априорные оценки.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K55, 35K05, 35R37

Литература

[1] Burgers J.M. *The nonlinear diffusion equation. Asymptotic solutions and statistical problems*, D.Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland / Boston USA (1974).

[2] Benia Y., and Sadallah B.-K. Existence of solutions to Burgers equations in a non-parabolic domain, *Electron. J. Diff. Equ.*, **2018**:20 (2018), 1–13.

[3] Amangaliyeva M.M., Jenaliyev M.T., Ramazanov M.I., Iskakov S.A. On a boundary value problem for the heat equation and a singular integral equation associated with it, *Appl. Math. Comput.*, **399**: June (2021), 126009.

[4] Amangaliyeva M.M., Jenaliyev M.T., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. On the solvability of nonhomogeneous boundary value problem for the Burgers equation in the angular domain and related integral equations, in: *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, Springer, Berlin (2017), 123–141.

[5] Будак Б. М., Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Сборник задач и упражнений по уравнениям математической физики*, ФизМатЛит, Москва (1972).

[6] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. *Методы теории функций комплексного переменного*, ФизМатЛит, Москва (1965).

[7] Adams R. A., Fournier J. J. F. *Sobolev spaces*, Elsevier, Amsterdam (2003).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Обратная задача для нелокального уравнения теплопроводности

Жазира ЕРКИШЕВА[1,a], Батирхан ТУРМЕТОВ[1,b]

[1] *Международный Казахско-Турецкий университет имени А.Ясави, Туркестан, Казахстан*
E-mail:[a]jazira78@mail.ru, [b]turmetovbh@mail.ru

Пусть $\Omega_x = \{x = (x_1, x_2) : -1 < x_1, x_2 < 1\}$, $\Omega = (0, T) \times \Omega_x$. Для уравнения

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \Delta_x u(t,x) + a\Delta_x u(t,-x) + f(x) \tag{1}$$

в области Ω рассмотрим следующую задачу:

Задача ID. Найти решение уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющее условиям

$$u(0,x) = \varphi(x),\ u(T,x) = \psi(x), x \in \bar{\Omega}_x, \tag{2}$$

$$u(t,x) = 0,\ (t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega_x. \tag{3}$$

Здесь $\varphi(x)$, $\psi(x)$ - заданные на Ω_x функции, приччм выполняются условия согласования

$$\varphi\,|_{\partial\Omega_x} = 0,\ \ \psi\,|_{\partial\Omega_x} = 0\ .$$

Под регулярным решением задачи ID будем понимать пару функций $(u(x,t),\ f(x))$, такие, что $u(t,x) \in C^{1,2}_{t,x}\left(\overline{\Omega}\right)$,$f(x) \in C(\bar{\Omega}_x)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и условиям (2) - (3).

В одномерном случае аналогичные задачи исследованы в работах [1,2].

Пусть

$$\gamma_{k_1} = (k\pi)^2,\ \gamma_{k_2} = ((k-0,5)\pi)^2,\ k = 1,2,...,$$

$$Y_{k_1}(x_1) = \sin k\pi x_1, Y_{k_2}(x_1) = \cos(k-0,5)\pi x_1,\ k = 1,2,...,$$

$$\sigma_{n_1} = (n\pi)^2,\ \sigma_{n_2} = ((n-0,5)\pi)^2,\ n = 1,2,...,$$

$$Z_{n_1}(x_2) = \sin n\pi x_2,\ Z_{n_2}(x_2) = \cos(n-0,5)\pi x,\ n = 1,2,...$$

Обозначим

$$\left\{\mu_{k_i,n_j} = \gamma_{k_i} + \sigma_{n_j}\right\},\ \left\{\nu_{k_i,n_j}(x_1,x_2) = Y_{k_i}(x_1)\cdot Z_{n_j}(x_2)\right\},\ i,j = 1,2,$$

$$\left\{\lambda_{k_i,n_j} = (1+(-1)^{i+j}a)\mu_{k_i,n_j}\right\},\ \left\{w_{k_i,n_j}(x_1,x_2) = \nu_{k_i,n_j}(x_1,x_2)\right\},\ i,j = 1,2.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $\mid a \mid < 1, \varphi(x), \psi(x) \in C^{3,1}_{x_1,x_2}(\bar{\Omega}) \cap C^{1,3}_{x_1,x_2}(\bar{\Omega})$ *и удовлетворяют следующим условиям:*

$$\varphi\mid_{\partial\Omega_x} = 0, \ \psi\mid_{\partial\Omega_x} = 0 \ ,$$

$$\varphi(-1, x_2) = 0, \ \varphi(1, x_2) = 0, \ \varphi(x_1, -1), \varphi(x_1, 1) = 0, \ (t, x_2) \in \bar{\Omega}_{t,x_2},$$

$$\psi(-1, x_2) = 0, \ \psi(1, x_2) = 0, \ \psi(x_1, -1) = 0, \psi(x_1, 1) = 0, \ (t, x_2) \in \bar{\Omega}_{t,x_2}.$$

Тогда существует единственное регулярное решение задачи ID и оно определяется рядами

$$u(t, x) = \varphi(x) + \sum_{k,n=1}^{\infty} \sum_{i,j=1}^{2} (e^{-\lambda_{k_i,n_j} t} - 1) C_{k_i,n_j} w_{k_i,n_j}(x),$$

$$f(x) = \sum_{k,n=1}^{\infty} \sum_{i,j=1}^{2} \lambda_{k_i,n_j} (\varphi_{k_i,n_j} - C_{k_i,n_j}) w_{k_i,n_j}(x),$$

где

$$C_{k_i,n_j} = \frac{\varphi_{k_i,n_j} - \psi_{k_i,n_j}}{1 - e^{-\lambda_{k_i,n_j} T}}, i, j = 1, 2,$$

$\varphi_{k_i,n_j}, \psi_{k_i,n_j}$ коэффициенты Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$

Funding: Авторы были поддержаны грантом МОН РК є AP08855810.

Ключевые слова: нелокальный оператор, уравнение теплопроводности, обратная задача, регулярное решение.

2010 Mathematics Subject Classification: 34K06, 34K29, 35K15

Литература

[1] Kirane M., Samet B., Torebek B.T. Determination of an unknown source term temperature distribution for the sub-diffusion equation at the initial and final data, *Electronic Journal of Differential Equations*, **2017**:257 (2017), 1Ц-13.

[2] Torebek B.T., Tapdigoglu R. Some inverse problems for the nonlocal heat equation with Caputo fractional derivative, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **40**:18 (2017), 6468–6479.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Свойства регулярности одного класса дифференциальных уравнений второго порядка

Адилет ЕСБАЕВ[1,a], Кордан ОСПАНОВ[1]

[1] *Евразийский Национальный университет им. Л. Н. Гумилчва, Нур-Султан, Казахстан*
E-mail: [a]*adilet.e@gmail.com*

Рассмотрим следующее уравнение

$$-\rho(x) \left(\rho(x) y'\right)' + r(x) y' + s(x) y = f(x), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, ρ — дважды непрерывно дифференцируемая, $r \neq 0$ — непрерывно дифференцируемая, а s — непрерывная функции, $f \in L_2 = L_2(\mathbb{R})$. К уравнению (1) с переменными коэффициентами приводят некоторые задачи стохастического анализа и финансовой математики [1, 2].

Пусть оператор $l_0 y = -\rho(\rho y')' + ry'$ определчн на множестве $C_0^{(2)}(\mathbb{R})$ дважды непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ с компактным носителем. Обозначим через l замыкание l_0 в норме пространства L_2. Функцию $y \in D(l)$ назовчм решением уравнения (1), если она удовлетворяет равенству $ly = f$. Для заданных непрерывных функций g и $h \neq 0$ определим

$$\alpha_{g,h}(t) = \|g\|_{L_2(0,t)} \|h^{-1}\|_{L_2(t,+\infty)}, (t > 0),$$

$$\beta_{g,h}(\tau) = \|g\|_{L_2(\tau,0)} \|h^{-1}\|_{L_2(-\infty,\tau)}, (\tau < 0),$$
$$\gamma_{g,h} = \max\left(\sup_{t>0} \alpha_{g,h}(t), \sup_{\tau<0} \beta_{g,h}(\tau)\right).$$

Теорема 1. *Пусть $\rho(x) > 0$, $\gamma_{1+|s|,\sqrt{|r|}} < +\infty$, и выполнено одно из следующих условий 1) и 2):*
1) $r(x) \geqslant 1$ и существует $a \in \mathbb{R}$, что $\sup\limits_{x<a}\left\{\rho(x)\exp\left(-\int\limits_x^a \frac{r(t)}{\rho^2(t)}dt\right)\right\} < +\infty$,
2) $r(x) \leqslant -1$ и существует $b \in \mathbb{R}$, что $\sup\limits_{x>b}\left\{\rho(x)\exp\left(-\int\limits_b^x \frac{|r(t)|}{\rho^2(t)}dt\right)\right\} < +\infty$.
Тогда для любой правой части $f \in L_2$ существует единственное решение y уравнения (1), и для y выполняется оценка

$$\left\|\sqrt{|r|}y'\right\|_{L_2(\mathbb{R})} + \|y\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant C_0\|f\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и существуют такие $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, что*

$$C_1^{-1} < \frac{\rho(x)}{\rho(\eta)} < C_1, \qquad C_2^{-1} < \frac{r(x)}{r(\eta)} < C_2, \qquad \text{при } |x-\eta| \leqslant \frac{k(\eta)}{r(\eta)},$$

где $k(\eta) \geqslant 4$ непрерывна и $\lim\limits_{|\eta|\to+\infty} k(\eta) = +\infty$. Тогда для решения y уравнения (1) верна следующая оценка максимальной регулярности:

$$\left\|-\rho\left(\rho y'\right)'\right\|_{L_2(\mathbb{R})} + \|ry'\|_{L_2(\mathbb{R})} + \|(1+|s|)y\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant C\|f\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2, а непрерывная функция $\theta(x)$ такая, что*

$$\max\left(\lim_{t\to+\infty} \alpha_{\theta,r}(t), \lim_{\tau\to-\infty} \beta_{\theta,r}(\tau)\right) = 0.$$

Тогда оператор θl^{-1} является вполне непрерывным в L_2, где l^{-1} — обратный к оператору l.

Funding: Второй автор был поддержан грантом єAP08856281 «Нелинейные эллиптические уравнения с неограниченными коэффициентами» МОН РК.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение второго порядка, линейное дифференциальное уравнение, дифференциальное уравнение в неограниченной области, разрешимость, колеблющиеся коэффициенты.

2010 Mathematics Subject Classification: 34A30, 34C11

Литература

[1] Ornstein G.E., Uhlenbeck L.S. On the Theory of the Brownian Motion, *Physical Review*, **36** (1930), 823–841.

[2] Bogachev V.I. и др. *Fokker-Planck-Kolmogorov Equations*, Amer. Math. Soc. Math. Surv. and Monogr., Providence, RI (2015).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

О существовании решения задачи Гурса для системы нагруженных гиперболических уравнений

Айнур ЖОЛАМАНКЫЗЫ[1,2,a]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2] *Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]aynur.zho@gmail.com

В области $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$ рассматривается задача Гурса для системы нагруженных дифференциальных уравнений гиперболического типа второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + C(x,t)u + C_0(x,t)u(x_0,t) + f(x,t), \tag{1}$$

$$u(0,t) = \psi(t), \qquad t \in [0,T] \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,\omega] \tag{3}$$

где $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), \dots, u_n(x,t))$ - искомая функция, $(n \times n)$ - матрицы $A(x,t)$, $B(x,t)$, $C(x,t)$, $C_0(x,t)$, n - вектор - функция $f(x,t)$ непрерывны в области Ω , n - вектор - функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0,\omega]$, n - вектор - функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$, и удовлетворяют условию согласования $\varphi(0) = \psi(0)$, $0 \le x_0 \le \omega$. Функция $u^*(x,t)$ является классическим решением задачи (1)–(3), если: 1) функция $u^*(x,t)$ непрерывна в области Ω; 2) $\frac{\partial u^*(x,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial u^*(x,t)}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u^*(x,t)}{\partial x \partial t}$ являются непрерывными в области Ω; 3) удовлетворяет системе нагруженных дифференциальных уравнений гиперболического типа второго порядка (1) для всех $(x,t) \in \Omega$; 4) удовлетворяет условию на характеристике x=0 (2) для всех $t \in [0,T]$, и на характеристике t=0 условию (3) для всех $x \in [0,\omega]$.

Различные задачи для нагруженных гиперболических уравнений были объектом исследования в [1-3], где также можно найти обзор и библиографию по исследуемой тематике. В связи с многочисленными приложениями, вопросы разрешимости и построения решений краевых задач для нагруженных гиперболических уравнений все еще остаются актуальными. В настоящей работе предлагается новый подход к исследованию и решению задачи (1)-(3), который в дальнейшем будет применен к решению нелокальных задач для системы нагруженных гиперболических уравнений второго порядка. Данный подход основан на методе параметризации [4] и его модификациях [5, 6].

Обозначим через $\mu(t)$ значение функции $u(x,t)$ в точке $x = x_0 : \mu(t) = u(x_0,t)$. В задаче (1)-(3) сделаем следующую замену функции: $u(x,t) = \widetilde{u}(x,t) + \mu(t)$, где $\widetilde{u}(x,t)$ - новая неизвестная функция. Тогда задача (1)–(3) переходит к эквивалентной задаче с параметром

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x \partial t} = A(x,t)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + B(x,t)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} + C(x,t)\widetilde{u} + B(x,t)\dot{\mu}(t) + C(x,t)\mu(t)$$

$$+C_0(x,t)\mu(t) + f(x,t), \tag{4}$$

$$\widetilde{u}(0,t) = \psi(t) - \mu(t), \qquad t \in [0,T] \tag{5}$$

$$\widetilde{u}(x,0) = \varphi(x) - \mu(0), \qquad x \in [0,\omega]\,, \tag{6}$$

$$\widetilde{u}(x_0,t) = 0, \qquad t \in [0,T]\,. \tag{7}$$

Решением задачи с параметром (4)–(7) является пара ($\widetilde{u}(x,t), \mu(t)$), где функция $\widetilde{u}(x,t)$ непрерывна в области Ω и имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial \widetilde{u}(x,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial \widetilde{u}(x,t)}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 \widetilde{u}(x,t)}{\partial x \partial t}$ на Ω, функция $\mu(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$, удовлетворяет системе гиперболических уравнений с параметром (4) для всех $(x,t) \in \Omega$; удовлетворяет краевому условию (5) для всех $t \in [0,T]$, краевому условию (6) для всех $x \in [0,\omega]$ и дополнительному условию (7).

Из условия согласования данных имеем: $\widetilde{u}(x_0,0) = \varphi(x_0) - \mu(0) = 0$. Отсюда получим

$$\mu(0) = \varphi(x_0). \tag{8}$$

При фиксированном $\mu(t)$ задача (4)-(6) является задачей Гурса для системы гиперболических уравнений второго порядка. Соотношение (7) вместе с условием (8) позволяет определить неизвестный параметр $\mu(t)$.

Введем обозначения: $\widetilde{v}(x,t) = \frac{\partial \widetilde{u}(x,t)}{\partial x}$, $\widetilde{\omega}(x,t) = \frac{\partial \widetilde{u}(x,t)}{\partial t}$.

Используя эквивалентную систему интегральных уравнений задачи Гурса (4)-(6) и соотношение (7), получим

$$\left[I - \int_0^{x_0} B(\varrho,t)d\varrho\right] \dot{\mu}(t) = \int_0^{x_0} (C(\varrho,t) + C_0(\varrho,t))d\varrho\mu(t) + \dot{\psi}(t)$$

$$+ \int_0^{x_0} f(\varrho,t)d\varrho + \int_0^{x_0} \left[A(\varrho,t)\widetilde{v}(\varrho,t) + B(\varrho,t)\widetilde{\omega}(\varrho,t) + C(\varrho,t)\widetilde{u}\ (\varrho,t)\right] d\varrho, \tag{9}$$

где I - единичная матрица размерности n.

Система (9) с условием (8) является задачей Коши относительно функции $\mu(t)$ на $[0,T]$.

Построен алгоритм нахождения решения задачи с параметром (4)-(7). На каждом шаге алгоритма: 1) Решается задача Гурса для системы гиперболических уравнений относительно функции $\widetilde{u}(x,t)$; 2) Решается задача Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка относительно функции $\mu(t)$. Установлены условия сходимости алгоритма, которые одновременно дают условия существования единственного классического решения задачи (1)–(3).

Funding: Автор был поддержан грантом AP09258829 КН МОН РК.

Ключевые слова: система нагруженных гиперболических уравнений, задача Гурса, параметр, однозначная разрешимость.

2010 Mathematics Subject Classification: 35L52, 35R10, 34A30, 34B08

Литература

[1] Nakhushev A.M. Equations of mathematical biology, *Vyshaiya shkola*, (1995).(in Russ.)

[2] Nakhushev A.M. *Problems with replacement for partial differential equations*, Nauka, Moscow (2006). (in Russ.)

[3] Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I. *Loaded equations as perturbations of differential equations*, Gylym, Almaty (2010). (in Russ.)

[4] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, *U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys.*, **29**:3 (1989), 34–46.

[5] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **402**:1 (2013), 167–178.

[6] Assanova A.T. An integral-boundary value problem for a partial differential equation of second order, *Turkish Journal of Mathematics*, **43**:4 (2019), 1967–1978.

— ⁜ ⁜ ⁜ —

Основные спектральные свойства задачи для обыкновенного дифференциального оператора второго порядка с кусочно-постоянным коэффициентом при старшей производной

Ляззат ЖУМАНОВА[1,2,a], Махмуд САДЫБЕКОВ[1,b]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2] *Казахский Национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*lyazzatzhuman@gmail.com*, [b]*sadybekov@math.kz*

Применение метода разделения переменных к решению задачи теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом теплопроводности приводит к спектральной задаче для обыкновенного дифференциального оператора второго порядка с кусочно-постоянным коэффициентом при старшей производной:

$$\mathcal{L}_1(y) = \begin{Bmatrix} -k_1^2 y''(x) + q(x)y(x), & 0 < x < x_0 \\ -k_2^2 y''(x) + q(x)y(x), & x_0 < x < l \end{Bmatrix} = \lambda y(x), \quad 0 < x < l. \tag{1}$$

$$\begin{cases} U_1(y) = a_{11}y'(0) + a_{12}y'(l) + a_{13}y(0) + a_{14}y(l) = 0, \\ U_2(y) = a_{21}y'(0) + a_{22}y'(l) + a_{23}y(0) + a_{24}y(l) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

$$y(x_0 - 0) = y(x_0 + 0), \qquad k_1 y'(x_0 - 0) = k_2 y'(x_0 + 0). \tag{3}$$

Рассматриваются основные спектральные свойства задач для такого оператора с общими краевыми условиями. Выделены невырожденные, нерегулярные, усиленно регулярные, неусиленно регулярные краевые условия. Конкретные определения этих классов здесь не будем приводить из-за ограничений на общий объем тезисов.

Теорема 1. *Для любых невырожденных условий спектр задачи (1), (2) состоит из бесконечного счетного множества $\{\lambda_n\}$ собственных значений с одной предельной точкой ∞, а размерности соответствующих корневых подпространств ограничены одной константой.*

На основании полученной асимптотики собственных значений выводятся асимптотики собственных функций. Отсюда делаются выводы о полноте системы собственных функций.

Теорема 2. *Система $\{y_n(x)\}$ собственных и присоединенных функций полна и минимальна в $L_2(0,1)$; следовательно, она имеет биортогональную систему $\{v_n(x)\}$.*

Теорема 3. *Если краевые условия (2) являются усиленно регулярными, то все собственные значения λ_n, кроме конечного числа, являются простыми. Другими словами, они являются асимптотически простыми. При этом общее количество присоединенных функций Ц конечно. Кроме того, собственные значения λ_n являются отделенными в том смысле, что существует такая постоянная $C_0 > 0$, что для всех собственных значений λ_n и λ_m с достаточно большими номерами имеем*

$$|\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_m}| \geq C_0. \tag{4}$$

Теорема 4. *Если краевые условия (2) являются регулярными, но не усиленно регулярными, то все собственные значения задачи образуют две серии λ_{n1} , λ_{n2} со следующей асимптотикой:*

$$\lambda_0 \quad \lambda_{nj} = (2n\pi r + o(1))^2, \quad \text{при } \theta = 0;$$

$$\lambda_{nj} = ((2n-1)\pi r + o(1))^2, \quad \text{при } \theta = 1;$$

где $j = 1,2$, а индекс θ – из определения неусиленно регулярных краевых условий, и использовано обозначение $r = \frac{k_1 k_2}{k_1 l + (k_2 - k_1)x_0}$.

Теорема 5. *Если краевые условия (2) являются нерегулярными, то все собственные значения λ_n, кроме конечного числа, являются простыми и выполнено условие (4) отделенности собственных значений.*

Funding: Авторы были поддержаны грантом *No* AP08855352 МОН РК.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, нелокальные краевые задачи, асимптотика собственных функций.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Литература

[1] Lang P., Locker J. Spectral theory of two-point differential operators determined by -D2, *J. Math.Anal.Appl.*, **146**:1 (1990), 148–191.

[2] Marchenko V.A. *Sturm-Liouville Operators and Their Applications*, Naukova Dumka, Kiev, Ukraine (1977).

— ⋇ ⋇ ⋇ —

Задача типа задачи Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа в области, эллиптическая часть которой - четверть плоскости

Р.Т. Зуннунов[1,a]

[1] *Институт Математики АН РУз, Ташкент, Узбекистан*
E-mail: [a]*zunnunov@mail.ru*

Рассмотрим уравнение

$$signy|y|^m u_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 |y|^m u = 0, \tag{1}$$

в неограниченной смешанной области $\Omega = \Omega_1 \cup l_1 \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 = \{(x,\, y):\ x > 0,\ \ y > 0\}$, $l_1 = \{(x,\, y):\ x > 0,\ \ y = 0\}$, $l_2 = \{(x,\, y):\ y > 0,\ \ x = 0\}$ а Ω_2 – область нижней полуплоскости ограниченная полупрямой $\overline{l_1}$, и $\Gamma:\ x - [2/(m+2)]\,(-y)^{(m+2)/2} = 0$ характеристикой уравнения (1), выходящей из точки $O(0,\, 0)$.

Здесь предположим, что $m,\ \lambda \in R$, причем $m = const > 0$, а $\lambda = \lambda_1$ при $y > 0$, $\lambda = \lambda_2$ при $y < 0$.

Задача BS^{∞}. Найти функцию $u(x,\, y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,\, y) \in C(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \overline{l_2} \cup \Gamma) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, причем $u_y(x, 0)$ при $x \to 0$ может иметь особенность порядка меньше $1 - 2\beta$, а для достаточно больших x справедливо неравенство $|u_y(x,\, 0)| \le M_1 |x|^{2\beta - 1 - \varepsilon}$;

2) $u(x,\, y)$ удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω_1 и Ω_2;

3) $u(x,\, y)$ удовлетворяет следующим краевым условиям

$$u(0,\, y) = \varphi(y), \qquad 0 \le y < +\infty; \tag{2}$$

$$\lim_{R \to \infty} u(x,\, y) = 0 \qquad \text{при} \qquad y \ge 0; \tag{3}$$

$$A_{0x}^{1,\lambda_2}\left\{D_{0x}^{1-\beta} u[\theta_0(x)]\right\} + c(x) u_y(x, 0) = d(x), (x, 0) \in l_1 \tag{4}$$

где $\varphi(y)$, $c(x)$, $d(x)$ – заданные функции, причем $\varphi(y) \in C[0,\, +\infty)$ и при достаточно больших y удовлетворяет неравенству $|\varphi(y)| \le M_2 y^{-1-m/2-\varepsilon}$, $c(x) \in C\,[0,\, +\infty) \cap C^2(0, +\infty)$, $d(x) \in C^2(0, +\infty)$ и $d(x)$ для достаточно больших x удовлетворяет неравенству, а $|d(x)| < M_3 x^{2\beta - 1 - \varepsilon}$. Кроме того $R^2 = x^2 + [2/m+2]^2 y^{m+2}$, $M_1,\ M_2,\ M_3 = const > 0$, ε – достаточно малое положительное число, $\beta = m/\,(2m+4)$. Здесь $\theta_0(x_0)$ является точкой пересечения характеристики Γ уравнения с линией $x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = x_0$, где $x_0 \in (0,\, +\infty)$.

В силу обратимости операторов $A_{sx}^{1,\lambda}$ [1] и D_{sx}^{δ} [2] из задачи BS^{∞} в частном случае, при $c(x) \equiv 0$ следует задача Трикоми для уравнения (1) в области Ω, которая имеет самостоятельный интерес.

Единственность решения этой задачи доказывается с помощью метода интегралов энергии. Существование решения этой задачи, доказано методом функций Грина и методом интегральных уравнений.

Ключевые слова: задача типа задачи Бицадзе-Самарского, уравнение смешанного типа, неограниченная область, метод интегралов энергии, метод функций Грина, метод интегральных уравнений.

2010 Mathematics Subject Classification: 35M10

Литература

[1] Салахитдинов М.С., Уринов А.К. *Краевые задачи для уравнения смешанного типа со спектральным параметроми*, ФАН, Ташкент (1997).

[2] Нахушев А.М. *Уравнения математической биологии*, Высшая школа, М., (1995).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

О нелокальном возмущении задачи на собственные значения оператора дифференцирования на отрезке

Н.С. ИМАНБАЕВ[1,2,a]

[1] *Южно-Казахстанский государственный педагогический университет, Шымкент, Казахстан*
[2] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*imanbaevnur@mail.ru*

В пространстве $W_2^1(-1,1)$ рассмотрим задачу на собственные значения оператора дифференцирование

$$L_1 y = y'(t) = \lambda y(t), \ \ -1 < t < 1, \tag{1}$$

с "возмущенным" интегральным краевым условием

$$y(-1) - y(1) = \lambda \cdot \int_{-1}^{1} y(t) \cdot \Phi(t) dt, \tag{2}$$

где $\Phi(t)-$функция ограниченной вариации и $\Phi(-1) = \Phi(1) = 1$, $\lambda-$комплексное число, спектральный параметр.

Теорема 1. *Пусть $\Phi(t)-$функция ограниченной вариации и $\Phi(-1) = \Phi(1) = 1$. Тогда все собственные значений "возмущенного" оператора дифференцирование L_1 принадлежат полосе $|Re\lambda| = |x| < k$, при некотором k, где $\lambda = x+iy$, и образуют сччтное множество с асимптотикой $\lambda_n^0 = i\pi n + O(1)$ при $n \to \infty$.*

Сопряженный оператор будет нагруженным дифференциальным оператором:

$$L_1^* v = v'(t) + \overline{\lambda} v(-1)\Phi(t) = \overline{\lambda} v(t),$$

$$v(-1) = v(1).$$

Funding: Автор был поддержан грантом є AP09260752 МОН РК.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, возмущенное интегральное краевое условие, собственное значение, асимптотика.

2010 Mathematics Subject Classification: 34L05, 34L10, 34L20

Литература

[1] Кангужин Б.Е., Садыбеков М.А. *Дифференциальные операторы на отрезке. Распределение собственных значений*, Fылым, Шымкент (1996).

[2] Braichev G.G. Sharp estimates of types of entire functions with zeros on rays, *Math. Notes*, **97**:4 (2015), 510–520.

— ⁂ —

О существовании решения краевой задачи для линейных нагруженных гиперболических уравнений

С.С. КАБДРАХОВА[1,2,a]

[1] *КазНУ имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
[2] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*symbat2909.sks@gmial.com*

В области $\bar{\Omega} = [0,T] \times [0,\omega]$ рассматривается полупериодическая краевая задача для линейного нагруженного гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C(t,x)u + f(t,x) + A_0(t,x)\frac{\partial u(t,\xi_i)}{\partial x}, \qquad (1)$$

$$u(t,0) = \psi(t), \quad t \in [0,T], \qquad (2)$$

$$u(0,x) = u(T,x), \quad x \in [0,\omega], \qquad (3)$$

где функции $A(x,t)$, $B(x,t)$, $C(x,t)$, $f(x,t)$ непрерывны на $\bar{\Omega}$, функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$ и удовлетворяет условию $\psi(0) = \psi(T)$, ξ_i– точки нагрузки по пространственной переменной x.

Нагруженные гиперболические уравнения в частных производных с нелокальными граничными условиями возникают во многих областях науки и техники. Наиболее общее определение нагруженного уравнения было дано Нахушевым в [1]. Нагруженные дифференциальные уравнения имеют ряд особенностей, которые должны быть учтены при постановке задач для этих уравнений и создании методов их решений. Одним из особенностей нагруженных дифференциальных уравнений является то, что такие уравнения могут быть неразрешимыми без дополнительных условий. В [2, 3] приведены примеры линейных нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений и нагруженных гиперболических уравнений со смешанными производными, которые не имеют решения. Для исследования нагруженных уравнений посвящено множество работ [4-8]. В работе [9] получены критерий корректной разрешимости полупериодической краевой задачи для линейного гиперболического уравнения. В данном сообшении получены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости краевой задачи (1)-(3) по исходным данным на основе метода модификации ломаных Эйлера.

Funding: Работа выполнена в рамках грантового финансирования МОН РК (Проект AP0905847).

Ключевые слова: нагруженное гиперболическое уравнение, краевая задача, разрешимость.

Литература

[1] Nakhushev A.M. Loaded equations and their applications, *Differential equations*, **19**:1 (1983), P. 86-94.

[2] Dzhumabaev D.S. Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **41**:4 (2008), 1439-1462.

[3] Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problem for a system of loaded hyperbolic equations and an algorithm for finding its solution, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **461**:1 (2018), 817–836.

[4] Нахушев А.М.*Нагруженные уравнения и их применения, Наука, Москва (2012).*

[5] Aida-zade K.R., Abdullaev V.M.On a numerical solution of loaded differential equations, *Journal of computational mathematics and mathematical physics*, **44**:9 (2004), 1585–1595.

[6] Assanova A. T., Imanchiyev A. E., Kadirbayeva Zh. M. Numerical solution of systems of loaded ordinary differential equations with multipoint conditions, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **58**:4 (2009), 508–516.

[7] Faramarz Tahamtani Blow-Up Results for a Nonlinear Hyperbolic Equation with Lewis Function, *Boundary Value Problems*, **doi:10.1155/2009/691496**, (2009), 9 pages.

[8] Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И. Критерий корректной разрешимости полупериодической краевой задачи для линейного гиперболического уравнения, *Математический журнал*, **10**:4 (20) (2010), 33–37.

[9] Кабдрахова С.С. Blow-Up Results for a Nonlinear Hyperbolic Equation with Lewis Function, *Boundary Value Problems*, **doi:10.1155/2009/691496**, (2009), 9 pages.

— ⁂ —

Весовое дифференциальное неравенство второго порядка

Айгерим КАЛЫБАЙ[1,a]

[1] *Университет КИМЭП, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*kalybay@kimep.kz*

Пусть $I=(0,\infty)$, $1<p,q<\infty$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Пусть u – неотрицательная, а v – положительная функции на I такие, что v^p, u^q и $v^{-p'}$ локально суммируемые на I.

Обозначим за $W^2_{p,v}\equiv W^2_{p,v}(I)$ пространство функций $f:I\to\mathbb{R}$, для которых $\|f''\|_{p,v}<\infty$, где $\|g\|_{p,v}=\left(\int\limits_0^\infty|v(t)g(t)|^pdt\right)^{\frac{1}{p}}$ – норма пространства Лебега $L_{p,v}\equiv L_{p,v}(I)$. Из условий, наложенных на v следует, что для любой функции $f\in W^2_{p,v}$ существуют конечные пределы $\lim\limits_{t\to1}f(t)=f(1)$ и $\lim\limits_{t\to1}f'(t)=f'(1)$. Поэтому пространство $W^2_{p,v}$ – полное нормированное пространство с нормой

$$\|f\|_{W^2_{p,v}}=\|f''\|_{p,v}+|f'(1)|+|f(1)|. \tag{1}$$

Пусть $C_0^\infty(I)$ – пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций на интервале I. Из условий на функцию v имеем, что $C_0^\infty(I)\subset W^2_{p,v}(I)$.
Обозначим за $\mathring{W}^2_{p,v}\equiv\mathring{W}^2_{p,v}(I)$ замыкание пространства $C_0^\infty(I)$ по норме (1).

Рассмотрим неравенство

$$\left(\int\limits_0^\infty|u(t)f(t)|^qdt\right)^{\frac{1}{q}}\le C\left(\int\limits_0^\infty|v(t)f''(t)|^pdt\right)^{\frac{1}{p}},\quad f\in\mathring{W}^2_{p,v}.$$

В работе найдены условия выполнения данного неравенства в зависимости от поведения функции v в окрестностях нуля и бесконечности. Более того, найдены двусторонние оценки наилучшей константы C.

Funding: Автор был поддержан грантом AP08856100 МОН РК.

Ключевые слова: весовое дифференциальное неравенство, весовая функция, функциональное пространство.

2010 Mathematics Subject Classification: 26D10, 46E35

— ⁂ —

Применение метода подвижных координат для задачи Навье-Стокса

Тынысбек Ш. КАЛЬМЕНОВ[1,a]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*kalmenov.t@mail.ru*

Найти решение системы

$$Lu_i(x,t) = \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} - \nu \triangle_x u_i(x,t) + \sum_{j=1}^{n} u_j(x,t)\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_j} -$$

$$-\frac{\partial P(x,t)}{\partial x_i} = f_i(x,t), \quad x \in R^n, 0 < t < T, \ i = \overline{1,n} \tag{1}$$

$$divu(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_i} = 0, \qquad u = (u_1, ...u_n) \tag{2}$$

$$u_i(x,t)|_{t=0} = 0. \tag{3}$$

Переход к переменным

$$\frac{dy_i(\xi,t)}{dt} = u_i(y,t), \ y_i(\xi,t)|_{t=0} = \xi_i, \ i = \overline{1,n}$$

где координаты зависят от искомого решения позволяет задачу (1)-(3) свести к линейной системе интегро-дифференциальных уравнений, с помощью который можно получить необходимую априорную оценку для решения $u(x,t)$ задача (1)-(3).

Подвижные координаты - порожденные решениям задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений изучается в связи линеаризацией многомерный задачи Навье-Стокса.

Определим систему координат $y(\xi,t) = (y_1(\xi,t), ..., y_n(\xi,t)), \xi \in R^n, 0 < t < T$ как решение следующей системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial y_i(\xi,t)}{\partial t} = u_i(y,t) \tag{4}$$

$$y_i(\xi,t)|_{t=0} = \xi_i, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in R^n \tag{5}$$

Задачу (4)-(5) сведем к эквивалентной ей системе интегральных уравнений

$$y_i(\xi,t) = \int_0^t u_i(y,\eta)d\eta + \xi_i. \tag{6}$$

Имеет место

Теорема 1. *Пусть* $u(x,t) \in C^3(R^n_{0T}) \cap L_2(R^n_{0T})$ *решение системы (1)-(3). Тогда при любом фиксированном* $t \in [0,T]$ *и* $\xi \in R^n$ *существует единственное решение* $y(\xi,t)$ *операторного уравнения (6).*

В новых переменных $y = y(\xi,t), \ t = t$ задача Навье-Стокса (1)-(3) примет вид

$$\frac{du_i}{dt} - \nu\Delta_y u_i - \frac{\partial P}{\partial y_i} = f_i,$$

$$divu = 0,$$

$$u_i|_{t=0} = 0,$$

где
$$\frac{du_i(y,t)}{dt} = \frac{\partial u_i}{dt} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial t}\frac{\partial u_i}{\partial y_j} = \frac{\partial u_i}{dt} + \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial y_j}, \quad \frac{\partial y_j}{\partial t} = u_j.$$
Тем самым задача Навье-Стокса эквивалентно интегральным уравнением
$$u_i(y,t) - \nu \int_0^t \Delta_y u_i(y(\xi,\eta),\eta)d\eta - \int_0^t \frac{\partial P}{\partial y_i}(y(\xi,\eta))d\eta = \int_0^t f_i(y(\xi,\eta))d\eta.$$
При $2m \geq \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ получим
$$\|\omega_i\|_{W_2^{2m,0}(R^n_{0,T})} \leq d \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|f\|_{W_2^{2|\alpha|,0}(R^n_{0,T})} \|f\|_{W_2^{2m-2|\alpha|,0}(R^n_{0,T})} + \|f\|_{W_2^{2m,0}(R^n_{0,T})} \right),$$
где
$$\omega_i = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta\right) u_i = \diamondsuit u_i, \;\; u_i = \diamondsuit^{-1}\omega_i,$$
$\diamondsuit-$ оператор теплопроводности, а $\diamondsuit^{-1}-$ обратный к нему.

Относительно ω_i получим систему интегральный уравнений.
$$\omega_i + (E-Q)\sum_{j=1}^{n} \diamondsuit^{-1}\omega_j \frac{\partial}{\partial \eta} \diamondsuit^{-1}\omega_i = ((E-Q)f)_i \tag{7}$$
$Qg = grad\Delta^{-1}divg$, $Q^2 = Q-$ оператор проектирования.

С учетом априорных оценок для ω_i, система интегральных уравнений (7) решается методом продолжения по параметру.

Ключевые слова: шестая проблема тысячелетия, уравнение Навье-Стокса, метод подвижных координат.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Смешанная краевая задача Коши с потенциальным боковым граничным условием для нехарактеристически вырождающегося гиперболического уравнения

Т.Ш. КАЛЬМЕНОВ[1,a], М.Ю. НЕМЧЕНКО[1,b], У.А. ИСКАКОВА[1,c]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]kalmenov.t@mail.ru, [b]nemchenko.imim@mail.ru, [c]ulzada.i@mail.ru

Изучению смешанной задачи Коши для нехарактеристически вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка посвящены многочисленные работы начиная с работы М.Л. Краснова [1]. Далее эти работы обобщены для общих вырождающихся уравнений высокого порядка в работах М.С. Салахитдинова, Т. Джураева, В.Н. Врагова, А.М. Кожанова, С.Г. Пяткова, М.Е. Егорова, С.В. Попова. Достаточно полные библиографии приведены в монографиях М.М. Смирнова [2], И.Е. Егорова, С. Пяткова, С.В. Попова [3]. Изучения краевых задач для уравнения смешанного типа начатые Ф.Трикоми [4] привели к изучению новых краевых задач для гиперболических уравнений в характеристическом конусе, впервые исследованные в работах Геллерстедта [5], А.В. Бицадзе [6], А.М. Нахушева [7].

При исследовании смешанной задачи Коши в цилиндрической области боковые граничные условия как правило были локальными граничными условиями типа Дирихле, либо периодическими граничными условиями.

В работе Т.Ш. Кальменова, Д. Сураган [8] впервые найдено граничное условие Ньютонового (объемного) потенциала, которое является новым интегро-дифференциальным самосопряженным граничным условием для уравнения Лапласа. В данной работе пользуясь этим боковым граничным условием исследуется смешанная задача Коши для одного класса нехарактеристически вырождающихся гиперболических уравнений. В отличие от других работ посвященных данной тематике, где решения рассматриваемых задач получены в весовых пространствах, в данной работе решение получено в классических пространствах Соболева.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP09260126 МОН РК.

Ключевые слова: смешанная задача Коши, вырождающиеся гиперболические уравнения.

Литература

[1] Краснов М.Л. Смешанные краевые задачи для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка, *Математический сборник*, **91** (1959) 29–44.

[2] Смирнов М.М. *Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения*, Наука, Москва (1966).

[3] Егоров И.Е., Пятков С.Г., Попов С.В. *Неклассические операторно-дифференциальные уравнения*, Наука, Новосибирск (2000).

[4] Tricomi F. Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine, di tipo misto, *Rend. Reale Accad. Lincei Cl. Sci.Fis. Mat. Natur.*, **5**:14 (1923), 134–247.

[5] Gellerstedt, S. *Sur un probleme aux limites pour uneequation lineare aux derivees partielles du second order de type mixte*, These pour le doctorat, Uppsala (1935).

[6] Бицадзе А.В *Некоторые классы уравнений в частных производных*, Наука, Москва (1981).

[7] Нахушев А.М. *Задачи со смещением для уравнений в частных производных*, Наука, Москва (2006).

[8] Кальменов Т.Ш., Сураган Д. К спектральным вопросам объемного потенциала, *Доклады РАН*, **4** (2009), 428–435.

— ⁎ ⁎ ⁎ —

Задача Дирихле для уравнения теплопроводности с дробной нагрузкой

Минзиля Т. КОСМАКОВА[1,a], Лайла Ж. КАСЫМОВА[1,b]

[1] *КарУ им. Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан*
E-mail: [a]*svetlanamir578@gmail.com*, [b]*l.kasymova2017@mail.ru*

В данной работе исследуется краевая задача для дробно-нагруженного уравнения теплопроводности: нагруженное слагаемое уравнения представлено в виде дробной производной Капуто по временной производной, причем порядок дробной производной больше порядка по временной переменной в дифференциальной части уравнения.

В области: $Q = \{(x,\,t) \mid x > 0,\ t > 0\}$ рассматривается задача

$$u_t - u_{xx} + \lambda\{{}_cD_{0,t}^{\beta}u(x,t)\}|_{x=\gamma(t)} = f(x,t), \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = 0, u|_{x=0} = 0, \tag{2}$$

где λ — комплексный параметр, ${}_cD_{0,t}^{\beta}u(x,t)$ — производная Капуто порядка β, $1 < \beta < 2$; $\gamma(t)$ — непрерывная возрастающая функция, $\gamma(0) = 0$.

Задача исследуется в классе функций по переменной t

$$u\left(x,t\right) \in AC^2\left(0,+\infty\right) \cap C^1\left(t \in [0,T]\right).$$

Классы определяются из естественного требования существования и сходимости несобственных интегралов, возникающих в ходе исследования.

Обращая дифференциальную часть задачи (1)–(2)

$$u(x,t) = -\lambda \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)\, \mu(\tau)\, d\xi d\tau + f_1\,(x,t)\,,$$

где

$$\mu(t) = \left\{ {}_cD^\beta_{0,t} u\,(x,t) \right\} \big|_{x=\gamma(t)} = \left\{ \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int\limits_0^t \frac{u_{\tau\tau}(x,\tau)}{(t-\tau)^{\beta-1}} d\tau \right\} \Bigg|_{x=\gamma(t)},$$

$$f_1\,(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty G\,(x,\xi,t-\tau)\, f\,(\xi,\tau)\, d\tau.$$

получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\mu(t) - \lambda \int\limits_0^t K(t,\tau)\mu(\tau) d\tau = f_2(t), \tag{3}$$

с ядром

$$K_\beta(t,\tau) = \frac{\gamma(t)}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\beta+\frac{1}{2}}} \Psi\left(1-\beta; \frac{3}{2}; \frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right) \exp\left(-\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right) -$$

$$-\frac{\beta-1}{\Gamma(2-\beta)(t-\tau)^\beta}. \tag{4}$$

и правой частью

$$f_2(t) = \frac{1}{\Gamma\,(2-\beta)} \int\limits_0^t \frac{\frac{\partial^2 f_1(\xi,\tau)}{\partial\tau^2}}{(t-\tau)^{\beta-1}} d\tau \Bigg|_{x=\gamma(t)}. \tag{5}$$

Здесь $\Psi(a,b,z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Трикоми. Доказаны

Лемма. *Для граничной задачи (1)–(2) имеет место непрерывность ядра (4) редуцированного интегрального уравнения (3) по порядку β производной в нагруженном слагаемом уравнения (1).*

Теорема. *Интегральное уравнение (3) с ядром и правой частью, определяемыми формулами (4) и (5) соответственно, для $\gamma\,(t) \sim t^\omega$, $\omega > 0$ при $t \to 0_{+0}$ однозначно разрешимо в классе непрерывных функций при любой непрерывной правой части, если $0 < \omega < \frac{1}{2}$ при $1 \le \beta < 2$.*

Замечание. В условиях теоремы ядро (4) интегрального уравнения (3) обладает слабой особенностью. Тогда соответствующие краевые задачи корректны в естественных классах функций, т.е. нагруженное слагаемое поставленной граничной задачи является слабым возмущением дифференциального уравнения.

Funding: Авторы были поддержаны грантом *No* AP08955795 (2020-2021) МОН РК.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, дробная производная, уравнение теплопроводности, функция Трикоми.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 45D05

— ⁂ ⁂ ⁂ —

О спектре одного несамосопряженного оператора на оси

Бахытты КОШКАРОВА[1,a], Лейли КУСАИНОВА[1,b],
Айгуль МОНАШОВА[2]

[1] *ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан*
[2] *КазАТУ им. С. Сейфуллина, Нур-Султан, Казахстан*
E-mail: [a]b-koshkarova@yandex.kz, [b]leili2006@mail.ru

В работе исследуется несамосопряженный замкнутый оператор

$$\mathrm{L}y = -y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y, \quad x \in \mathrm{I} = [0, \infty)$$

с комплекснозначными непрерывными в I коэффициентами $a_i(\cdot)$ $(i = 0, 1)$.

Будем предполагать, что $D(\mathrm{L}) \subset L_2(I)$, а оператор L порождается краевым условием $y(0) = 0$. Далее будем предполагать выполненными следующие условия на $a_i(\cdot)$:

I. $q(x) = \operatorname{Re} a_0(x) > 0$ в I, $\lim\limits_{x\to\infty} q(x) = \infty$.

II. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\operatorname{Im} a_0(x)}{\sqrt{q(x)}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{a_1(x)}{\sqrt{q(x)}} = 0$.

Приведем один из результатов исследований.

Продолжим $q(x)$ на ось $(-\infty, 0]$, полагая $q(x) = q(-x)$ для $x \le 0$, и пусть

$$q^*(x) = \inf_{h>0} \left\{ h^{-2} : 1 \ge h \int\limits_{x-h/2}^{x+h/2} q(t)dt \right\}$$

– одна из "бегущих средних"Отелбаева [1]. Функция $q^*(x)$ конечна, положительна в $\mathbb{R} = (\infty, \infty)$ и симметрична.

Определение. Пусть $f \ge 0$ измеримая и локально ограниченная в $\mathbb{R}$ функция. В этом случае корректно определена неубывающая перестановка от f:

$$f^\sharp(t) = \inf_{\{e\}_t} \sup_{\xi\in e} f(\xi), \ t > 0,$$

где inf берется по совокупности множеств $\{e\}_t$ с мерой $mes\, e \le t$. Функция $f^\sharp$ монотонно не убывает, равноизмерима с f, а именно:

$$mes\{x \in \mathbb{R} : f(x) \le \lambda\} = mes\{x \in \mathbb{R} : f^\sharp(x) \le \lambda\}$$

Обозначим через $q^\sharp$ – неубывающую перестановку функции q^*.

Пусть $0 < \theta < \pi/2$, $\mathcal{N}(\lambda, \theta; \mathrm{L})$ – количество собственных чисел оператора L, попадающих в сектор $\{z = r^{i\varphi},\ 0 < r < \lambda,\ |\varphi| \le \theta\}$.

Теорема 1. *Пусть $0 < \theta < \pi/2$ и при некотором $\alpha > 0$*

$$0 < \lim_{x\to\infty} \frac{q^\sharp(x)}{x^\alpha} = b < \infty.$$

Справедливы оценки:

$$b^{-1/\alpha} \le \varliminf_{\lambda\to\infty} \lambda^{-1/2-1/\alpha}\mathcal{N}(\lambda, \theta; \mathrm{L}) \le \varlimsup_{\lambda\to\infty} \lambda^{-1/2-1/\alpha}\mathcal{N}(\lambda, \theta; \mathrm{L}) \le C_\delta,$$

где $\delta \in (0, 1)$, $C_\delta = 16C_3\sqrt{C_2} - \frac{1}{10}C_4\sqrt{C_1}$, $C_1 = 8(b(1+\delta)^{-1/\alpha}$, $C_2 = 8(b(1-\delta)^{-1/\alpha}$, $C_3 = \left(\frac{16C_2}{b(1-\delta)}\right)^{1/\alpha}$, $C_4 = \left(\frac{C_1}{100b(1+\delta)}\right)^{1/\alpha}$.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP08856104 МОН РК.

Ключевые слова: несамосопряженный дифференциальный оператор, спектр.

2010 Mathematics Subject Classification: 47A10

Литература

[1] Отелбаев М. *Оценки спектра оператора Штурма-Лиувилля*, Fылым, Алматы (1990).

[2] Kussainova L.K., Monashova A., Shkalikov A.A. Asymptotics of eigenvalues of a second-order non self-adjoint differential operator on the axis, *Math Notes*, **93**:4 (2013), 630–633.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Оценки решений некоторых классов нелинейных систем нейтрального типа с переменным запаздыванием

И.И. МАТВЕЕВА[1,a]

[1]*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия*
E-mail: [a]*matveeva@math.nsc.ru*

Рассматриваются некоторые классы нелинейных систем дифференциальных уравнений с переменным запаздыванием

$$F\left(t, y(t), y(t-\tau(t)), \frac{d}{dt}y(t), \frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right) = 0, \tag{1}$$

причем запаздывание может быть неограниченным. Уравнения такого типа возникают во многих прикладных задачах при изучении процессов, скорость протекания которых определяется не только настоящим, но и предшествующим состояниями. В частности, к уравнениям с запаздыванием приводят задачи управления, биологии, медицины, экономики и т. д. Одной из важных является проблема исследования устойчивости решений таких уравнений. В отличие от автономных уравнений эта проблема для неавтономных уравнений является менее изученной.

Работа продолжает наши исследования устойчивости решений уравнений с запаздыванием (см., например, [1–8]). Используя функционалы Ляпунова – Красовского специального вида, установлены оценки решений систем вида (1) на полупрямой $\{t > 0\}$ [9]. Полученные оценки позволяют сделать вывод об устойчивости решений. В случае экспоненциальной и асимптотической устойчивости указаны оценки на области притяжения и оценки, характеризующие скорость стабилизации решений на бесконечности.

Funding: Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект є 18-29-10086).

Ключевые слова: дифференциальные уравнения нейтрального типа, переменные коэффициенты, оценки решений, устойчивость, функционал Ляпунова – Красовского.

2010 Mathematics Subject Classification: 34K20

Литература

[1] Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах, *Сибирский математический журнал*, **48**:5 (2007), 1025–1040.

[2] Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами, *Сибирский математический журнал*, **55**:5 (2014), 1059–1077.

[3] Матвеева И.И. Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа, *Сибирский математический журнал*, **58**:2 (2017), 344–352.

[4] Матвеева И.И. Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа с несколькими запаздываниями, *Дифференциальные уравнения*, **53**:6 (2017), 730–740.

[5] Демиденко Г.В., Матвеева И.И., Скворцова М.А. Оценки решений дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах, *Сибирский математический журнал*, **60**:5 (2019), 1063-1079.

[6] Матвеева И.И. Оценки экспоненциального убывания решений линейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами, *Сибирский журнал индустриальной математики*, **22**:3 (2019), 96–103.

[7] Matveeva I.I. Exponential stability of solutions to nonlinear time-varying delay systems of neutral type equations with periodic coefficients, *Electronic Journal of Differential Equations*, **2020**:20 (2020), 1–12.

[8] Матвеева И.И. Оценки экспоненциального убывания решений одного класса нелинейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **60**:4 (2020), 612–620.

[9] Матвеева И.И. Оценки решений класса неавтономных систем нейтрального типа с неограниченным запаздыванием, *Сибирский математический журнал*, **62** (2021), (принято в печать).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Об условиях компактности коммутатора для билинейного потенциала Рисса в обобщенных пространствах Морри

Даурен МАТИН[1,a], Жанат ЖУЛДАСОВ[1,b]

[1] *Евразийский Национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан*
E-mail: [a]*d.matin@mail.ru*, [b]*zhanzhanzhan23@gmail.com*

В данной работе приводятся достаточные условия компактности коммутатора для билинейного потенциала Рисса $[b, I_\alpha]$ в обобщенных пространствах Морри M_p^w [1].

Приведем необходимые определения и обозначения.

Пусть $1 \le p \le \infty$, w измеримая неотрицательная функция на $(0,\infty)$. Обобщенное пространство Морри $M_p^w \equiv M_p^w(\mathbb{R}^n)$ определяется как множество всех функций $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ с конечной квазинормой

$$\|f\|_{M_p^w} \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left\| w(r) \, \|f\|_{L_p(B(x,r))} \right\|_{L_\infty(0,\infty)},$$

где $B(x,r)$ шар с центром в точке x и с радиусом r. Пространство M_p^w совпадает с известным пространством Морри M_p^λ при $w(r) = r^{-\lambda}$, где $0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$, которое, в свою очередь, для $\lambda = 0$ совпадает с пространством $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Предположим, что непрерывные возрастающие функции w_1, w_2 на $[0;\infty)$ удовлетворяют следующим условиям $j = 1, 2$ [2].

a) $w_j(0) = 0$;

b) $lim_{r\to\infty} w_j(r) < \infty$;

c) Существует константа D, удовлетворяющая условию $1 \le D < 2^n$, такая что $w_j(2r) \le D w_j(r)$ для любого $r > 0$;

d) $w(r)^{\frac{1}{p}} = w_1(r)^{\frac{1}{p_1}} w_2(r)^{\frac{1}{p_2}}$

Потенциал Рисса I_α порядка $\alpha(0 < \alpha < n)$ играет важную роль в гармоническом анализе и в теории потенциалов, и определяется следующим образом $I_\alpha f(x) = C_{n,\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$,

Билинейный потенциал Рисса J_α порядка $\alpha(0 < \alpha < 2n)$ определяется следующим образом $J_\alpha(f,g)(x) = C_{n,\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)g(z)}{(|x-y|+|x-z|)^{2n-\alpha}} dydz$.

Для функции $b \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ через M_b обозначим мультипликационный оператор $M_b f = bf$, где f- измеримая функция. Тогда коммутатор для потенциала Рисса I_α и оператора M_b определяется равенством

$[M_b, I_\alpha] = M_b I_\alpha - I_\alpha M_b = C_{n,\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{[b(x)-b(y)]f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$.

Коммутаторам $[M_b, I_\alpha]$ посвящены работы [2]-[3].

Говорят, что функция $b(x) \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ принадлежит пространству $BMO(\mathbb{R}^n)$, если

$\|b\|_* = \sup_{Q\subset\mathbb{R}^n} \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |b(x)-b_Q|\,dx = \sup_{Q\in\mathbb{R}^n} M(b,Q) < \infty,$

где Q - куб из $\mathbb{R}^n$ и $b_Q = \frac{1}{|Q|}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)dy$.

Через $VMO(\mathbb{R}^n)$ обозначим BMO-замыкание пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, где $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ множество всех функций из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ с компактным носителем. Через $\chi_{(a,b)}$ обозначим характеристическую функцию отрезка (a,b), через ${}^cB$ – дополнение множества B.

Отметим, что в случае пространства Морри такой вопрос исследован в работе [2], а для потенциала Рисса в пространстве Морри M_p^w [3].

Приведем теорему компактности коммутатора билинейного оператора $[b,J_\alpha]_i$ из $M_{p_1}^{w_1}\times M_{p_2}^{w_2}$ в M_q^w.

Теорема 1. *Пусть $0<\alpha<2n$, и $0<\lambda<n$, $\frac{1}{2}<p<\frac{n-\lambda}{\alpha}$, $1<p_1,p_2<\infty$ для $\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}$. Далее предположим $1<q<\infty$ для $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n-\lambda}$. Если функции w_1,w_2 удовлетворяют условиям a-d, и $b\in VMO(\mathbb{R}^n)$, тогда коммутатор $[b,J_\alpha]_i$ где $i=1,2$ является компактным билинейным оператором из $M_{p_1}^{w_1}\times M_{p_2}^{w_2}$ в M_q^w.*

Ключевые слова: коммутатор для потенциала Рисса, компактность, обобщенное пространство Морри, пространство Морри.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Литература

[1] Burenkov V.I., Bokayev N.A., Matin D.T. On the pre-compactness of a set in the generalized Morrey spaces, *AIP Conference Proceedings*, **3** (2016), 1759, 020108. doi: 10.1063/ 1.4959722.

[2] Yong Ding, Ting Mei Boundedness and compactness for the commutators of bilinear operators on Morrey spaces, *Potential Analysis*, **42**:3 (2015), doi:10.1007/s11118-014-9455-0.

[3] Бокаев Н.А., Матин Д.Т. О достаточных условиях компактности коммутатора для потенциала Рисса в обобщенных пространствах Морри, *Вестник ЕНУ*, **6(115)** (2016), 8–13.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Развитие некоторых функций с условиями монотонности

Даурен МАТИН[1,a], Гульден КАРШЫГИНА[2,b], Гульназира СЕРГАЗЫ[2], Тогжан АДІЛ[1]

[1] *Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан*

[2] *Карагандинский университет имени академика Е. А. Букетова, Караганды, Казахстан*

E-mail: [a]d.matin@mail.ru, [b]karshygina84@mail.ru

Пусть $T\in[0;\infty)$, $\Omega(T)=\left\{\varphi: 0<\varphi\downarrow; \int_0^t \varphi d\tau<\infty, t\in(0;T)\right\}$,
$f_\varphi(t,\tau)=\varphi(max\{t,\tau\})$.

$$K = h(t) = h(g;t) : \left\{\int_0^T f_\varphi(t,\tau)g(\tau)d\tau : g\in E^\downarrow(0,T)\right\}$$

конус, оснащенный функционалом

$$\rho_K(h) = inf\left\{||g||_{E(0,T)} : g\in E^\downarrow(0,T)h(g;t)=h(t), t\in(0;T)\right\}.$$

Такие конусы играют важную роль в теории обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса (см. [1], [2]). Вот пространство, инвариантное для перестановки (сокращенно RIS), $E^\downarrow(0,T)=\left\{g\in E(0,T): 0\le g\downarrow\right\}$.

Предположим, что $f_\varphi(t,\tau)\in E'(0,T)$ где $E'(0,T)$ - соответствующий RIS для $E(0,T)$, и рассматриваем *локальную и интегральную огибающие роста*, соответственно,

$$\lambda_K(t)=\|f_\varphi(t,\cdot)\|_{E'(0,T)}\,,\qquad \widetilde{\lambda}_K(t)=\left\|\frac{1}{t}\int_0^t f_\varphi(s,\cdot)ds\right\|_{E'(0,T)}.$$

Теорема 1. *В сделанных предположениях справедливы следующие формулы для* $t\in(0,T)$

$$\lambda_K(t)=sup\left\{h(t):h\in K;\rho_K(h)\le 1\right\},$$

$$\widetilde{\lambda}_K(t)=sup\left\{\frac{1}{t}\int_0^t h(\tau)d\tau:h\in K;\rho_K(h)\le 1\right\}.$$

Ключевые слова: обобщенный потенциал Бесселя, обобщенный потенциал Рисса.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Литература

[1] Goldman M.L. Optimal Embeddings of Generalized Bessel and Riesz potentials, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **269** (2010).

[2] Bokayev N.A., Goldman M.L., Karshygina G.Zh. Cones of functions with monotonicity conditions for generalized Bessel and Riesz potentials, *Mathematical Notes*, **104**:3 (2018).

— ⁂ —

Преобразование Фурье и гладкость функций

Асхат МУКАНОВ[1,2,a]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2] *Казахстанский филиал МГУ имени М.В. Ломоносова, Нур-Султан, Казахстан*
E-mail: [a]mukanov.askhat@gmail.com

Пусть $0<\alpha\le 1$ и Lip α – класс Липшица, т.е.,

$$\mathrm{Lip}\ \alpha=\{f\in C([0,2\pi]):\omega(f,\delta)=O(\delta^\alpha)\},$$

где $\omega(f,\delta)=\sup\limits_{|h|<\delta}\|f(x+h)-f(x)\|_C$ – модуль непрерывности функции f.

В 1948 году Дж. Лоренц [1] доказал следующую теорему.

Теорема A. *Пусть интегрируемая на* $[0,2\pi]$ *функция* f *имеет ряд Фурье* $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, *причем* $\{a_n\}_{n=0}^\infty$, $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ *являются невозрастающими неотрицательными последовательностями. Тогда для любого* $0<\alpha<1$ *условие* $f\in\mathrm{Lip}\ \alpha$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $a_n,b_n=O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$ *при* $n\to\infty$.

Теорема Лоренца была неоднократно обобщена. В недавней работе М.И. Дьяченко и С.Ю. Тихонова [2] теорема Лоренца была доказана для рядов Фурье с обобщенно монотонными коэффициентами. В указанной работе в отличие от других обобщений теоремы Лоренца авторы не накладывают условия неотрицательности на коэффициенты Фурье.

Отметим, что оригинальная теорема Лоренца является частным случаем следующего результата Р. Боаса [3].

Теорема B. *Пусть интегрируемая на* $[0,2\pi]$ *функция* f *имеет ряд Фурье* $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, *причем* $\{a_n\}_{n=0}^\infty$, $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ *являются неотрицательными последовательностями. Тогда для любого* $0<\alpha<1$ *условие* $f\in\mathrm{Lip}\ \alpha$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $\sum_{k=n}^\infty a_k=O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, $\sum_{k=n}^\infty b_k=O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ *при* $n\to\infty$.

В 2008 году Ф. Морицем [4] был доказан аналог теоремы Боаса в непериодическом случае, т.е., для преобразования Фурье. Позднее результаты Морица были обобщены в работах В. Фулоп, в работах Б.И. Голубова и С.С. Волосивца и в других работах (см., например, [5]).

В данной работе мы доказываем аналог теоремы Лоренца, полученный в работе [2] в непериодическом случае. Мы рассматриваем следующий класс обобщенно монотонных функций.

Определение 1. Функция $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ локально ограниченной вариации называется обобщенно монотонной, если существуют $C > 0$, $\lambda > 1$, такие что для любого $x > 0$ выполняется неравенство
$$\int_x^{2x} |df(t)| \leq C \int_{x/\lambda}^{\lambda x} \frac{f(t)}{t}\, dt.$$

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $f \in L_1(\mathbb{R}_+) \cap C_0(\mathbb{R}_+)$, и $\widehat{f}$ – синус- (или косинус-) преобразование Фурье функции f. Пусть также $\widehat{f}$ является обобщенно монотонной функцией. Тогда для любого $0 < \alpha < 1$ условие $f \in \mathrm{Lip}\ \alpha$ выполняется тогда и только тогда, когда $\widehat{f}(y) = O\left(\frac{1}{y^{1+\alpha}}\right)$, $y > 0$.*

Funding: Автор был поддержан грантом AP08053326 КН МОН РК.

Ключевые слова: преобразование Фурье, классы Липшица.

2010 Mathematics Subject Classification: 26A16, 42A38

Литература

[1] Lorentz G.G. Fourier-koeffizienten und funktionenklassen, *Math. Z.*, **51** (1948), 135–149.

[2] Dyachenko M.I., Tikhonov S.Yu. Smoothness and asymptotic properties of functions with general monotone Fourier coefficients, *J. Fourier Anal. Appl.*, **24**:4 (2018), 1072–1097.

[3] Boas R.P. Fourier series with positive coefficients, *J. Math. Anal. Appl.*, **17** (1967), 463–483.

[4] Morisz F. Absolutely convergent Fourier integrals and classical function spaces, *Archiv der Mathematik*, **91**:1 (2008), 49–62.

[5] Волосивец С.С., Голубов Б.И. Преобразования Фурье из обобщенных классов Липшица, *Труды МИАН*, **280** (2013), 126–137.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

Об одном подходе к исследованию краевой задачи для функционально-дифференциальных уравнений с инволюцией

К.Ж. НАЗАРОВА[1,a], Б.Х. ТУРМЕТОВ[1,b], К.И. УСМАНОВ[1,c]

[1] *Международный Казахско-Турецкий университет им. А.Ясави, Туркестан, Kazakstan*

E-mail: [a]*gjnazarova@mail.ru,* [b]*turmetovbh@mail.ru,* [c]*y_kairat@mail.ru*

В данной работе исследуется краевая задача для функционально-дифференциальных уравнений с инволютивным преобразованием.

На отрезке $[0, T]$ рассмотрим краевую задачу
$$\frac{dx(t)}{dt} + \mathrm{diag}(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)\frac{dx(\alpha(t))}{dt} = \int\limits_0^T K_1(t,s)x\,(s)\,ds + \int\limits_0^T K_2(t,s)\dot{x}\,(s)\,ds +$$
$$+f(t), \qquad t \in [0,T]\,, \tag{1}$$

$$Bx(0)+Cx(T)=d, \quad d\in R^n, \tag{2}$$

где матрица $K_1(t,s)$ непрерывна на $[0,T]\times[0,T]$, n- мерная вектор-функция $f(t)$ непрерывна на $[0,T]$. Матрица $K_2(t,s)$ имеет частную производную по s и непрерывна по t на $[0,T]$. $\alpha(t)-$ гомеоморфизм $\alpha:[0,T]\to[0,T]$, для которого выполняется следующее условие $\alpha^2(t)=\alpha(\alpha(t))=t$. Такое преобразование называют инволютивным. Свойства таких инволютивных преобразований изучены в работах Г.С. Литвинчука [1], Н.К. Карапетянца, С.Г. Самко [2] и др [3-5].

При предположении, что $a_i\neq\pm1,\ i=\overline{1,n}$, краевую задачу (1), (2) можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt}=\int\limits_0^T\tilde{K}_1(t,s)x(s)ds+\int\limits_0^T\tilde{K}_2(t,s)\dot{x}(s)ds+\tilde{f}(t), \quad t\in[0,T], \tag{3}$$

$$Bx(0)+Cx(T)=d, \quad d\in R^n. \tag{4}$$

Используя дифференцируемость ядра $K_2(t,s)$ по s, интегрируя $\int\limits_0^T\tilde{K}_2(t,s)\dot{x}(s)ds$ по частям, краевую задачу (3), (4) можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt}=\int\limits_0^T K^*(t,s)x(s)ds+\sum_{i=0}^{2}K_i(t)x(\theta_i)+\tilde{f}(t), \tag{5}$$

$$Bx(0)+Cx(T)=d, \quad d\in R^n, \tag{6}$$

где $K_0(t)=-\tilde{K}_2(t,0)$, $\quad K_1(t)=0$, $\quad K_2(t)=\tilde{K}_2(t,T)$, $\quad 0=\theta_0<\theta_1<\theta_2=T$,

$$\int\limits_0^T K^*(t,s)x(s)ds=\int\limits_0^T\tilde{K}_1(t,s)x(s)ds-\int\limits_0^T\frac{\partial\tilde{K}_2(t,s)}{\partial s}x(s)ds\ .$$

Краевую задачу (5), (6) решаем методом параметризации, предложенный профессором Д.С. Джумабаевым [6]. Метод параметризации был применен к исследованию различных краевых задач [7-10].

Пользуясь методикой из [10], доказана следующая теорема:

Теорема. *Пусть выполнено условие $a_i\neq\pm1,\ i=\overline{1,n}$ Тогда для однозначной разрешимости краевой задачи (1), (2) необходимо и достаточно существования $l_0\in N$, при котором матрица $Q(l_0)$ была обратима.*

Здесь $\beta=\max\limits_{(t,s)\in[0,T]\times[0,T]}||K^*(t,s)||$, а $l_0\geq\tilde{l}$ выбирается из условия $\beta T\frac{h}{\tilde{l}}<1$.

Funding: Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант AP08956307 и AP09259137).

Ключевые слова: краевая задача, функционально-дифференциальное уравнение, инволюция, метод параметризации.

2010 Mathematics Subject Classification: 45J05,45J99,34K28

Литература

[1] Литвинчук Г.С. *Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом*, Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., М. (1977).

[2] Карапетянц Н.К., Самко С.Г. *Уравнения с инволютивными операторами и их приложения*, Изд-во РГУ, Ростов-на Дону (1988).

[3] Babbage Ch. *Essays towards the calculus of the functions*, printed by W. Bulmer and Co., London (1815).

[4] Kritskov L.V., Sarsenbi A.M. Riesz basis property of system of root functions of second-order differential operator with involution, *Differ. Equat.*, **53**:1 (2017), 33–46.

[5] Karachik V.V., Sarsenbi A.M., Turmetov B.Kh. On solvability of the main boundary value problems for a non-local Poisson equation, *Turkish Journal of Mathematics*, **43**:3 (2019), 1604–1625.

[6] Dzhumabayev D.S Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, **29**:1 (1989), 34–46.

[7] Assanova A.T., Bakirova E.A., Kadirbayeva Z.M, Numerical solution to a control problem for integro-differential equations, *Comput. Math. and Math. Phys.*, **60**:2 (2020), 203–221.

[8] Dzhumabaev D.S. An algorithm for solving a linear two-point boundary value problem for an integrodifferential equation, *Comput. Math. Math. Phys.*, **253**:6 (2013), 736–758.

[9] Dzhumabaev D.S., On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations, *J. Comput. Appl. Math.*, **294**:2 (2016), 342–357.

[10] Джумабаев Д.С., Усманов К.И. Об одном подходе к исследованию линейной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнении с нагружениями, *Вестник КазНУ им. аль – Фараби, сер. матем. мех. инф.*, **65**:2 (2010), 42–47.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

О СИММЕТРИЧЕСКОЙ РАВНОСИЛЬНОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ БАЛОК С ОСЕВЫМИ НАГРУЗКАМИ

Даулет НУРАХМЕТОВ[1,a], Серик ДЖУМАБАЕВ[2,b],
Альмир АНИЯРОВ[1,c], Ринат КУСАИНОВ[1,3,d]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2] *Академия государственного управления при Президенте Республики Казахстан, Нур-Султан, Казахстан*
[3] *Университет имени Шакарима города Семей, Семей, Казахстан*
E-mail: [a]nurakhmetov@math.kz, [b]ser_jum@inbox.ru,
[c]aniyarov@math.kz, [d]rinat.k.kus@mail.ru

Рассмотрим спектральную задачу с краевыми условиями о поперечных колебаниях балки единичной длины:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(E\,I(x)\frac{d^2Y(x)}{dx^2}\right)-T\frac{d^2Y(x)}{dx^2}+k(x)Y(x)=\lambda\,Y(x) \tag{1}$$

где $Y(x)$ - собственные функции поперечного статического отклонения балки; E - модуль упругости материала; $J(x)$ - момент инерции поперечного сечения балки; T - нагрузка осевого растижения; $\lambda=\rho\,A\,\omega^2$ - собственное значение; ω - частотный параметр; ρ - плотность материала; A - площадь поперечного сечения; $k(x)$ - переменный коэффициент основания.

Спектральные задачи с различными краевыми условиями с осевыми нагрузками для уравнения (1) исследовались в связи с практическими применениями в работе [1-3] при $k(x)=0$ и в работе [4] при $k(x)=const$. В работе [3] была получена замкнутая форма собственных частот различных краевых задач для уравнения (1) при $k(x)=0$ и модифицированы известные результаты из [1, 2]. Также была исследована симметричная равносильность краевых задач. Уточняя понятие симметричной равносильности из [3], как возможность факторизация собственных значений спектральной задачи (1) с симметричными коэффициентами на полном отрезке в виде собственных значений на усеченном отрезке с разными видами закреплении на концах. Влияние постоянного коэффициента основания на собственные частоты было исследовано в работе [4]. При переменном коэффициенте основания без осевой нагрузки симметричная равносильность краевых задач для равномерной балки была исследована в работе [5].

В данной работе изучается симметричная равносильность краевых задач для уравнения (1).

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP08052239 МОН РК.

Ключевые слова: уравнение Эйлера-Бернулли, неоднородная балка, краевые условия, симметричная равносильность, собственные частоты.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B09, 35P15, 47A75, 93B60.

Литература

[1] Bokaian A. Natural frequencies of beams under compressive axial loads, *Journal of Sound and Vibration*, **126**:1 (1988), 49–65.

[2] Bokaian A. Natural frequencies of beams under tensile axial loads, *Journal of Sound and Vibration*, **142**:3 (1990), 481–498.

[3] Valle J., Fernandez D., Madrenas J. Closed-form equation for natural frequencies of beams under full range of axial loads modeled with a spring-mass system, *International Journal of Mechanical Sciences*, **153-154** (2019), 380–390.

[4] Shvartsman B., Majak J. Numerical method for stability analysis of functionally graded beams on elastic foundation, *Applied Mathematical Modelling*, **40** (2016), 3713–3719.

[5] Nurakhmetov D., Jumabayev S., Aniyarov A., Kussainov R. Symmetric properties of eigenvalues and eigenfunctions of uniform beams, *Symmetry*, **12**:2097 (2020), 1–13.

— ⁂ —

Об устойчивости явной разностной схемы для нелокальной краевой задачи для уравнения теплопроводности

Ирина ПАНКРАТОВА[1,a], Махмуд САДЫБЕКОВ[1,b]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*inpankratova@gmail.com*, [b]*sadybekov@math.kz*

Рассматривается начально-краевая задача для уравнения теплопроводности

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t), 0 < x < l, 0 < t < T, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \ \ 0 \le x \le l, \tag{2}$$

$$\begin{cases} U_1(u) = a_{11}u_x(0,t) + b_{11}u_x(l,t) + a_{10}u(0,t) + b_{10}u(l,t) = 0, \\ U_2(u) = a_{21}u_x(0,t) + b_{21}u_x(l,t) + a_{20}u(0,t) + b_{20}u(l,t) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

где a_{ij}, b_{ij} – вещественные числа, $i = 1, 2$, $j = 0, 1$; $\varphi(x)$, $f(x,t)$ – заданные функции.

Задача (1)-(3) относится к классу так называемых нелокальных краевых задач [1]. Особенность этих задач состоит в том, что их исследование связано с необходимостью изучения спектральных свойств несамосопряженных дифференциальных и разностных операторов (если решение определяется приближенно) и, как следствие, возникают принципиальные трудности в обосновании применимости методов их решения.

Для приближенного решения задачи (1)-(3) с неусиленно регулярными краевыми условиями [2] методом конечных разностей была построена двухслойная явная разностная схема [3], аппроксимирующая исходную дифференциальную задачу на равномерной сетке с порядком аппроксимации $O(\tau + h^2)$.

Как было показано в работах [2, 4], решение задачи (1)-(3) может быть эквивалентно сведено к последовательному решению двух локальных краевых задач с граничными условиями типа Штурма по пространственной переменной. Поэтому основной результат о существовании и единственности решения дифференциальной задачи в классическом и обобщенном смыслах следует из хорошо известных теорем о соответствующей разрешимости краевых задач с условиями типа Штурма для уравнения теплопроводности. Применение аналогичной методики к построенной разностной схеме приводит к классическим условиям устойчивости разностных схем для уравнения теплопроводности с краевыми условиями первого и третьего родов. При этих же условиях устойчива и двухслойная разностная схема, аппроксимирующая задачу (1)-(3).

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP08855352 КН МОН РК.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, нелокальные краевые условия, численные методы, разностные операторы.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K05, 35K20, 65M06, 65M12

Литература

[1] Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач, *ДАН СССР*, **185**:4 (1969), 739–740.

[2] Orazov I., Sadybekov M.A. On a class of problems of determining the temperature and density of heat sources given initial and final temperature, *Siberian Mathematical Journal*, **53**:1 (2012), 146–151.

[3] Самарский А.А., Гулин А.В. *Устойчивость разностных схем*, Наука, М. (1973).

[4] Sadybekov M.A. Initial-boundary value problem for a heat equation with not strongly regular boundary conditions, *Functional Analysis in Interdisciplinary Applications*, Springer Proceedings in Mathematics, Statistics, **216** (2017), 330–348.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Сингулярное интегральное уравнение Вольтерра краевой задачи теплопроводности в вырождающейся области

Мурат И. РАМАЗАНОВ[1,a], Нуртай К. ГУЛЬМАНОВ[1,b]

[1] *КарУ им. Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан*
E-mail: [a]*ramamur@mail.ru*, [b]*gulmanov.nurtay@gmail.com*

При решении первой краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности в конусе возникает необходимость решения следующего особого интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$\varphi(t) - \int\limits_0^t \mathcal{K}(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = f(t), \tag{1}$$

где

$$\mathcal{K}(t,\tau) = \exp\left(-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)\cdot\left\{\frac{1}{t-\tau}\cdot I_0\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right) - \right.$$
$$\left. -\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)^2}\cdot\left[I_0\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right) - I_1\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)\right]\right\}.$$

Показано, что соответствующее однородное интегральное уравнение имеет ненулевое решение вида

$$\varphi^{(0)}(t) = \frac{C}{t}\cdot e^{-\frac{a^2\lambda_0^2}{t}},\ \ C = const.$$

Построена резольвента и найдено общее решение интегрального уравнения (1).

Funding: Работа выполнена по грантам МОН РК: No. AP08956033, 2020-2021 и No. AP0885372, 2020-2022.

Ключевые слова: интегральное уравнение, сингулярное интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода, метод регуляризации Карлемана–Векуа.

2010 Mathematics Subject Classification: 45D05, 45E10

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Об общем решении одной краевой задачи

Александр РОГОВОЙ[1,a], Тынысбек Ш. КАЛЬМЕНОВ[2,b]

[1] *Университет "Мирас", Шымкент, Казахстан*
[2] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*rog2005@list.ru*, [b]*kalmenov.t@mail.ru*

В области $\Omega = -1 < x < 1, -1 < t < 1$ рассматривается следующая задача: найти решение уравнения

$$Lu \equiv -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - t\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющее упрощенным граничным условиям

$$u|_{x=-1} = u|_{x=1} = 0, \tag{2}$$

и начальным условиям Коши

$$u|_{t=-1} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=-1} = 0. \tag{3}$$

Используя метод разделения переменных [1, с. 4-11], рассматривая однородное уравнение (1) ($f(x,t) \equiv 0$), а также принимая во внимание общее решение уравнения $y'' = cx^{\alpha}y$ [2, с. 408-410, 449-454], получим следующее общее решение задачи (1)-(3) для однородного уравнения (1)

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{n} C_k \sin \pi kx \cdot Z_{\frac{1}{3}}\left(i \cdot \frac{2\pi k}{3} t^{\frac{3}{2}}\right), \tag{4}$$

где $Z_{\nu}(x)$ - цилиндрическая функция

$$Z_{\nu}(x) = \alpha_1 J_{\nu} + \alpha_2 Y_{\nu}. \tag{5}$$

Здесь α_1, α_2 - произвольные константы, J_{ν} и Y_{ν} - функции Бесселя 1 и 2 рода соответственно.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Общее решение задачи (1)-(3) в случае однородного ($f(x,t) \equiv 0$) уравнения (1) записывается в виде (4), где функция $Z_{\nu}(x)$ определяется соотношением (5), а константы α_1, α_2 находятся из условий (3). Решение задачи (1)-(3) для неоднородного уравнения (15) получается путем вариации произвольных постоянных решения (4).*

Ключевые слова: краевая задача, упрощенное граничное условие, начальное условие Коши, метод разделения переменных, функции Бесселя.

2010 Mathematics Subject Classification: 47F05, 33C10, 35R01

Литература

[1] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. *Метод разделения переменных в математической физике*, ООО "Книжный Дом СПб (2009).

[2] Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Физматгиз, М. (1961).

— ⁂ —

Базисность собственных функций периодической задачи для дифференциального оператора второго порядка с инволюцией

Абдижаhан САРСЕНБИ[1,2,a] Абдисалам САРСЕНБИ[2,3,b]

[1] *Международный университет Silkway, Шымкент, Казахстан*
[2] *ЮКУ им. М. Ауэзова, Шымкент, Казахстан*
[3] *Университет дружбы народов имени академика А. Куатбекова, Шымкент*
E-mail: [a]*abzhahan@mail.ru,* [b]*abdisalam@mail.ru*

В гильбертовом пространстве $L_2(-1,1)$ рассмотрим оператор

$$L_0 y = -y^{''}(x) + \alpha y^{''}(-x), \tag{1}$$

с областью определения $D(L) \subset L_2(-1,1)$, где $\alpha \neq 0, -1 < \alpha < 1$. Множество $D(L)$ состоит из всех функций $y(x) \in C^1[-1,1]$, таких, что $y^{'}(x)$ абсолютно непрерывна на $[-1,1]$ и $y^{''}(x) \in L_1(-1,1)$, удовлетворяющих условиям

$$y(-1) = y(1), y^{'}(-1) = y^{'}(1). \tag{2}$$

Вместе с оператором L_0 мы рассматриваем оператор L, порожденный дифференциальным выражением

$$Ly = -y^{''}(x) + \alpha y^{''}(-x) + q(x)y(x), \tag{3}$$

с той же областью определения $D(L) \subset L_2(-1,1)$, $\alpha \neq 0, -1 < \alpha < 1$, где комплекснозначный коэффициент $q(x) \in L_1[-1,1]$.

Пусть все собственные значения оператора (3) однократны. Обозначим через $\sigma_m(f)$, $S_m(f)$ частичные суммы разложения функции $f(x) \in L_1(-1,1)$ в ряд Фурье по собственным функциям операторов (1) и (2) соответственно. Говорят [1], что эти последовательности равносходятся на интервале $-1 \leq x \leq 1$, если $\sigma_m(f) - S_m(f) \to 0$ равномерно на этом интервале при $m \to \infty$.

Теорема 1. *Если $\alpha \neq \pm\frac{1-p^2}{1+p^2}$ для любого целого числа p, то для любой функции $f(x) \in L_1(-1,1)$ последовательности $\sigma_m(f)$, $S_m(f)$ равносходятся на [-1,1].*

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы 1 собственные функции оператора (3) образуют безусловный базис в пространстве $L_2(-1,1)$.*

Funding: Авторы были поддержаны грантом МОН РК AP08855792.

Ключевые слова: дифференциальный оператор с инволюцией, собственные функции, базис, функция Грина.

2010 Mathematics Subject Classification: 34K08,34L10,46B15

Литература

[1] Coddington E.A., Levinson N. *Theory of Ordinary Differential Equations*, Krieger Pub. Co. (1984).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Разрешимость краевой задачи для нелинейного уравнения с инволюцией $-y''(x) + \alpha y''(-x) = f(x, y)$

Абдисалам САРСЕНБИ[1,a], Эльмира МУСИРЕПОВА[2,b]

[1] *Университет дружбы народов имени академика А. Куатбекова, Шымкент, Казахстан*
[2] *ЮКУ им. М. Ауэзова, Шымкент, Казахстан*
E-mail: [a]*abdisalam@mail.ru*, [b]*musrepovaelmira@mail.ru*

Рассмотрим уравнение

$$-y''(x) + \alpha y''(-x) = f(x, y), \qquad \alpha \neq \pm 1,$$

с краевыми условиями $y(-1) = y(1) = 0$, где заданная функция $f(x, y)$ непрерывна при

$$-1 \leq x \leq 1, -\infty < y < \infty.$$

Теорема. *Если функция $f_y'(x, y)$ положительна и ограничена, то существует по крайней мере одно решение изучаемой краевой задачи.*

Поскольку нам известна [1] функция Грина соответствующей однородной краевой задачи

$$G(x,t) = -\frac{1}{2(1-\alpha)} - \frac{xt}{2(1+\alpha)} + \frac{1}{2}\begin{cases} \frac{t}{1-\alpha} - \frac{x}{1+\alpha}, t < -x; \\ -\frac{x}{1-\alpha} + \frac{t}{1+\alpha}, -x < t < x; \\ -\frac{t}{1-\alpha} + \frac{x}{1+\alpha}, t > x, \end{cases}$$

то решения изучаемой нелинейной краевой задачи являются решениями нелинейного интегрального уравнения

$$y(x) = \int_{-1}^{1} G(x,t) f(t, y(t)) dt$$

Заметим, что методом итерации существование решения этого интегрального уравнения было доказано в работе Пикар [2].

Заметим,что функцию Грина для фиксированного $t \in [-1, 1]$ можно записать в виде

$$G(x,t) = -\frac{1}{2(1-\alpha)} - \frac{xt}{2(1+\alpha)} + \frac{1}{2}\begin{cases} \frac{x}{1-\alpha} - \frac{t}{1+\alpha}, x < -t; \\ -\frac{t}{1-\alpha} + \frac{xt}{1+\alpha}, -t < x < t; \\ -\frac{x}{1-\alpha} + \frac{t}{1+\alpha}, x > t. \end{cases}$$

Funding: Авторы были поддержаны грантом МОН РК AP08855792.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение с инволюцией, функция Грина, нелинейное интегральное уравнение

2010 Mathematics Subject Classification: 34K08, 34L10, 46B15

Литература

[1] Sarsenbi A.A. Unconditional basicity of eigenfunctionsЎ system of Sturm-Liouville operator with an involutional perturbation, *Bulletin of the Karaganda University - Mathematics series. Special issue*, **91**:3 (2018), 117–127.

[2] Picard E. *Lecons sur quelques problemes aux limites de la Theorie des equations differentielles*, Paris (1930).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Приводимость многопериодических матричных уравнений

Жайшылык САРТАБАНОВ[1,a]

[1] Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан
E-mail: [a]sartabanov42@mail.ru

Заметка посвящена к исследованию задачи приводимости многочастотно периодических матричных уравнений, важность которой достаточно четко акцентирована в работе [1]. В настоящей работе исследование этой задачи проводится на основе метода перехода к уравнениям в частных производных, который позволяет рассматривать ее шире и глубже [2].

Введем оператор

$$Dx = \frac{\partial x}{\partial \tau} + \left\langle e, \frac{\partial x}{t} \right\rangle$$

дифференцирования функции $x = (\tau, t)$ переменных $\tau \in \mathbb{R}$, $t = (t_1, ...t_m) \in \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^m$ по направлениям векторного поля

$$\frac{dt}{d\tau} = e,$$

где $e = (1, ..., 1)$ – m-вектор, $\frac{\partial x}{\partial t} = (\frac{\partial x}{\partial t_1}, ..., \frac{\partial x}{\partial t_m})$,$\langle e, \frac{\partial x}{t} \rangle$ – скалярное произведение.

Рассмотрим матричное уравнение

$$Dx = P(\tau, t)X \tag{1}$$

с оператором D и $n \times n$-матрицей

$$P(\tau + \theta, t + \omega) = P(\tau, t) \in C^{(0,e)}_{\tau,t}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$$

из класса $C^{(0,e)}_{\tau,t}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ функций, многопериодических по $(\tau, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ периодов $\theta = \omega_0$ и $\omega = (\omega_1, ..., \omega_m)$ с рационально несоизмеримыми координатами $\omega_j > 0$, $j = \overline{0, m}$ и гладких по ним степени $(0, e) = (0, 1, ..., 1)$.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим матричное уравнение

$$DY = Q(\tau, t)Y \tag{2}$$

с матрицей

$$Q(\tau + \theta, t + \omega) = Q(\tau, t) \in C^{(0,e)}_{\tau,t}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m).$$

Если существует линейное обратимое гладкое (θ, ω)-периодическое преобразование

$$X = T(\tau, t)Y \tag{3}$$

с матрицей $T(\tau, t)$:

$$detT(\tau, t) \neq 0, \; T(\tau + \theta, t + \omega) = T(\tau, t) \in C^{(1,e)}_{\tau,t}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$$

такое, что уравнение (1) приводится к уравнению (2), то эти уравнения называются взаимно приводимыми.

В заметке

1) Установлено необходимое и достаточное условие взаимной приводимости уравнений (1) и (2);

2) На основе условия взаимной приводимости доказано существование гладкой ω - периодической матрицы $K(t)$ такой, что уравнение (1) приводимо к автономному относительно τ уравнению

$$DZ = K(t)Z; \tag{4}$$

3) Доказана приводимость матричного уравнения (1) к уравнению

$$D_0\Xi = K(t)\Xi, \tag{5}$$

с оператором дифференцирования $D_0 = \left\langle e, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle$ и найденной в (4) матрицей $K(t)$.

Эти результаты, относительно (1) и (5), служат основой метода редукции решения проблемы приводимости многопериодических систем.

В заключении заметим, что рассматривая полученные результаты на характеристиках дифференциальных операторов приходим к решению задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: оператор дифференцирования, матричное уравнение, взаимная приводимость, многопериодическая функция.

2010 Mathematics Subject Classification: 35B10, 35F35

Литература

[1] Арнольд В.И. *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, Москва (1976).

[2] Харасахал В.Х. *Почти-периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, Алма-Ата (1970).

— ⁂ —

Многопериодическое решение линейного интегро-дифференциального уравнения параболического типа

Жайшылык САРТАБАНОВ[1,a], Гулсезим АЙТЕНОВА[2,b]

[1] *Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан*
[2] *Западно-Казахстанский университет имени М.Утемисова, Уральск, Казахстан*
E-mail: [a]sartabanov42@mail.ru, [b]gulsezim-88@mail.ru

В заметке исследуется линейное уравнение

$$D_c u(x,t,\tau) - \frac{\partial^2 u(x,t,\tau)}{\partial x^2} = a(t,\tau)u(x,t,\tau) +$$

$$+\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} b(t,\tau,t-c\tau+cs,s)u(x,t-c\tau+cs,s)ds + f(x,t,\tau) \tag{1}$$

относительно искомой функции $u = u(x,t,\tau)$ переменных $\tau \in (-\infty;+\infty)$, $t = (t_1,...,t_m) \in R^m$, $x \in [0,l] = I$ с оператором дифференцирования $D_c = \frac{\partial}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{\partial}{\partial t_k}$, где $\varepsilon = const > 0$, $c = (c_1,...,c_m)$ - постоянный вектор с ненулевыми координатами, $a = a(t,\tau)$, $b = b(t,\tau)$ и $f = f(x,t,\tau)$ - функции, определенные при $(t,\tau) \in R^m \times R$ и $x \in I$.

Для уравнения (1) рассматривается начально-краевая задача с условиями

$$u(x,t,\tau)|_{\tau=\tau_0} = u_*(x,t) = u_*(x,t+\omega) \in C_{x,t}^{(2,e)}(I \times R^m), \tag{2}$$

$$u(0,t,\tau) = u(l,t,\tau) = 0, \tag{3}$$

где $\theta = \omega_0$, $\omega = (\omega_1,...,\omega_m)$; $\omega_0, \omega_1, ..., \omega_m$ - рационально несоизмеримые периоды, $e = (1,...,1)$ - вектор.

Функции a, b и f обладают свойствами

$$a(t+\omega,\tau+\theta) = a(t,\tau) \in C_{t,\tau}^{(e,0)}(R^m \times R),$$

$$b(t+\omega,\tau+\theta,\sigma+\omega,s+\theta)=b(t,\tau,\sigma,s)\in C^{(e,0,e,0)}_{t,\tau,\sigma,s}(R^m\times R\times R^m\times R), \tag{4}$$

$$f(x,t+\omega,\tau+\theta)=f(x,t,\tau)\in C^{(1,e,0)}_{x,t,\tau}(I\times R^m\times R). \tag{5}$$

Целью настоящей работы является установление условий существования и единственности многопериодического решения начально-краевой задачи (1)-(3).

Для достижения этой цели, на основе работ [1-2], с помощью замены данная задача последовательно решалась для однородного уравнения, неоднородного уравнения и для интегро-дифференциального уравнения, затем, для каждой задачи были установлены существование и единственность многопериодического решения [3].

Таким образом, (θ,ω)-периодическое решение уравнения (1) представимо в виде

$$u^*(x,t,\tau)=\int_{-\infty}^{\tau}\int_0^l W(x,t,\tau,\xi,\sigma-c\tau+cs,s)f(\xi,t-c\tau+cs,s)d\xi ds, \tag{6}$$

где $W(x,t,\tau,\xi,\sigma-c\tau+cs,s)$ фундаментальное решение соответствующего однородного интегро-дифференциального уравнения, которое удовлетворяет оценке

$$|W(x,t,\tau,\xi,\sigma+c\tau_0,\tau_0)|\le\gamma e^{-\delta(\tau-\tau_0)},\ \tau\ge\tau_0 \tag{7}$$

с некоторыми постоянными $\gamma>0$ и $\delta>0$.

Результат поставленной задачи сформулирован в виде теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (4), (5) и (7). Тогда интегро-дифференциальное уравнение (1) имеет единственное (θ,ω)-периодическое решение вида (6).*

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, уравнение параболического типа, многопериодическое решение, метод характеристик, дифференциальный оператор, начально-краевая задача.

2010 Mathematics Subject Classification: 47G20, 35B10, 35K20 35G16

Литература

[1] Тихонов А.Н. Самарский А.А. *Уравнения математической физики*, Наука, Москва (1977).

[2] Evans G.C. *Sull equazione integro-differenziale di tipo parabolico*, Rendiconti, 21:2 (1912).

[3] Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Z.A. *Periodic solutions of system of differential equations with multivariate time*, PPC WKSU, Uralsk (2020).

— ※ ※ ※ —

Многопериодические решения узкогиперболических квазилинейных систем уравнений с векторно-матричным оператором дифференцирования

Жайшылык САРТАБАНОВ[1,a], Амире ЖУМАГАЗИЕВ[1,b]

[1] *Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан*
E-mail: [a]sartabanov42@mail.ru, [b]charmeda@mail.ru

Рассматривается квазилинейная система уравнений

$$Dx=Bx+f(\tau,t,x), \tag{1}$$

относительно $x=(x_1,...,x_2)$ с векторно-матричным оператором дифференцирования D вида

$$Dx=\frac{\partial x}{\partial\tau}+\sum_{k=1}^m A_k\frac{\partial x}{\partial t_k},$$

где A_k, $k=\overline{1,m}$ и B Ц постоянные n-матрицы; $f(\tau,t,x)$ Ц n-вектор-функция независимых переменных $\tau\in\mathbb{R}$, $t=(t_1,...t_m)\in\mathbb{R}\times...\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^m$ и искомого вектора $x\in\mathbb{R}^n_\Delta=\{x\in\mathbb{R}^n: |x|=\max\limits_{j=\overline{1,n}}|x_j|\le\Delta\}$, $\Delta=const>0$.

Предполагается, что каждая из матриц A_k, $k=\overline{1,m}$, имеет различные действительные ненулевые собственные значения. Тогда уравнение (1) относится к узкогиперболическому типу [1].

Вектор-функция $f(\tau,t,x)$ обладает свойствами

$$f(\tau+\theta,t+q\omega,x)=f(\tau,t,x)\in C^{(0,e,\hat{e})}_{\tau,t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n_\Delta), \tag{2}$$

$$|f(\tau,t,0)|\le\lambda,\ |f(\tau,t,x)|\le\lambda+\ell\Delta,\ x\in\mathbb{R}^n_\Delta.$$

Ставится задача об установлении условий существования решения начальной задачи и задачи о многопериодических решениях уравнения (1) соответственно с условиями

$$x(\tau,t)|_{\tau=\tau_0}=x^0(t+\omega)=x(t)\in C^{(e)}_t(\mathbb{R}^m),$$

$$x(\tau+\theta,t+q\omega)=x(\tau,t)\in C^{(1,e)}_{\tau,t}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m),\ |x|\le\Delta. \tag{3}$$

Для достижения цели, сначала уравнение (1) приводится к каноническому виду неособенной заменой $x=Ky$, затем вводятся операторы:

1) $\Pi=diag\,[\Pi_1,...\Pi_n]$, который действует на искомую вектор-функцию $y(\tau,t)=[y_j(\tau,t_1,...t_m)]$ в виде $\Pi y(\tau,t_1,...t_m)=y(\tau,\mathbf{t})$, где $\mathbf{t}=(\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_n)$, $\mathbf{t}_j=(\mathbf{t}_{1j},...,\mathbf{t}_{mj})$;

2) $P_i=diag\,[p_{i1},...,p_{in}]$, $i=\overline{1,n}$, для перехода от переменных j-ой координаты $\mathbf{t}_j$ к переменным i-ой координаты $\mathbf{t}_i$ в виде $P_iy(\tau,\mathbf{t})=[y_j(\tau,\mathbf{t}_i)]$.

С помощью введенных операторов, определяется интегральное представление многопериодического решения линейного уравнения соответствующего (1), которое используется для установления единственного решения рассматриваемого уравнения.

Таким образом, из идеи работы [2] был развит метод операторов проектирования, разработанный в [3].

Результат основной задачи сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема. *При условиях (2),* $det\,[X(\theta)-E]\ne0$ *и* $\gamma(\lambda+\ell\Delta)<\Delta$ *квазилинейное уравнение (1) имеет единственное многопериодическое решение в пространстве n-вектор-функций, удовлетворяющих условию (3).*

Ключевые слова: узкогиперболическая квазилинейная система, многопериодическое решение, векторно-матричный оператор дифференцирования, метод характеристик, оператор проектирования.

2010 Mathematics Subject Classification: 35L02, 35L03, 35B10, 35C15, 35F35, 35F50

Литература

[1] Петровский И.Г. *Лекции об уравнениях с частными призводными*, ГИФМЛ, Москва (1961).

[2] Умбетжанов Д.У. *Почти периодические решения эволюционных уравнений*, Наука, Алма-Ата (1990).

[3] Sartabanov Zh.A., Zhumagaziyev A.Kh., Abdikalikova G.A. Multiperiodic solution of linear hyperbolic in the narrow sense system with constant coefficients, *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*, **2**:98 (2020), 125–140.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Решение одного класса нелинейных систем уравнений эллиптического типа на плоскости с постоянными отклонениями аргумента

Д.С. САФАРОВ[1,a], С.К. МИРАТОВ[1,b]

[1] *Бохтарский государственный университет им. Н. Хусрава, Бохтар, Таджикистан*
E-mail: [a]safarov-5252@mail.ru, [b]safarkhonop@mail.ru

На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ рассмотрим эллиптическую систему уравнений, в комплексной форме

$$w_{\bar{z}z} + aw_{\bar{z}}w_z + bw_z^2 + ew(z) + dw^3(z) = \alpha w(z+h_0) + \beta \prod_{j=1}^{3} w(z+h_j), \tag{1}$$

где $z = x+iy$, все коэффициенты и отклонения аргументов h_j- постоянны, $w(z)-$ искомая.

В работе [1] на плоскости квазипериодического гомеоморфизма уравнения Бельтрами [2] с постоянными коэффициентами $\mid q \mid \neq 1$, найдены решение уравнения

$$\varphi_{\bar{z}z} + a_1\varphi(z) + b_1\varphi^3(z) = 0, \tag{2}$$

с помощью эллиптической функции Якоби $\varphi(z) = sn[u(z), k^2]-$ эллиптический синус, k^2- модуль функции, $k^2 \neq 0, k^2 \neq 1, a_1, b_1-$ постоянные.

Другие функции Якоби $cn[u(z), k^2]$, и $dn[u(z), k^2]$, также дают решения уравнения (2) на плоскости гомеоморфизма уравнения Белтрами при определенных условиях на a_1, b_1. Функции Якоби $snu, cnu, dnu-$ являются двоякопериодическими мероморфными функциями, соответственно с основными периодами:
$4K, 2iK'$; $4K, 2K+2iK'$; $2K, 4iK'$, где $K = K(k), K' = K'(k')-$ полные эллиптические интегралы, соответствуют модулю k и дополнительному модулю k', $k^2 + k'^2 = 1$ при $k' \to 0, k \to +1$.

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 sin^2\varphi)^{-1} d\varphi, \quad K'(k') = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k'^2 sin^2\varphi)^{-1} d\varphi.$$

Эти функции удовлетворяют функциональными уравнениями

$$ksnu \cdot sn(u + K') = 1, \quad kcnu \cdot cn(u + K + K') = -ik', \quad dnu \cdot dn(u + K) = k'.$$

Эти свойства функции позволяют получить решения уравнения (1) с помощью решение уравнения (2), когда все отклонения h_j- кратны K или K', или не все h_j- кратны.

Предположим, что в уравнении (1) не все h_j- кратны K или K', и при условии $h_1 = h_0$, h_0- не связан с K или K', находим решение в виде

$$w(z) = Asn[z + q\bar{z}, k^2], \tag{3}$$

пока считая, что k^2- известно.

Легко видеть, что функция (3) удовлетворяет уравнению вида

$$w_{\bar{z}z} + (1 + k^2)qw(z) - \frac{2q}{A^2}k^2 w^3(z) = 0.$$

Если $a, b \neq 0$, $\mid a \mid \neq \mid b \mid$ и $q = -\frac{b}{a}$, то функция $w(z)$, как решение уравнения Бельтрами, удовлетворяет уранению

$$aw_{\bar{z}}w_z + bw_z^2 = 0.$$

Теорема. *Пусть в уравнении (1) все коэффициенты* $abed\alpha\beta \neq 0$, $| a | \neq | b |, | a\alpha d | \neq 2 | b\beta |$ *и* $k = -a\alpha d/2b\beta$ *и выполнено условие* $b(1+k^2) = -ea$.

Тогда при $h_1 = h_0, h_0-$ не период,

$$h_2 = \frac{4\overline{a}(aK + b\overline{K})}{| a |^2 - | b |^2}, \quad h_3 = \frac{4\overline{a}(aiK' - bi\overline{K'})}{| a |^2 - | b |^2},$$

уравнение (1) допускает решение вида

$$w_1(z) = Asn[z - \tfrac{b}{a}\overline{z}; k^2], \quad A^2 = -a\alpha^2 d/2b\beta^2.$$

Литература

[1] Сафаров Д.С. Точное решение обобщенного уравнения Дуффинга, в: *Матер. междунар. научной конференции "Актуальные проблемы математики и ее приложения"*, Худжанд (2003), 139–140.

[2] Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции*, М. (1959).

[3] Гурвиц А., Курант Р. *Теории функций*, Наука, М. (1968).

— ⁕ ⁕ ⁕ —

О стохастической задаче построения поля сил по заданным траекториям

Марат ТЛЕУБЕРГЕНОВ[1,2,a], Гулмира ВАСИЛИНА[1,3,b]
Гайнижамал ТУЗЕЛБАЕВА[1,2,c]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2] *КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
[3] *Алматинский университет энергетики и связи им. Г. Даукеева, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*marat207@mail.ru*, [b]*v_gulmira@mail.ru*, [c]*tuzelbayeva.gainizhamal@mail.ru*

Рассматриваемые задачи относятся к обратным задачам динамики. Теория обратных задач дифференциальных систем достаточно полно разработана в классе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и восходит к работам Н.П. Еругина [1] и А.С. Галиуллина [2,3]. Методы решения обратных задач в классе ОДУ распространяются в работах [4-6 и др.] на класс стохастических дифференциальных уравнений Ито. В настоящей работе строится силовое поле по заданному интегральному многообразию при наличии случайных возмущающих сил. При этом отдельно рассматриваются два вида интегральных многообразий: 1) траектории, зависящие от обобщенных координат и не зависящие от обобщенных скоростей (задача 1) и 2) траектории, зависящие как от обобщенных координат, так и от обобщенных скоростей (задача 2). И полученные утверждения обобщают на класс стохастических дифференциальных уравнений Ито результаты работ [7,8], полученные в классе ОДУ.

Задача 1. По заданной траектории

$$\Lambda : \lambda(x, y, t) = 0, \text{ где } \lambda = \lambda(x, y, t) \in C^{222}_{xyt},\ \lambda \in R^1,\ x \in R^1,\ y \in R^1, \tag{1}$$

требуется построить силовое поле при наличии случайных возмущающих сил так, чтобы построенное силовое поле обладало заданной траекторией (1) в качестве интегрального многообразия

$$\begin{cases} \ddot{x} = X_1(x, y, t) + \widehat{\sigma}_1(x, y, t)\dot{\xi}, \\ \ddot{y} = Y_1(x, y, t) + \widetilde{\sigma}_1(x, y, t)\dot{\xi}, \end{cases} \tag{2}$$

где $\xi = \xi(t, \omega)$ – случайный процесс с независимыми приращениями, который, следуя [9], можно представить в виде суммы процессов: $\xi = \xi_0 + \int c(\mu)P^0(t, d\mu)$, ξ_0 – винеровский процесс; P^0 – пуассоновский процесс; $P^0(t, d\mu)$ – число скачков процесса P^0 в интервале $[0, t]$, попадающих на множество $d\mu$; $c(\mu)$ - скалярная функция, отображающая пространство R^2 в пространство значений R^1 процесса $\xi(t)$ при любом t.

Задача 2. По заданной траектории

$$\Lambda : \lambda(x,\dot{x},y,\dot{y},t)=0, \text{ где } \lambda=\lambda(x,\dot{x},y,\dot{y},t)\in C^{12121}_{x\dot{x}y\dot{y}t},\ \lambda\in R^1, \tag{3}$$

требуется построить силовое поле при наличии стохастических возмущающих сил, так чтобы построенное силовое поле обладало заданной траекторией (3) в качестве интегрального многообразия

$$\begin{cases} \ddot{x}=X_2(x,y,t)+\widehat{\sigma}_2(x,y,t)\dot{\eta}, \\ \ddot{y}=Y_2(x,y,t)+\widetilde{\sigma}_2(x,y,t)\dot{\eta}, \end{cases} \tag{4}$$

где $\eta=\eta(t,\omega)$ – скалярный винеровский процесс. Будем говорить, что функция $f(z,t)$ принадлежит классу K, $f\in K$, если f непрерывна по t, $t\in[0,\infty]$, и во всем пространстве $z=(x,y)^T\in R^2$ $\|f(z,t)-f(\tilde{z},t)\|\le B\|z-\tilde{z}\|$ липшицева по x и y и удовлетворяет условию $\|f(z,t)\|\le B(1+\|z\|)$ линейного роста по z с некоторой постоянной B. Предполагается, что $X_1(x,y,t)$, $Y_1(x,y,t)$, $\hat{\sigma}_1(x,y,t)$ и $\tilde{\sigma}(x,y,t)$ принадлежат классу K, что обеспечивает в пространстве R^4 существование и единственность до стохастической эквивалентности решения $(x(t),y(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t))^T$ системы уравнений как (1), так и (4) с начальным условием $(x(t_0),y(t_0),\dot{x}(t_0),\dot{y}(t_0))^T=(x_0,y_0,\dot{x}_0,\dot{y}_0)^T$, являющихся непрерывными с вероятностью 1 строго марковским процессом [9].

Имеют место следующие две теоремы.

Теорема 1. Для того, чтобы множество силовых полей (2) при наличии случайных возмущений из класса процессов с независимыми приращениями имело заданную траекторию (1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий: (a) или (b)

$$\begin{cases} X_1=\lambda_x^{-1}(A_1-\lambda_{xx}\dot{x}^2-2\lambda_{xy}\dot{x}\dot{y}-\lambda_{yy}\dot{y}^2-\lambda_y Y_1), \\ \widehat{\sigma}_1=\lambda_x^{-1}(B_1-\lambda_y\widetilde{\sigma}_1) \end{cases} \tag{a}$$

при произвольных Y_1, $\widetilde{\sigma}_1$ из класса K;

$$\begin{cases} Y_1=\lambda_y^{-1}(A_1-\lambda_{xx}\dot{x}^2-2\lambda_{xy}\dot{x}\dot{y}-\lambda_{yy}\dot{y}^2-\lambda_x X_1), \\ \widetilde{\sigma}_1=\lambda_y^{-1}(B_1-\lambda_x\widehat{\sigma}_1) \end{cases} \tag{b}$$

при произвольных X_1, $\widehat{\sigma}_1$ из класса K.

Теорема 2. Для того, чтобы множество силовых полей (4) при наличии случайных возмущений из класса винеровских процессов имело заданную траекторию (3) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий: (c) или (d)

$$\begin{cases} X_2=\lambda_{\dot{x}}^{-1}(A_2-\lambda_x\dot{x}-\lambda_y\dot{y}+\lambda_{\dot{y}}Y_2-\dfrac{1}{2}(\lambda_{\dot{x}\dot{x}}\widehat{\sigma}_2^2+\lambda_{\dot{y}\dot{y}}\widetilde{\sigma}_2^2)) \\ \widehat{\sigma}_2=\lambda_{\dot{x}}^{-1}(B_2-\lambda_{\dot{y}}\widetilde{\sigma}_2) \end{cases} \tag{c}$$

при произвольных Y_2, $\widetilde{\sigma}_2$ из класса K;

$$\begin{cases} Y_2=\lambda_{\dot{y}}^{-1}(A_2-\lambda_x\dot{x}-\lambda_{\dot{x}}X_2+\lambda_y\dot{y}-\dfrac{1}{2}(\lambda_{\dot{x}\dot{x}}\widehat{\sigma}_2^2+\lambda_{\dot{y}\dot{y}}\widetilde{\sigma}_2^2)) \\ \widetilde{\sigma}_2=\lambda_{\dot{y}}^{-1}(B_2-\lambda_{\dot{x}}\widehat{\sigma}_2) \end{cases} \tag{d}$$

при произвольных X_2, $\widehat{\sigma}_2$ из класса K.

Здесь $A_1=A_1(\lambda,\dot{\lambda};x,y,\dot{x},\dot{y},t)$, $B_1=B_1(\lambda,\dot{\lambda};x,y,\dot{x},\dot{y},t)$, $A_2=A_2(\lambda;x,y,\dot{x},\dot{y})$, $B_2=B_2(\lambda;x,y,\dot{x},\dot{y})$ – произвольно заданные функции Еругина [1], обладающие свойством

$$A_1(0,0;x,y,\dot{x},\dot{y},t)\equiv B_1(0,0;x,y,\dot{x},\dot{y},t)\equiv A_2(0;x,y,\dot{x},\dot{y})\equiv B_2(0;x,y,\dot{x},\dot{y})=0.$$

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP09258966 КН МОН РК.

Ключевые слова: обратные задачи динамики, стохастические дифференциальные уравнения, интегральное многообразие.

2010 Mathematics Subject Classification: 34Cxx, 60G07, 60H10

Литература

[1] Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую,*Прикладная математика и механика*, **10**:6 (1952), 659–670.

[2] Галиуллин А.С. *Методы решения обратных задач динамики*, Наука, Москва (1986).

[3] Галиуллин А.С. *Избранные труды в двух томах. Т.II.*, РУДН, Москва (2009).

[4] Tleubergenov M.I., Ibraeva G.T. Stochastic Inverse Problem with Indirect Control, *Differential equations*, **53**:10 (2017), 1387–1391.

[5] Tleubergenov M.I., Ibraeva G.T. On the Restoration Problem with Degenerated Diffusion , *TWMS journal of pure and applied mathematics*, **6**:1 (2015), 93–99.

[6] Ibraeva G.T., Tleubergenov M.I. Main Inverse Problem for Differential Systems with Degenerate Diffusion, *Ukrainian Mathematical Journal*, **65**:5 (2013), 787–792.

[7] Галиуллин А.С. Построение поля сил по заданным траекториям, *Сб. научно-методических статей*, 10 (1980), 31–34.

[8] Галиуллин А.С. Построение поля сил по заданному семейству траекторий, *Дифференциальные уравнения*, **17**:8 (1981), 1487–1489.

[9] Пугачев В.С., Синицын И.Н. *Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация*, Наука, Москва (1990).

— ⋇ ⋇ ⋇ —

О разрешимости некоторых краевых задач для нелокального полигармонического уравнения

Батирхан ТУРМЕТОВ[1,a]

[1] *Международный Казахско-Турецкий университет имени А.Ясави, Туркестан, Казахстан*
E-mail: [a]*turmetovbh@mail.ru*

В настоящей работе исследуется вопросы разрешимости некоторых краевых задач для нелокального полигармонического уравнения.
Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ - единичный шар $n \geq 2$, а $\partial\Omega$ - единичная сфера, S - действительная ортогональная матрица $S \cdot S^T = E$. Предположим также, что существует такое натуральное $l \in N$ что $S^l = E$. Пусть $m \geq 1, a_1, a_2, ..., a_l -$ действительные числа. Рассмотрим в Ω следующую задачу:

$$\sum_{k=1}^{l} a_k (-\Delta)^m u\left(S^{k-1}x\right) = f(x),\ x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^k u(x)}{\partial \nu^k} = g_k(x), k = 0, 1, ..., m-1, x \in \partial\Omega. \tag{2}$$

Задача (1)-(2) в случае $m = 1$ изучена в работе [1]. Отметим также, что нелокальные краевые задачи для эллиптических уравнений второго и высшего порядков с отображениями вида S исследованы в работах [2-4].

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{l-1}$ - различные корни степени l из единицы и $\sigma_{\bar{\mu}_k}(A) = \sum\limits_{i=0}^{l-1} a_i \mu_k^i \neq 0,\ f(x) \in C^\lambda(\bar{\Omega}),\ g_j(x) \in C^{m+\lambda-j}(\partial\Omega), j = 0, 1, ..., m-1$. Тогда решение задачи Дирихле (1), (2) существует и единственно.*

Теорема 2. *Пусть $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{l-1}$ - различные корни степени m из единицы и $\sigma_{\bar{\mu}_k}(A) = \sum\limits_{i=0}^{m-1} a_i \mu_k^i \neq 0,\ f(x) \in C^\lambda(\bar{\Omega})$ и $g_j(x) = 0, j = 0, 1, \ldots, l-1$. Тогда решение задачи (1), (2)* *представляется в виде*

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} G_S(x,y) f(y) dy,$$

где

$$G_S(x,y) = \sum_{q=0}^{l-1} c_q G(S^q x, y),$$

а G(x,y) - функция Грина задачи Дирихле [5].

В работе также исследуются краевые задачи типа Неймана и Робена.

Funding: Авторы были поддержаны грантом МОН РК AP08855810.

Ключевые слова: нелокальный оператор, полигармоническое уравнение,задача Дирихле, задача Неймана, задача Робена, функция Грина.

2010 Mathematics Subject Classification: 31A30,34K10,35J30

Литература

[1] Karachik V.V., Sarsenbi A., Turmetov B.Kh. On solvability of the main boundary value problems for a non-local Poisson equation, *Turkish Journal of Mathematics*, **43**:3 (2019), 1604–1625.

[2] Karachik V.V., Turmetov B.Kh. Solvability of one nonlocal Dirichlet problem for the Poisson equation, *Novi Sad Journal of Mathematics*, **50**:1 (2020), 67–88.

[3] Karachik V.V., Turmetov B.Kh. On solvability of some nonlocal boundary value problems for biharmonic equation, *Mathematica Slovaca*, **70**:2 (2020), 329–341.

[4] Karachik V.V., Turmetov B.Kh. On solvability of some nonlocal boundary value problems for polyharmonic equation, *Kazakh Mathematical Journal*, **19**:1 (2019), 39–49.

[5] Kal'menov T. Sh., Suragan D. On a new method for constructing the Green function of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation, *Differential Equations*, **48**:3 (2012), 441–445.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

О собственных функциях и собственных значениях некоторых краевых задач для нелокального оператора Лапласа

Батирхан ТУРМЕТОВ[1,a], Айнур ШАЛХАР[1,b]

[1]*Международный Казахско-Турецкий университет имени А.Ясави, Туркестан, Казахстан*
E-mail:[a]turmetovbh@mail.ru, [b]ainur1.00@bk.ru

Настоящая работа посвящена исследованию спектральных вопросов краевых задач Дирихле и Неймана для нелокального оператора Лапласа.

Пусть $\Omega = \{x = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$, $\partial\Omega$ - окружность. В Ω введем следующие отображения:

$$S_0 x = x, S_1 x = (-x_1, x_2), S_2 x = (x_1, -x_2), S_3 x = (-x_1, -x_2).$$

Пусть $a_j, j = 0,1,2,3$ - действительные числа, Δ - оператор Лапласа, $r = |x|$. Рассмотрим в области Ω следующие задачи

Задача 1. *Найти функцию $u(x) \neq 0$ и число $\lambda \in C$, удовлетворяющую условиям*

$$a_0 \Delta u(S_0 x) + a_1 \Delta u(S_1 x) + a_2 \Delta u(S_2 x) + a_3 \Delta u(S_3 x) = -\lambda u(x), \tag{1}$$

$$u(x) = 0, x \in \partial\Omega. \tag{2}$$

Задача 2. *Найти функцию $u(x) \neq 0$ и число $\lambda \in C$, удовлетворяющую уравнению (1) и условию*

$$\frac{\partial u(x)}{\partial r} = 0, x \in \partial\Omega. \tag{3}$$

Отметим, что в одномерном случае аналогичные задачи исследовались в работах [1-4]. Введем числа

$$\varepsilon_1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \varepsilon_2 = a_0 + a_1 - a_2 - a_3, \varepsilon_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3,$$

$$\varepsilon_4 = a_0 - a_1 - a_2 + a_3.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* $\varepsilon_j \neq 0, j = \overline{1,4}$. *Тогда собственные функции и собственные значения задачи 1 имеют вид:*

1) $u^{(1)}_{k,m}(r,\varphi) = J_{2m}(\mu_{1,k,m}r)\cos 2m\varphi, m = 0,1,..., \lambda_{1,k,m} = \mu_{1,k,m}\varepsilon_1$,

2) $u^{(2)}_{k,m}(r,\varphi) = J_{2m-1}(\mu_{2,k,m}r)\sin(2m-1)\varphi, m = 1,2,..., \lambda_{2,k,m} = \mu_{2,k,m}\varepsilon_2$,

3) $u^{(3)}_{k,m}(r,\varphi) = J_{2m-1}(\mu_{3,k,m}r)\cos(2m-1)\varphi, m = 1,2,..., \lambda_{3,k,m} = \mu_{3,k,m}\varepsilon_3$,

4) $u_{4,k,m}(r,\varphi) = 4J_{2m}(\mu_{4,k,m}r)\sin 2m\varphi, m = 0,1,..., \lambda_{4,k,m} = \mu_{4,k,m}\varepsilon_4$, *где числа* $\mu_{j,k,m}, j = 1,2,3,4$ *в случае* $j = 1,4$ *являются положительными нулями функции*

$$J_{2m}(\mu) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(j+2m)!j!}\left(\frac{\mu}{2}\right)^{2(j+m)},$$

а в случае $j = 2,3$ *являются положительными нулями функции*

$$J_{2m-1}(\mu) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(j+2m-1)!j!}\left(\frac{\mu}{2}\right)^{2(j+m)-1}.$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* $\varepsilon_j \neq 0, j = \overline{1,4}$. *Тогда система* $u^{(j)}_{k,m}(r,\varphi), j = \overline{1,4}$ *является полной в пространстве* $L_2(\Omega)$.

Аналогичные утверждения справедливы и для задачи 2.

Funding: Авторы были поддержаны грантом МОН РК AP08855810.

Ключевые слова: нелокальный оператор Лапласа, собственные функции, собственные значения, задача Дирихле, задача Неймана.

2010 Mathematics Subject Classification: 34K08, 34K10, 35J05

Литература

[1] Kritskov L.V., Sarsenbi A.M. Spectral properties of a nonlocal problem for a second-order differential equation with an involution, *Differential Equations*, **51**:7 (2015), 984Ц-990.

[2] Kopzhassarova A.A., Sarsenbi A.M. Basis properties of eigenfunctions of second-order differential operators with involution, *Abstract and Applied Analysis*, **2012**, article ID 576843 (2012), 1–6.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Алгоритм глобальной оптимизации гладких функций нескольких переменных

Жайлан ТУТКУШЕВА[1,a]

[1] *Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан*
E-mail: [a]*zhailan_k@mail.ru*

С каждым годом интерес теоретиков и практиков к задачам оптимизации растет. Экстремальные задачи встречаются во всех отраслях науки. Задачи локальной оптимизации хорошо исследованы и для их решения существуют конструктивные методы. Однако задачи поиска глобальной оптимизации не отвечают всем потребностям на практике. Поэтому поиск глобального минимума остается одной из главных проблем вычислительной и прикладной математики.

В современной математике предложены различные методы поиска глобального минимума. Многие методы не гарантируют точность глобального минимума, если функция многоэкстремальна. Для таких задач хорош прямой метод перебора, но он при росте переменных требуют больших вычислительных затрат.

В настоящем докладе мы сформулируем новый конструктивный метод глобальной оптимизации многоэкстремальной функции нескольких переменных.
Предложенный метод находит решение с высокой точностью за меньшее количество итерации. Проведем вычислительный эксперимент над тестовыми функциями оптимизации.

Метод работает с помощью определяющей функции, которая как индикатор будет определять первое касание целевой функции с плоскостью на точке глобального минимума. Предложенный алгоритм состоит из двух этапов: поиск значения глобального минимума и поиск координат глобального минимума. Для вычисления определяющей функции мы применили кубатурные формулы.

Написана программа на языке C++ и выполнены вычислительные эксперименты над специальными тестовыми функциями. Они показывают, что алгоритм работает с высокой точностью.

Ключевые слова: глобальный минимум, многоэкстремальная функция, кубатурные формулы, глобальный экстеремум, глобальная оптимизация.

Литература

[1] Майорова Н.Л., Глазков Д.В. *Методы оптимизации*, ЯрГУ, Ярославль (2015).
[2] Сергиенко А.Б. *Тестовые функции для глобальной оптимизации*, Красноярск (2015).
[3] Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул*, Наука, Москва (1974).

— ⁕ ⁕ ⁕ —

Видоизмененная задача Коши для неоднородного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода

А.К. УРИНОВ[1,a], А.Б. ОКБОЕВ[2,b]

[1] *Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан*
[2] *Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз, Наманган, Узбекистан*
E-mail: [a]urinovak@mail.ru, [b]akmaljon12012@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$L_{\alpha,\lambda}\left(u\right) \equiv u_{xx} + y\, u_{yy} + \alpha u_y - \lambda^2\, u = f\left(x, y\right), \qquad y < 0 \tag{1}$$

в конечной односвязной области D, ограниченной характеристиками $AC: x - 2\sqrt{-y} = 0$, $BC: x + 2\sqrt{-y} = 1$ и $AB: y = 0$ уравнения (1) при $y \leq 0$, где λ- действительное или чисто мнимое число, $\alpha \in R$, причем $\alpha = -n + \alpha_0$, $n \in N$, $\alpha_0 \in (1/2, 1)$, а $f\left(x, y\right)$- заданная функция.

Видоизмененная задача Коши. Найти функцию $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$, удовлетворяющую в области D уравнению (1) и следующим начальным условиям

$$u(x,0) = \tau(x),\ x \in [0,1]; \quad \lim_{y \to -0} (-y)^{\alpha} \frac{\partial}{\partial y}\left[u - A_{\alpha}^{-}(\tau, \lambda)\right] = \nu(x),\ x \in (0,1), \tag{2}$$

где $\tau(x)$ и $\nu(x)$ - заданные функции, а $A_{\alpha}^{-}(\tau, \lambda)$ - оператор вида

$$A_{\alpha}^{-}(\tau, \lambda) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma_1 y^k 4^k C_n^k}{(1/2+\beta)_k (n+\beta)_k} \int\limits_0^1 \Psi_k(\tau(\zeta),\lambda)[z(1-z)]^{k+n+\beta-1} \overline{J}_{k+n+\beta-1}(\sigma)dz,$$

$\beta=\alpha-1/2$, $(a)_n=\Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ - символ Похгаммера; C_n^k - биномиальный коэффициент, $\gamma_1=\Gamma(2\beta)/\Gamma^2(\beta)$, $\Gamma(s)$ - гамма-функция Эйлера;

$\Psi_k(\tau(\zeta),\lambda)=(\lambda^2-\partial^2/\partial\zeta^2)^k\tau(\zeta)$, $\qquad \zeta=x+2\sqrt{-y}(2z-1)$,

$\sigma=4\lambda\sqrt{-yz(1-z)}$, $\qquad \bar{J}_\alpha(z)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}[(-1)^j/j!(1+\alpha)_j](z/2)^{2j}$.

Теорема 1. *Если* $\tau(x)\in C^{2(n+1)}[0,1]$, $\quad \nu(x)\in C^2[0,1]$, $f(x,y)=(-y)^{1-\alpha}f_1(x,y)$, $f_1(x,y)\in C^2[0,1]$, *то функция* $u(x,y)$, *определяемая формулой*

$$u(x,y)=A_\alpha^-(\tau,\lambda)-\gamma_2(-y)^{1-\alpha}\int\limits_0^1 \nu(\zeta)[z(1-z)]^{-\beta}\bar{J}_{-\beta}(\sigma)dz+$$

$$+\frac{1}{4}\int\limits_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} d\xi \int\limits_{\xi}^{x+2\sqrt{-y}} f\left(\frac{\xi+\eta}{2},-\frac{(\eta-\xi)^2}{16}\right) R\left(\xi,\eta;x-2\sqrt{-y},x+2\sqrt{-y}\right)d\eta,$$

является единственным решением задачи $\{(1),(2)\}$, *где*

$$R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=\frac{(\eta-\xi)^{2\beta}}{(\eta-\xi_0)^\beta(\eta_0-\xi)^\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho^k}{(k!)^2}F(\beta,\beta+k,1+k;\theta),$$

$$\gamma_2=\frac{\Gamma(2-2\beta)}{(1-\alpha)\Gamma^2(1-\beta)},\quad \rho=\frac{\lambda^2}{4}(\eta_0-\eta)(\xi-\xi_0),\quad \theta=\frac{(\eta_0-\eta)(\xi-\xi_0)}{(\eta-\xi_0)(\eta_0-\xi)}.$$

Отметим, что задача $(1),(2)$ при $f(x,y)=0$ изучена в работе [1].

Литература

[1] Уринов А.К., Окбоев А.Б. Видоизмененная задача Коши для одного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода в журнале, *Украинский математический журнал*, **72**:1 (2020), 100–118.

— ⁂ —

Об одном нагруженном линейном дифференциальном уравнении первого порядка с сингулярной точкой и с интегральными условиями

Файзулло ШАМСУДИНОВ[1,a], Назокат КАРИМОВА[2,b]

[1] *Бохтарский государственный университет им. Н. Хусрава, Бохтар, Таджикистан*
[2] *Кулябский государственный университет им. А.Рудаки, Куляб, Таджикистан*
E-mail:[a] faizullo100@yahoo.com, [b]nazokat.karimova.1974@mail.ru

На $\Gamma=\{a<x<b\}$ рассмотрим уравнение вида

$$y'(x)+\frac{p(x)}{(b-x)^\beta}y(x)=\frac{p(x)}{(b-x)^\beta}+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\theta_k(x), \qquad (1)$$

с интегральными условиями

$$\int_a^b \varphi_i(t)y(t)dt=h_i,\ i=\overline{1,m}. \qquad (2)$$

Здесь $p(x), q(x), \theta_k(x), \varphi_i(x) \in C(a,b)-$ заданные функции, $h_i, i = \overline{(1,m)}-$ заданные постоянные, $\alpha_k, k = \overline{(1,m)}-$ неизвестные параметры.

Проблеме исследования нагруженным обыкновенным дифференциальным уравнениям с интегральными условиями посвящены работы [3]-[4].

В настоящей работе, на основе способов разработанных в [1], [2], [3] для дифференциального уравнения (1) с интегральными условиями (2), получены представления многообразия решений через одну произвольную постоянную и изучены свойства полученных решений.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Пусть в дифференциальном уравнении (1) с интегральными условиями (2) функции* $p(x), \theta_k(x), \varphi_j(x)$ *удовлетворяют следующим условиям: - функция* $p(x)$ *в окрестности точки* $x = b$ *удовлетворяет условию Гелдера*

$|p(b) - p(x)| \leq H_2(b-x)^{\gamma_1},\ \gamma_1 > \beta - 1,\ H_2 = const$ *при* $x \longrightarrow b;$
При $p(b) > 0,\ \varphi_j(x) \in C(\overline{\Gamma}),\ \varphi_j(x) = 0$ *с асимптотическими поведениями*

$$\varphi_k(x) = o[exp[-p(b)\omega_b^{\beta}(x)](b-x)^{-\gamma_4}], \gamma_4 < 1, \quad 1 \leq j \leq n. \tag{4}$$

При $p(b) < 0$, *функции* $\theta_k(x) \in C(\overline{\Gamma}),\ \theta_k(b) = 0$ *с асимптотическими поведениями*

$$\theta_k(x) = o[exp[-p(b)\omega_b^{\beta}(x)](b-x)^{-\gamma_5}], \gamma_5 < 1, \quad 1 \leq j,k \leq n; \tag{5}$$

При $p(b) < 0$, $q(x) \in C(\overline{\Gamma}),\ q(b) = 0$ *с асимптотическим поведением*

$$q(x) = o[exp[-p(b)\omega_b^{\beta}(x)](b-x)^{\gamma_6}], \gamma_6 < 1 \ \text{ при } \ x \to b. \tag{6}$$

Тогда задача о нахождении решения дифференциального уравнения (1) с интегральными условиями (2) сводится к решении линейной алгебраической системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_{ik} = p_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{7}$$

где ϕ_{ik}, p_i- *известные постоянные числа.*

Теорема 2. *Пусть в дифференциальном уравнении (1) с интегральными условиями (2) выполняются условия теоремы 1 или функции* $p(x),\ q(x), \theta_k(x), \varphi_i(x)$ *удовлетворяют условиям (3),(4),(5),(6). Тогда при* $m = n, det\|\emptyset_{ik}\| \neq 0$ *система линейных алгебраических уравнений (7) всегда разрешима, общее решение дифференциального уравнения содержит одну произвольную постоянную и выражается равенством*

$$y(x) \equiv K_1(C_1, q_k(x), \theta_k(x)), \tag{8}$$

где $K_1(C_1, q_k(x), \theta_k(x))$ *– известный интегральный оператор,* C_1- *произвольная постоянная.*

Изучены свойства полученных решений, а также поставлена и решена задача с начальными данными типа Коши.

Литература

[1] Rajabov N. *Introduction to ordinary differential equations with singular and super-singular coefficients*, Dushanbe (1998).

[2] Раджабов Н. *Интегральные уравнения типов Вольтера с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложения*, Из - во "Деваштич Душанбе (2007).

[3] Нахушев А.М. *Нагруженные уравнения и их применение*, Наука, М. (2012).

[4] Каримова Н. Интегральное представленные решении неоднородного линейного дифференциального уравнения первого порядка с одной сингулярной точкой, нагруженными свободными членами и с дополнительными условиями, *Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук*, 2 (2018), 34–37.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Интегральные представления решений для одной системы дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярными коэффициентами

Файзулло ШАМСУДИНОВ[1,a], Сайфулло ХОМИДДИН[1,b]

[1] *Бохтарский государственный университет им. Н. Хусрава, Бохтар, Таджикистан*
E-mail: [a]*faizullo100@yahoo.com*, [b]*smpk1992@mail.ru*

Пусть D прямоугольник
$D = \{(x,y) : 0 < x < \delta_1, 0 < y < \delta_2\}$.
Далее обозначим

$$\Gamma_1 = \{y = 0,\ 0 < x < \delta_1\}, \quad \Gamma_2 = \{x = 0,\ 0 < y < \delta_2\}.$$

В области D рассмотрим систему следующего вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{a_1(x,y)}{r^\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{b_1(x,y)}{r^\beta}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{c_1(x,y)}{r^{\alpha+\beta}}u = \dfrac{f_1(x,y)}{r^{\alpha+\beta}}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{a_2(x,y)}{x^\gamma}u = \dfrac{f_2(x,y)}{x^\gamma}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{b_2(x,y)}{y^\delta}u = \dfrac{f_3(x,y)}{y^\delta}, \end{cases} \tag{1}$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, $a_j(x,y)$, $b_j(x,y)$, $c_1(x,y)$, $f_j(x,y), j = \overline{1,3}$ – заданные функции в области D, $\alpha > 2, \beta = 2, \gamma = \delta = 1$($\alpha$- натуральные числа).

Проблеме исследования дифференциальных уравнений и переопределенных систем с регулярными, сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами посвящены работы [1]- [3].

Итак, доказана

Теорема 1. *Пусть в системе уравнений (1) $\alpha > 2, \beta = 2, \gamma = \delta = 1$ коэффициенты и правые части удовлетворяют следующим условиям:*

$$1)\ a_1(x,y) \in C^1_x(\overline{D}), a_2(x,y) \in C^1_y(\overline{D}),$$

$$b_1(x,y), b_2(x,y) \in C(\overline{D}), f_2(x,y) \in C^1_y(\overline{D}), f_1(x,y), f_3(x,y) \in C(\overline{D});$$

$$2)\ c_1(x,y) = r^{\alpha+2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{r^\alpha}\right) + a_1(x,y)b_1(x,y);$$

$$3)\ |a_1(x,y) - a_1(0,0)| \le H_1 r^{\alpha_1},\ H_1 = const,\ \alpha_1 > \alpha - 1,$$

$$|b_1(x,y) - b_1(0,0)| \le H_2 r^{\beta_1},\ H_2 = const, \beta_1 > \beta - 1,$$

$$|a_2(x,0) - a_2(0,0)| \le H_3 x^{\lambda_1},\ H_3 = const, 0 < \lambda_1 < 1,$$

$$4)\ a_1(0,0) < 0, b_1(0,0) > 0,\ a_2(0,0) > 0;$$

$$5)\ a)\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{r^\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_2(x,y)}{x}\right) \quad \text{в} \quad D,$$

$$b)\ \ f_1(x,y) \quad \text{и} \quad f_2(x,y), f_1(x,y) \quad \text{и} \quad f_3(x,y)$$

связаны при помощи коэффициентов системы в явном виде;

$$6)\ f_1(x,y) = o(\exp\left[\frac{b_1(0,0)}{y} arctg\frac{x}{y}\right] r^{\gamma_1}), \gamma_1 > \alpha + 1.$$

Тогда любое решение системы уравнений (1) из класса $C_2(D)$ представимо в виде

$$u(x,y) \equiv T_1(\varphi_1(x), \psi_1(x), f_1(x,y)), \tag{2}$$

$$\varphi_1(x) \equiv N_1(c_1, f_2(x,0)), \tag{3}$$

$$\psi_1(y) = \frac{f_3(0,y)}{y}, \tag{4}$$

где $T_1(\varphi_1(x), \psi_1(x), f_1(x,y)), N_1(c_1, f_2(x,0))$– *известные интегральные операторы, c_1 – произвольная постоянная.*

Изучены свойства полученных решений, а также поставлена и решена задача с начальными данными типа Коши.

Литература

[1] Wilczynski E.J. *Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces*, Zeip. Zig, Leubner (1906).

[2] Раджабов Н. *Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами*, Изд.ТГУ, Душанбе (1992).

[3] Раджабов Н., Мохамед Эльсаед Абдель Аал. *Переопределеная линейная система второго порядка с сингулярными и сверхсингулярными линиями*, Lap Lambert Academic Publishing, Germany (2011).

— ⁂⁂⁂ —

LINEAR SYSTEM WITH UNPREDICTABLE IMPULSES

Marat AKHMET[1,a], Madina TLEUBERGENOVA[2,b], Zakhira NUGAYEVA[2,c]

[1] *Middle East Technical University, Ankara, Turkey*
[2] *K. Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan*
E-mail: [a]*marat@metu.edu.tr,* [b]*madina_1970@mail.ru,* [c]*zahira2009.85@mail.ru*

Let θ_i, $i \in \mathbb{Z}$, be a sequence of real numbers such that $\underline{\theta} \leq \theta_{i+1} - \theta_i \leq \overline{\theta}$ for some positive numbers $\underline{\theta}$, $\overline{\theta}$, and $|\theta_i| \to \infty$ as $|i| \to \infty$.

Denote by $[\widehat{a_1, a_2}]$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, the interval $[a_1, a_2]$, if $a_1 < a_2$ and the interval $[a_2, a_1]$, if $a_2 < a_1$.

Definition [1]. A piecewise continuous and bounded function $\varphi(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ with the set of discontinuity points θ_i, $i \in \mathbb{Z}$, satisfying $\varphi(\theta_i -) = \varphi(\theta_i)$ for each $i \in \mathbb{Z}$ is called *discontinuous unpredictable function*, if there exist positive numbers ϵ_0, σ, sequences t_n, s_n of real numbers and sequences l_n, m_n of integers all of which diverge to infinity such that

(a) $|\theta_{i+l_n} - t_n - \theta_i| \to 0$ as $n \to \infty$ on each bounded interval of integers and $|\theta_{m_n+l_n} - t_n - \theta_{m_n}| \geq \epsilon_0$ for each natural number n;

(b) for every positive number ϵ, there exists a positive number δ such that $\|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\| < \epsilon$ whenever the points t_1 and t_2 belong to the same interval of continuity and $|t_1 - t_2| < \delta$;

(c) $\varphi(t + t_n) \to \varphi(t)$ as $n \to \infty$ in B-topology on each bounded interval;

(d) for each natural number n there exists an interval $[s_n - \sigma, s_n + \sigma] \subseteq [\widehat{\theta_{m_n}, (\theta_{m_n+l_n}} - t_n)]$ which does not contain any point of discontinuity of $\varphi(t)$ and $\varphi(t + t_n)$, and $\|\varphi(t + t_n) - \varphi(t)\| \geq \epsilon_0$ for each $t \in [s_n - \sigma, s_n + \sigma]$.

Definition [1]. Suppose that $\omega(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ is a piecewise continuous and bounded function with the set of discontinuity points θ_i, $i \in \mathbb{Z}$, satisfying $\omega(\theta_i -) = \omega(\theta_i)$ and Γ_i, $i \in \mathbb{Z}$, is a bounded sequence in $\mathbb{R}^p$. The couple $(\omega(t), \Gamma_i)$ is called *unpredictable*, if there exist positive numbers ϵ_0, σ, sequences t_n, s_n of real numbers and sequences l_n, m_n of integers all of which diverge to infinity such that

(a) $|\theta_{i+l_n} - t_n - \theta_i| \to 0$ as $n \to \infty$ on each bounded interval of integers and $|\theta_{m_n+l_n} - t_n - \theta_{m_n}| \geq \epsilon_0$ for each natural number n;

(b) for every positive number ϵ there exists a positive number δ such that $\|\omega(t_1) - \omega(t_2)\| < \epsilon$ whenever the points t_1 and t_2 belong to the same interval of continuity and $|t_1 - t_2| < \delta$;

(c) $\omega(t + t_n) \to \omega(t)$ as $n \to \infty$ in B-topology on each bounded interval;

(d)for each natural number n there exists an interval $[s_n - \sigma, s_n + \sigma] \subseteq [\widehat{\theta_{m_n}, (\theta_{m_n+l_n}} - t_n)]$ which does not contain any point of discontinuity of $\omega(t)$ and $\omega(t + t_n)$, and $\|\omega(t + t_n) - \omega(t)\| \geq \epsilon_0$ for each $t \in [s_n - \sigma, s_n + \sigma]$;

(e) $|\Gamma_{i+l_n} - \Gamma_i| \to 0$ as $n \to \infty$ for each i in bounded intervals of integers and $|\Gamma_{m_n+l_n} - \Gamma_{m_n}| \geq \epsilon_0$ for each natural number n.

We specify the discontinuity moments of the impulsive system as follows

$$\theta_i = iT + \gamma_i, \ i \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

where γ_i, $i \in \mathbb{Z}$, is a sequence of real numbers which is unpredictable in the sense of Definition 3.1 [2] and $T \geq 4$ is a number such that $\sup_{i \in \mathbb{Z}} |\gamma_i| < T/h$ for some number $h \geq 3$.

Consider the following linear impulsive system,

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), \ t \neq \theta_i, \Delta x|_{t=\theta_i} = Bx(\theta_i) + I_i, \tag{2}$$

where $t \in \mathbb{R}$, the matrices $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$ and $B \in \mathbb{R}^{p \times p}$ commute, the sequence θ_i, $i \in \mathbb{Z}$, of discontinuity moments is defined by Equation (1), and $(f(t), I_i)$ is an unpredictable couple. Additionally, $\det(I + B) \neq 0$, where I is the $p \times p$ identity matrix.

Denote by λ_j, $j = 1, 2, \dots, p$, the eigenvalues of the matrix $A + \frac{1}{T}\mathrm{Ln}(I + B)$.

(C) $\max\limits_j \Re e\lambda_j = \lambda < 0$, where $\Re e\lambda_j$ is the real part of λ_j, $j = 1, 2, \dots, p$.

Theorem. *Suppose that the condition* (C) *is valid. If the couple* $(f(t), I_i)$ *is unpredictable, then system (2) possesses a unique asymptotically stable discontinuous unpredictable solution.*

References

[1] Akhmet M., Tleubergenova M., Fen M.O., Nugayeva Z. Unpredictable solutions of linear impulsive systems, *Mathematics*, **8**:10 (2020), 1798.

[2] Akhmet M.,Fen M.O. Non-autonomous equations with unpredictable solutions, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **59** (2018), 657–670.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

LOCAL INTEGRAL RELATIONS OF THE COEFFICIENTS OF A DISCONJUGATE DIFFERENTIAL EQUATION

Maktagul ALDAI[1,a], Danagul KARATAYEVA[1,b]

[1] *L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan*
E-mail: [a]aldai_m@enu.kz, [b]karatayeva_ds@enu.kz

The theory of oscillations as an important component of the modern qualitative theory of differential equations originates from the work of Sturm, who introduced the concept of an oscillatory equation as an equation, any solution of which has infinitely many zeros, and proved his well-known comparison and separation theorems.

For the linear case A. Kneser, W. Leigton, M. Morse, A. Winter, P. Hartman and others obtained oscillation criteria, which found generalizations for nonlinear second order differential equations, in particular, second order half-linear differential equations [1, 2]

$$(\rho(t)|y'|^{p-2}y')' + \upsilon(t)|y|^{p-2}y(t) = 0 \tag{1}$$

$1 < p < \infty, \rho : I \to R, \upsilon : I \to R$ continuous functions, and $\rho(t) > 0$ on I.

Many results are given in terms of an equation disconjugate points, that is, an equation for which any nonzero solution has at most one zero on a given interval. In the well-known works [3], the obtained conditions for the oscillation and non-oscillation of the equation are expressed in terms of the global integral characteristics of the coefficients ρ and υ.

In this work, based on the work of R. Oinarov [4], R. Oinarov, K.R. Myrzatayeva [5] criteria for equations of disconjugate points of both half-linear and linear second order differential equations are obtained in terms of the ratio of the negative and positive parts of the function and its local integral behavior.

We introduce the following notation

$$\upsilon(t) = \delta(t) - \theta(t), \delta(t) > 0, \theta(t) > 0, \forall t \in I, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$d^+(t) = sup\left\{ d > 0 : \left(\int\limits_t^{t+d} \rho^{1-q}(s)ds\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_t^{t+d} \theta(s)ds\right)^{\frac{1}{p}} \le 1 \right\}, [t, t+d] \subset I,$$

$$d^-(t) = sup\left\{ d > 0 : \left(\int\limits_{t-d}^{t} \rho^{1-q}(s)ds\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{t-d}^{t} \theta(s)ds\right)^{\frac{1}{p}} \le 1 \right\}, [t-d, t] \subset I$$

Let,

$$\Delta^+(t) = [t, t + d^+(t)], \Delta^-(t) = [t - d^-(t), t],$$

$$B_p = (p^{q-1}q + 1)^{p-1} \times \sup_{a<t<b} \left(\int\limits_{\Delta^-(t)} \rho^{1-q}(s)ds \right)^{p-1} \int\limits_{\Delta^-(t)} \delta(s)ds.$$

Further, suppose that $I = [a, b), -\infty < a < b \leq +\infty$ and for anyone $t \in (a, b)$.

$$\int\limits_t^b \rho^{1-q}(s)ds = \infty, 0 < \int\limits_t^b \theta(s)ds \leq \infty \tag{2}$$

Theorem [6]. *Let $1 < p < \infty$ and conditions (2). If the $2B_p < 1$, the equation (1) is an equation disconjugate points on the interval (a, b).*

Theorem 1. *Let $1 < p < \infty$ and conditions (2). If the*

$$\sup_{a<t<b} \left[\left(\int\limits_{\Delta^-(t)} \theta(s)ds \right)^{-1} \left(\int\limits_{\Delta^+(t)} \delta(s)ds \right) \right]^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{2} min \left\{ \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

the equation (1) is the equation with disconjugate points on the interval (a, b).

Corollary. *Let conditions (2) be held when $p = 2$. If the condition*

$$\sup_{a<t<b} [(\int\limits_{\Delta^-(t)} \theta(s)ds)^{-1} (\int\limits_{\Delta^+(t)} \delta(s)ds)]^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{4}$$

hold, then when the equation (1) is the equation disconjugate points on (a, b).

Keywords: The theory of oscillations, oscillatory equation, oscillatory and non-oscillatory conditions, equations without conjugate points, half linear differential equation.

2010 Mathematics Subject Classification: 35B05, 35G99

References

[1] Elbert A. A half-linear second order differential equation, *Coloq. Math. Soc. Janos Bolyai. Hungary*, **30** (1979), 158–180.

[2] Mirzov J.D. On some analogs of Sturm's and Kneser's theorems for nonlinear systems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **53** (1976), 418–425.

[3] Dosly O., Rehak P. *Half-Linear Differential Equations*, North Holland Mathematics Studies, Amsterdam (2005).

[4] Oinarov R. Reversion of Holder type inequalities for sums of weighted norms and additive weighted estimates of integral operators, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **6** (2003), 418–425.

[5] Oinarov R., Myrzatayeva K.R. Nonoscillation semilinear second order differential equation, *Mathem. Journal*, **7**:2(24) (2007), 72–82 (in Russ.).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

STABILITY OF HYPERBOLIC-PARABOLIC DIFFERENTIAL AND DIFFERENCE EQUATIONS WITH INVOLUTION

A. ASHYRALIYEV[1,2,3,a], M. ASHYRALIYEV[4,b], M.A. ASHYRALIYEVA[5,c]

[1] *Dep. of Mathematics, Near East University, Nicosia, Mersin 10, Turkey*
[2] *Peoples' Friendship University of Russia (RUDN), Moscow, RF*
[3] *Inst. of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[4] *Dep. of Software Eng., Bahcesehir University, Istanbul, Turkey*
[5] *Turkmen State University, Ashgabat, Turkmenistan*
E-mail: [a]allaberen.ashyralyev@neu.edu.tr, [b]maksat.ashyralyyev@eng.bau.edu.tr, [c]ashyrmaral2010@mail.ru

Differential equations with involution appear in mathematical models of ecology, biology, and population dynamics (see, [1]-[2]). Partial differential equations with involution have been investigated by many scientists (see, [3]-[4]). However, mixed type of differential equations with involution have not been investigated. In the present paper, the stability of hyperbolic-parabolic equations with involution is studied. The stability of the differential equation with involution is established. Absolute stable difference scheme for the numerical solution of hyperbolic-parabolic differential equation with involution is presented. The stability of this difference scheme is proved. Numerical results are given.

References

[1] Wiener J. *Generalized Solutions of Functional Differential Equations*, Singapore New Jersey, London Hong Kong (1993).

[2] Cabada A., Tojo F. *Differential Equations with Involutions*, Atlantis Press (2015).

[3] Ashyralyev A., Sarsenbi A.M. Well-posedness of a parabolic equation with the involution, *Num. Func. Anal. and Opt.*, **38**:10 (2017), 1295–1304.

[4] Sarsenbi A.A. Well-Posedness of Mixed Problems for Parabolic Type with Involution, *PhD Thesis*, CSU, Kazakhstan (2019).

— ⁎ ⁎ ⁎ —

A MULTIPOINT PROBLEM FOR FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Anar ASSANOVA[1,a], Ayazhan ERMEK[1,2,b]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *al-Farabi Kazakh National university, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]assanova@msth.kz, [b]nis_ayazhan@mail.ru

Consider the multipoint problem for the system of Fredholm integro-differential equations with degenerate kernels

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{j=1}^{k} \int_0^T \varphi_j(t)\psi_j(\tau)x(\tau)d\tau + f(t), \quad t \in (0,T), \quad x \in R^n, \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{m} B_i x(t_i) = d, \quad d \in R^n. \tag{2}$$

Here $x(t) = col(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ is an unknown function, $(n \times n)$ matrix $A(t)$ and n-vector $f(t)$ are continuous on $[0,T]$, $(n \times n)$ matrices $\varphi_j(t)$, $\psi_j(\tau)$, $j = \overline{1,k}$, are continuous on $[0,T]$, B_i are constant $(n \times n)$ matrices, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{m-1} < t_m = T$.

The solution to multipoint problem (1), (2) is a function $x^*(t) : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ that is continuous on $[0, T]$, continuously differentiable on $(0, T)$ and satisfies integro-differential equations (1) and multipoint condition (2).

The aim of the present communication is to obtain criteria for the unique solvability of problem (1), (2) and develop algorithms for finding its approximate solutions. To this end, the Dzhumabaev's parametrization method [1-3] is used. The interval $[0, T]$ is partitioned and additional parameters are introduced as the values of the desired solution at the left endpoints of the partition subintervals. When applying the method of parametrization to problem (1), (2), some intermediate problems occur, so called special Cauchy problems for integro-differential equations with parameters [2-5].

We divide $[0, T]$ into m parts and introduce additional parameters as the values of the desired solution at the left endpoints $t = t_i$, $i = \overline{0, m-1}$, of the subintervals. The unique solvability of a special Cauchy problem for the Δ_m partition is equivalent to the invertibility of a matrix $I - G(\Delta_m)$ constructed through a fundamental matrix of the differential part and the matrices of the integral kernel. The Δ_m partition is called regular if the matrix $I - G(\Delta_m)$ is invertible (see [5-7]). For the regular Δ_m partition, a system of linear algebraic equations in the parameters introduced is constructed using $[I - G(\Delta_m)]^{-1}$, the multipoint condition (2), and the continuity conditions at the interior partition points $t = t_i$, $i = \overline{1, m-1}$. It is shown that the invertibility of the matrix of the system constructed is equivalent to the unique solvability of the multipoint problem under consideration.

So, we develop the algorithms for finding a solution to a multipoint boundary value problem for the integro-differential equation with degenerate kernel. For the chosen Δ_m partition, the matrix $G(\Delta_m)$ is calculated. If there is an inverse of $I - G(\Delta_m)$, then we construct a system of linear algebraic equations. The elements of $G(\Delta_m)$, the coefficients and right-hand side of the system are determined by the solutions of the Cauchy problems for ordinary differential equations and the values of the definite integrals of some functions over the partition subintervals. By solving the system of algebraic equations, we determine the values of the solution at the left endpoints of the subintervals. Next, using the values obtained and the data of the integro-differential equation we compose a function $\mathcal{F}^*(t)$ that is continuous on $[0, T]$. Solving the Cauchy problems for ordinary differential equations with the right-hand side $\mathcal{F}^*(t)$, we get the values of the desired solution at the remaining points of the interval $[0, T]$. If a fundamental matrix of the differential part is found explicitly and the integrals are evaluated exactly, then the algorithm allows us to find a closed-form solution as well. As is known, it is usually impossible to explicitly find the fundamental matrix for a system of ordinary differential equations with variable coefficients, and, in general, only approximate values of definite integrals can be obtained [5-8].

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09258829).

Keywords: Fredholm integro-differential equation, multipoint problem, Dzhumabaev's parametrization method, algorithm, solvability.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B10, 45J05, 65D15, 65F05

References

[1] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, *U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys.*, **29**:1 (1989), 34–46.

[2] Dzhumabaev D.S. A method for solving the linear boundary value problem for an integro-differential equation, *Comput. Math. Math. Phys.*, **50**:7 (2010), 1150–1161.

[3] Dzhumabaev D.S. Necessary and sufficient conditions for the solvability of linear boundary-value problems for the Fredholm integro-differential equation, *Ukr. Math. J.*, **66**:7 (2015), 1200–1219.

[4] Dzhumabaev D.S. An algorithm for solving the linear boundary value problem for an integro-differential equation, *Comput. Math. Math. Phys.*, **53**:4 (2013), 736–758.

[5] Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations, *J. Comput. Appl. Math.*, **294**:2 (2016), 342–357.

[6] Dzhumabaev D.S. Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **41** (2018), 1439–1462.

[7] Dzhumabaev D.S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems, *J. Comput. Appl. Math.*, **327**:1 (2018), 79–108.

[8] Assanova A.T., Bakirova E.A., Uteshova R.E. Novel approach for solving multipoint boundary value problem for integro-differential equation, *Kazakh Mathematical Journal*, **20**:1 (2020), 103–124.

— ⁂ —

ON THE SOLVABILITY OF A FAMILY OF PROBLEMS FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF MIXED TYPE

Anar ASSANOVA[1,a], Aigul SABALAKHOVA[2,b], Zauresh TOLEUKHANOVA[3,c],

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *M.Auezov South Kazakhstan University, Shymkent, Kazakhstan*
[3] *Kazakh National Women's Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]assanova@math.kz, [b]sabalahova@mail.ru, [c]zauresh03@mail.ru

On the domain $\Omega = [0,T]\times[0,\omega]$ we consider a family of two-point boundary value problems for a system of integro-differential equations of mixed type

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(t,x)v + f(t,x)+$$

$$+\varphi_1(t,x)\int\limits_0^T \psi_1(s,x)v(s,x)ds + \varphi_2(t,x)\int\limits_0^t \psi_2(s,x)v(s,x)ds, \tag{1}$$

$$B(x)v(0,x) + C(x)v(T,x) = d(x), \qquad x\in[0,\omega], \tag{2}$$

where $v(t,x) = (v_1(t,x), v_2(t,x), ..., v_n(t,x))$ is unknown function, $n\times n$ matrices $A(t,x)$, $\varphi_1(t,x)$, $\varphi_2(t,x)$ are continuous on Ω, $n\times n$ matrices $\psi_1(s,x)$, $\psi_2(s,x)$ are continuous on Ω, n vector function $f(t,x)$ is continuous on Ω, $n\times n$ matrices $B(x)$, $C(x)$ are continuous on $[0,\omega]$, n vector function $d(x)$ is continuous on $[0,\omega]$.

Continuous function $v:\Omega\to\mathbb{R}^n$ that has a continuous derivative with respect to t on Ω is called a solution to the family boundary value problems for the system of integro-differential equations of mixed type (1), (2) if it satisfies system (1) and condition (2) for all $(t,x)\in\Omega$ and $x\in[0,\omega]$, respectively.

For fixed $x\in[0,\omega]$ problem (1), (2) is a linear two-point boundary value problem for the system of integro-differential equations of mixed type [1-3]. Suppose a variable x is changed on $[0,\omega]$, then we obtain a family of two-point boundary value problems for integro-differential equations of mixed type.

We investigate questions for the solvability of the family of boundary value problems for the system of integro-differential equations of mixed type with degenerate kernels. The original problem is first reduced to a family of boundary value problems for the Fredholm integro-differential equation with an unknown function associated with the desired function by an integral relation. For solving this problem we use Dzhumabaev's parametrization method [4-7]. This family of problems can also be interpreted as a family of inverse problems for a system of Fredholm integro-differential equations with a degenerate kernel [8-10]. On the other hand, this problem is a problem with a parameter for the system of Fredholm integro-differential equations [11-13].

Then, by introducing an additional functional parameter as the value of the solution on the boundary of the domain, the problem is reduced to an equivalent problem containing a family of Cauchy problems for a system of Fredholm integro-differential equations with unknown functions, a hybrid system of functional and integral equations for a function parameter and an unknown function. Conditions for the unique solvability of the problem under consideration are obtained in terms of the solvability of families of Cauchy problems and a hybrid system.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09258829).

Keywords: family of boundary value problems, integro-differential equations of mixed type, parametrization method, solvability.

2010 Mathematics Subject Classification: 34K06, 34K10, 34K29, 34K34, 45J05

References

[1] Boichuk A.A., Samoilenko A.M. *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, VSP, Utrecht, Boston (2004).

[2] Brunner H. *Collocation methods for Volterra integral and related functional equations*, Cambridge University Press, Cambridge (2004).

[3] Wazwaz A.M. *Linear and nonlinear integral equations: Methods and applications*, Higher Equation Press, Beijing and Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg (2011).

[4] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, *U.S.S.R. Comp. Math. Math. Phys.*, **29**:1 (1989), 34–46.

[5] Dzhumabaev D.S. Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integrodifferential equations, *Math. Methods Appl. Sci.*, **41**:7 (2018), 1439–1462.

[6] Dzhumabaev D.S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems, *J. Comp. Appl. Math.*, **327**:1 (2018), 79–108.

[7] Dzhumabaev D.S. New general solutions of ordinary differential equations and the methods for the solution of boundary value problems, *Ukranian Math. J.*, **71**:7 (2019), 1006–1031.

[8] Yuldashev T.K. Inverse problem for a nonlinear Benney-Luke type integro-differential equations with degenerate kernel, *Russian Math.*, **60**:9 (2016), 53–60.

[9] Yuldashev T.K. Mixed problem for pseudoparabolic integro-differential equation with degenerate kernel, *Differ. Equ.*, **53**:1 (2017), 99–108.

[10] Yuldashev T.K. Determination of the coefficient and boundary regime in boundary value problem for integro-differential equation with degenerate kernel, *Lobachevskii J. Math. Differ. Equ.*, **38**:3 (2017), 547–553.

[11] Assanova A.T., Bakirova E.A., Kadirbayeva Z.M. and Uteshova R.E. A computational method for solving a problem with parameter for linear systems of integro-differential equations, *Comp. Appl. Math.*, **39**:3 (2020), Art. 248.

[12] Assanova A.T., Bakirova E.A., Vassilina G.K. Well-posedness of problem with parameter for an integro-differential equation, *Analysis (Germany)*, **40**:4 (2020), 175–191.

[13] Bakirova E.A., Assanova A.T., Kadirbayeva Z.M. A problem with parameter for the integro-differential equations, *Mathematical Modelling and Analysis*, **26**:1 (2021), 34–54.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

A PROBLEM WITH PARAMETER FOR DIFFERENTIAL EQUATION OF SECOND ORDER

Anar ASSANOVA[1,a], Yerkegul SHYNARBEK[1,2,b]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *al-Farabi Kazakh National university, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*assanova@msth.kz,* [b]*Yerkyegul.sh@gmail.com*

In the present communication we consider the boundary value problem with parameter for the ordinary differential equation of second order

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_2(t)x + b(t)\mu + f(t), \qquad t \in (0,T), \tag{1}$$

$$x(0) = x^0, \qquad x(T) = x^1, \qquad \frac{dx(t)}{dt}\Big|_{t=T} = x^2, \tag{2}$$

where $x(t)$ is an unknown function, the functions $a_1(t)$, $a_2(t)$, $b(t)$ and $f(t)$ are continuous on $[0,T]$, x^0, x^1 and x^2 are constants.

The solution to boundary value problem with parameter (1), (2) is a pair $(\mu^*, x^*(t))$, where the parameter $\mu^* \in \mathbb{R}$, the function $x^*(t) : [0,T] \to \mathbb{R}$ that is continuous on $[0,T]$, twice continuously differentiable on $(0,T)$, and satisfies differential equation of second order (1) and initial and boundary conditions (2).

The aim of the communication is to obtain criteria for the unique solvability of problem with parameter (1), (2) and propose algorithms for finding its approximate solutions.

At first, we introduce a new functions $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ for all $t \in [0,T]$.

Problem with parameter (1), (2) reduce to an equivalent problem with parameter for system of two differential equations in the following form

$$\begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_1(t)x_2 + a_2(t)x_1 + b(t)\mu + f(t) \end{array}, \qquad t \in (0,T), \tag{3}$$

subject to the boundary conditions

$$x_1(0) = x^0, \qquad x_1(T) = x^1 \qquad x_2(T) = x^2. \tag{4}$$

By a solution to problem (3), (4) we mean a triple $(\mu^*, x_1^*(t), x_2^*(t))$, where $\mu^* \in \mathbb{R}$ and $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$ are continuous on [0, T] and continuously differentiable on $(0,T)$ functions, satisfying conditions (4) and system (3) with $\mu = \mu^*$.

Further, for solve problem (3), (4) we use the Dzhumabaev's parametrization method [1-3]. We reduce the problem (3), (4) to a problem with an additional parameter λ that is chosen as the value of the function $x_2(t)$ at the point $t = 0$: $\lambda \doteq x_2(0)$. Then, by substituting $u_1(t) = x_1(t) - x^0$, $u_2(t) = x_2(t) - \lambda$, problem (3), (4) is transformed into the following problem:

$$\begin{array}{l} \frac{du_1}{dt} = u_2 + \lambda \\ \frac{du_2}{dt} = a_1(t)[u_2 + \lambda] + a_2(t)[u_1 + x^0] + b(t)\mu + f(t) \end{array}, \qquad t \in (0,T), \tag{5}$$

$$u_1(0) = 0, \qquad u_2(0) = 0, \tag{6}$$

$$u_1(T) = x^1 - x^0, \qquad u_2(T) = x^2 - \lambda. \tag{7}$$

A solution to problem (5)-(7) is a quadruple $(\mu^*, \lambda^*, u_1^*(t), u_2^*(t))$, where $\mu^*, \lambda^* \in \mathbb{R}$ and functions $u_1^*(t)$, $u_2^*(t)$ satisfy the system of differential equations (5) and conditions (6), (7) with $\mu = \mu^*$ and $\lambda = \lambda^*$. Obviously, if this quadruple is a solution to problem (5)-(7), then the triple $(\mu^*, x_1^*(t), x_2^*(t))$ with $x_1^*(t) = u_1^*(t) - x^0$ and $x_2^*(t) = u_2^*(t) - \lambda^*$ is a solution to problem (3), (4). Then, the pair $(\mu^*, x^*(t))$ with $x^*(t) = x_1^*(t)$ is a solution to original problem (1), (2).

The Cauchy problem (5), (6) has a unique solution $u(t,\lambda,\mu) = (u_1(t,\lambda,\mu),$ $u_2(t,\lambda,\mu))$ for all $\lambda \in \mathbb{R}$ and $\mu \in \mathbb{R}$. By substituting the value $u(T,\lambda,\mu)$ into the boundary condition (7), we get the following system of linear algebraic equations in parameters λ and μ:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(T,\lambda,\mu) = x^1 - x^0 \\ u_2(T,\lambda,\mu) + \lambda = x^2 \end{array} \right. . \tag{8}$$

Problem (5)-(7) is solvable if the system of algebraic equations (8) has a solution $(\lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^2$.

Therefore, problem with parameter (1), (20 is solvable if the system of algebraic equations (8) is solvable [4].

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08855761).

Keywords: problem with parameter, differential equation of second order, Dzhumabaev's parametrization method, solvability, Cauchy problem.

2010 Mathematics Subject Classification: 34A34, 34B08, 34B30, 34C25

References

[1] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, *U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys.*, **29**:1 (1989), 34–46.

[2] Dzhumabaev D.S. A method for solving the linear boundary value problem for an integro-differential equation, *Comput. Math. Math. Phys.*, **50**:7 (2010), 1150–1161.

[3] Dzhumabaev D.S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems, *J. Comput. Appl. Math.*, **327**:1 (2018), 79–108.

[4] Dzhumabaev D.S. New general solutions of ordinary differential equations and the methods for the solution of boundary-value problems, *Ukrainian Math. J.*, **71**:7 (2019), 1006–1031.

— ⋇ ⋇ ⋇ —

RESTORING TWO-POINT BOUNDARY CONDITIONS FOR A FINAL SET OF OWN THE VALUES OF THE BOUNDARY PROBLEMS FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS HIGHER ORDERS

Gauhar AUZERKHAN[1,a], Baltabek KANGUZHIN[1,2,b], Zhalgas KAIYRBEK[1,2,c]

[1] *Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

[2] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

E-mail: [a]*auzerkhanova@gmail.com*, [b]*kanbalta@mail.ru*, [c]*kaiyrbek.zhalgas@gmail.com*

Reconstruction of boundary conditions for differential equations higher orders in a certain set of spectra is hampered by two circumstances: mi. First, in contrast to second-order differential equations in the case differential equations of higher orders there are no triangular operators transformation. Secondly, non-decaying boundary conditions introduce additional significant analytical difficulties in their reconstruction from a set of spectra. Note that in this paper, we propose a new method for normalizing the boundary conditions, which is adapted for their subsequent restoration according to a certain set of spec- tons of boundary value problems.In other words, before asking the question of what data should restore a set of boundary conditions, they must be reduced to canonical form. Then, proceeding from the proposed canonical form, a system of boundary value problems is selected, from the set of spectra of which the boundary conditions are restored.

In functional space $L_2(0,1)$ consider the eigenvalue problem. Consider a mixed problem for the system of wave equations

$$d(y) = y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(x) y^{(k)}(x) = \lambda y(x), \tag{1}$$

$$V_j(y) = \sum_{s=1}^{n} (\alpha_{js} y^{(s-1)}(0) + \beta_{js} y^{(s-1)}(1)) = 0, \qquad j = 1, ..., n, \tag{2}$$

where $p_k(x)$ -sufficiently smooth coefficients of the differential equation, α_{js}, β_{js} -numerical coefficients of the boundary conditions. We assume that $\lambda = 0$ is not value of problem (1) and (2). According to the assumption, the resolvent set of problem (1) - (2) is not empty and, as a consequence, it follows that the spectrum of the original problem consists of a countable number of eigenvalues. When solving the direct problem, it is first necessary to normalize the set of boundary conditions (1) - (2).

We introduce a fundamental system of solutions $y_i(0)$ homogeneous equation $d(y) = 0$ with standard Cauchy conditions at zero $y_i^{(s-1)}(0) = \delta_{is}$. Function $u_0(x)$, determined by the formula

$$u_0(x) = \int_0^x g(x,t) f(t) dt.$$

is a solution to the inhomogeneous Cauchy problem with zero conditions at zero

$$d(u_0) = f(x), \qquad u_0^{(s-1)}(0) = 0.$$

Note also that the relations are valid for $s = 1, ..., n$

$$u_0^{(s-1)}(x) = \int_0^x \frac{\partial^{s-1}}{\partial x^{s-1}} g(x,t) f(t) dt.$$

Now we can formulate a statement.

For anyone f of $L_2(0,1)$ inhomogeneous equation $d(u) = f(x)$ has a single a natural solution that satisfies the conditions (2).Moreover, for such a solution fair representation

$$u(x) = u_0(x) - \sum_{s=1}^{n} \varphi_s(x) V_s(u_0). \tag{3}$$

Here $\varphi_s(x)$-system decisions homogeneous equations $d(y) = 0$ with conditions

$$V_j(\varphi_s) = \delta_{js}, \qquad j = 1, ..., n.$$

The statement is proved by direct verification.The uniqueness follows from the pre- provisions: $\lambda = 0$ is not an eigenvalue of problem (1) and (2). Let's calculate boundary shape values $V_j(u_s)$.

Funding: The authors were supported by the grant No. AP08855402. of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: boundary conditions, boundary value problems, eigenvalue.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

VAN DER CORPUT LEMMAS WITH BESSEL FUNCTIONS

Aray BEISENBAY[1,a],

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*beisenbay@math.kz*

The paper is devoted to study analogues of the van der Corput lemmas [1] involving Bessel functions. The generalization is that we replace the exponential function with the Bessel functions, to study oscillatory integrals appearing in the analysis [1] of wave equation with singular damping. More specifically, we study integral of the form

$$J(\lambda) = \int_\Omega J_1(\lambda\phi(x))\psi(x)dx,$$

The Bessel function is [2]

$$J_1(\lambda\phi(x)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2m+1} \phi^{2m+1}(x)$$

In harmonic analysis, one of the most important estimates is the van der Corput lemma, which is an estimate of the oscillatory integrals.

Keywords: van der Corput lemma, Bessel function, asymptotic estimate.

References

[1] Stein E.M. *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton Univ. Press, Princeton (1993).

[2] Lebedev, N.N. *Special functions and their applications*, State publication of physical and mathematical literature, Moscow (1963).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

SIMILAR TRANSFORMATION OF ONE CLASS OF CORRECT RESTRICTIONS

Bazarkan BIYAROV[1,a]

[1]L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan
E-mail: [a]bbiyarov@gmail.com

The description of all correct restrictions of the maximal operator are considered in a Hilbert space. A class of correct restrictions are obtained for which a similar transformation has the domain of the fixed correct restriction. The resulting theorem is applied to the study of n-order differentiation operator with singular coefficients. Let a closed linear operator L be given in a Hilbert space H. It is known that if one of the correct restriction L of a maximal operator $\widehat{L}$ is known, then the inverses of all correct restrictions of $\widehat{L}$ have in the form

$$L_K^{-1}f = L^{-1}f + Kf, \tag{1}$$

where K is an arbitrary bounded linear operator in H such that $R(K) \subset \operatorname{Ker}\widehat{L}$.

Let L_0 be some minimal operator, and let M_0 be another minimal operator related to L_0 by the equation $(L_0u, v) = (u, M_0v)$ for all $u \in D(L_0)$ and $v \in D(M_0)$. Then $\widehat{L} = M_0^*$ and $\widehat{M} = L_0^*$ are maximal operators such that $L_0 \subset \widehat{L}$ and $M_0 \subset \widehat{M}$. A correct restriction L of a maximal operator $\widehat{L}$ such that L is simultaneously a correct extension of the minimal operator L_0 is called a *boundary correct extension*.

The inverse operators to all possible correct restrictions L_K of the maximal operator $\widehat{L}$ have the form (1), then

$$D(L_K) = \left\{u \in D(\widehat{L}) : (I - K\widehat{L})u \in D(L)\right\}$$

is dense in H if and only if $\operatorname{Ker}(I + K^*L^*) = \{0\}$. All possible correct extensions M_K of M_0 have inverses of the form

$$M_K^{-1}f = (L_K^*)^{-1}f = (L^*)^{-1}f + K^*f,$$

where K is an arbitrary bounded linear operator in H with $R(K) \subset \operatorname{Ker}\widehat{L}$ such that

$$\operatorname{Ker}(I + K^*L^*) = \{0\}.$$

The main result of this work is the following

Theorem 1. *Let L be boundary correct extension of L_0, that is, $L_0 \subset L \subset \widehat{L}$. If L_K is densely defined in H and*

$$R(K^*) \subset D(L^*) \cap D(L_K^*),$$

where K and L are the operators in representation (1), then $\overline{KL_K}$ is bounded in H and a correct restriction L_K of the maximal operator $\widehat{L}$ is similar to the correct operator

$$A_K = L - \overline{KL_K}L \ \text{ on } \ D(A_K) = D(L).$$

Corollary 1. *Suppose the hypothesis of Theorem 1 is satisfied. Then a correct extension L_K^* of a minimal operator M_0 is similar to the correct operator*

$$A_K^* = L^*(I - L_K^*K^*),$$

on

$$D(A_K^*) = \{v \in H : (I - L_K^* K^*)v \in D(L^*)\}.$$

Keywords: maximal (minimal) operator, correct restriction, correct extension, similar operators, singular coefficients, Riesz basis with brackets.

2010 Mathematics Subject Classification: 47A05, 47A10

— ⁂ —

INVESTIGATION OF THE CAUCHY PROBLEMS FOR PARABOLIC EQUATIONS IN THE WEIGHTED HÖLDER SPACES

Galina BIZHANOVA[1,a]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*galina_math@mail.ru*

We study two Cauchy problems in $\mathbb{R}^n_T := \mathbb{R}^n \times (0,T)$, $n \geq 2$: problem 1 for a parabolic equation with singular in t coefficients at the first derivatives with respect to spatial variables [1] and problem 2 for a parabolic equation with the continuous coefficients at the first derivatives with respect to spatial variables, but the smoothness of which is less, than it is required to obtain solution belonging to the classical Hölder space [2].

The problems for parabolic equations in non-cylindrical domains with moving or free (unknown) boundaries, when the required smoothness of the solutions is higher than the smoothness of the boundary of the domain are reduced to such problems 1 and 2.

With the help of Laplace on t and Fourier on $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ we construct the solutions of the problems in the explicit form. This permit us to determine the weighted Hölder spaces for the solutions with the weights of positive power of t.

By direct evaluations of the solutions we derive the estimates of them in this weighted spaces and obtain an existence and uniqueness of the solutions.

Funding: The author was supported by the grant No. AP05133898/GF4 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: Cauchy problem, parabolic equation, weighted Hölder space, existence, estimate, uniqueness of the solution.

2010 Mathematics Subject Classification: 5K15, 35K67, 35A01, 35A02, 35A20, 35B65

References

[1] Bizhanova G.I. A solution to the Cauchy problem for parabolic equation with singular coefficients, *Journal of Mathematical Sciences*, **244**:6 (2020), 946–958.

[2] Bizhanova G.I. Investigation of the solution of Cauchy problem for the parabolic equation in the weighted Hölder space, *Mathematical Journal*, **18**:3 (2018), 18–33.

— ⁂ —

MULTIDIMENSIONAL SINGULAR INTEGRALS AND INTEGRAL EQUATIONS IN FRACTIONAL SPACES

N.K. BLIEV[1,a]

[1] Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: [a]bliev.nazarbay@mail.ru

In this work, we study boundedness, noetherity and smoothness properties of multidimensional singular integral operators and solvability of the corresponding singular integral equations in Besov spaces. The present work is a direct continuation of the paper [1], where singular integrals with characteristics independent of poles and the corresponding singular integral equations in Besov spaces were studied.

Let E be an extended Euclidean space E^n (with the Lebesgue measure) added point ∞ at infinity, i.e. E is a bicompact (or quasi-compact) Hausdorff space. Open sets in E are open sets in E^n, as well as complements (in E) of closed subsets of E^n. Such form open sets serve as neighborhoods of the point at infinity in E and any displacement of the point ∞ at infinity belongs to E^n. In what follows, singular integrals will be considered in Besov spaces $B \equiv B(E)$, the parameters of which will be refined below.

Consider a singular integral

$$g(x) \equiv (S_x f)(x) = \int_E \frac{\Omega(x,\theta)}{|y-x|^n} f(y)dy, \tag{1}$$

which is understood in the sense of Cauchy principal value, where the characteristic Ω depends only on poles x. If the following conditions [2]

(a) $\int_{\mathbb{S}_1} \Omega(x,\theta)d\theta = 0$, where $\mathbb{S}_1$ is a unit sphere;

(b) $\int_{\mathbb{S}_1} |\Omega(x,\theta)|^{p'}d\theta < \infty, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1, 1 < p < \infty,$

hold, then S_x is a bounded operator on $L_p(E)$ and we have

$$\|S_x f\|_p \le A_p \|f\|_p, \quad \forall f \in L_p(E),$$

where A_p is a constant depending on p. Here and further $\|\cdot\|_p$ means $L_p(E)$ - norm.

Throughout this paper we assume that the characteristic $\Omega(x,\theta)$, as a function, satisfies conditions (a) and (b) for any $x \in E$ and $\theta \in \mathbb{S}_1$, it satisfies

(c) $\Omega(x,\theta) \in B^{\ell_1}_{p_1,1}(E^n), \quad 1 < p_1 < \infty, \quad \ell_1 \cdot p_1 = n \quad (\ell_1 > 0)$

as a function of x. As seen the Besov space $B_1 \equiv B^{\ell_1}_{p_1,1}(E)$ is embedded into the space $C(E)$ of continuous bounded functions when $\xi \in \mathbb{S}_1$ and the following inequality

$$\|\Omega(\cdot,\theta)\|_{C(E)} \le M\|\Omega(\cdot,\theta)\|_{p',B_1}$$

holds. Again, here and further the norm with two indexes means a mixed norm in the order of the indexes, i.e $\|\cdot\|_{p',B_1}$ is a $B_1(E)-$norm of x and $L_{p'}(E)-$norm of θ, and M (with and without indexes) is an absolute constant independent of all important parameters.

Theorem 1. *Let the conditions (a),(b), and (c) hold. Then the singular integral operator S_x defined in (1) is bounded on $B \equiv B^{\ell}_{p,1}(E)$, $1 < p < \infty$, $0 < \ell \le \ell_1 = \frac{n}{p_1}$, $1 < p_1 \le p$, and we have*

$$\|S_x f\|_B \le M\|f\|_B, \quad \forall f \in B(E).$$

The symbol of the singular operator S_x in (1) is defined locally for any fixed x (see [3, p.110]), i.e. its symbol $\Phi(x,\theta)$ equals to $\hat{A}_x(\xi)$ for any fixed x and any $\xi \in \mathbb{S}_1$.
The bounded singular operator S_x to be Noether in

$$B_1 = B^{\ell}_{p,1}(E), \qquad 1 < p < \infty, \quad 0 < \ell \le \ell_1 = \frac{n}{p_1}, \quad 1 < p_1 \le p,$$

it is necessary and sufficient that $\hat{A}_x(\xi)$ does not vanish on $\mathbb{S}_1$ for any fixed $x \in E$.

Let us consider a singular integral equation in

$B_1 = B^{\ell}_{p,1}(E), \quad 1 < p < \infty, \quad 0 < \ell \le \ell_1 = \dfrac{n}{p_1}, \quad 1 < p_1 \le p:$

$$(Cf)(x) = af(x) + \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_E \frac{\Omega(x,\theta)}{|y-x|^n} f(y)dy + (Tf)(x) = g(x), \tag{2}$$

where a is independed of x, T is a completely continuous operator and $g \in B_1(E)$.

The equation (2) is noetherian solvability in $B_1(E)$ if and only if its symbol $\Phi(x,\theta) = \hat{A}_x(\xi)$ is different from zero for any $\xi \in \mathbb{S}_1$ and $x \in E$.

Keywords: Multidimensional singular integrals; singular integral equations; Besov spaces.

2010 Mathematics Subject Classification: 30E25,30E20, 45E05

References

[1] Bliev N.K. Multidimensional singular integrals and integral equations in fractional spaces I, *Complex Var. Elliptic Equ.*, **1**:2 (2020), 3–45.

[2] Bliev N.K. Singular integral operators with a Cauchy kernel in fractional spaces, *Sib. Math. J.*, **47**:1 (2006), 28–34.

[3] Besov O.V., Il'in V.P., and Nikol'skiĭ S.M. *Integral representations of function and embedding theorems, 1, 2*, John Willey, New York (1978, 1979).

— ※ ※ ※ —

POTENTIAL TYPE OPERATOR IN GLOBAL MORREY-TYPE SPACES WITH VARIABLE EXPONENT ON UNBOUNDED SETS

Nurzhan BOKAYEV[1,a], Zhomart ONERBEK[1,b], Aidos ADILKHANOV[1,c]

[1] *L.N.Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan*

E-mail: [a]*bokayev2011@yandex.ru*, [b]*onerbek93@mail.ru*, [c]*adilkhanov.kz@mail.ru*

We consider global Morrey-type spaces with variable exponent in unbounded domains. Conditions for the boundedness of the Riesz potential and the fractional maximal function in these spaces were obtained.

The Riesz potential $I^{\alpha(x)}$ with the variable exponent $\alpha(x)$ is defined by the following equality:

$$I^{\alpha(x)} f(x) = \int\limits_{R^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha(x)}} dy, \quad 0 < \alpha(x) < n.$$

In case $\alpha(x) = \alpha$ this operator coincides with the classical Riesz potential I^{α}.

Let $p(x)$ be a measurable function on open set $\Omega \subset R^n$ with the values in $[1,\infty)$. We suppose $1 < p_- \le p(x) \le p_+ < \infty$, where $p_- = ess\inf_{x\in\Omega} p(x)$, $p_+ = ess\sup_{x\in\Omega} p(x)$. We denote by $L_{p(.)}(\Omega)$ the space of all measurable functions $f(x)$ on Ω such that $J_{p(.)}(f) = \int_\Omega [f(x)]^{p(x)} dx < \infty$, where the norm is defined as follows $\|f\|_{p(.)} = \inf\left\{\eta > 0,\ J_{p(.)}\left(\frac{f}{\eta}\right) \le 1\right\}$. Let $P^(\Omega)$ is the set of bounded measurable functions $p : \Omega \to [1,\infty]$, $P^{\log}(\Omega)$ is the set of exponents $p \in P^(\Omega)$ satisfying the local log -condition

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{A_p}{-\ln|x-y|}, \ |x-y| \le \frac{1}{2}, \ x, y \in \Omega, \tag{1}$$

where A_p is independent of x and y, $A^{\log}(\Omega)$ is the set of bounded exponents $\alpha : \Omega \to R$ satisfying the condition (1), and $\mathbf{P}^{\log}(\Omega)$ is the set of exponents $p \in P^{\Omega}$ with $1 < p_- \le p_+ < \infty$.

For Ω which can be unbounded we denote by $P_\infty(\Omega)$, $P_\infty^{\log}(\Omega)$, $\mathbf{P}_\infty^{\log}(\Omega)$, $A_\infty^{\log}(\Omega)$ the subsets of the above sets of exponents satisfying the decay condition (when Ω is bounded): $|p(x)-p(\infty)| \le A_\infty \ln(2+|x|)$, $x \in R^n$. Let

$$\eta_p(x,r) = \frac{n}{p(x)}, \text{ \&if } r \le 1; \quad \eta_p(x,r) = \frac{n}{p(\infty)} \text{ ,\&if } r > 1.$$

Let $p \in \mathbf{P}^{log}(\Omega)$, $w(x,r)$ is a positive function on $\Omega \times [0,\infty]$, where $\Omega \in R^n$, $\theta(r) : (0,\infty) \to [1,\infty]$ be measureable functions. The Global Morrey type spaces $GM_{p(.),\theta(.),w(.)}(\Omega)$ with variable exponent is defined as the set of functions $f \in L_{p(.)}^{loc}(\Omega)$ with finite norm

$$||f||_{GM_{p(.),\theta(.),w(.)}(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ||w(x,r)r^{-\eta_p(x,r)}||f||_{L_{p(.)}(B(x,r))}||_{L_{\theta(.)}(0,\infty)}.$$

Theorem 1. *Let $p(.) \in P_\infty^{\log}(\Omega)$, the constant number α satisfies the condition $\alpha > 0$, $(\alpha p(.))_+ = \sup_{x\in\Omega} \alpha p(x) < n$, $1 < \theta_1{}^- \le \theta_1(t) \le \theta_1{}^+ < \infty$, $1 < \theta_2{}^- \le \theta_2(t) \le \theta_2{}^+ < \infty$, the functions $p(x)$ and $q(x)$ satisfy $\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha}{n}$, the functions w_1 and w_2 satisfy the condition*

$$A = \sup_{x\in\Omega} \left\| w_2^{-1}(x,r) \left\| t^{\eta_p(x,t)-\eta_q(x,t)} \frac{w_1(x,t)}{t} \right\|_{L_{\theta_1'(.)}(r,\infty)} \right\|_{L_{\theta_2(.)}(0,\infty)} < \infty.$$

Then the operator I^α is bounded from $GM_{p(.),\theta_1(.),w_1(.)}$ to $GM_{q(.),\theta_2(.),w_2(.)}$.

Theorem 2. *Let $p(.) \in P_\infty^{\log}(\Omega)$, the function $\alpha(.)$ satisfies the condition $\alpha > 0$, $(\alpha(.)p(.))_+ = \sup_{x\in\Omega} \alpha p(x) < n$. Let $\theta_1(t)$ and $\theta_2(t)$ measurable functions such that $1 < \theta_1 \le \tilde{\theta_1}(x) \le \theta_2(x) \le \Theta_2 < \infty$, and there exists a positive number a such that $\theta_1(t) = \theta_1{}^- = const$, $\theta_2(t) = \theta_1{}^- = const$ for $x > a$ and the functions $p(x)$ and $q(x)$ satisfy $\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha(.)}{n}$, the functions w_1 and w_2 satisfy the condition*

$$G = \sup_{x\in\Omega, t>0} \int_0^t (w_2(x,r))^{\theta_2(r)} \left(\int_t^\infty \left(\frac{s^{\eta_p(x,s)-\eta_q(x,s)-1}}{w_1(x,s)} \right)^{[\tilde{\theta}_1(r)]'} ds \right)^{\frac{\theta_2(r)}{[\tilde{\theta}_1(r)]'}} dr < \infty.$$

Then the operator $I^{\alpha(.)}$ is bounded from $GM_{p(.),\theta(.)_1,w_1(.)}$ to $GM_{q(.),\theta(.)_2,w_2(.)}$.

The case of $\theta = \infty$ was considered in [1].

Keywords: potential type operators, global Morrey-type spaces, variable exponent.

2010 Mathematics Subject Classification: 46A32, 46E30

References

[1] Guliyev V., Samko S. Maximal, potential, and singular operators in the generalized variable exponent Morrey spaces on unbounded sets, *J. Math. Sciences*, **193**:2 (2013), 228–247.

— ⁜ ⁜ ⁜ —

SCIENTIFIC INVESTIGATIONS OF DIFFERENTIAL OPERATORS ON RIEMANNIAN MANIFOLDS

Karlygash DOSMAGULOVA[1,2,a]

[1]*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
[2]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*karlygash.dosmagulova@gmail.com*

The concept of manifolds defines a topological space similar to Euclidean space. Manifolds are the foundation of the field of geometry and allow to describe complex structures in terms of the concept of simple topological properties. Cartesian coordinate structures are considered to have these topological properties. The notion of a flat manifold has been considered in some data as a special space, proving that it is not a real space. In addition, topological manifolds are perceived as flat manifolds that form a finite linear space. In other words, the surface of an ellipsoid can be represented in terms of a smooth manifold. Each specific structure has its own expression in the Euclidean space, and the Riemannian manifold can be considered as the Euclidean space.

According to their mathematical meaning several theorems can be introduced. We can also consider the Laplace operator for the Riemannian manifolds. The role of the Laplace operator in the field of mathematical physics and the theory of functions is important. Obviously, the following theorems are valid.

Theorem 1. *The Laplace operator infinitely differentiates the infinite differential of each individual function in the Riemannian manifold.*

The theorem holds only when real analytic is used.

Theorem 2. *If for $\Delta f \geq 0$ the function f of class C^2 is a compact connection in the (M, g) Riemannian manifold, then f is the constant. As the result for any constant (M, g) harmonic function is true: $spec(M, g) \subset (-\infty, 0]$.*

The true application of differential operator studies, defined by manifold, has been investigated in medicine. Currently, there is a great necessity for important research in the field of biotechnology, i.e the development of gene interactions using polymers.

This study aims to determine the type of mathematical model of polymers. Therefore, the ability to use Riemannian surfaces allows you to build a model.

The most important concept is symmetrical spaces. These spaces are defined as pseudo-spaces. It is enough that the tensor of its curve is invariant for the connected Riemannian manifold to be symmetrical. For a general Riemannian manifold to be symmetric, each point must exist in the form of isometry. Although Riemannian spaces were used in physics, mathematics and chemistry, their most important role was identified in the theory of homology.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08855402).

Keywords: Riemannian manifolds, differential operators, topological spaces, symmetric spaces.

2010 Mathematics Subject Classification: 58B20, 58D17, 58J60

References

[1] Kanguzhin B.E., Anijarov A.A. Well-posed problems for the Laplace operator in a punctured disk, *Math Notes*, **89**:6 (2011), 819–829.

[2] Ibrahim R.W., Darus M. New Symmetric Differential and Integral Operators Defined in the Complex Domain, *Symmetry*, **11** (2019), 906.

[3] Lungu C.N., Grudzinski I.P. Riemann-Symmetric-Space-Based Models in Screening for Gene Transfer Polymers, *Symmetry*, **11** (2019), 1466.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ON BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF THE SAMARSKII-IONKIN TYPE FOR THE LAPLACE OPERATOR IN A BALL

Aishabibi DUKENBAYEVA[1,2,3,a], Makhmud SADYBEKOV[2,b]

[1] *Al–Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[3] *Department of Mathematics: Analysis, Logic and Discrete Mathematics, Ghent University, Ghent, Belgium*
E-mail: [a]dukenbayeva@math.kz, [b]sadybekov@math.kz

Let $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ be an arbitrary point of the unit ball $\Omega = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\} \subset \mathbb{R}^n$. Let $\alpha_k \in \{-1, 1\}$. Then $(\alpha_k)^2 = 1$.

Denote $x^* = (-x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n)$, and $\partial\Omega_+ \, (\partial\Omega_-)$ is a part of the sphere $\partial\Omega$, for which $x_1 > 0 \, (x_1 < 0)$. We also denote a part of the sphere $\partial\Omega$, for which $x_1 = 0$, by $\partial\Omega_0$.

In this talk we consider the following nonlocal boundary value problem for the Laplace operator in the ball, which is a multidimensional generalisation of the Samarskii-Ionkin problem.

The problem $S_{\alpha 1}$. *Find a function $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega} \backslash \partial\Omega_0)$ satisfying the Poisson's equation*

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

and the following boundary conditions

$$u(x) - \alpha u(x^*) = \tau(x), \quad x \in \partial\Omega_+, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} - (-1)^k \frac{\partial u(x^*)}{\partial n} = \mu(x), \quad x \in \partial\Omega_+, \tag{3}$$

where $f(x) \in C^\varepsilon(\bar{\Omega})$, $\tau(x) \in C^{1+\varepsilon}[\partial\Omega_+], \mu(x) \in C^\varepsilon[\partial\Omega_+]$, $0 < \varepsilon < 1$, and α is a fixed real number. Here, $\frac{\partial}{\partial n}$ is a derivative with respect to the direction of the outer normal to $\partial\Omega$.

In the case when $\alpha = -(-1)^k$, we obtain periodic and antiperiodic boundary problems, which were studied earlier in the works [1]-[2]. Recently, in [3] we considered the problem $S_{\alpha 1}$ when $k = 0$, and the general case in [4].

As another alternative to the Samarskii-Ionkin problem for the Laplace operator in a unit ball, we also consider the following problem:

The problem $S_{1\beta}$. *Find a function $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega} \backslash \partial\Omega_0)$ satisfying the Poisson's equation* (1) *and the following boundary conditions*

$$u(x) + (-1)^k u(x^*) = \tau(x), \quad x \in \partial\Omega_+, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} + \beta \frac{\partial u(x^*)}{\partial n} = \mu(x), \quad x \in \partial\Omega_+, \tag{5}$$

where $f(x) \in C^\varepsilon(\bar{\Omega})$, $\tau(x) \in C^{1+\varepsilon}[\partial\Omega_+], \mu(x) \in C^\varepsilon[\partial\Omega_+]$, $0 < \varepsilon < 1$, and β is a fixed real number. Here, $\frac{\partial}{\partial n}$ is a derivative with respect to the direction of the outer normal to $\partial\Omega$.

The well-posedness of the problems are investigated, and Fredholm property of the problems are studied. Moreover, we obtain integral representations of their solutions in explicit forms.

Funding: The first author was supported by the MESRK grant AP09058474.

Keywords: Laplace operator, Nonlocal boundary value problem, Samarskii-Ionkin problem

2010 Mathematics Subject Classification: 35J05, 35J25

References

[1] Sadybekov M.A., Turmetov B.Kh. On an analog of periodic boundary value problems for the Poisson equation in the disk, *Differential Equations*, **50**:2 (2014), 268–273.

[2] Sadybekov M.A., Turmetov B.Kh. On analogs of periodic boundary problems for the Laplace operator in ball, *Eurasian Mathematical Journal*, **3**:1 (2012), 143–146.

[3] Sadybekov M.A., Dukenbayeva A.A. On boundary value problem of the Samarskii-Ionkin type for the Laplace operator in a ball, *Kazakh Mathematical Journal*, **20**:1 (2020), 84–94.

[4] Sadybekov M.A., Dukenbayeva A.A. On boundary value problems of the SamarskiiIonkin type for the Laplace operator in a ball, *Complex Var. Elliptic Equ.*, (2020) DOI:10.1080/17476933. 2020. 1828377.

— ⋇ ⋇ ⋇ —

COMPACTNESS RESULTS FOR VARIABLE EXPONENT SPACES

Amiran GOGATISHVILI[1,a]

[1] *Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences*
Prague, Czech Republic
E-mail: [a]*gogatish@math.cas.cz*

Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^N$, and let $p,\ q : \Omega \to [1, \infty]$ be measurable functions. We give a necessary and sufficient condition for the embedding of the variable exponent space $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ in $L^{q(\cdot)}(\Omega)$ to be almost compact. This leads to a condition on Ω, p and q sufficient to ensure that the Sobolev space $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ based on $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ is compactly embedded in $L^{q(\cdot)}(\Omega)$; compact embedding results of this type already in the literature are included as special cases.

Funding: The author was supported by the grant P201-18-00580S of the Grant Agency of the Czech Republic and RVO:67985840.

Keywords: almost-compact embeddings, Banach function spaces, variable Lebesgue spaces, variable Sobolev spaces.

2010 Mathematics Subject Classification: 46E30, 26D15

References

[1] Fiorenza A., Gogatishvili A., Nekvinda A., Rakotoson J. M. Remarks on compactness results for variable exponent spaces $L^{p(\cdot)}$, *J. Mathématiques Pures et Appliquées,* accepted 2021.

[2] Edmunds D.E., Gogatishvilli A., Nekvinda A. Almost-compact and compact embeddings of variable exponent spaces, *arXiv*, 2101.00182, 2021.

— ⋇ ⋇ ⋇ —

ON A NUMERICAL METHOD FOR SOLVING A NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR DIFFERENTIAL EQUATION WITH DELAYED

Narkesh B. ISKAKOVA[1,2,a], Svetlana M. TEMESHEVA[1,3,b], Roza E. UTESHOVA[1,4,c]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan*
[3] *Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
[4] *International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*narkesh@mail.ru,* [b]*temeshevasvetlana@gmail.com,* [c]*ruteshova1@gmail.com*

Due to applications in physics, biology, epidemiology, and so on, much of the literature on lagged differential equations has focused on the existence of a periodic solution, oscillation, and so on.

The importance and variety of applications served to increase interest in the theory of boundary value problems for differential equations with a delay argument, and the development of computer technology and its comprehensive application in applied problems presented new requirements for the developed methods, paying special attention to their constructibility and feasibility.

One of the constructive methods widely used for the study of boundary value problems for differential equations is the parametrization method of D.S.Dzhumabaev [1]. In [2], on the basis of one modification of the parametrization method algorithms, sufficient conditions were obtain for the existence of an isolated solution of a boundary value problem for a system of linear differential equations with a delay argument that satisfies essentially nonlinear boundary conditions.

We consider a nonlinear boundary value problem for a system of differential equations with delay argument

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(t-\tau) + f(t), \quad x \in R^n, \quad t \in (0,T), \quad \tau > 0, \tag{1}$$

$$x(t) = \mathrm{diag}[x(0)] \cdot \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \tag{2}$$

$$g(x(0), x(T)) = 0, \tag{3}$$

where $(n\times n)$-matrices $A(t)$, $B(t)$ and the function $f(t)$ are continuous on $[0,T]$, $\varphi : [-\tau, 0] \to R^n$ is a continuously differentiable functions such that $\varphi_i(0) = 1$, $i = 1 : n$, τ is a constant delay such that $T = N\tau$ $(N = 1, 2, \ldots)$, $\|A(t)\| \le \alpha$, $\|B(t)\| \le \beta$, where α, β are constant.

The solution of the boundary value problem (1)-(3) is a continuous on $[-\tau, N\tau]$, continuously differentiable on $[-\tau, 0] \bigcup [0, N\tau]$ vector function $x(t)$ that satisfies the differential equation (1) and has values $x(0), x(T)$, for which equalities (2), (3) are valid.

In [3], in terms of input data, necessary and sufficient conditions for the existence of an isolated solution to a periodic boundary value problem for a system of nonlinear delay differential equations were established. In [2], on the basis of modified algorithms of the parametrization method, sufficient conditions were obtained for the existence of an isolated in some ball solution to problem (1) - (3) for a system of linear delay differential equations subject to essentially nonlinear boundary conditions. Following the standard scheme of the parametrization method, problem (1) - (3) was reduced to a multipoint boundary value problem with parameters. In the course of proving the conditions for the existence of a solution to the problem with parameters, a procedure for the sequential construction of its solution is shown, which includes the solution of a system of nonlinear algebraic equations of a special structure and the solution of Cauchy problems on the partition subintervals. Estimates were established for the difference between the exact solution and the solution found at a certain step.

The algorithms of the parametrization method are quite suitable for developing a numerical method for solving the problem under study. To construct the equations of the system in unknown parameters (the values of the desired solution at the partition subintervals $[-\tau, N\tau]$), methods of numerical solution of the Cauchy problem are used. To solve the constructed system of nonlinear algebraic equations, a sharper version of the local Hadamard theorem [4] is applied. Using the found parameters, we find the numerical solutions of the Cauchy problems associated with equation (1), thereby determining the numerical values of the desired solution at the points of the partition subintervals.

Thus, the numerical method proposed in the present paper is a balanced combination of known numerical methods. It should be noted that the results numerical experiments carried out on test problems are fairly good at the first steps of the algorithms of the parameterization method.

Funding: The authors were supported by the grant No. AP08956612 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: boundary value problems, equation with delay argument, isolated solution.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B15, 34K06, 34K10

References

[1] Dzhumabaev D.S. *Conditions the unique solvability of a linear boundary value problem for an ordinary differential equations*, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **29**:1 (1989), 34–46.

[2] Iskakova N.B., Temesheva S.M., Abildayeva A.D. On conditions of solvability of a nonlinear boundary value problem for a system of differential equations with a delay argument, *Kazakh Mathematical Journal*, **20**:4 (2020), 58–73.

[3] Iskakova N.B. Correct solvability of a periodic boundary value problem for a system of differential equations with a delay argument, *J. of Math., Mech. and Comp. Sci.*, **45**:2 (2005), 35–46. (in Russian).

[4] Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M. A parametrization method for solving nonlinear two-point boundary value problems, *Comput. Math. Math. Phys.*, **47**:1 (2007), 37–61.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

A PROBLEM FOR ESSENTIALLY LOADED DIFFERENTIAL EQUATIONS

Zhazira KADIRBAYEVA[1,2,a]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*zhkadirbayeva@gmail.com*

We consider the following linear boundary value problem for essentially loaded differential equations with multi-point conditions:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{j=1}^{m} M_j(t)\dot{x}(\theta_j) + \sum_{i=0}^{m+1} K_i(t)x(\theta_i) + f(t), \quad t \in (0,T), \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{m+1} C_i x(\theta_i) = d, \quad d \in R^n, \quad x \in R^n, \tag{2}$$

where the $(n\times n)$ -matrices $A(t)$, $M_j(t)$ $(j=\overline{1,m})$, $K_i(t)$ $(i=\overline{0,m+1})$, and n-vector-function $f(t)$ are continuous on $[0,T]$, C_i $(i=\overline{0,m+1})$ are constant $(n\times n)$ - matrices, and $0=\theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_{m-1} < \theta_m < \theta_{m+1} = T$; $\quad \|x\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i|$.

A solution to problem (1), (2) is a continuous on $[0,T]$ and continuously differentiable on $(0,T)$ function $x(t)$ satisfying the essentially loaded differential equations (1) and the multi-point condition (2).

In recent years the theory of differential-boundary equations or loaded differential equations has been advanced. These equations describe problems in optimal control, regulation of the layer of soil water and ground moisture, underground fluid and gas dynamics [1]. A numerical method of solving systems of loaded linear non-autonomous ordinary differential equations with non-separated multi-point and integral conditions is proposed in work [2].

In the present paper, a linear multi-point boundary value problem for essentially loaded differential equations is investigated. The significance is that the loaded members of the equation appear in the form of derivatives of solutions at load points of the interval. The presence of derivatives of solutions at load points has a strong influence on the properties of equations. Using the properties of essentially loaded differential equation and assuming the invertibility of the matrix compiled through the coefficients at the values of the derivative of the desired function at load points, we reduce the considered problem to a multi-point boundary value problem for loaded differential equations. The parameterization method [3] is used for solving this problem. The problem under consideration is reduced to solving a system of linear algebraic equations. The coefficients and right-hand side of the system are calculated by solving the Cauchy problems for ordinary differential equations. A numerical algorithm is offered for solving the considering problem. Numerical experiments are performed to test the proposed approach on examples.

Funding: The author was supported by the grant No. AP08955489 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

References

[1] Nakhushev A.M. *Loaded equations and their applications*, Nauka, Moscow (2012) (in Russ).

[2] Abdullaev V.M., Aida-zade K.R. On the numerical solution to loaded systems of ordinary differential equations with non-separated multipoint and integral conditions, *Numerical Analysis and Applications*, **7**:1 (2014), 1–14.

[3] Dzhumabaev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, **29**:1 (1989), 34–46.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

SPECTRAL PROPERTIES OF REGULAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Nurbek KAKHARMAN[1,2,a]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*n.kakharman@math.kz*

Numerous papers are devoted to spectral properties of differential equations in view of their fundamental and applied significance. But at the same time, so far no example has been found of a regular boundary value problem for differential equations whose spectrum (except for an empty set) is a finite set. Therefore, the problem of the existence and absence of the finite set in the regular boundary value problems for the differential equations is an actual one.

This problem and the problem of completeness and basicity of root vectors for operators generated by the action $-\frac{d^2}{dx^2}$, $\frac{d^4}{dx^4}$ with general boundary conditions are studied relatively recently in the monograph of John Locker [1]. In work [2], using anti-a priori estimates for test functions, for arbitrary regular boundary value problems and a wide class of linear differential equations, established that their spectral set is either empty or infinite.

The present paper is a development of the paper [2], where the above-mentioned problem has been studied for an equation with everywhere continuous coefficients and in it, we have improved the method of proofs of the paper [2].

Funding: The author were supported by the grant No. AP08856042 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: eigenvalue, regular boundary value problem, infinite spectrum.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B09, 34L05, 34L15

References

[1] Locker J. *Eigenvalues and Completeness for Regular and Simply Irregular Two-Point Differential Operators*, Memoirs of the American Mathematical Society (2008).

[2] Kal'menov T.Sh., Suragan D Determination of the Structure of the Spectrum of Regular Boundary Value Problems for Differential Equations by V.A. Il'in's Method of Anti - Apriori Estimates, *Doklady Mathematics*, **78**:3 (2008), 913–915.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

INTERPOLATION PROPERTIES OF NET SPACES

Aitolkyn KALIDOLDAY[1,a], Erlan NURSULTANOV[2,b]

[1] *L.N.Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan*
[2] *M.V.Lomonosov Moscow State University (Kazakhstan branch), Nur-Sultan, Kazakhstan*
E-mail: [a]*aitolkynnur@gmail.com*, [b]*er-nurs@yandex.kz*

Let in $\mathbb{R}^n$ is given n-dimensional Lebesgue measure μ, M is the set of all cubes in $\mathbb{R}^2$. Further M will be called as a *"net"*. For function $f(x)$, defined and integrable on each e from M, we define the function

$$\bar{f}(t, M) = \sup_{\substack{e\in M \\ |e|\geq t}} \frac{1}{|e|}\left| \int_e f(x)dx \right|, \quad t > 0,$$

where the supremum is taken over all $e \in M$, whose measure is $|e| \overset{\text{def}}{=} \mu e \geq t$. In the case when $\sup\{|e| : e \in M\} = \alpha < \infty$ and $t > \alpha$ assuming that $\bar{f}(t, M) = 0$.

Let p, q parameters satisfy the conditions $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ and for $p = \infty$, $q = \infty$. Let's define the net spaces $N_{p,q}(M)$, as a set of all functions f, such that for $q < \infty$

$$\|f\|_{N_{p,q}(M)} = \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \bar{f}(t, M) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

and for $q = \infty$

$$\|f\|_{N_{p,\infty}(M)} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} \bar{f}(t, M) < \infty.$$

These spaces were introduced in the work [1].

Net spaces have found important applications in various problems of harmonic analysis, operator theory and the theory of stochastic processes.

In this paper, we study the interpolation properties of these spaces. It should be noted here that net spaces are in a sense close to the Morrey space:

$$M_p^\alpha = \left\{ f : \sup_{y\in\mathbb{R}^n,\ t>0} t^{-\lambda} \left(\int_{|x+y|\leq t} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

In the case when $f(x) \geq 0$, for $\frac{1}{p} = 1 - \frac{\lambda}{n}$

$$\|f\|_{N_{p,\infty}(M)} \asymp \|f\|_{M_1^\lambda}.$$

The question of interpolation of Morrey spaces was considered in the works [2,3]. It follows from the results of [4] that

$$(M_p^{\lambda_0}, M_p^{\lambda_1})_{\theta,\infty} \hookrightarrow M_p^\lambda,$$

where $\lambda = (1 - \theta)\lambda_0 + \theta\lambda_1$. In the works [2,3] it was established that this inclusion is strict.

For net spaces $N_{p,q}(M)$, where M is an arbitrary system of measurable sets from $\mathbb{R}^2$, we also have an embedding (see [1, Theorem 1])

$$(N_{p_0,q_0}(M), N_{p_1,q_1}(M))_{\theta,q} \hookrightarrow N_{p,q}(M), \tag{1}$$

where $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $0 < \theta < 1$, $0 < q \leq \infty$.

From (1) it follows that if the linear operator T bounded from A_i to $N_{p_i,\infty}(M)$, $i = 0, 1$, then the operator T bounded from $A_{\theta,q}$ to $N_{p,q}(M)$, where $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$.

The question arises whether the following equality will take place

$$(N_{p_0,q_0}(M), N_{p_1,q_1}(M))_{\theta,q} = N_{p,q}(M). \tag{2}$$

Here, in contrast to the Morrey spaces in the one-dimensional case, when M is the set of all segments, the answer is positive.

In this paper we show that, if M is the set of dyadic cubes in $\mathbb{R}^2$, then the relation (2) holds. In case, if M is the set of all cubes, an analogue of the Marcinkiewicz-Calderon theorem on the cones of non-negative functions is obtained.

Theorem 1. *Let $0 < p_0 < p_1 < \infty$ and $0 < q_0, q_1, q \le \infty$. Let M be the family of dyadic cubes. Then*

$$\left(N_{p_0,q_0}(M), N_{p_1,q_1}(M)\right)_{\theta,q} = N_{p,q}(M),$$

where $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\theta \in (0,1)$.

The following statement is an attempt to answer the question about the interpolation of net spaces, when M – is the family of all cubes with parallel faces to the coordinate axes in $\mathbb{R}^2$.

Theorem 2. *Let $2 \le p_0 < p_1 < \infty$, $0 < q \le \infty$, M be the family of all cubes with parallel faces to the coordinate axes in $\mathbb{R}^2$. Let $G = \{f : f(x) \ge 0\}$, then for any $f \in G \bigcap N_{p,q}(M)$ it is true*

$$\|f\|_{(N_{p_0,q_0}(M),N_{p_1,q_1}(M))_{\theta,q}} \asymp \|f\|_{N_{p,q}(M)}, \tag{3}$$

where the corresponding constants depend only on $p_i, q_i, \theta, q, i = 0, 1$.

The following corollary holds from Theorem 2.

Corollary. *Let $2 \le p_0 < p_1 < \infty$, $1 \le q_0, q_1 < \infty$, $q_0 \ne q_1$, $0 < \tau, \sigma < \infty$. M and G – sets from Theorem 2. If the following inequalities hold for a quasilinear operator*

$$\|Tf\|_{N_{q_0,\infty}(M)} \le F_0 \|f\|_{N_{p_0,\sigma}(M)}, \; f \in N_{p_0,\sigma}(M), \tag{4}$$

$$\|Tf\|_{N_{q_1,\infty}(M)} \le F_1 \|f\|_{N_{p_1,\sigma}(M)}, \; f \in N_{p_1,\sigma}(M), \tag{5}$$

then for any $f \in G \cap N_{p,\tau}$ we have

$$\|Tf\|_{N_{q,\tau}(M)} \le c F_0^{1-\theta} F_1^{\theta} \|f\|_{N_{p,\tau}(M)}, \tag{6}$$

where $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\theta \in (0,1)$ *and the corresponding constant depends only on $p_i, q_i, \sigma, i = 0, 1$.*

Funding: This research was supported by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (projects No. AP08956157 and AP08856479).

Keywords: Net spaces, Interpolation properties of net spaces, Marcinkiewicz-Calderon type interpolation theorem. boundary conditions.

2010 Mathematics Subject Classification: 46B70

References

[1] Nursultanov E.D. Net spaces and inequalities of Hardy-Littlewood type, *Sb. Math.*, **189** (1998), 399–419.

[2] Ruiz A., Vega L. Corrigenda to "Unique continuation for Schrodinger operators" and a remark on interpolation of Morrey spaces, *Publicacions Matem'atiques*, **39** (1995), 405–411.

[3] Blasco O., Ruiz A., Vega L. Non interpolation in Morrey-Campanato and block spaces, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl.*, **4** (1999), 31–40.

[4] Peetre J. On the theory of $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ spaces, *J. Func. Anal.*, **4** (1969), 71–87.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ONE NON-LOCAL PROBLEM FOR A TIME FRACTIONAL EQUATIONS WITH THE HILFER OPERATOR ON METRIC GRAPH

E.T. KARIMOV [1,a], Z.A. SOBIROV [2,b], J.R. KHUJAKULOV [1,c]

[1] *V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan*
[2] *University of Geological Sciences, Tashkent, Uzbekistan*
E-mail: [a]*erkinjon@gmail.com,* [b]*sobirovzar@gmail.com* [c]*j.khujakulov@mathinst.uz*

Consider a simple star graph (metric graph), which is obtained by connecting three finite segments $B_k = \{x_k : 0 < x_k < L_k\}, (k = 1, 2, 3)$, at one point $O(0, 0)$, called the vertex of the graph. Line segments are called bonds of the graph. On the each edges of the over defined graph, we consider fractional differential equations

$$D_{0+}^{(\alpha,\mu)} u^{(k)}(x,t) - u_{xx}^{(k)}(x,t) = f^{(k)}(x,t), \quad x \in B_k, \tag{1}$$

on the metric graphs, where $l-1 < \alpha < l$, , $l \in N$, $0 \leq \mu \leq 1$, $k = 1,2,3$ $f^{(k)}(x,t)$ are known functions and $D_{0+}^{(\alpha,\mu)}$ is Hilfer operator:

$$\left(D_{0+}^{\alpha,\mu} u\right)(t) = I_{0+}^{\mu(n-\alpha)} D^{(n)} \left(I_{0+}^{(1-\mu)(n-\alpha)} u\right)(t), n-1 < \alpha < n, 0 \leq \mu \leq 1.$$

We will study the following problem for the equation (1) in Γ.

Problem To find functions $u^{(k)}(x,t)$ in the domain $B_k \times (0,T)$, satisfying equation (1) at $l-1 < \alpha < l$, $l = 1,2$ and non-local conditions:

$$I_{0+}^{(1-\mu)(l-\alpha)} u^{(k)}(x,t)\Big|_{t=0} = M I_{0+}^{(1-\mu)(l-\alpha)} u^{(k)}(x,t)\Big|_{t=T} \tag{2}$$

$$[\alpha] \frac{d}{dt} I_{0+}^{(1-\mu)(n-\alpha)} u^{(k)}(x,t)\Big|_{t=0} = \varphi^{(k)}(x), \quad k = 1,2,3 \quad x \in B_k; \tag{3}$$

vertex conditions

$$u^{(1)}(0,t) = u^{(2)}(0,t) = u^{(3)}(0,t), t \in [0,T],$$

$$u_x^{(1)}(0,t) + u_x^{(2)}(0,t) + u_x^{(3)}(0,t) = 0, \ \ t \in [0,T],$$

and boundary conditions

$$u^{(k)}(L_k,t) = 0, \ \ t \in [0,T], \ \ k = 1,2,3.$$

where $M \in \mathbb{R}$, $\varphi^{(k)}(x)$ are sufficiently smooth given functions.

Notice, that non-local initial problem with the same conditions as (2) and (3), for the time-fractional and space-singular equation in simply-connected domain (not on the metric graphs) was investigated by E. Karimov, M. Mamchuev and M. Ruzhansky [2].

Using the method of separations of variables for the homogeneous equation we will get ODE of integer order

$$\frac{d^2}{dx^2} X^{(k)}(x) + \lambda^2 X^{(k)}(x) = 0, \ \lambda \in R \backslash \{0\}, \ k = 1,2,3 \tag{4}$$

and ODE of fractional order

$$D_{0+}^{(\alpha,\mu)} T(t) + \lambda^2 T(t) = 0, \ \ l-1 < \alpha < l, \ \ 0 \leq \mu \leq 1,$$

moreover, the general solution

$$X^{(k)}(x) = a_k \cos \lambda x + b_k \sin \lambda x; \ \ x \in B_k$$

of equation (4), was found eigenfunctions and eigenvalues in [1].

Using properties of the Mittag-Leffler function, we prove the uniform convergence of the obtained Fourier series. The uniqueness of the solution of the problem is also proved.

Funding: The authors were supported by the grant no. FZ-20200929375 of the Ministry of Innovative development of the Republic of Uzbekistan.

Keywords: Fractional derivative, Hilfer operator, metric graph, non-local conditions.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B45, 35R11

References

[1] Abdullaev O.Kh, Khujakulov J.R. On a problem for the time-fractional diffusion equation on a metric graphs, *Uzbek Mathematical Journal*, 4 (2017), 3–12.

[2] Karimov E., Mamchuev M. and Ruzhansky M. Non-local initial problem for second order time-fractional and space-singular equation, *Hokkaido Mathematical Journal*, 49 (2020), 349–361.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

INVERSE PROBLEM FOR PSEUDOPARABOLIC EQUATIONS WITH p-LAPLACIAN

Kh. KHOMPYSH[1,a], A. SHAKIR[1,b]

[1] *Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*khompysh.khonatbek@gmail.com*, [b]*ajdossakir@gmail.com*

Statement of the problem. Let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^d$ with smooth boundary $\partial\Omega$, and $Q_T = \{(x,t): \ x \in \Omega, \ t > 0\}$ is a cylinder with lateral Γ_T.

We consider the following inverse problem of finding the pair of the functions $(u(x,t), \, f(t))$, which satisfy the pseudoparabolic equation with $p-$Laplacian

$$u_t - \Delta u_t - \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = \gamma\,|u|^{\sigma(x)-2}\,u + f(t)\cdot g(x,t), \quad \text{in} \quad Q_T, \tag{1}$$

the initial condition

$$u(x,0) = u_0(x) \text{ in } \Omega, \tag{2}$$

the Dirihlet boundary condition

$$u(x,t) = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_T, \tag{3}$$

and the integral overdetermination condition

$$\int_\Omega (u\cdot\omega + \nabla u\cdot\nabla\omega)\,dx = e(t), \quad t \geq 0. \tag{4}$$

Here the coefficient γ might be positive $\gamma > 0$ either negative $\gamma < 0$. The functions $g(x,t)$, $u_0(x)$, $\omega(x)$, and $e(t)$ are given. The exponents p is given positive number and σ is given function, such that

$$1 < p, \qquad \sigma < \infty. \tag{5}$$

The damping term $\gamma|u|^{\sigma(x)-2}u$ in the momentum equation realizes an absorbtion (sink) if $\gamma \leq 0$, and a source if $\gamma > 0$. In this work, we show how the exponents p,σ the coefficient γ, the dimension of the space d, and data of the problem should interact each other for the existence of weak solutions to the problem. We also establish the conditions for uniqueness of the solutions to this problem.

Funding: This research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08052425 and AP09057950).

— ⁕ ⁕ ⁕ —

ON FREDHOLM PROPERTY AND ON THE INDEX OF THE GENERALIZED NEUMANN PROBLEM

Bakytbek KOSHANOV[1,2,a], Arai KUNTUAROVA[2,b]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Kazakh National Pedagogical University named after Abai, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]koshanov@math.kz, [b]araika.14.89@mail.ru

In simply connected region D in the plane bounded by the simple smooth contour Γ, we consider the elliptic equation

$$\sum_{r=0}^{2l} a_r \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l-r} \partial y^r} + \sum_{0 \le r \le k \le 2l-1} a_{rk}(x,y) \frac{\partial^k u}{\partial x^{k-r} \partial y^r} = f(x,y), (x,y) \in D \tag{1}$$

with real coefficients $a_r \in \mathbb{R}$ and $a_{rk} \in C^{\mu}(\overline{D})$, $\Gamma = \partial D \in C^{2l,\mu}$, $0 < \mu < 1$.

Problem S. The generalized Neumann problem consists in finding the solution $u(x,y)$ of equation (1) in the domain D by boundary conditions

$$\left. \frac{\partial^{k_j - 1} u}{\partial n^{k_j - 1}} \right|_{\Gamma} = g_j, \quad j = 1, \ldots, l, \tag{2}$$

where $1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_l \le 2l$ and $n = n_1 + i n_2 -$ the unit external normal.

For a polyharmonic equation, this problem was studied by A.V. Bitsadze [1]. Another version of the Neumann problem, based on the variational principle, was previously proposed by A.A. Desin [2]. In [3], problem (1), (2) was investigated for $a_{kr} \neq 0$ and $f \neq 0$ in the space of functions $C_a^{2l-1,\mu}(\overline{D})$.

The report established: a sufficient condition for the Fredholm property of problem (1), (2); equivalence of the Fredholm condition of the problem to the complementarity condition (or Shapiro– Lopatinsky) [4]. A formula for the index of the problem $\operatorname{ind} S$ is calculated.

The condition of Fredholm property of various problems for equations of the fourth and sixth orders is established in detail, and formulas for the indices of the corresponding problems are described in explicit form.

Funding: The work was supported by Grants AP 09559378 Ministry of Education and Science of Republic Kazakhstan.

Keywords: high order elliptic equations, boundary value problem, normal derivatives, Fredholm solvability of the problem, formula for problem index.

2010 Mathematics Subject Classification: 35J30, 35J40, 35J37

References

[1] Bitsadze A.V. About some properties of polyharmonic functions, *Differential equations*, **24**:5 (1988), 825–831.

[2] Desin A.A. The second boundary value problem for a polyharmonic equation in the space W_2^m, *Reports of the USSR Academy of Sciences*, **96**:5 (1954), 901–903.

[3] Koshanov B.D., Soldatov A.P. Boundary value problem with normal derivatives for an elliptic equation in the plane, *Differential equations*, **52**:12 (2016), 1666–1681.

[4] Shehter M. General boundary value problems for elliptic partial differential equations, *Comm. Pure and Appl. mathem.*, **12** (1950), 467–480.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

UNIQUE SOLVABILITY OF PROBLEM FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH WEAKLY SINGULAR KERNELS

Shattyk NURMUKANBET[1,2,a]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*shattyk.95@list.ru*

We consider a linear two-point boundary value problem for the system of Fredholm integro-differential equation with a weakly singularity on $[0,T]$:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^T K(t,s)x(s)ds + f(t), \quad x \in R^n, \tag{1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \tag{2}$$

where $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ is unknown function; the $(n \times n)-$matrix $A(t)$ and $n-$vector function $f(t)$ are continuous on $[0,T]$, B and C are $(n \times n)$ constant matrices, $d \in R^n$, $K(t,s)$ is $(n \times n)-$matrix and has the form $\|K(t,s)\| = \frac{1}{|t-\tau|^\alpha} H(t,s)$, and H(t,s) is continuous on $[0,T] \times [0,T]$, $0 < \alpha < 1$.

Let $C([0,T], R^n)$ be a space of continuous functions $x : [0,T] \to R^n$ with the norm $\|x\|_1 = \max_{t\in[0,T]} \|x(t)\|$, $\|x(t)\| = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i(t)|$.

Solution (1),(2) is a function $x(t) \in C([0,T], R^n)$, continuously differentiable on $(0,T)$, which satisfies the integro-differential equation (1) for all $t \in [0,T]$ and condition (2). The parametrization method $[1-3]$ is used to study the two-point boundary value problem (1), (2). We divide the interval $[0,T]$ parts N and denote by $\triangle_N$ this partition: $\triangle_N = \{t_0 = 0 < t_1 < ... < t_N = T\}$, where $t_s = \frac{sT}{N}$. By $x_r(t)$ we denote the restriction of the function $x(t)$ to the r^{th} interval $[t_{r-1}, t_r)$, i.e. $x_r(t) = x(t), r = \overline{1,N}$ and entering the parameters $\lambda_r \widehat{=} x_r((r-1)h)$, and on each r^{th} interval, changing the function $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, we obtain the boundary problem with parameters

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)u_r + \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} K(t,\tau)(u_j(\tau) + \lambda_j)d\tau + f(t), \quad t \in [(r-1)h, rh), \tag{3}$$

$$u_r[(r-1)h] = 0, \quad r = \overline{1,N}, \tag{4}$$

$$B\lambda_1 + C\lambda_N + C \lim_{t\to T-0} u_N(t) = d, \tag{5}$$

$$\lambda_p + \lim_{t\to ph-0} u_p(t) = \lambda_{p+1}, \quad p = \overline{1,N-1}. \tag{6}$$

A pair of $(\lambda, u[t])$ with elements $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N) \in R^{nN}$, $u[t] = (u_1, u_2, ..., u_N) \in C([0,T], \triangle_N, R^{nN})$ is a solution to problem (3)-(6). For fixed values of the parameters $\lambda \in R^{nN}$, the system of functions $u[t]$ allows us to determine from special Cauchy problems for systems of integro-differential equations (3), (4). Using the fundamental matrix $X(t)$ of the differential equation $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ the combined problem (3), (4) to the equivalent system of integral equations

$$u_r(t) = X(\tau) \int_{(r-1)h}^{t} X^{-1}(\tau_1)A(\tau_1)d\tau_1\lambda_r +$$

$$+X(\tau) \int_{(r-1)h}^{t} X^{-1}(\tau_1) \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} K(\tau_1, s)(u_j(s) + \lambda_j)dsd\tau_1 +$$

$$+X(t)\int_{(r-1)h}^{t} X^{-1}(\tau_1)f(\tau_1)d\tau_1, \quad t\in[(r-1)h,rh), \quad r=\overline{1,N}. \tag{7}$$

For this problem (3), (4) is uniquely solvable, we can choose the step of splitting $h>0$: $Nh=T$.

Consider $h_0>0$ satisfying the inequality

$$\sigma(h_0)\equiv \beta T\frac{1}{1-\alpha}h_0^{1-\alpha}2^{\alpha}e^{\alpha_0 h_0}<1,$$

where $\alpha_0 = max_{t\in[0,T]}\|A(t)\|$, $\beta = max_{(t,s)\in[0,T]\times[0,T]}\|H(t,s)\|$.

Let us show that, for any $h\in(0,h_0]$: $Nh=T$ system (7), we obtain the estimates

$$\|X(\tau)\int_{(r-1)h}^{t} X^{-1}(\tau_1)\sum_{j=1}^{N}\int_{(j-1)h}^{jh}K(\tau_1,s)u_j(s)dsd\tau_1\|$$

$$=\sigma(h_0)\cdot\|u[\cdot]\|_2, \quad t\in[(r-1)h,rh), \quad r=\overline{1,N}. \tag{8}$$

Using (8) and the inequality $\sigma(h_0)<1$ and applying the contraction mapping principle, we prove the unique sovability of systems (8) for any $h\in(0,h_0]$: $Nh=T$.

Given from [4] we express $u_r(t)$ in terms of λ_r and $f(t)$, Substituting them into conditions (5) and (6), we obtain a linear sistem of equations for $\lambda_r, r=\overline{1,N}$, and this sistem can be written as

$$Q_{*,*}(h)\lambda=-F*,*(h), \quad \lambda\in R^{nN}.$$

Theorem 1. *If the matrix $Q_{*,*}(h):R^{nN}\to R^{nN}$ is invertible for some $h\in(0,h_0]$: $Nh=T$, then problem (1), (2) has unique solution $x^*(t)$ satisfying the estimate*

$$\|x^*\|_1\leq$$

$$\leq\frac{e^{\alpha_0 h}h}{1-\sigma(h)}\left[1+\gamma_{*,*}(h)max\left(1+h\|C\|\frac{e^{\alpha_0 h}}{1-\sigma(h)},\frac{e^{\alpha_0 h}}{1-\sigma(h)}\right)\right]\cdot\max(\|f\|_1,\|d\|),$$

where $\gamma_{*,*}(h)=\|[Q_{*,*}(h)]^{-}1\|$ and $\sigma(h)=\beta e^{\alpha_0 h}2^{\alpha}T\frac{1}{1-\alpha}h_0^{1-\alpha}$.

The proof of Theorem 1 is shown in [4].

References

[1] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, *USSR.Comput.Maths. Math.Phys.*, **29**:1 (1989), 34–46.

[2] Dzhumabayev D.S. A method for solving the linear boundary value problem for an integro-differential equation, *Comp. Math and Math. Physics*, **50**:7 (2010), 1150–1161.

[3] Dzhumabayev D.S. Necessary and sufficient conditions for the solvability of linear boundary-value problems for the Fredholm integro-differential equations, *Comput. Maths. Math. Phys.*, **66**:8 (2015), 1200–1219.

[4] Assanova A.T., Nurmukanbet Sh.N. Problem for the integro-differential equation with weakly singular kernels, *Kazakh Mathematical Journal*, **20**:3 (2020), 79–91.

— ⁎ ⁎ ⁎ —

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE DEGENERATING MIXED TYPE EQUATION WITH FRACTIONAL DERIVATIVE

N.K. OCHILOVA[1,a]

[1] *Tashkent financial institute, Tashkent, Uzbekistan*
E-mail: [a]*nargiz.ochilova@gmail.com*

In works [1], [2] (and others) the authors considered local boundary value problems for mixed type degenerating differential equations involving Caputo fractional derivatives of order $0 < \alpha \leq 1$. In this work we consider equation:

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - {}_C D_{oy}^{\alpha} u, & x > 0, \;\; y > 0, \\ (-y)^m u_{xx} - x^n u_{yy}, & x > 0, \;\; y < 0 \end{cases} \tag{1}$$

with operator: ${}_C D_{oy}^{\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^y (y-t)^{-\alpha} u_t(x,t)dt$, where $0 < \alpha < 1$, $m = const > 0$.

Let's Ω be domain, bounded with segments:

$A_1A_2 = \{(x,y) : x = 0, 0 < y < h_2\}$,

$B_1B_2 = \{(x,y) : x = h_1, 0 < y < h_2\}$,

$A_2B_2 = \{(x,y) : y = h_2 \, 0 < x < h_1\}$ at the $y > 0$ and by the characteristics: A_1C : $\frac{1}{q}x^q - \frac{1}{p}(-y)^p = 0$, B_1C : $\frac{1}{q}x^q + \frac{1}{p}(-y)^p = 1$; of equation (1) at $y < 0$ where $A_1\,(0;0)$, $A_2\,(0;h_2)$, $B_1\,(h_1;0)$, $B_2\,(h_1;h_2)$ and $C\left(\left(\frac{q}{2}\right)^{1/q}, -\left(\frac{p}{2}\right)^{1/p}\right)$. Here $2q = n+2$, $2p = m+2$, $h_1 = q^{1/q}$, $h_2 > 0$, and that $m > n$.

Introduce designations:

$\theta_0(x) = \left(\frac{x^q}{2}\right)^{1/q} - i\left(\frac{p}{q}\frac{x^q}{2}\right)^{1/p}$, $\theta_1(x) = \left(\frac{(x^q+1)}{2}\right)^{1/q} - i\left(\frac{p}{q}\frac{(1-x^q)}{2}\right)^{1/p}$,

$\theta_0(x)$ and $\theta_1(x)$ are points of intersection of characteristics of equation (1), outgoing from the points $(x,0) \in A_1B_1$, with characteristics A_1C and B_1C, respectively.

We enter some designations:

$2\alpha_1 = n/(n+2)$, $2\beta_1 = m/(m+2)$, $0 < \alpha_1 < \beta_1 < \frac{1}{2}$, $\Omega^+ = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega^- = \Omega \cap (y < 0)$, $I_1 = \{x : 0 < x < h_1\}$, $I_2 = \{y : 0 < y < h_2\}$.

Problem I. Find a solution of equation (1) from the following class of functions:

$\Delta = \left\{u(x,y) : u(x,y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega^-) \; u_{xx} \in C\left(\Omega^+\right), \; {}_C D_{oy}^{\alpha} u \in C\left(\Omega^+\right)\right\}$ satisfies boundary conditions:

$$u(x,y)\Big|_{A_1A_2} = \varphi_1(y), 0 \leq y \leq h_2, \;\; u(x,y)\Big|_{B_1B_2} = \varphi_2(y), h_1 \leq y \leq h_2,$$

$$a\,(x)\,(x^{2q})^{\frac{1-\alpha+\beta}{2}} \frac{d}{dx^{2q}} (x^{2q})^{\frac{1-\alpha-\beta}{2}} \times$$
$$\times F_{0x}\left[\begin{matrix} \frac{\alpha+\beta-1}{2}, & \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \beta, & x^{2q} \end{matrix}\right] (x^{2q})^{\frac{2\alpha-1}{2}} u\,[\theta_0\,(x)] +$$
$$+ b(x)\,(1-x^{2q})^{-\beta} D_{x^{2q}1}^{\alpha}\,(x^q+1)^{\alpha-\beta}\, D_{x^q 1}^{1-\alpha-\beta}\, u\,[\theta_1(x)] +$$
$$+ \delta(x)\, u_y(x,\,0) = g(x), (x,0) \in I_1,$$

and gluing condition:

$$\lim_{y \to +0} y^{1-\alpha} u_y(x,+0) = u_y(x,-0), (x,0) \in A_1B_1;$$

where $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\delta(x), g(x)$, $\tilde{a}(x) = a(x^{1/2q})$, $\tilde{b}(x) = b(x^{1/2q})$ are given functions, and that $a^2(x) + b^2(x) + \delta^2(x) \neq 0$, $(x,0) \in \bar{I}_1$, $\varphi_1\,(y)$, $\varphi_2\,(y) \in C\,[0,h_2] \bigcap C^2\,(0,h_2)$. $\tilde{a}(x), \tilde{b}(x), \delta(x) \in$

$C[0,h_1]\bigcap C^2(0,h_1)$, $g(x)\in C^2(0,h_1)$. The uniqueness of solution is proved by the method of integral energy using necessary properties of hypergeometric functions and integro-differential operators fractional order. The existence is proved by the method of integral equations.

Keywords: Boundary value problem, degenerating equation, parabolic-hyperbolic type, Gauss hypergeometric function, Cauchy problem, existence and uniqueness of solation, a principle an extremum, method of integral equations, Caputo fractional derivative.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B45, 35R11

References

[1] Kilbas A.A., Repin O.I. An analog of the Tricomi problem for a mixed type equation with a partial fractional derivative, *Fractional Calculus. Applied Analysis*, **13**:1 (2010), 69–84.

[2] Islomov B.I., Ochilova N.K. About a problem for the degenerating mixed type equation fractional derivative, *Reports Krauns physics-math. sciences. Russian*, **17**:1 (2017), 22–32.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

SUBMAJORISATION INEQUALITIES FOR MATRICES OF MEASURABLE OPERATORS

Madi RAIKHAN[1,a] , Azhar UATAYEVA[2,b]

[1]*Astana IT University, Nur-Sultan, Kazakhstan*
[2]*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan*
E-mail: [a]madi.raikhan@astanait.edu.kz, [b] azhar.oshanova@mail.ru

Let $(\mathcal{M},\tau)$ be a semi-finite von Neumann algebra, $L_0(\mathcal{M})$ be the set of all τ-measurable operators and $\mu_t(x)$ be the generalized singular number of $x\in L_0(\mathcal{M})$. We proved that if $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$ is an increasing continuous function, then for normal operators $x_1,x_2,\cdots,x_n$ in $L_0(\mathcal{M})$,

$$\mu(g(|\sum_{k=1}^{n}x_k|))\le\mu(g(\sum_{k=1}^{n}|x_k|))$$

holds. As application, we obtained that if x is a matrix of normal operators x_{ij} in $L_0(\mathcal{M})$ and $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ is a concave function, then $\mu(f(|x|))$ is majorized by $\mu(\sum_{i,j=1}^{n}f(|x_{ij}|))$. Let $\mathbb{M}_n$ be the set of all $n\times n$ complex matrices.Throughout this paper, $\mathcal{M}$ always denotes a semi-finite von Neumann algebra with a faithful normal semi-finite trace τ. For $x\in L_0(\mathcal{M})$, the *distribution function* $\lambda(x)$ of x is defined by $\lambda_t(x)=\tau(e_{(t,\infty)}(|x|))$ for $t>0$, where $e_{(t,\infty)}(|x|)$ is the spectral projection of $|x|$ in the interval (t,∞), and the generalized singular numbers $\mu(x)$ of x by $\mu_t(x)=\inf\{s>0:\ \lambda_s(x)\le t\}$ for $t>0$.

For $n\in\mathbb{N}$, we denote by $\mathbb{M}_n(\mathcal{M})$ the semi-finite von Neumann algebra

$$\mathbb{M}_n(\mathcal{M})=\left\{\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n}\\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,n}\end{pmatrix},\ x_{i,j}\in\mathcal{M},\ i,j=1,2,\cdots,n\right\}$$

on Hilbert space $\oplus_{j=1}^{n}\mathcal{H}$ with trace $Tr\otimes\tau$. Then $L_0(\mathbb{M}_n(\mathcal{M}))=\mathbb{M}_n(L_0(\mathcal{M}))$.

Theorem 1. *Let $x_1,x_2,\cdots,x_n\in L_0(\mathcal{M})$. Then*

$$\mu_t(|\sum_{k=1}^{n}x_k|)\le\mu_t(\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{n}|x_k^*| & 0\\ 0 & \sum_{k=1}^{n}|x_k|\end{pmatrix}),\qquad t>0.$$

Theorem 2. *Let $x_1, x_2, \cdots, x_n$ be normal operators in $L_0(\mathcal{M})$. If $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ is an increasing continuous function, then*

$$\mu(g(|\sum_{k=1}^{n} x_k|)) \leq \mu(g(\sum_{k=1}^{n} |x_k|)).$$

Funding: The authors were supported by the grant No. AP09259802 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: normal operator, submajorisation, τ-measurable operator, semifinite von Neumann algebra.

2010 Mathematics Subject Classification: 46L52, 47L05

References

[1] Ando T., Zhan X. Norm inequalities related to operator monotone functions, *Math. Ann.*, **315**: (1999), 771–780.

[2] Bhatia R., Choi M.D. and Davis C. Comparing a matrix to its off-diagonal part, *Operator theory: Advances and applications*, **40**: (1989), 151–163.

[3] Bhatia R. *Matrix Analysis*, Graduate Texts in Mathematics 169, Springer, (1997).

[4] Bourin J. C. A matrix subadditivity inequality for symmetric norms, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **138**: (2010), 495–504.

[5] Dodds P. G. and Dodds T. K. On a submajorization inequality of T. Ando, *Operator theory: Advances and applications*, **175**: (1995), 113–131.

[6] Dodds P. G. and Sukochev F. A. Submajorisation inequalities for convex and concave functions of sums of measurable operators, *Positivity*, **13(1)**: (2009), 107–124.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

D'ALEMBERT'S FORMULA FOR THE WAVE EQUATION ON A GRAPH-STAR

Ghulam Hazrat Aimal RASA[1,2,a], Baltabek KANGUZHIN[2,3,b], Zhalgas KAIYRBEK[2,3,c]

[1] *Shaheed Prof. Rabbani Education University1, Kabul, Afghanistan*

[2] *Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

[3] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

E-mail: [a]*aimal.rasa14@gmail.com*, [b]*kanbalta@mail.ru*, [c]*kaiyrbek.zhalgas@gmail.com*

The d'Alembert method or the method of incident and reflected waves allows solving not only the Cauchy problem for the wave equation, but also finding solutions to mixed problems. In the case of a semi-bounded string, the effect of wave reflection is observed, which depends on the form of the boundary condition. In the case of bounded strings, waves are also reflected, but this effect occurs in a more complex scenario.Similar results in the case of multipoint problems can be found in the work of B.E. Kanguzhin and M.Zh. Kozhataeva, as well as in the work of B.Bekbolat, B.E. Kanguzhin, N.E. Tokmaganbetov.

Let m be fixed natural number. Consider a mixed problem for the system of wave equations

$$\frac{\partial^2 u_{m+1}(x_{m+1}, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_{m+1}(x_{m+1}, t)}{\partial x_{m+1}^2} = 0, \;\; 0 < x_{m+1} < b_{m+1}, \;\; t > 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_m(x_m, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_m(x_m, t)}{\partial x_m^2} = 0, \;\; 0 < x_m < b_m, \;\; t > 0, \tag{1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^2 u_1(x_1, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} = 0, \;\; 0 < x_1 < b_1, \;\; t > 0,$$

with conditions of the form (a)

$$u_{m+1}(b_{m+1},t)=u_1(0,t)=\ldots=u_m(0,t),\ \ t>0,$$
$$\frac{\partial u_{m+1}(b_{m+1},t)}{\partial x_{m+1}}=\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial u_m(0,t)}{\partial x_m},\quad t>0, \tag{2}$$

and conditions of the form (b)

$$u_{m+1}(0,t)=0,\ u_1(b_1,t)=0,\ \ldots,\ u_m(b_m,t)=0,\ t>0, \tag{3}$$

and also the initial conditions

$$u_{m+1}(x_{m+1},0)=\varphi_{m+1}(x_{m+1}),\ 0<x_{m+1}<b_{m+1},$$
$$\frac{\partial}{\partial t}u_{m+1}(x_{m+1},0)=\psi_{m+1}(x_{m+1}),\ 0<x_{m+1}<b_{m+1},$$
$$u_m(x_m,0)=\varphi_m(x_m),\quad 0<x_m<b_m,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}u_m(x_m,0)=\psi_m(x_m),\ 0<x_m<b_m, \tag{4}$$

For $m=1$ problem (1), (2), (3), (4) coincides with the mixed problem for the wave equation

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{\partial w}{\partial x^2}=0,\ \ 0<x<b_1+b_2,\ t>0, \tag{5}$$
$$w(0,t)=0,\ w(b_1+b_2,t)=0,\ t>0, \tag{6}$$
$$w(x,0)=\varphi(x),\ \ \frac{\partial w(x,0)}{\partial t}=\psi(x),\ 0<x<b_1+b_2. \tag{7}$$

In this case, the d'Alembert formula is valid

$$w(x,t)=\frac{\widetilde{\varphi}(x+t)+\widetilde{\varphi}(x-t)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\widetilde{\psi}(\xi)d\xi,\ \ 0<x<b_1+b_2,\ t>0, \tag{8}$$

here $\widetilde{\varphi}(x)$ and $\widetilde{\psi}(x)$ are the continuation of the function $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ from the segment $[0,\,b_1+b_2]$ to the entire numerical axis.

The solution of the mixed problem on the graph (1), (2), (3), (4) is sought in the form

$$u_j(x_jt)=\sum_n d_n(t)w_j(x_j,\lambda_n),\ \ 0<x_j<b_j,\ j=1,\ldots,m+1.$$

Then it is easy to understand that

$$d_n(t)=D_n(\Phi)\cos\sqrt{\lambda_n}\cdot t,\ n\geq 1.$$

Thus, the solution will take the form

$$u_j(x_j,t)=\sum_n D_n(\Phi)\cos\sqrt{\lambda_n}t\cdot w_j(x_j,\lambda_n),\ \ 0<x_j<b_j,\ t>0,\ j=1,\ldots,m+1. \tag{9}$$

Then formula (9) imply the main statement of this thesis. Then the mixed problem (1), (2), (3), and (4) on the graph has a unique solution, which can be represented in the form

$$u_j(x_j,t)=\frac{1}{2}\widetilde{\varphi}_j(x_j+t)+\frac{1}{2}\widetilde{\varphi}_j(x_j+t)+\frac{1}{2}\int\limits_{x_j-t}^{x_j+t}\widetilde{\psi}(\xi)d\xi.\quad j=1,2,\ldots,m+1,$$

where $\widetilde{\varphi}_j$ and $\widetilde{\psi}_j$ continue functions φ_j and ψ_j from arc e_j to the entire numerical axis.

Funding: The authors were supported by the grant No. AP08855402. of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: Kirchhoff conditions, star-graph, wave equation, d'Alembert formula.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

RECENT DEVELOPMENTS ON FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS AND APPLICATIONS

Joel E. RESTREPO[1,2,a,b]

[1] *University of Antioquia, Medellin, Colombia*
[2] *Nazarbayev University, Nur-Sultan, Kazakhstan*
E-mail: [a] *cocojoel89@yahoo.es,* [b] *joel.restrepo@nu.edu.kz*

We present some recent advances and investigations on fractional differential equations with continuous variable coefficients and its applications. In fact, we give explicit solutions of the mentioned equations by means of different fractional operators [1, 4, 5, 6]. The representations of solutions are given in terms of some convergent infinite series of fractional integro-differential operators, which can be widely and efficiently used for analytic and computational purposes. In the case of constant coefficients, the solution is given by the multivariate Mittag-Leffler functions and the obtained result extends the Luchko-Gorenflo representation formula [2, Theorem 4.1]. Some applications of the obtained results are also given, see e.g. the papers focus in Dirac type operators and Cauchy type problems [3, 7].

Funding: The author thanks to Colciencias and Universidad de Antioquia (Convocatoria 848-Programa de estancias postdoctorales 2019) for their support. The author is also partially supported by the Nazarbayev University Program 091019CRP2120.

Keywords: fractional calculus, fractional differintegral operators, fractional differential equations, Mittag-Leffler functions, variable coefficients.

2010 Mathematics Subject Classification: 34A08, 26A33, 26B05, 34A08, 47D09, 35R11.

References

[1] Restrepo J.E., Ruzhansky M., Suragan M. Explicit solutions for linear variable-coefficient fractional differential equations with respect to functions, *Appl. Math. Comput.*, 403:126177 (2021).

[2] Luchko Y., Gorenflo R. An operational method for solving fractional differential equations with the Caputo derivatives, *Acta Math Vietnam.*, 24(2) (1999), 207–233.

[3] Baleanu D., Restrepo J.E, Suragan D. A class of time-fractional Dirac type operators, *Chaos Solitons* & *Fractals*, 143 (2021).

[4] Fernandez A., Restrepo J.E., Suragan D. A new representation for the solutions of fractional differential equations with variable coefficients. (Under review)

[5] Restrepo J.E., Suragan D. Fractional differential equations of Hilfer type with variable coefficients. (Under review)

[6] Fernandez A., Restrepo J.E., Suragan D. Linear differential equations with variable coefficients and Mittag-Leffler kernels. (Under review)

[7] Restrepo J.E., Ruzhasky M., Suragan D. Generalized time-fractional Dirac type operators and Cauchy type problems. (Under review)

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ON FORCED MULTIPERIODIC OSCILLATIONS IN THE SYSTEM WITH DIFFERENTIATION OPERATOR WITH RESPECT TO DIRECTIONS

Zhaishylyk SARTABANOV[1,a], Bibigul OMAROVA[1,b]

[1] *K.Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan*
E-mail: [a]sartabanov42@mail.ru, [b]bibigul_zharbolkyzy@mail.ru

We consider a system of equations that describes a forced oscillation process

$$Dx = Ax + \varepsilon^0 f(\tau, t) \tag{1}$$

with respect to real analytic n-vector-function $x = x(\tau, t)$ with differentiation operator $D = \partial/\partial\tau + \langle e, \partial/\partial t\rangle$ with respect to time variables $t_0 = \tau \in R$ and $t = (t_1, \ldots, t_m) \in R \times \ldots \times R = R^m$, where $\langle e, \partial/\partial t\rangle$ is the scalar product of m-vectors $e = (1, \ldots, 1)$ and $\partial/\partial t = (\partial/\partial t_1, \ldots, \partial/\partial t_m)$, A is a constant n-matrix, $f(\tau, t)$ is an n-vector-function, $\varepsilon^0 > 0$ is parameter. The class of functions that are (θ, ω)-periodic and real analytic with respect to $(\tau, t) \in \Pi_\rho \times \Pi_\rho^m$, bounded on the norm by number r, is denoted by $Ab_r^{\theta,\omega}(\Pi_\rho \times \Pi_\rho^m)$, $\Pi_\rho = \{\omega_j\, |Im\, t_j| < 2\pi\rho\}$ $(\rho > 0,\ j = \overline{0, m})$ is a strip.

Assume that the following conditions are satisfied.

a) The constant matrix A has one pair of purely imaginary eigenvalues and the other eigenvalues have nonzero real parts:

$$Im\, \lambda_{1,2} = \pm 2\pi\nu^0 \neq 0, Re\, \lambda_{1,2} = 0, Re\, \lambda_j \neq 0, j = \overline{3, m}. \tag{2}$$

b) The vector-function $f = f(\tau, t)$ satisfies the following condition

$$f(\tau, t) \in Ab_{\Delta_0}^{\theta,\omega}\left(\Pi_\rho \times \Pi_\rho^m\right). \tag{3}$$

c) The frequencies of free oscillations ν^0 with respect to τ and forced oscillations $\nu_0 = \theta^{-1}$ with respect to τ, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$, $\nu_j = \omega_j^{-1}$, $j = \overline{1, m}$ on t are rationally incommensurable and satisfied the Diophantine condition:

$$\left|\nu^0 + k_0\nu_0 + k_1\nu_1 + \ldots + k_m\nu_m\right| \geq c^{-1}|\widehat{k}|^{-\gamma}, |\widehat{k}| \neq 0, \tag{4}$$

where $\widehat{k} = (k_0, k_1, \ldots, k_m)$, $|\widehat{k}| = \sum\limits_{j=0}^{m} |k_j|$, $k_j \in Z$ is the set of integers, $c > 0$, $\gamma \geq m + 2$.

We study the problem of clarifying additional conditions, except from (2)–(4), under which system (1) allowed (θ, ω)-periodic motion.

The methods of the theory of multiperiodic solutions of a system with multiperiodic input data, real analytically extendable in each variable to some complex neighborhood of the real axis from works [1-4] are used.

Theorem. *Under conditions (2), (3), and (4), the system (1) with differentiation operator along the main diagonal of the space of time variables allows a unique solution $x^0(\tau, t) \in Ab_{\Delta_0}^{\theta,\omega}\left(\Pi_{\rho-2\delta} \times \Pi_{\rho-2\delta}^m\right)$ of the form*

$$x^0(\tau, t) = \varepsilon^0 \int\limits_{s^*(\tau)}^{s^*(\tau+\theta-0)} G_1(\tau, s) f(s, h(s, \tau, t))\, ds + \varepsilon^0 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_2(\tau, s) f(s, h(s, \tau, t))\, ds,$$

which obeying the estimate

$$\left|x^0\right|_{\rho-2\delta} \leq \varepsilon^0 a\xi \left|f\right|_\rho = \Delta_0,$$

where $G_1(\tau,s), G_2(\tau,s)$ *are the Green's matrix functions which bounded with* $a_1 > 0$ *and* $a_2 e^{-\alpha(\tau-s)}(a_2 > 0)$ *respectively,* $s^*(\tau) = [\tau/\theta]\,\theta$ *is a step function,* $\xi = \delta^{-\alpha}$ *is an influence of small denominators,* $0 < \delta < \rho < 1$*,* $\alpha = 1+m+\gamma$*,* $a = 4a_0a_1 + \dfrac{a_2}{\alpha}$*,* $a_0 = 2e^{\rho} max\left\{\dfrac{1}{2\pi\nu^0}, 2^{2+m}c\left(\dfrac{m+\gamma}{e}\right)^{m+\gamma}\right\}$.

Keywords: multiperiodic solution, differentiation operator, Green's function, real analytic function, small denominators, influence parameter.

2010 Mathematics Subject Classification: 34C46, 35B10, 35F35

References

[1] Umbetzhanov D.U. *Almost multiperiodic solutions of partial differential equations*, Nauka, Alma-Ata (1979) (in Russian).

[2] Sartabanov Z.A., Omarova B.Z. Multiperiodic solutions of autonomous systems with operator of differentiation on the Lyapunovś vector field, *AIP Conference Proceedings*, **1997** (2018), 020041-1–020041-4.

[3] Omarova B.Zh. Multiperiodic solutions of systems of the second order with differentiation operator on the Lyapunov vector field, *Bulletin Abai University. Series of Physics and Mathematical Sciences*, **36**:1 (2020), 155–163.

[4] Sartabanov Zh.A., Omarova B.Zh. Integral representation of multiperiodic solutions of a linear system in one critical case, *Kazakh Mathematical Journal*, **19**:4 (2019), 55–70.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

MEAN VALUE FORMULAS AND DEGENERATE STURM-LIOUVILLE BOUNDARY VALUE PROBLEMS ON A STAR GRAPH

Aliya SEITOVA[1,2,a]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*functionaliya@gmail.com*

This article presents the derivation of the mean value formulas for solutions of differential operators on graphs. Similar formulas for differential operators on an interval can be found in the works of V.A. Sadovnichy and B.E. Kanguzhin. A systematic application of mean value formulas in the study of the basic properties of systems of eigenfunctions and associated functions of differential operators can be found in the works of V.A. Ilyin and his students. The paper seeks the answer to the question: under what boundary conditions does a second-order differential operator on a graph have adjustable (predetermined) flows? Using the mean value formulas given in the paper we can construct various examples of boundary value problems for second-order differential operators with adjustable flows on arcs.

In this paper, we study second-order differential operators on graphs representing an m -vertex star. The boundary vertices are numbered from 1 to m. The number of the inner vertex is $m+1$. The arcs, joining the boundary vertices with the interior vertex, are denoted by $e_1, , e_m$. It is assumed that the arc length e_j is equal to $b_j > 0$. On the arcs of the graph the following differential equations

$$-b_j^2 y_j^{''}(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) - \lambda y_j(x_j) = f_j(x_j), \quad 0 < x_j < b_j,\ j = 1,,m. \tag{1}$$

are considered with the Kirchhoff conditions

$$y_1(b_1) = y_2(0) = \ldots = y_m(0), \tag{2}$$

$$b_1 y_1^{'}(b_1) = b_2 y_2^{'}(0) + \ldots + b_m y_m^{'}(0). \tag{3}$$

at the inner vertex.

Statement 1. Suppose that for some $j > 1$ the equality

$$q_j(x_j) = q_1\left(b_1 - \frac{b_1}{b_j}x_j\right), \quad x_j \in (0, b_j), \tag{4}$$

holds, then the mean value formulas are given by

$$\begin{array}{c} (b_1y_1'(b_1) + b_jy_j'(0))c_1(b_1) = b_1y_1'(0) + b_jy_j'(b_j); \\ (b_1y_1'(b_1) + b_jy_j'(0))s_1(b_1) = b_1(y_j(b_j) - y_1(0)). \end{array} \tag{5}$$

Statement 2. Assume that equalities

$$q_{2j}(x_{2j}) = q_1\left(b_1 - \frac{b_1}{b_{2j}}x_{2j}\right), \quad x_{2j} \in (0, b_{2j}), \quad j = 1, ..., k, \tag{6}$$

hold. Then the solution of boundary value problem (1)–(3),

$$b_1y_1'(0) + b_{2j}y_{2j}'(b_{2j}) = 0, \quad y_{2j}(b_{2j}) - y_1(0) = 0, \quad j = 1, ..., k. \tag{7}$$

for $f_1(x_1) \equiv 0, ..., f_m(x_m) \equiv 0$ satisfies the following relations at the inner vertex:

$$b_1y_1'(b_1) + b_{2j}y_{2j}'(0) = 0, \quad j = 1, ..., k. \; . \tag{8}$$

Statement 3. Let equalities (6) hold. Then, for any complex value of λ, there exists a nonzero solution of boundary value problem (1)–(3), (7) for $f_1(x_1) \equiv 0, ..., f_m(x_m) \equiv 0$.

Funding: The author was supported by the grant No. AP08855402 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: star graph, mean value formulas, degenerate Sturm-Liouville boundary value problems.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B45, 34B24, 05C21, 35G60

— ⁂ ⁂ ⁂ —

DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR TIME-FRACTIONAL PSEUDO-PARABOLIC EQUATIONS

Daurenbek SERIKBAEV[1,2,a], Niyaz TOKMAGAMBETOV[1,2,b]

[1] *Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Ghent University, Belgium*
E-mail: [a]*daurenbek.serikbaev@ugent.be*, [b]*tokmagambetov@math.kz*

We consider direct and inverse problems for the Caputo time-fractional pseudo-parabolic equation

$$\mathcal{D}_t^\alpha[u(t) + \mathcal{L}u(t)] + \mathcal{M}u(t) = f(t) \text{ in } \mathcal{H},$$

for $0 < t < T < \infty$, with different abstract operators $\mathcal{L}$ and $\mathcal{M}$. We seek generalized solutions to these problems in a form of series expansions using the elements of non-harmonic analysis (see [1], [2]) and we also examine the convergence of the obtained series solutions. The main results on well-posedness of direct and inverse problems are formulated in three theorems.

Funding: The authors were supported by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09259394).

Keywords: fractional differential equation, inverse problem, pseudo-parabolic equation.

References

[1] Ruzhansky M., Tokmagambetov N. Nonharmonic analysis of boundary value problems, *Int. Math. Res. Notices*, **2016**:12 (2016), 3548–3615.

[2] Ruzhansky M., Tokmagambetov N., Torebek B.T. Inverse source problems for positive operators. I: Hypoelliptic diffusion and subdiffusion equations, *J. Inverse and Ill-posed problems*, **27**:6 (2019), 891–911.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ON THE SOLVABILITY OF A PERIODIC INITIAL PROBLEM FOR FOURTH-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Zhanibek TOKMURZIN[1,a]

[1] *K.Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan*

E-mail: [a]*tokmurzinzh@gmail.com*

In the present communication, on the domain $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$ we consider the following periodic initial boundary value problem for a fourth order system of partial differential equations

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^3 \partial x} = A_1(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + A_2(t,x)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + A_3(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A_4(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} +$$

$$+A_5(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + A_6(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + A_7(t,x)u + f(t,x), \tag{1}$$

$$u(0,x) = \varphi_1(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_2(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}|_{t=0} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}|_{t=T}, \qquad x \in [0,\omega], \tag{4}$$

$$u(t,0) = \psi(t), \qquad t \in [0,T], \tag{5}$$

where $u(t,x) = col(u_1(t,x), ..., u_n(t,x))$ is unknown function, the $n \times n$ matrices $A_i(t,x), (i = \overline{1,7})$, and n vector–function $f(t,x)$ are continuous on Ω; n vector–function $\psi(t)$ are continuously three times differentiable on $[0,T]$; the n vector–functions $\varphi_1(x)$ and $\varphi_2(x)$ are continuously differentiable on $[0,\omega]$.

Mathematical modeling of various processes in physics, ecology, chemistry, biology and others are leaded to initial - boundary value problems for a higher-order partial differential equations with variable coefficients and boundary functions [1-3]. Despite the presence of numerous works, general statements of initial-boundary value problems for the higher-order system of partial differential equations remain poorly studied up to now. Therefore, the problems of solvability of initial-boundary value problems for the fourth-order system of partial differential equations are important in applied problems [4-5].

Aim of the communication is to study questions for an existence and uniqueness of classical solutions to the periodic initial boundary value problem for the fourth-order system of partial differential equations (1)-(5). We will establish coefficient criteria for its unique solvability and construct algorithms for finding its approximate solutions. For reaching this goal, we are used method of functional parameterization [6] for solve of problem (1)-(5).

The following statement gives conditions for the convergence of the algorithm and the unique solvability of problem (1)-(5) in terms of the initial data.

Theorem. *Suppose that for some $m, m = 1,2,3,...,$ the $n \times n$ -matrix $D_m(T,x)$ is invertible for all $x \in [0,\omega]$ and the following inequalities are fulfilled:*

a) $||[D_m(T,x)]^{-1}|| \le \gamma_m(T,x)$, *and $\gamma_m(T,x)$ is a positive continuous function for all $x \in [0,\omega]$;*

b) $q_m(T,x) = \gamma_m(T,x) \cdot \left\{ e^{\alpha(x)T} - 1 - \alpha(x)T - ... - \frac{1}{m!}[\alpha(x)T]^m \right\} \le \chi < 1,$

where $D_m(t,x) = D_m^{(1)}(t,x) + D_m^{(2)}(t,x) + D_m^{(3)}(t,x),$

$$D_m^{(1)}(t,x) = \int\limits_0^t A_1(\tau_1,x)d\tau_1 + \int\limits_0^t A_1(\tau_1,x)\int\limits_0^{\tau_1} A_1(\tau_2,x)d\tau_2 d\tau_1 +$$

$$+ ... + \int_0^t A_1(\tau_1,x)... \int_0^{\tau_{m-1}} A_1(\tau_m,x)d\tau_m...d\tau_1,$$

$$D_m^{(2)}(t,x) = \int_0^t A_4(\tau_1,x)\cdot\tau_1 d\tau_1 + \int_0^t A_4(\tau_1,x)\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2} A_4(\tau_3,x)\cdot\tau_3 d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 + ... +$$

$$+\int_0^t A_4(\tau_1,x)\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2} A_4(\tau_3,x)... \int_0^{\tau_{2m-3}}\int_0^{\tau_{2m-2}} A_4(\tau_{2m-1},x)\tau_{2m-1}d\tau_{2m-1}d\tau_{2m-2}...d\tau_1,$$

$$D_m^{(3)}(t,x) = \int_0^t A_6(\tau_1,x)\cdot\frac{\tau_1^2}{2}d\tau_1 +$$

$$+\int_0^t A_6(\tau_1,x)\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_3} A_6(\tau_4,x)\cdot\frac{\tau_4^2}{2}d\tau_4 d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 + ... + \int_0^t A_6(\tau_1,x)...$$

$$... \int_0^{\tau_{3m-8}}\int_0^{\tau_{3m-7}}\int_0^{\tau_{3m-6}} A_6(\tau_{3m-5},x)\int_0^{\tau_{3m-5}}\int_0^{\tau_{3m-4}}\int_0^{\tau_{3m-3}} A_6(\tau_{3m-2},x)\frac{\tau_{3m-2}^2}{2}d\tau_{3m-2}...d\tau_1,$$

$\alpha(x) = \max_{t\in[0,T]}(||A_1(t,x)||, ||A_4(t,x)||, ||A_6(t,x)||)$, χ *is constant.*
Then there is a unique classical solution $u^*(t,x)$ to problem (1)–(5), defining from the following integral representation

$$u^*(t,x) = \varphi_1(x) + t\cdot\varphi_2(x) + \int_0^t\int_0^{\tau} w^*(\tau_1,x)\,d\tau_1 d\tau, \qquad (t,x)\in\Omega.$$

For an additional information it can be seen [7]. In this article the periodic initial boundary-value problem for a fourth-order system of partial differential equations was considered. Using the method of functional parametrization, an additional parameter is carried out and the studied problem was reduced to the equivalent periodic problem for a system of integro-differential equations of hyperbolic type second order with functional parameters and integral relations. An interrelation between the periodic problem for the system of integro-differential equations of hyperbolic type and a family of Cauchy problems for a system of ordinary differential equations was established. Algorithms for finding of solutions to an equivalent problem are constructed and their convergence was proved. Sufficient conditions of a unique solvability to the semi-periodic initial boundary value problem for the fourth-order system of partial differential equations were obtained.

Funding: This research was funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08955461)

Keywords: periodic initial boundary-value problem, fourth-order system of partial differential equations, the method of functional parametrization, periodic problem, system of integro-differential equations of hyperbolic type second order, family of Cauchy problems, algorithm, unique solvability.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

References

[1] Ptashnyck B.I. *Ill-Posed Boundary-Value Problems for Partial Differential Equations*, Naukova dumka, Kiev (1984) (in Russian).

[2] Nakhushev A.M. *Problems with shift for partial differential equations*, Nauka, Moscow (2006) (in Russian).

[3] Kiguradze I., Kiguradze T. On solvability of boundary value problems for higher order nonlinear hyperbolic equations, *Nonlinear Analysis*, **69**:7 (2008), 1914–1933.

[4] Ferraioli D.C., Tenenblat K. Fourth order evolution equations which describe pseudospherical surfaces, *Journal of Differential Equations*, **257**:7 (2014), 3165–3199.

[5] Assanova A.T., Tokmurzin Zh.S. On two-point initial boundary value problem for fourth order partial differential equations, *Kazakh Mathematical Journal*, **19**:3 (2019), 66–78.

[6] Assanova A.T. An integral-boundary value problem for a partial differential equation of second order, *Turkish Journal of Mathematics*, **43**:4 (2019), 1967–1978.

[7] Assanova A.T., Tokmurzin Zh.S. Method of functional parameterization for solving a semi-periodic initial problem for fourth-order partial differential equations, *Bulletin of the Karaganda university - Mathematics*, **100**:4 (2020), 5–16.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

BOUNDEDNESS OF THE MULTIDIMENSIONAL HILBERT OPERATOR

K.S. TULENOV[1,a]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*tulenov@math.kz*

This work is jointly written with Prof. F. Sukochev and Dr. D. Zanin (UNSW, Sydney, Australia). In this work, we obtain a weak type (1,1) estimate for a higher dimensional version of the Hilbert operator answering a recent problem by A. Osękowski [1]. In fact, we establish complete boundedness of this operator. Moreover, we study its boundedness in general symmetric quasi-Banach function spaces.

Funding: The author was supported by the grants No. AP09258335 and AP08052004 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: Hilbert operator, a weak-type estimate, symmetric quasi-Banach space.

2010 Mathematics Subject Classification: 31B10, 47B38, 46L51

References

[1] Osękowski A., Inequalities for Hilbert operator and its extensions: The probabilistic approach, *Ann. Probab.*, **45**:1 (2017), 535–563.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

A NUMERICAL SOLUTION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH PARAMETER

Roza UTESHOVA[1,2,a], Dauren MURSALIYEV[1,b]

[1] *International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*r.uteshova@iitu.edu.kz,* [b]*mu.dauren@gmail.com*

We consider the following linear boundary value problem with a parameter μ:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)\mu + f(t), \quad t \in (0,T), \quad x \in R^n, \quad \mu \in R^m, \tag{1}$$

$$C_0\mu + C_1x(0) + C_2x(T) = d, \quad d \in R^{m+n}. \tag{2}$$

Here $A(t)$, $B(t)$ and $f(t)$ are continuous on $[0,T]$; the matrices C_0, C_1 and C_2 are constant; $\|x\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i|$.

By a solution of problem (1), (2) we mean a pair $(\mu^*, x^*(t))$, where $\mu^* \in R^m$ and $x^*(t)$ is a function that is continuous on $[0, T]$ and continuously differentiable on $(0, T)$ and satisfies (1) and (2) with $\mu = \mu^*$.

We take a new approach to the concept of general solution to Eq. (1) proposed by D.S. Dzhumabaev (see [1,2]). This approach allows us to develop an algorithm for solving problem (1),(2) without the involvement of a fundamental matrix of Eq.(1). We present a numerical example illustrating the performance of the algorithm.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08855726).

Keywords: boundary value problem with parameter, parametrization method, numerical algorithm, new general solution.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B08, 65L10

References

[1] Dzhumabaev D.S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving boundary value problems, *J. Comput. Appl. Math.*, **327** (2018), 79-108.

[2] Dzhumabaev D.S. Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **41** (2018), 1439–1462.

— ⁂ —

HYPOELLIPTIC FUNCTIONAL INEQUALITIES

Nurgissa YESSIRKEGENOV[1,a]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Department of Mathematics: Analysis, Logic and Discrete Mathematics, Ghent University, Ghent, Belgium*
E-mail: [a]*nurgissa.yessirkegenov@ugent.be*

In this talk we will give a review of our recent research on hypoelliptic functional inequalities. We managed to link the integral versions of Hardy inequalities on homogeneous groups to their hypoelliptic versions through the Riesz and Bessel kernels of the Rockland operators (hypoelliptic left-invariant homogeneous differential operators, following the Helffer-Nourrigats resolution of the Rockland conjecture in the 80s). Consequently, this leads togeneral hypoelliptic versions of Hardy-Sobolev, Hardy - Littlewood - Sobolev, Trudinger - Moser, Caffarelli - Kohn-Nirenberg, Gagliardi - Nirenberg and other inequalities [1]. We will then concentrate also on discussing their best constants, ground states for higher order hypoelliptic Schrödinger type equations, and the solutions to the corresponding variational problems [2].

Funding: The author was supported by the MES RK grant AP09058474.

Keywords: Rockland operator, hypoelliptic inequalities, nonlinear Schrödinger equation.

2010 Mathematics Subject Classification: 46E35, 22E30, 43A80

References

[1] Ruzhansky M., Yessirkegenov N. Hypoelliptic functional inequalities, *arXiv:1805.01064*, (2018).

[2] Ruzhansky M., Tokmagambetov N., Yessirkegenov N. Best constants in Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities on graded groups and ground states for higher order nonlinear subelliptic equations, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **59**:5 (2020), 23pp.

— ⁂ —

FIRST KIND FREDHOLM FUNCTIONAL–INTEGRAL EQUATIONS

Tursun K. YULDASHEV[1,a]

[1]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: [a]tursun.k.yuldashev@gmail.com

Using the regularization method in combination it with the method of degenerate kernel, we obtain an implicit functional equation with nonlinear deviation. Fredholm functional-integral equation of first kind is ill-posed. So, we use boundary conditions to ensure the uniqueness of the solution. In order to use the method of a successive approximations, we transform the implicit functional equation to the nonlinear Volterra type functional-integral equation of second kind. In our case, this Volterra type functional-integral equation of second kind is ill-posed, too. The one value solvability of this problem we have proved by the given boundary conditions.

On the segment $[0;\, T]$ the nonlinear Fredholm integral equation of first kind is considered

$$\lambda \int_0^T K\,(t,\, s)\, F\,(s,\, u\,(s),\, u\,[\delta\,(s,\, u\,(s))])\; d\,s = f\,(t) \tag{1}$$

under the following conditions

$$\left[\begin{array}{l} u\,(0) = \varphi_0 = \text{const}, \\ u\,(t) = \varphi_1(t),\ t \in [-h_1;\, 0], \\ u\,(t) = \varphi_2(t),\ t \in [T;\, T + h_2], \end{array}\right. \tag{2}$$

where $0 < T$ is given real number, λ is nonzero compatibility parameter, $F\,(t,\, u,\, v) \in C\,([0\,;\, T] \times X \times X)$, $\delta\,(t,\, u) \in C\,([0;\, T] \times X)$, $-h_1 < \delta\,(t,\, u) < T + h_2$, $0 < h_i = \text{const}$, $i = 1,\, 2$, $\varphi_1(t) \in C\,[-h_1;\, 0]$, $\varphi_2(t) \in C\,[T;\, T{+}h_2]$, $K\,(t,\, s) = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i\,(t)\, b_i\,(s)$, $0 \neq a_i(t),\, b_i(s) \in C\,[0;\, T]$, X is closed set on real number set. Here it is assumed that each of the systems of functions $a_i\,(t),\ i = \overline{1,\, k}$, and $b_i(s),\ i = \overline{1,\, k}$, linearly independent, $\varphi_1(0) = \varphi_0,\ \varphi_2(T) = u(T)$.

Applying regularization method in combination it with the method of degenerate kernel, instead of the Fredholm first kind integral equation (1) we obtain the following implicit functional equation

$$0 = G\,(t,\, u\,(t),\, u\,[\delta\,(t,\, u\,(t))]\}) \tag{3}$$

with given conditions (2).

On the segment $[\,0;\, T\,]$ we take arbitrary positive defined and continuous function $K_0(t)$. We introduce the notation

$$\psi(t,\, s) = \int_s^t K_0(\theta)\, d\theta,\ \ \psi(t,\, 0) = \psi(t),\ \ t \in [0;\, T].$$

Then the implicit functional equation (3) we replace with the following Volterra type integral equation

$$\begin{gathered} u\,(t) = \int_0^t H(t,\, s)\, u\,(s)\, ds + \\ + [u\,(t) + G\,(t,\, u\,(t),\, u\,[\delta\,(t,\, u\,(t))])] \cdot \exp\{-\psi\,(t)\} + \\ + \int_0^t K_0(s)\, \exp\,\{-\psi\,(t,\, s)\}\, \{u\,(t) - u\,(s) + G\,(t,\, u\,(t),\, u\,[\delta\,(t,\, u\,(t))]) - \\ - G\,(s,\, u\,(s),\, u\,[\delta\,(s,\, u\,(s))])\}\; d\,s,\ \ t \in [0;\, T], \end{gathered} \tag{4}$$

where

$$H\,(t,\, s) = K_0(s)\, \exp\,\{-\psi(t,\, s)\} - \int_s^t K_0(\theta)\, \exp\,\{-\psi(t,\, \theta)\}\, K_0(\theta,\, s)\, d\theta.$$

The nonlinear functional-integral equation (4) we conditionally called as a Volterra type nonlinear functional-integral equation of second kind. Because this integral equation (4) is ill-posed, too. So, we studied it by the given conditions (2). In addition, in the conditions (2) we suppose that $u\,(t-0) = u\,(t+0)$ at the points $t = 0$ and $t = T$. Instead of the Fredholm functional-integral equation of first kind (1) we will study the Volterra type functional-integral equation of second kind (4) with conditions (2). The theorem of one value solvability of the problem (1), (2) was proved.

Keywords: Integral equation of first kind, nonlinear functional equation, degenerate kernel, nonlinear deviation, boundary conditions, regularization, one value solvability.

2010 Mathematics Subject Classification: 34A08, 26A33.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR BENNEY–LUKE TYPE DIFFERENTIAL EQUATION OF EVEN ORDER

Tursun K. YULDASHEV[1,a], Farkhod D. RAKHMONOV[1,b]

[1]*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*
E-mail: [a]*tursun.k.yuldashev@gmail.com*, [b]*mr.haker-frd@bk.ru*

We study the regular solvability of a nonlocal inverse boundary value problem of identification of sources for a Benney–Luke type differential equation with spectral parameter and small positive parameters. In constructing solutions, the presence of spectral parameter plays an important role.

In three-dimensional domain $\Omega = \{(t,\, x,\, y)\,|\; 0 < t < T,\; 0 < x,\, y < l\}$ a partial differential equation of the following form is considered

$$D\,[U] = \alpha\,(t)\,\beta\,(x,\, y) \tag{1}$$

with nonlocal conditions on the integral form

$$U\,(T,\, x,\, y) + \int_0^T U\,(t,\, x,\, y)\,d\,t = \varphi_1(x,\, y), \quad 0 \le x,\, y \le l, \tag{2}$$

$$U_t\,(T,\, x,\, y) + \int_0^T U_t\,(t,\, x,\, y)\,t\,d\,t = \varphi_2\,(x,\, y), \quad 0 \le x,\, y \le l, \tag{3}$$

where T and l are given positive real numbers,

$$D\,[U] = [\frac{\partial^2}{\partial\, t^2} - \frac{\partial^2}{\partial\, t^2}(a\big(t,\varepsilon_1\big)\frac{\partial^{2k}}{\partial\, x^{2k}} - b\big(t,\varepsilon_2\big)\frac{\partial^{4k}}{\partial\, x^{4k}} + a\big(t,\varepsilon_1\big)\frac{\partial^{2k}}{\partial\, y^{2k}} -$$

$$-.b\big(t,\varepsilon_2\big)\frac{\partial^{4k}}{\partial\, y^{4k}}) - \omega^2\,(\frac{\partial^{2k}}{\partial\, x^{2k}} - \frac{\partial^{4k}}{\partial\, x^{4k}} + \frac{\partial^{2k}}{\partial\, y^{2k}} - .\frac{\partial^{4k}}{\partial\, y^{4k}})]\,U\,(t,\, x,\, y),$$

ω is positive spectral parameter, ε_1, ε_2 are positive small parameters, k is given positive integer, $\alpha\,(t) \in C\,(\Omega_T)$, $\Omega_T \equiv [0;\, T]$, $\Omega_l \equiv [0;\, l]$, $\beta\,(x,\, y) \in C\,(\Omega_l^2)$ is known function, $\varphi_i(x,\, y)$ $(i = 1,\, 2)$ are redefinition functions (sources),
$\Omega_l^2 \equiv \Omega_l \times \Omega_l$. We assume that for given functions are true the following boundary conditions

$$\varphi_i(0,\, y) = \varphi_i(l,\, y) = \varphi_i(x,\, 0) = \varphi_i\,(x,\, l) = 0, \;\; i = 1,\, 2,$$

$$\beta\,(0,\, y) = \beta\,(l,\, y) = \beta\,(x,\, 0) = \beta\,(x,\, l) = 0.$$

Problem Statement. We find the triple of functions $\{U(t,x,y);\ \varphi_1(x,y),\ \varphi_2(x,y)\}$, first of which satisfies differential equation (1), nonlocal integral conditions (2) and (3), zero boundary value conditions for $0 \le t \le T$

$$U\,(t,\,0,\,y) = U\,(t,\,l,\,y) = U\,(t,\,x,\,0) = U\,(t,\,x,\,l) =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial\,x^2}U\,(t,\,0,\,y) = \frac{\partial^2}{\partial\,x^2}U\,(t,\,l,\,y) = \frac{\partial^2}{\partial\,x^2}U\,(t,\,x,\,0) = \frac{\partial^2}{\partial\,x^2}U\,(t,\,x,\,l) =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial y^2}U\,(t,\,0,\,y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}U\,(t,\,l,\,y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}U\,(t,\,x,\,0) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}U\,(t,\,x,\,l) =$$
$$= \ldots = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}U(t,0,y) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}U(t,l,y) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}U(t,x,0) =$$
$$= \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}U(t,x,l) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial y^{4k-2}}U(t,0,y) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial y^{4k-2}}U(t,l,y) =$$
$$= \frac{\partial^{4k-2}}{\partial y^{4k-2}}U(t,x,0) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial y^{4k-2}}U(t,x,l) = 0,$$

class of functions

$$U\,(t,\,x,\,y) \in C\,(\overline{\Omega}) \cap C^{2,\,4k,\,4k}_{t,\,x,\,y}(\Omega) \cap C^{2+4k+0}_{t,\,x,\,y}(\Omega) \cap C^{2+0+4k}_{t,\,x,\,y}(\Omega)$$

and additional conditions

$$U\,(t_i,\,x,\,y) = \psi_i(x,\,y), \quad i = 1,\,2, \;\; 0 < t_1 < t_2 < T, \;\; 0 \le x,\,y \le l,$$

where $\psi_i(x,\,y)$ are given smooth functions and

$$\psi_i(0,\,y) = \psi_i(l,\,y) = \psi_i(x,\,0) = \psi_i(x,\,l) = 0.$$

Keywords: Benney–Luke type differential equation, Fourier method, absolute and uniform convergence, regular solvability.

2010 Mathematics Subject Classification: 35A02, 35M10, 35S05

— ⁂ ⁂ ⁂ —

STABILITY OF A PROGRAM MANIFOLD OF CONTROL SYSTEMS TAKING INTO ACCOUNT EXTERNAL LOAD

Sailaubay ZHUMATOV[1,a]

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*sailau.math@mail.ru*

Consider the problem of construction of the control systems taking into account external load by given $(n-s)$-dimensional program manifold $\Omega\,(t) \equiv \omega(t,x) = 0$, in the following form [1]:

$$\dot{x} = f\,(t,x) - b_1\xi, \quad \dot{\xi} = \varphi(\sigma)\psi(\nu), \quad \sigma = p^T\omega - r\xi, \quad t \in I = [0,\,\infty)\,, \tag{1}$$

where $x \in R^n$ is a state vector of the object, $f \in R^n$ is a vector-function, satisfying to conditions of existence of a solution $x(t) = 0$, and $b_1 \in R^s,\ p \in R^s$ are constant vectors, $\omega \in R^s(s \le n)$ is a vector, $\xi \in R^r$ is a differentiable function, satisfying to conditions

$$\varphi(0) = 0 \;\wedge\; \varphi(\sigma)\sigma > 0, \quad \forall\, \sigma \ne 0, \tag{2}$$

and factor $\psi(\nu)$ deforms the function $\varphi(\sigma)$ when the coordinates of ξ, σ change. In this case, ν is a complex discontinuous function of the state of the automatic control system. In the simplest case, it has the form $\nu = 1 - c\xi sign\sigma$.

This problem reduce to investigation of quality properties of the following system with respect to vector-function ω [2, 3]:

$$\dot{\omega} = -A\omega - b\xi, \quad \dot{\xi} = \varphi(\sigma)\psi(\nu), \quad \sigma = p^T\omega - r\xi, \quad t \in I = [0,\ \infty)\,. \tag{3}$$

Here nonlinearity satisfies also to conditions (2), and

$$F(t, x, \omega) = -A\omega, \qquad A \in R^{s\times s}, \qquad H = \frac{\partial\omega}{\partial x}, \qquad b = Hb_1.$$

The reviews of the works devoted to the construction of autonomous and non-autonomous automatic control systems on the given program manifold possessing of quality properties and to solving of various inverse problems of dynamics were shown (see [3]-[6]).

Statement of the Problem. To get the condition of stability of a program manifold $\Omega(t)$ of the indirect control systems taking into account external load in relation to the given vector-function ω.

System (3) is reduced to the canonical form [1] and we are constructed for it a Lyapunov function of the form:

$$V = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{l_i l_k}{\rho_1 + \rho_k}\eta_1\eta_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} L_k\eta_K^2 + \int\limits_0^{\sigma}\varphi(\sigma)\psi(\nu)d\sigma,$$

where $l_1, ..., L_k$ are any real numbers, $L_1, ..., L_k$ are positive real numbers.

Theorem 1. *Suppose that there exist any real numbers l_i and positive real numbers L_i $i = \overline{1, ..., n}$ non-linear function $\varphi(\sigma)$ satisfies the conditions (2) and $\nu = 1 - c\xi sign\sigma$.*
Then in order that, the program manyfold $\Omega\,(t)$ will be stable with respect to the vector function ω it is sufficient performing of the following conditions

$$L_k + 2\sqrt{r}l_k + 2l_k\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{l_i}{\rho_1 + \rho_k} + \gamma_k = 0 \quad \forall\ k = \overline{1, ..., n}. \tag{4}$$

Funding: This results are supported by grant of the Ministry education and science of Republic Kazakhstan No. AP 09258966 for 2021-2023 years.

Keywords: stability, program manifold, control systems, Lyapunov function, nonlinearity, external loads.

2010 Mathematics Subject Classification: 34K20, 93C19, 34K29

References

[1] Maygarin B.G. *Stability and quality of process of nonlinear automatic control system*, Nauka, Alma-Ata (1981).

[2] Erugin N.P. Construction of the entire set of systems of differential equations that have a given integral manifold, *Prikladnaya Matematika i Mecanika*, **10**:6 (1952), 659–670.

[3] Zhumatov S.S., Krementulo B.B., Maygarin B.G. *Lyapunov's second method in the problems of stability and control by motion*, Gylym, Almaty (1999).

[4] Galiullin A.S., Mukhametzyanov I.A., Mukharlyamov R.G. Review of researches on the analytical construction of the systems programmatic motions, *Vestnik RUDN*, **1** (1994), 5–21.

[5] Llibre J., Ramirez R. *Inverse Problems in Ordinary Differential Equations and Applications*, Springer International Publishing, Switzerland (2016).

[6] Zhumatov S.S. On the absolute stability of a program manifold of non-autonomous control systems with non-stationary nonlinearities, *Kazakh Mathematical Journal*, **19**:4 (2020), 35–46.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

2 Алгебра, математическая логика и геометрия

Руководители: член-корреспондент НАН РК Байжанов Б.С.
д.ф.-м.н. Даирбеков Н.С.
академик НАН РК Джумадильдаев А.С.

Секретарь: Адил Ж.Т.

ПОЧТИ ОМЕГА-КАТЕГОРИЧНОСТЬ СЛАБО О-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ С МАЛЫМ СЧЕТНЫМ СПЕКТРОМ

Айжан АЛТАЕВА[1,a], Бейбут КУЛПЕШОВ[2,b]

[1] *Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2] *Казахстанско-Британский технический университет, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]vip.altayeva@mail.ru, [b]b.kulpeshov@kbtu.kz

Данный доклад касается понятия *слабой о-минимальности*, первоначально исследованного Д. Макферсоном, Д. Маркером и Ч. Стейнхорном в [1]. Подмножество A структуры M является *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M. Вспомним что такая структура M называется *о-минимальной*, если любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа интервалов и точек в M. Таким образом, слабая о-минимальность обобщает понятие о-минимальности. Вещественно замкнутые поля с собственным выпуклым кольцом нормирования обеспечивают важный пример слабо о-минимальных (не о-минимальных) структур.

Ниже мы расширяем определение ранга выпуклости формулы [2] на произвольные множества (необязательно определимые):

Пусть T — слабо о-минимальная теория, M — достаточно насыщенная модель теории T, $A \subseteq M$. *Ранг выпуклости множества A* ($RC(A)$) определяется следующим образом:

1) $RC(A) \geq 1$, если A бесконечно.

2) $RC(A) \geq \alpha+1$, если существует параметрически определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$ такое, что существуют $b_i \in A, i \in \omega$, которые удовлетворяют следующему:

- Для любых $i, j \in \omega$, всякий раз когда $i \neq j$ мы имеем $M \models \neg E(b_i, b_j)$
- Для каждого $i \in \omega$ $\quad RC(E(M, b_i)) \geq \alpha$ и $E(M, b_i)$ — выпуклое подмножество множества A

3) $RC(A) \geq \delta$, если $RC(A) \geq \alpha$ для всех $\alpha \leq \delta$ (δ предельный).

Если $RC(A) = \alpha$ для некоторого α, то мы говорим что $RC(A)$ определяется. В противном случае (т.е. если $RC(A)) \geq \alpha$ для всех α), мы полагаем $RC(A) = \infty$.

Ранг выпуклости формулы $\phi(x, \bar{a})$, где $\bar{a} \in M$, определяется как ранг выпуклости множества $\phi(M, \bar{a})$, т.е. $RC(\phi(x, \bar{a})) := RC(\phi(M, \bar{a}))$. *Ранг выпуклости 1-типа* p определяется как ранг выпуклости множества $p(M)$, т.е. $RC(p) := RC(p(M))$.

Следующее определение введено в [3, 4]. Пусть T — полная теория, $p_1(x_1), \ldots, p_n(x_n) \in S_1(\emptyset)$. Будем говорить, что тип $q(x_1, \ldots, x_n) \in S_n(\emptyset)$ является $(p_1, \ldots, p_n)$-*типом*, если $q(x_1, \ldots, x_n) \supseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} p_i(x_i)$. Множество всех $(p_1, \ldots, p_n)$-типов теории T будем обозначать через $S_{p_1,\ldots,p_n}(T)$. Счетная теория T называется *почти ω-категоричной*, если для любых типов $p_1(x_1), \ldots, p_n(x_n) \in S_1(\emptyset)$ существует лишь конечное число типов $q(x_1, \ldots, x_n) \in S_{p_1,\ldots,p_n}(T)$.

Почти ω-категоричность тесно связана с понятием эренфойхтовости теории. Так, в работе [3] доказано, что если T — почти ω-категоричная теория с условием $I(T, \omega) = 3$, то в теории T интерпретируется плотный линейный порядок. В работе [5] установлена почти ω-категоричность эренфойхтовых вполне о-минимальных теорий, а также доказано что в почти ω-категоричных вполне о-минимальных теориях имеет место Принцип Замены для алгебраического замыкания. Далее в работе [6] доказана бинарность почти

ω-категоричных вполне о-минимальных теорий. Наконец, недавно в работе [7] установлена бинарность почти ω-категоричных слабо о-минимальных теорий ранга выпуклости 1.

Нами доказана следующая теорема:

Теорема. *Любая слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, имеющая менее чем 2^ω счетных моделей, является почти ω-категоричной.*

Funding: Авторы были поддержаны грантом МОН РК (AP08855544).

Ключевые слова: слабая о-минимальность, почти омега-категоричность, счетный спектр, ранг выпуклости

2010 Mathematics Subject Classification: 03C64, 03C07, 03C15

Литература

[1] Macpherson H.D., Marker D., Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields, *Transactions of The American Mathematical Society*, **352**:12 (2000), 5435–5483.

[2] Kulpeshov B.Sh. Weakly o-minimal structures and some of their properties, *The Journal of Symbolic Logic*, **63**:4 (1998), 1511–1528.

[3] Ikeda K., Pillay A., Tsuboi A. On theories having three countable models, *Mathematical Logic Quarterly*, **44**:2 (1998), 161–166.

[4] Судоплатов С.В. *Классификация счетных моделей полных теорий*, Издательство НГТУ, Новосибирск (2018).

[5] Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Линейно упорядоченные теории, близкие к счетно категоричным, *Математические заметки*, **101**:3 (2017), 413–424.

[6] Алтаева А.Б., Кулпешов Б.Ш. Бинарность почти ω-категоричных вполне о-минимальных теорий, *Сибирский математический журнал*, **61**:3 (2020), 484–498.

[7] Кулпешов Б.Ш., Мустафин Т.С. Почти ω-категоричные слабо о-минимальные теории ранга выпуклости 1, *Сибирский математический журнал*, **62**:1 (2021), 65–81.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

АЛГЕБРЫ БИНАРНЫХ ИЗОЛИРУЮЩИХ ФОРМУЛ ДЛЯ ТЕОРИЙ ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРАФОВ

Дмитрий ЕМЕЛЬЯНОВ[1,a],

[1]*Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия*
E-mail: [a]*dima-pavlyk@mail.ru*

Продолжается изучение алгебр бинарных изолирующих формул [1–3] для произведений графов.

Определение. Тензорное произведение $G \times H$ графов G и H это граф, множество вершин которого есть декартово произведение $V(G) \times V(H)$, причем различные вершины (u, u') и (v, v') смежных в $G \times H$ тогда, когда u смежна с v и u' смежна с v'.

Определение. Алгебру для тензорного произведения графов $G \times H$ обозначим через $\mathfrak{Tp}_\mathfrak{e}$, с метками $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, где n — четное число, равное диаметру полученного при умножении графа. Алгебра задается следующей таблицей:

$*$	0	1	2	3	4	...	n
0	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}	...	$\{n\}$
1	{1}	{0,2}	{1,3}	{0,2}	{1,3,5}	...	{1,3,5, ..., n-1}
2	{2}	{1,3}	{0,2,4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	...	{0,2,4,..., n}
3	{3}	{0,2}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{1,3,5, ..., n-1}	...	{1,3,5, ..., n-1}
4	{4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{1,3,5, ..., n-1}	{0,2,4,..., n}	...	{0,2,4,..., n}
...	...	...	...	...	...	...	...
n	$\{n\}$	{1,3,5, ..., n-1}	{0,2,4,..., n}	{1,3,5, ..., n-1}	{0,2,4,..., n}	...	{0,2,4,..., n}

Определение. Алгебру для тензорного произведения графов $G \times H$ обозначим через $\mathfrak{Tp}_\mathfrak{o}$, с метками $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, где n — нечетное число, равное диаметру полученного при умножении графа. Алгебра задается следующей таблицей:

$*$	0	1	2	3	4	...	n
0	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}	...	$\{n\}$
1	{1}	{0,2}	{1,3}	{0,2}	{1,3,5}	...	{0,2,4,..., n}
2	{2}	{1,3}	{0,2,4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	...	{1,3,5, ..., n-1}
3	{3}	{0,2}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{1,3,5, ..., n-1}	...	{0,2,4,..., n}
4	{4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{1,3,5, ..., n-1}	{0,2,4,..., n}	...	{1,3,5, ..., n-1}
...	...	...	...	...	...	...	...
n	$\{n\}$	{0,2,4,..., n}	{1,3,5, ..., n-1}	{0,2,4,..., n}	{1,3,5, ..., n-1}	...	{0,2,4,..., n}

Теорема 1. *Если T — теория тензорного произведения графа на ребро, $\mathfrak{B}$ — алгебра бинарных изолирующих формул теории T, то алгебра $\mathfrak{B}$ задается ровно одной из следующих алгебр: $\mathfrak{Tp}_{\mathfrak{e}}$, $\mathfrak{Tp}_{\mathfrak{o}}$.*

Замечание. Алгебра для тензорного произведения вида $(((((G \times H) \times H) \times H) \ldots) \times H)$ изоморфна алгебре $\mathfrak{Tp}_{\mathfrak{e}}$ или $\mathfrak{Tp}_{\mathfrak{o}}$.

Funding: Автор был поддержан Грантом РФФИ No 20-31-90004/20 и грантом Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан, No. AP08855544.

Ключевые слова: алгебра бинарных формул, тензорное произведение, теория моделей, модель теории, произведение графов

Литература

[1] Shulepov I.V., Sudoplatov S.V. Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **11** (2014), 380–407.

[2] Sudoplatov S.V. *Classification of Countable Models of Complete Theories*, NSTU, Novosibirsk (2018).

[3] Емельянов Д.Ю. Алгебры бинарных изолирующих формул для теорий декартовых произведений графов, в: *Algebra and model theory 12. Collection of papers*, NSTU, Novosibirsk (2019), 21–31.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

h-ПОДОБИЕ ФРАГМЕНТОВ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВ

Айбат ЕШКЕЕВ[a], Ирина ГАЛИНСКАЯ, Айым ХАМЗЕЕВА

Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан
E-mail: [a]aibat.kz@gmail.com

В работах [1, 2] первым автором данного тезиса были определены понятия теоретического множества и $\varphi(x)$-реостата.

Определение 1. Пусть T – некоторая йонсоновская теория, C – семантическая модель теории T, $X \subseteq C$.

Множество X называется теоретическим, если

1) X – йонсоновское множество, и $\varphi(\overline{x})$ – формула, которая определяет множество X;

2) $\varphi(\overline{x}) = \exists \overline{y} \psi(\overline{x}, \overline{y})$ и пусть θ – универсальное замыкание формулы $\varphi(\overline{x})$, при этом предложение θ задает некоторую конечно аксиоматизируемую йонсоновскую теорию.

Определение 2. Пусть T_1 и T_2 – произвольные йонсоновские теории. Мы говорим, что T_1 и T_2 являются h-синтаксически подобными, если существует такое отображение $h : E(T_1) \longrightarrow E(T_2)$, и при этом выполнены условия:

1) ограничение h до $E_n(T_1)$ является гомоморфизмом решеток $E_n(T_1)$ и $E_n(T_2)$, $n < \omega$;

2) $h(\exists v_{n+1} \varphi) = \exists v_{n+1} h(\varphi)$, $\varphi \in E_{n+1}(T)$, $n < \omega$;

3) $h(v_1 = v_2) = (v_1 = v_2)$.

Если ядро $Ker(h)$ этого гомоморфизма тривиально, то мы получаем определение синтаксического подобия двух йонсоновских теорий.

Если универсальное замыкание $\varphi(x)$ будет йонсоновской теорией, то мы будем говорим, что задан $\varphi(x)$-реостат, если существует h-синтаксическое подобие между теориями T и $Th_{\forall\exists}(M)$, где $M \in E_T$, $M = cl(\varphi(C))$. В качестве cl понимается оператор замыкания, задающий на булеане C предгеометрию, в которой верно, что $cl = acl = dcl$.

Пусть T – некоторая йонсоновская теория, C – семантическая модель теории T, X_1, X_2 – теоретические подмножества C.

Следующий полученный результат показывает связь между синтаксическим подобием йонсоновских теорий и $\varphi(x)$-реостатом.

Теорема. Пусть $Fr(X_i)$ – фрагменты теоретических множеств X_i. Тогда, если существует $\varphi_i(x)$-реостат с тривиальным ядром между $Fr(X_i)$ и теорией T, то компаньоны $Fr(X_i)^*$ модельно совместны с компаньоном T^*, где $i = 1, 2$.

Все неопределенные в данном тезисе определения понятий можно найти в следующих источниках [1, 2, 3].

Ключевые слова: йонсоновская теория, фрагмент, теоретическое множество, $\varphi(x)$-реостат, h-синтаксическое подобие.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C07, 03C45, 03C50

Литература

[1] Ешкеев А.Р., Касыметова М.Т. *Йонсоновские теории и их классы моделей*, Изд-во КарГУ, Караганда (2016), 370.

[2] Yeshkeyev A.R. Model-theoretical questions of the Jonsson spectrum, *Bulletin of the Karaganda University*, **2**:98 (2020), 165–173.

[3] Yeshkeyev A.R., Popova N.V. Small models of convex fragments of definable subsets, *Bulletin of the Karaganda University*, **4**:100 (2020), 160–167.

— ⁂ —

О КОГОМОЛОГИЯХ ПРОСТЫХ МОДУЛЕЙ КЛАССИЧЕСКИХ МОДУЛЯРНЫХ АЛГЕБР ЛИ

Шерали ИБРАЕВ[1,a], Лариса КАИНБАЕВА[1,b]

[1] *Кызылординский университет имени Коркыт Ата, Кызылорда, Кахахстан*
E-mail: [a]ibrayevsh@mail.ru, [b]larissa_kain@mail.ru

Среди когомологических проблем модулярных алгебр Ли одно из веду-щих мест занимают проблемы вычисления когомологии простых модулей. Как в алгебрах Ли картановского типа, так и в алгебрах Ли классического типа они изучены только для некоторых алгебр Ли малых рангов или для отдельных простых модулей. Благодаря развитым методам теории представлений полупростых алгебраических групп в положительной ха-рактеристике и методам гомологической алгебры появляется возможность изучения свойств обычных и ограниченных когомологии некоторых се-мейств ограниченных простых модулей для модулярных алгебр Ли класси-ческого типа, и связи между ними. В начальных этапах исследования естественно рассматривать семейства простых модулей, имеющие неслож-ные формальные характеры. Нами рассмотрены простые модули классических алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем положительной характеристики старшие веса которых принадлежат альковам, располо-женные вдоль и близи стенки доминантных камер Вейля. Изучения свойств обычных и ограниченных когомологии классических алгебр Ли для рас-сматриваемых простых модулей, и связи между ними можно реализовать с помощью решения следующих последовательных задач:

i) изучить свойства простых модулей классических модулярных алгебр Ли старшие веса которых могут быть описаны некоторым хорошо опи-сываемым семейством ограниченных доминантных элементов аффинных групп Вейля соответствующих алгебраических групп рассматриваемых алгебр Ли, предполагается рассмотреть старших весов из альковов, распо-ложенные вдоль и близи стенки доминантных камер Вейля;

ii) вычислить ограниченные когомологии классических модулярных алгебр Ли с коэффициентами в простых модулях, изученные в задаче i);

iii) вычислить обычные когомологии классических модулярных алгебр Ли с коэффициентами в простых модулях, изученные в задаче i);

iv)изучить связи между ограниченными и обычными когомологиями классических модулярных алгебр Ли с коэффициентами в простых моду-лях, изученные в задаче i);

v) изучить связи между когомологиями классических модулярных ал-гебр Ли с коэффициентами в простых модулях, изученные в задаче i), и соответствующими когомологиями алгебраических групп рассматривае-мых классических алгебр Ли.

Целью данной работы является обсуждение результатов задачи i). По-лучено полное описание формальных характеров простых модулей старшие веса которых принадлежат альковам, расположенные вдоль и близи стенки доминантных камер Вейля. Согласно полученным результатам, модули Вейля, соответствующие изученным простым модулям, имеют фильтрации Янцена, глубины 1 или 2.

Фильтрацию Янцена глубины 1 имеют модули Вейля с старшими весами λ_0, λ_1, $cdots$, λ_s, μ_1, удовлетворяющие условиям

1) $\lambda_0 \in C_1$, $1 \le i \le s$, $\lambda_i = s_{\beta_{i,k(i)}} \cdot \lambda_{i-1}, \mu_1 = s_{\gamma_0,1} \cdot \lambda_2$;

2) $\lambda_0 \uparrow \lambda_1 \uparrow \cdots \uparrow \lambda_s$ и $d(\lambda_i) = i$, $1 \le i \le s$;

3 $\langle \lambda_i + \rho, \alpha \rangle < p^2$ для всех i и для всех $\alpha \in R^+$;

4 для каждой пары i и j, где $i < j$, существует положительный корень $\gamma(i,j)$ такой, что для всех i,

$$\sum_{j=1}^{i-1} s_{\beta_{j,k(j)}} \circ s_{\beta_{i,k(i)}} = \sum_{j=1}^{i-1} s_{\gamma(i,j)} \circ s_{\beta_{j,k(j)}}.$$

Фильтрацию Янцена глубины 2 имеют модули Вейля с старшими весами μ_2, μ_3, $cdots$, μ_{s-1}, удовлетворяющие условиям

5) $\mu_i = s_{\gamma_0,1} \cdot \lambda_{i+1}$, $2 \le i \le s-1$;

6) $\lambda_{i+1} \uparrow \mu_i$, $1 \le i \le s-1$;

7) $\mu_1 \uparrow \mu_2 \uparrow \cdots \uparrow \mu_{s-1}$ и $d(\mu_i) = i+2$, $1 \le i \le s-1$;

8 $\langle \mu_i + \rho, \alpha \rangle < p^2$ для всех i и для всех $\alpha \in R^+$;

9) для $j \in \{1,2\}$ существует положительный корень $\gamma(j)$ такой, что

$$\sum_{j=1}^{2} s_{\beta_{j,k(j)}} \circ s_{\gamma_0,1} = \sum_{j=1}^{2} s_{\gamma(j)} \circ s_{\beta_{j,k(j)}};$$

10) $\langle \gamma_0, \beta_i \rangle = 0$, $3 \le i \le s-1$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ – классическая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем K характерситики $p \ge h$, где h – число Кокстера. Пусть $\{\beta_i, \gamma_0\}_{i=1}^{s}$ – последовательность положительных корней, $\{\lambda_i\}_{i=0}^{s}$, $\{\mu_i\}_{i=1}^{s-1}$,– последовательности доминантных весов, удовлетворяющие условиям* 1)$--$10) *соответственно. Тогда имеют место следующие фильтрации Янцена для модулей Вейля:*

(a) $V(\lambda_i) \supset L(\lambda_{i-1}) \supset 0$, $1 \le i \le s-1$;

(b) $V(\mu_1) \supset L(\lambda_2) \supset 0$;

(c) $V(\mu_2) \supset L(\mu_1) + L(\lambda_3) + L(\lambda_2) + L(\lambda_1) \supset L(\lambda_2) \supset 0$;

(d) $V(\mu_i) \supset L(\mu_{i-1}) + L(\lambda_{i+1}) + L(\lambda_i) \supset L(\lambda_i) \supset 0$.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP08855935 Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Ключевые слова: алгебра Ли, простой модуль, когомология

2010 Mathematics Subject Classification:17B20, 17B45, 20G05

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ЯДЕРНАЯ МОДЕЛЬ ВЫПУКЛОГО ЙОНСОНОВСКОГО СПЕКТРА

Айгуль ИСАЕВА[a], Надежда ПОПОВА [b], Дилдаш ЖУМАГУЛ, Арайлым НУРМАКОВА

Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан
E-mail: [a]isa_aiga@mail.ru, [b]dandn@mail.ru

Понятие выпуклости является классическим понятием, введенным А. Робинсоном при изучении индуктивных теорий. Класс выпуклых теорий является достаточно важным в математике с точки зрения своих примеров. Например, теория групп, теория колец, теория полей, теория булевых алгебр являются примерами выпуклых теорий. В данном тезисе мы рассмотрим понятие выпуклости в рамках изучения фиксированного спектра класса моделей произвольной сигнатуры.

Определение 1. Йонсоновским спектром $JSp(K)$ класса моделей K произвольной сигнатуры называется множество всех йонсоновских теорий для данного класса моделей.

Определение 2. Теория T называется выпуклой, если для любой ее модели A и для любого семейства $\{B_i \mid i \in I\}$ подструктур A, являющихся моделями теории T, пересечение $\bigcap_{i\in I} B_i$ является моделью T, при условии, что оно не пусто. Если, кроме того, такое пересечение никогда не бывает пустым, то T называется сильно выпуклым.

Определение 3. Индуктивная теория T называется экзистенциально простой, если: 1) она имеет алгебраически простую модель, класс ее AP (алгебраически простые модели) обозначим через AP_T; 2) класс E_T нетривиально пересекается с классом AP_T, т.е. $AP_T \bigcap E_T \neq \emptyset$.

Пусть K – класс экзистенциально замкнутых моделей произвольной сигнатуры и $JSp(K)/_{\bowtie}$ – йонсоновский спектр этого класса относительно $\bowtie$.

Класс $[T] \in JSp(K)/_{\bowtie}$ называется экзистенциально простым классом, если для каждого $\Delta \in [T]$, Δ является экзистенциально простой теорией.

Следующий полученный результат обобщает результат (Теорема 4) из [2] в рамках изучения свойств понятия ядерной модели при переходе от теории к спектру.

Теорема. Пусть C – счетная ядерная модель для некоторого экзистенциально простого класса $[T] \in JSp(K)/_{\bowtie}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) C может быть вложена в каждую экзистенциально замкнутую модель центра $[T]^*$ класса $[T]$;

2) C является алгебраически простой моделью теории Δ, где $\Delta \in [T]$.

Все неопределенные в данном тезисе определения понятий можно найти в следующих источниках [1, 2].

Ключевые слова: йонсоновская теория, семантическая модель, ядерная модель, йонсоновский спектр, экзистенциально простая теория

2010 Mathematics Subject Classification: 03C07, 03C45, 03C50

Литература

[1] Ешкеев А.Р., Касыметова М.Т. *Йонсоновские теории и их классы моделей*, Изд-во КарГУ, Караганда (2016), 370.

[2] Yeshkeyev A.R., Issaeva, A.K. Popova N.V. Core Jonsson theories, *Bulletin of the Karaganda University*, **1**:97 (2020), 104–110.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

КОНЕЧНОСТЬ КЕЛЛЕРОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ ОТ ДВУХґ ПЕРЕМЕННЫХ

Рашид Конырбаевич КЕРИМБАЕВ[1,a]

[1] *Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*ker_im@mail.ru*

Для обратимости келлеровых полиномиальных отображений достаточно указать его инъективность.

Для инъективности келлеровых полиномиальных отображений достаточно показать, что алгебраическое многообразие данных многочленов состоит из одной точки. В работе доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Алгебраическое многообразие келлеровых многочленов от двух переменных конечно.*

— ⁕ ⁕ ⁕ —

ОБ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ В ПОЧТИ ОМЕГА-КАТЕГОРИЧНЫХ СЛАБО О-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЯХ

Бейбут КУЛПЕШОВ

Казахстанско-Британский технический университет, Алматы, Казахстан
E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz

Данный доклад касается понятия *слабой о-минимальности*, первоначально исследованного Д. Макферсоном, Д. Маркером и Ч. Стейнхорном в [1]. Подмножество A структуры M является *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M. Вещественно замкнутые поля с собственным выпуклым кольцом нормирования обеспечивают важный пример слабо о-минимальных структур.

Ниже мы расширяем определение ранга выпуклости формулы [2] на произвольные множества (необязательно определимые):

Пусть T — слабо о-минимальная теория, M — достаточно насыщенная модель теории T, $A \subseteq M$. *Ранг выпуклости множества* A $(RC(A))$ определяется следующим образом:

1) $RC(A) \geq 1$, если A бесконечно.

2) $RC(A) \geq \alpha+1$, если существует параметрически определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$ такое, что существуют $b_i \in A, i \in \omega$, которые удовлетворяют следующему:

- Для любых $i, j \in \omega$, всякий раз когда $i \neq j$ мы имеем $M \models \neg E(b_i, b_j)$
- Для каждого $i \in \omega \quad RC(E(M, b_i)) \geq \alpha$ и $E(M, b_i)$ — выпуклое подмножество множества A

3) $RC(A) \geq \delta$, если $RC(A) \geq \alpha$ для всех $\alpha \leq \delta$ (δ предельный).

Если $RC(A) = \alpha$ для некоторого α, то мы говорим что $RC(A)$ определяется. В противном случае (т.е. если $RC(A)) \geq \alpha$ для всех α), мы полагаем $RC(A) = \infty$.

Ранг выпуклости формулы $\phi(x, \bar{a})$, где $\bar{a} \in M$, определяется как ранг выпуклости множества $\phi(M, \bar{a})$, т.е. $RC(\phi(x, \bar{a})) := RC(\phi(M, \bar{a}))$. *Ранг выпуклости 1-типа* p определяется как ранг выпуклости множества $p(M)$, т.е. $RC(p) := RC(p(M))$.

Следующее определение введено в [3, 4]. Пусть T — полная теория, $p_1(x_1), \ldots, p_n(x_n) \in S_1(\emptyset)$. Будем говорить, что тип $q(x_1, \ldots, x_n) \in S_n(\emptyset)$ является $(p_1, \ldots, p_n)$-*типом*, если

$q(x_1,\ldots,x_n) \supseteq \bigcup_{i=1}^{n} p_i(x_i)$. Множество всех $(p_1,\ldots,p_n)$-типов теории T будем обозначать через $S_{p_1,\ldots,p_n}(T)$. Счетная теория T называется *почти ω-категоричной*, если для любых типов $p_1(x_1)$, ..., $p_n(x_n) \in S_1(\emptyset)$ существует лишь конечное число типов $q(x_1,\ldots,x_n) \in S_{p_1,\ldots,p_n}(T)$.

В работе [3] доказано, что если T — почти ω-категоричная теория с условием $I(T,\omega) = 3$, то в теории T интерпретируется плотный линейный порядок. В работе [5] установлена почти ω-категоричность эренфойхтовых вполне о-минимальных теорий, а также доказано что в почти ω-категоричных вполне о-минимальных теориях имеет место Принцип Замены для алгебраического замыкания. Далее в работе [6] доказана бинарность почти ω-категоричных вполне о-минимальных теорий. Наконец, недавно в работе [7] установлена бинарность почти ω-категоричных слабо о-минимальных теорий ранга выпуклости 1.

Пусть $A \subseteq M$, A конечно, $p_1, p_2, \ldots, p_s \in S_1(A)$ — неалгебраические. Мы говорим, что семейство 1-типов $\{p_1,\ldots,p_s\}$ является *ортогональным над A*, если для любой последовательности $(n_1,\ldots,n_s) \in \omega^s$, для любых возрастающих кортежей $\bar{a}_1, \bar{a}'_1 \in [p_1(M)]^{n_1}$, ..., $\bar{a}_s, \bar{a}'_s \in [p_s(M)]^{n_s}$ таких, что $tp(\bar{a}_1/A) = tp(\bar{a}'_1/A)$, ..., $tp(\bar{a}_s/A) = tp(\bar{a}'_s/A)$ мы имеем что $tp(\langle\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_s\rangle/A) = tp(\langle\bar{a}'_1,\ldots,\bar{a}'_s\rangle/A)$.

Нами доказана следующая теорема:

Теорема. *Пусть T — почти ω–категоричная слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $p_1, p_2, \ldots, p_s \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические попарно слабо ортогональные 1–типы. Предположим что каждый неалгебраический 1-тип над $\emptyset$ имеет конечный ранг выпуклости. Тогда $\{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$ ортогонально над $\emptyset$.*

Funding: Автор был поддержан грантом МОН РК (AP08855544).

Ключевые слова: слабая о-минимальность, почти омега-категоричность, ортогональность, ранг выпуклости

2010 Mathematics Subject Classification: 03C64, 03C07, 03C15

Литература

[1] Macpherson H.D., Marker D., Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields, *Transactions of The American Mathematical Society*, **352**:12 (2000), 5435–5483.

[2] Kulpeshov B.Sh. Weakly o-minimal structures and some of their properties, *The Journal of Symbolic Logic*, **63**:4 (1998), 1511–1528.

[3] Ikeda K., Pillay A., Tsuboi A. On theories having three countable models, *Mathematical Logic Quarterly*, **44**:2 (1998), 161–166.

[4] Судоплатов С.В. *Классификация счетных моделей полных теорий*, Издательство Новосибирского государственного технического университета, Новосибирск (2018).

[5] Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Линейно упорядоченные теории, близкие к счетно категоричным, *Математические заметки*, **101**:3 (2017), 413–424.

[6] Алтаева А.Б., Кулпешов Б.Ш. Бинарность почти ω-категоричных вполне о-минимальных теорий, *Сибирский математический журнал*, **61**:3 (2020), 484–498.

[7] Кулпешов Б.Ш., Мустафин Т.С. Почти ω-категоричные слабо о-минимальные теории ранга выпуклости 1, *Сибирский математический журнал*, **62**:1 (2021), 65–81.

— ❋ ❋ ❋ —

ОЦЕНКА СУММЫ СИМВОЛОВ ЯКОБИ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СДВИНУТЫХ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Шерали МИРЗОРАХИМОВ

Бохтарский государственный университет им. Н. Хусрава, г.Бохтар, Таджикистан
E-mail: smirzorakhimov @ mail.ru

В 1937г. И.М. Виноградов создал метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами, что позволил ему решить ряд арифметических проблем с простыми числами. Одним из них является распределения значений неглавного характера χ по модулю q

на последовательностях сдвинутых простых чисел, то есть вывод новой нетривиальной оценки суммы вида
$$T(\chi)=\sum_{p\le x}\chi(p-l), \qquad (l,q)=1.$$
В 1938 г. он впервые получил нетривиальную оценку модуля суммы $T(\chi)$ при $x\gg q^{3+\varepsilon}$, q — простое нечетное[1]. И.М. Виноградов в 1943 г. доказал следующие утверждения[1]: *если q — простое нечетное, $(l,q)=1$, $\chi(a)$ – неглавный характер по модулю q, тогда*
$$|T(\chi)|\ll x^{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}}+x^{-\frac{1}{6}}\right). \qquad (1)$$
При $x\gg q^{1+\varepsilon}$ эта оценка нетривиальна, и из нее следует *асимптотическая формула для числа квадратичных вычетов (невычетов)* $\mod q$ *вида* $p-l$, $p\le x$. Затем И.М. Виноградов получил нетривиальную оценку $T(\chi)$ при $x\ge q^{0,75+\varepsilon}$, где q — простое число. А.А. Карацуба в 1970 году доказал следующие утверждение [2]: *если q — простое, $\chi(a)$ – неглавный характер по модулю q, $x\ge q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, тогда*
$$T(\chi)\ll xq^{-\frac{1}{1024}\varepsilon^2}.$$
З.Х. Рахмонов обобщил оценку (1) на случай составного модуля и доказал следующие утверждение [3]: *пусть D – достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю D, q модуль примитивного характера χ_q, χ_q – примитивный характер, порождчнный характером χ, тогда*
$$T(\chi)\le x\ln^5 x\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}\tau^2(q_1)}+x^{-\frac{1}{6}}\tau(q_1)\right), \qquad q_1=\prod_{\substack{p\backslash D\\ p\not\backslash q}}p.$$
Применяя эту оценку он доказал распределение значений символов Якоби в последовательностях сдвинутых простых чисел. В работе [4] доказана теорема: *Пусть q – достаточно большое натуральное число свободное от кубов, χ_q – примитивный характер по модулю q, $(l,q)=1$, ε — положительное сколь угодно малое постоянное число, $\ln q$, $x\ge q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$. Тогда имеем*
$$T(\chi_q)=\sum_{p\le x}\chi_q(p-l)\ll x\exp\left(-\sqrt{\ln q}\right).$$
В этой работе воспользовавшись основным результатом работы [6] доказана теорему о распределение значений символов Якоби в коротких последовательностях сдвинутых простых чисел.

Теорема. *Пусть D – достаточно большое натуральное число, $\tau=\pm1$, $K(x)$ — число простых чисел p не превосходящих x и таких, что*
$$\left(\frac{p-l}{D}\right)=\tau, \quad (l,D)=1, \quad D \text{ – свободного от кубов.}$$
Тогда при $x\ge D^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ справедлива асимптотическая формула
$$K(x)=\prod_{p\backslash D}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right).$$

Литература

[1] Виноградов И.М. *Избранные труды.* — М.: Изд-во АН СССР, 1952.

[2] Карацуба А.А. Суммы характеров с простыми числами. – *Известия АН СССР. Сер. матем.*, 1970, т. 34. с. 299 – 321.

[3] Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле. – *УМН.*, 1986, т. 41. с. 201 – 202.

[4] Рахмонов З.Х., Мирзорахимов Ш.Х. О распределении значений характеров Дирихле по модулю свободному от кубов в последовательности сдвинутых простых чисел. – *Чебышевский сборник*, 2016. т. 16. с. 201 – 216.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

МИНИМАЛЬНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИ ПРОСТЫЕ МОДЕЛИ УНИВЕРСАЛЬНОГО ГИБРИДА ФРАГМЕНТОВ ЙОНСОНОВСКИХ МНОЖЕСТВ

Назерке МУСИНА[a], Султан АМАНБЕКОВ, Арайлым НУРМАКОВА

Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан
E-mail: [a]nazerke170493@mail.ru

Пусть T – совершенная йонсоновская теория, полная для экзистенциональных предложений, C – семантическая модель теории T, X_1, X_2 – йонсоновские подмножества C. Причем $cl(X_i) = M_i \in E_T$, $Fr(X_i) = Th_\forall(M_i)$ является $\varphi_i(x)$-выпуклым фрагментом множества X_i, где $i = 1, 2$. В качестве cl понимается оператор замыкания, задающий на булеане C предгеометрию, в которой верно, что $cl = acl = dcl$.

Напомним некоторые определения.

Определение 1. Модель теории T называется алгебраически простой, если она изоморфно вкладывается в любую модель теории T.

Определение 2. Модель называется минимальной моделью теории T, если у нее нет подструктуры, которой является моделью теории T.

Определение 3. Если T – йонсоновская теория, то T^* – центр этой теории.

Определение 4. Будем говорить, что экзистенциально замкнутая модель M является выпуклой (сильно выпуклой), если ее оболочка Кайзера ($Th_{\forall\exists}(M)$) является выпуклой (сильно выпуклой) теорией.

Определение 5. Мы будем говорить, что экзистенциально замкнутая модель M является $\varphi(x)$-выпуклой, если

1) $\varphi(x)$ задает йонсоновское множество в модели M;

2) если для всех подструктур $\mathfrak{A}_i$ модели M, $\bigcap \mathfrak{A}_i$ содержит $\varphi(M)$ при том, что это пересечение не пусто.

Рассмотрим гибрид $H(Fr(X_1), Fr(X_2)) = H$, тогда, если T модельно совместна с $Fr(X_i)$, верен следующий результат.

Теорема. Пусть $H_\forall$ полна для экзистенциональных предложений. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $H_\forall^*$ имеет алгебраически простую модель и она минимальна,

2) $H_\forall$ имеет точно одну алгебраически простую модель и она (Σ, Σ)-атомная.

Все неопределенные в данном тезисе определения понятий можно найти в следующих источниках [1, 2].

Ключевые слова: йонсоновская теория, семантическая модель, гибрид, $\varphi(x)$-выпуклая модель, минимальная модель

2010 Mathematics Subject Classification: 03C07, 03C45, 03C50

Литература

[1] Ешкеев А.Р., Касыметова М.Т. *Йонсоновские теории и их классы моделей*, Изд-во КарГУ, Караганда (2016), 370.

[2] Yeshkeyev A.R., Mussina N.M. Properties of hybrids of Jonsson theories, *Bulletin of the Karaganda University*, **4**:92 (2018), 99–105.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ТИПЫ ОТ ДВУХ ПРЕДИКАТОВ

Махабат ОМАРОВА[a], Ирина ГАЛИНСКАЯ, Айым ХАМЗЕЕВА

Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан
E-mail: [a]omarovamt_963@mail.ru

Пусть L – язык первого порядка, T – произвольная наследственная йонсоновская теория в языке L сигнатуры σ, C – семантическая модель теории T, $A \subseteq C$, $\sigma_\Gamma = \sigma \cup \Gamma$, где $\Gamma = \{P_1\} \cup \{P_2\} \cup \{c\}$.

Пусть $\overline{T}$=$Th_{\forall\exists}(C, c_a)_{a\in C} \cup Th_{\forall\exists}(E_T) \cup \{P_1(c)\} \cup \{\exists y P_2(y,c)\} \cup \{P_2\} \cup \{"P_1, \subseteq "\}$, где $\{"P_1, \subseteq "\}$ является бесконечным множеством предложений, выражающих тот факт, что интерпретация символа P_1 является экзистенциально замкнутой подмоделью на языке сигнатуры σ_Γ, P_2 есть отношение эквивалентности. То есть интерпретация символа P_1 является решением следующего уравнения $P_1(C) = M \in E_T$ в языке сигнатуры σ_Γ.

Рассмотрим все пополнения теории $\overline{T}$ в языке сигнатуры σ_Γ. Так как T – наследственная теория, то $\overline{T}$ будет йонсоновской теорией, поэтому у нее есть центр, и мы обозначим его через $\overline{T}^*$, и этот центр равен одному из вышеперечисленных пополнений теории $\overline{T}$. При ограничении сигнатуры σ_Γ на $\sigma \cup P_1 \cup P_2$, согласно законам логики первого порядка, константа c уже не принадлежит этой сигнатуре, и мы можем заменить эту константу переменной, например x. И тогда теория $\overline{T}^*$ становится полным 1-типом для переменной x. Этот тип мы будем называть центральным типом теории $\overline{T}$ в приведенном выше обогащении.

Пусть T – произвольная йонсоновская теория, тогда $E(T)$=$\bigcup_{n<\omega} E_n(T)$, где $E_n(T)$ – есть решетка $\exists$-формул с n свободными переменными, T^* – центр йонсоновской теории T, т.е. $T^* = Th(C)$, где C – семантическая модель йонсоновской теории T.

Определение 1. Пусть T_1 и T_2 – йонсоновские теории. Мы будем говорить, что T_1 и T_2 – йонсоновски синтаксически подобны, если существует биекция $f : E(T_1) \to E(T_2)$, такая что

1) ограничение f до $E_n(T_1)$ есть изоморфизм решеток $E_n(T_1)$ и $E_n(T_2)$, $n < \omega$;
2) $f(\exists v_{n+1}\varphi) = \exists v_{n+1} f(\varphi)$, $\varphi \in F_{n+1}(T)$, $n < \omega$;
3) $f(v_1 = v_2) = (v_1 = v_2)$.

Следующий полученный результат по своему содержанию обобщает результат из [3].

Теорема. Если T_1, T_2 – наследственные, $\forall\exists$-полные, йонсоновские теории, тогда в обогащении Γ сигнатуры σ_Γ следующие условия эквивалентны:

1) T_1^* синтаксически подобна T_2^* в смысле [1];
2) T_1^c синтаксически подобна T_2^c в смысле [2].

Все неопределенные в данном тезисе определения понятий можно найти в следующих источниках [1, 2].

Ключевые слова: йонсоновская теория, семантическая модель, обогащение, центральный тип, йонсоновски синтаксическое подобие

2010 Mathematics Subject Classification: 03C07, 03C45, 03C50

Литература

[1] Ешкеев А.Р., Касыметова М.Т. *Йонсоновские теории и их классы моделей*, Изд-во КарГУ, Караганда (2016), 370.

[2] Mustafin T.G. *On similarities of complete theories*, Logic Colloquium '90. Proceedings of the Annual European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic. Helsinki (1990), 259–265.

[3] Ешкеев А.Р., Омарова М.Т., Уркен Г.А. *Подобия центральных типов наследственных теорий*, Eurasian Mathematical Journal : Сборник тезисов международной конференции, посвященной 10-летию выпуска журнала. Нур-Султан (16-19 октября 2019), 174.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

СВОЙСТВА ЙОНСОНОВСКОГО СПЕКТРА ОТНОСИТЕЛЬНО КАТЕГОРИЧНОСТИ

Махабат ОМАРОВА[a], Дилдаш ЖУМАГУЛ, Арайлым НУРМАКОВА

Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан
E-mail: [a]omarovamt_963@mail.ru

Пусть K – некоторый класс моделей произвольной сигнатуры σ языка первого порядка L и L_0 – множество всех предложений этого языка, т.е. $L_0 \subset L$ и $\Gamma \subseteq L_0$. Если рассмотреть $Th_\Gamma(K)$ теорию класса K, где $Th_\Gamma(K)=\{\phi \in \Gamma : \forall A \in K$ следует, что $A \models \phi\}$ и рассмотреть класс моделей этой теории $M = Mod(Th_\Gamma K)$, то взаимоотношение классов M и K представляет собой классическую постановку вопроса аксиоматизируемости класса K. В случае, когда теория не полна (а йонсоновские теории, вообще говоря, такие), данный класс задач становится достаточно трудным для полного описания.

Для изучения йонсоновских теорий фиксированного класса было определено понятие йонсоновского спектра следующим образом:

Определение 1. Йонсоновским спектром $JSp(K)$ класса моделей K произвольной сигнатуры называется множество всех йонсоновских теорий для данного класса моделей.

Определение 2. Мы говорим, что йонсоновская теория T_1 косемантична йонсоновской теории T_2 ($T_1 \bowtie T_2$), если $C_{T_1} = C_{T_2}$, где C_{T_i} – семантическая модель теории T_i, $i = 1, 2$.

Расширение $T_1 \supseteq T$ полной теории T называется несущественным, если сигнатура теории T_1 содержит, кроме символов сигнатуры теории T, лишь символы констант.

Пусть $[T] \in JSp(A)/_{\bowtie}$, тогда верен следующий результат:

Теорема. Пусть T – наследственная йонсоновская теория. Тогда, если $[T]^*$ – ω-категоричная универсальная теория, то следующие условия эквивалентны:

1) $[T]^*$ – ω_1-категорична;

2) в некотором несущественном расширении $[T]_1 \supseteq [T]$ найдется $P^C_{[T]_1}$-сильно минимальный тип, где $P^C_{[T]_1}$ – центральный тип $[T]_1$.

Все неопределенные в данном тезисе определения понятий можно найти в следующих источниках [1, 2].

Ключевые слова: йонсоновская теория, семантическая модель, сильно минимальный тип, косемантичность, йонсоновский спектр

2010 Mathematics Subject Classification: 03C07, 03C45, 03C50

Литература

[1] Ешкеев А.Р., Касыметова М.Т. *Йонсоновские теории и их классы моделей*, Изд-во КарГУ, Караганда (2016), 370.

[2] Yeshkeyev A.R., Omarova M.T., Zhumabekova G.E. The J-minimal sets in the hereditary theories, *Bulletin of the Karaganda University*, **2**:94 (2019), 92–98.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

CRITERION OF DEFINABILITY OF A CONVEX CLOSURE OF 1-TYPE OVER A SET

Zhanar ADIL[1,a], Bektur BAIZHANOV[1,b]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*baizhanov@math.kz*, [b]*z.adil@math.kz*

Definability of 1-types in o-minimal theories were studied by D.Marker and C.Steinhorn in [1]. Later B.Baizhanov investigated problem of definability of 1-types in weakly o-minimal theories [2].

In general, the question of definability of 1-types can be considered as two distinct questions that can be studied separately: definability of convex closure of a type and set of formulas with infinite number of alternations.

Suppose that $\mathfrak{M} = \langle M, \Sigma \rangle$ is a model of a complete theory T. Let $p \in S_1(A)$ with $A \subset M$. We consider convex closure of type p: $p^c = \{B_i(y) | B_i(y) \in p^c, i \in I\}$. Denote $G_i(y) = B_i(y)^-$ and $D_i(y) = B_i(y)^+$. Obviously, $G_i(N) < y < D_j(N) \in p^c$.

Definition. Let $\theta(\bar{z})$ and $H(y, \bar{z})$ be an A-definable formulas such that for any $\bar{a} \in M$, $H(y, \bar{a})$ is a convex formula and $H(M, \bar{a})^+ = \neg H(M, \bar{a})$, $X := \theta(M) \cap A$. We say that the **condition of left convergence** of a formula $H(y, \bar{z})$ on a set X or of $\theta(\bar{z})$ to the type p^c is satisfied and denote by

$$LC\big(H(y,\bar{z}), X, p^c\big) \text{ or } LC\big(H(y,\bar{z}), \theta(\bar{z}), p^c\big)$$

if for any $G_i(y)$ and $D_j(y)$ there exists $\bar{a} \in X$ such that

(i) $G_i(M) \subset H(M, \bar{a})$;

(ii) $H(M, \bar{a}) < y < D_j \in p^c$.

We say that the **condition of right convergence** of a formula $H(y, \bar{z})$ on a set X or of $\theta(\bar{z})$ to the type p^c is satisfied and denote by

$$RC\big(H(y,\bar{z}), X, p^c\big) \text{ or } RC\big(H(y,\bar{z}), \theta(\bar{z}), p^c\big)$$

if for any $G_i(y)$ and $D_j(y)$ there exists $\bar{a} \in X$ such that

(i) $D_j(M) \cap H(M, \bar{a}) = \emptyset$;

(ii) $G_i < y < H(M, \bar{a})^+ \in p^c$.

We also say that the **condition of two-side convergence** of a formula $H(y, \bar{z})$ on a set X or of $\theta(\bar{z})$ to the type p^c is satisfied and denote by

$$C\big(H(y,\bar{z}), X, p^c\big) \text{ or } C\big(H(y,\bar{z}), \theta(\bar{z}), p^c\big)$$

if $LC(H, X, p^c)$ and $RC(H, X, p^c)$ hold simultaneously.

Theorem 1. *Let $A \subset M$ and $p \in S_1(A)$ be an irrational type. Then the following are equivalent:*

(i) p^c is non-definable;

(ii) exists A-definable formula $H(y, \bar{z})$ such that for any A-definable formula $\theta(\bar{z})$ holds:

$$C\big(H(y,\bar{z}), \theta(\bar{z}), p^c\big) \bigvee C\big(H(y,\bar{z}), \neg\theta(\bar{z}), p^c\big).$$

Funding: The authors were supported by the grant No. AP09058169 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: definability, convex closure, condition of convergence.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C40

References

[1] Marker D., Steinhorn C. Definable Types in O-Minimal Theories, *The Journal of Symbolic Logic*, **59**:1 (1994), 185–198.

[2] Baizhanov B. Definability of 1-types in weakly o-minimal theories, *Siberian Adv. Math.*, **16**:2 (2006), 1–33.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ORTHOGONALITY OF PARTIAL 1-TYPES IN ORDERED THEORIES

Zhanar ADIL[1,a], Bektur BAIZHANOV[2,b] Tatyana ZAMBARNAYA[3,c]

[1,2,3] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*z.adil@math.kz,* [b]*baizhanov@math.kz,* [c]*zambarnaya@math.kz*

We deal with the class of linearly ordered theories with a binary $\emptyset$-definable relation of linear order. We generalize notions introduced for weakly o-minimal theories, such as as weakly orthogonal and quasirational types, and consider their properties.

Definition. A **convex closure** of a formula $\varphi(x, \bar{a})$ is the following formula:

$$\varphi^c(x, \bar{a}) := \exists y_1 \exists y_2 \big(\varphi(y_1, \bar{a}) \wedge \varphi(y_2, \bar{a}) \wedge (y_1 \leq x \leq y_2)\big).$$

A **convex closure** of a type $p(x) \in S_1(A)$ is the type

$$p^c(x) := \{\varphi^c(x, \bar{a}) \mid \varphi(x, \bar{a}) \in p\}.$$

Definition. Let $A \subseteq N$, $p, q \in S_1(A)$, and $\mathfrak{N}$ be an $|A|^+$-saturated model of a linearly ordered theory. We say that the type p^c is **not weakly orthogonal** to the type q^c, $p^c \not\perp^w q^c$, if there exists a convex formula $\varphi(x, y, \bar{a})$, $\bar{a} \in A$, such that for every $\alpha \in p^c(N)$ $\varphi(N, \alpha, \bar{a}) \cap q^c(N) \neq \emptyset$ and $\neg\varphi(N, \alpha, \bar{a}) \cap q^c(N) \neq \emptyset$.

Claim. *Let $A \subseteq N$, $\mathfrak{N}$ be an $|A|^+$-saturated model of a linearly ordered theory, $p, q \in S_1(A)$ be non-algebraic types. Then $p \perp^w q$ implies $p^c \perp^w q^c$.*

Definition. Let $p \in S_1(A)$, $A \subset N$, and $\mathfrak{N}$ be an $|A|^+$-saturated model of a linearly ordered theory. The type p^c is **quasirational to the right (left)** if there exists a formula $U(x, \bar{a})$, $\bar{a} \in A$, such that for every $\alpha \in p^c(N)$

for every $\beta \in U(N, \bar{a})$ such that $\alpha < \beta$, $tp^c(\beta/A) = p^c$
(for every $\beta \in U(N, \bar{a})$ such that $\alpha > \beta$, $tp^c(\beta/A) = p^c$).

The type p^c is **quasirational** if it is either quasirational to the left, or quasirational to the right.

Definition. Let $p \in S_1(A)$, $A \subset N$, and $\mathfrak{N}$ be an $|A|^+$-saturated model of a linearly ordered theory. The type p (p^c) is said to be **definable**, if for every formula (convex formula) $\varphi(x, \bar{y})$ there exists an A-definable formula $\theta_\varphi(\bar{y})$ such that for every $\bar{b} \in A$

$$\varphi(x, \bar{b}) \in p \ (p^c) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \theta_\varphi(\bar{b}).$$

Theorem 1. *Let $A \subset N$, $\mathfrak{N}$ be an $|A|^+$-saturated model of a linearly ordered theory, $p, q \in S_1(A)$ be non-algebraic types such that $p^c \not\perp^w q^c$.*

(i) If the type p^c is quasirational, then the type q^c is quasirational.

(ii) If the type p is definable, then the type q^c is definable.

Theorem 2. *Let $A \subset N$, $\mathfrak{N}$ be an $|A|^+$-saturated model of an o-stable theory, $p, q \in S_1(A)$ be non-algebraic types. Then $p^c \not\perp^w q^c$ if and only if $q^c \not\perp^w p^c$.*

Corollary. *Let $A \subset N$, $\mathfrak{N}$ be an $|A|^+$-saturated model of an o-stable theory, $p, q \in S_1(A)$ be non-algebraic types such that $p^c \not\perp^w q^c$. Then the type p^c is quasirational if and only if the type q^c is quasirational.*

Funding: The authors were supported by the grant AP09058169 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: model theory, linear order, weak orthogonality of types, definability of types.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C64

References

[1] Байжанов Б.С. Определимость 1-типов в слабо о-минимальных теориях, *Математические труды*, **8**:2 (2005), 3–38.

— ⁂ —

SOME CONSTRUCTIONS OF A MODELS BASED ON TARSKI-VAUGHT THEOREM

Bektur BAIZHANOV[1,a], Daurenbek ORYNBASSAROV[2,b] Viktor VERBOVSKIY[3,c]

[1] *Suleyman Demirel University, Kaskelen, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

[2] *Kazakh National University named after al Farabi, Almaty, Kazakhstan*

[3] *Satbayev University, Almaty, Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan*

E-mail: [a]e-mail: baizhanov@math.kz,, [b]e-mail: daurenbekaga@gmail.com,,
[c]e-mail:viktor.verbovskiy@gmail.com,

We study the question of existence of special extensions of a set A, which are characterized that the type over A of any tuple in the extension satisfies a condition C, where C is some property of types; C can be either that any type under consideration is definable, or that any type is locally isolated, or that any type is non-definable, etc. In particular, we study the question of existence of a conservative extension of a model.

Theorem 1.(Tarski-Vaught): Let A be a subset of a model M of a complete theory T. For a set A to be an elementary submodel of a model M, it is necessary and sufficient that for any formula of the form $\exists x\phi(x,\bar{a})$, where $\bar{a} \in A$, the following condition holds: $M \models \exists x\phi(x,\bar{a})$ implies that there exists $b \in A$ such that $M \models \phi(b,\bar{a})$.

Definition 1. We say that a condition C satisfies the transitivity property if the following holds for any three sets:

$$A \subset_C B \wedge B \subset_C D \Rightarrow A \subset_C D$$

In any case, the following four conditions are necessary for constructing a model which is a C-extension of a set A:

$\mathrm{U0}_C$ For any sets $A \subseteq B$ and any C-type $p \in S_1(A)$ there exists a C-type $q \in S_1(B)$ which extends p (the extension property).

$\mathrm{U1}_C$ For any tuple $\bar{\alpha} \in N \setminus A$ whose type satisfies the condition C, for any formula $\phi(x,\bar{\alpha},\bar{a})$, where $\bar{a} \in A$ and $N \models \exists x(\phi(x,\bar{\alpha},\bar{a}))$, there exists a type $p(x) \in S_1(A\bar{\alpha})$ such that $\phi(x,\bar{\alpha},\bar{a}) \in p$ and for any $\beta \in N$ with $\beta \models p(x)$, we obtain that $tp(\beta\bar{\alpha}/A)$ satisfies the condition C.

$\mathrm{U2}_C$ For a theory T, the condition C has the transitivity property.

$\mathrm{U3}_C$ A theory T has the restriction property for C-types, that is if $tp(\bar{\alpha}/A)$ is a C-type, then $tp(\bar{\beta}/A)$ is a C-type for any $\bar{\beta} \subseteq \bar{\alpha}$.

Definition 2. We say a complete theory T has the joint extension property for C-1-types if for any set $A \subset N$, where $N \models T$ is sufficiently saturated, for any $\bar{\alpha},\beta,\gamma \in N \setminus A$ the following is true: if the types $q := tp(\beta/A \cup \bar{\alpha})$, $p := tp(\gamma/A \cup \bar{\alpha})$, $tp(\bar{\alpha}/A)$ are C-types over A, then the type $tp(\gamma\beta/A\bar{\alpha})$ is a C-type.

$\mathrm{U4}_C$ A theory T has the joint extension property for C-1-types.

Let the D-property of a type over a set A be that this type is definable over the set A, that is, $p \in S(A)$ is definable, in this case we will say and write that p is a D-type.

Definition 3. For sets $A \subset B$, we say that B is a D-extension (conservative) of A ($A \subset_D B$) if $tp(\bar{\alpha}/A)$ is a D-type for any $\bar{\alpha} \in B \setminus A$.

Theorem 2. There is an o-minimal theory T such that for $A \subset N \models T$ and $p,q \in S_1(A)$ the following hold:

1. q is weakly orthogonal to p;

2. both q and p are locally isolated types and hence are D-types;

3. the unique 2-type $p(x) \cup q(y) \in S_2(A)$ is not definable.

Theorem 3. Let T be a complete theory, then the following is true:

1) For any set A, there is a model M with $(A \subset M \preceq N)$ which is constructed using Tarski-Vaught test.

2) If a theory T satisfies the conditions $U0_C$, $U1_C$, $U2_C$, and $U3_C$, then for any set A there exists a model $M \preceq N$ such that $A \subseteq_C M$.

3) If a theory T satisfies the conditions $U0_C$, $U1_C$, $U2_C$, $U3_C$, and $U4_C$, then for any set A there exists a model $M \preceq N$ such that $A \subseteq_C M$ and M is a C-ω-saturated extension of A.

Funding: The authors were supported by the grant No. AP09259295. of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: Conservative extension, definability of types.

References

[1] B. S. Baizhanov,. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates, *The Journal of Symbolic Logic*, 66 (2001), 1382-1414 https://doi.org/10.2307/2695114.

[2] B. Baizhanov, V. Verbovskiy. O-stable theories, *Algebra and Logic*, 50 (3), 211–225 (2011).

[3] B. Baizhanov. Definability of 1-Types in Weakly o-Minimal Theories, *Siberian Advances in Mathematics* 16(2), 1–33 (2006).

[4] B. Baizhanov. Konservativnye rasshireniya modeley slabo o-minimalnykh teoriy, Vestnik NGU, *Ser. math., mech., inform.*, 7(3), 13–44 (2007).

[5] A. Pillay, C. Steinhorn, Definable Sets in Ordered Structures I, *Transactions of the American Mathematical Society*, 295 (2), 565–592 (1986).

[6] V. Verbovskiy, O-stable ordered groups, *Siberian Advances in Mathematics*, 22, 50–74 (2012).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

INFINITE NUMBER OF CONVEX TO RIGHT EQUIVALENCE GENERATING FORMULAS AND MAXIMAL NUMBER OF COUNTABLE MODELS

Bektur BAIZHANOV[1,a], Olzhas UMBETBAYEV[2,b] Tatyana ZAMBARNAYA[3,c]

[1,2,3] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

E-mail: [a]baizhanov@math.kz, [b]umbetbayev@math.kz [c]zambarnaya@math.kz

Describing conditions, when a complete theory has the maximal number of countable models, plays an important role in counting the number of countable pairwise non-isomorphic models of ordered theories. In particular, this question was investigated by Alibek-Baizhanov-Zambarnaya in [1], Baizhanov-Baldwin-Zambarnaya in [2], and Baizhanov-Umbetbayev-Zambarnaya in [3].

Definition. A set A is said to be **convex** in a set B, $A \subseteq B$, if for all $x, y \in A$ and all $z \in B$ $x < z < y$ implies that $z \in A$.

Let $\Theta(x)$ be an 1-A-formula, then

$$E_\Theta(x,y) := \Theta(x) \wedge \Theta(y) \wedge$$
$$\wedge \Big(x = y \vee \big((x < y \to \forall z (x \le z \le y \to \Theta(z))) \wedge (y < x \to \forall z (y \le z \le x \to \Theta(z))) \big) \Big)$$

defines an equivalence relation with convex classes on $\Theta(N)$. We call Θ a **zebra-formula** or a formula with infinite number of alternations (INA), if the number of convex E_Θ-classes is an infinite. On the set of convex E_Θ-classes there is a linear ordering; if this order contains an infinite discrete chain, then $I(T, \aleph_0) = 2^{\aleph_0}$ [1]. So, we assume that there is a natural number n_Θ such that any discrete chain of E_Θ-classes contains at most n_Θ-classes and the order on the set of all E_Θ-classes is dense up to finite discrete chain bounded by n_Θ.

Definition. [4] 1) The **convex closure** of a formula $\varphi(x, \bar{a})$ is the following formula:

$$\varphi^c(x,\bar{a}) := \exists y_1 \exists y_2 \big(\varphi(y_1,\bar{a}) \wedge \varphi(y_2,\bar{a}) \wedge (y_1 \le x \le y_2)\big).$$

2) The **convex closure** of a type $p(x) \in S_1(A)$ is the following set of formulas

$$p^c(x) := \{\varphi^c(x,\bar{a}) \mid \varphi(x,\bar{a}) \in p\}.$$

Definition. [5,6] Let $\mathfrak{M}$ be a linearly ordered structure, $A \subseteq M$, M be $|A|^+$-saturated, and $p \in S_1(A)$ be non-algebraic.

1) An A-definable formula $\varphi(x,y)$ is said to be **p–preserving (p-stable)** if there exist α, γ_1, $\gamma_2 \in p(M)$ such that $p(M) \cap \big(\varphi(M,\alpha) \setminus \{\alpha\}\big) \neq \emptyset$ and $\gamma_1 < \varphi(M,\alpha) < \gamma_2$.

2) A p-preserving formula $\varphi(x,y)$ is said to be **convex to the right (left)** if there exists $\alpha \in p(M)$ such that $p(M) \cap \varphi(M,\alpha)$ is convex, α is the left (right) endpoint of the set $\varphi(M,\alpha)$, and $\alpha \in \varphi(M,\alpha)$.

3) A p-preserving convex to the right (left) formula $\varphi(x,y)$ is **equivalence-generating** if for any $\alpha \in p(M)$ and any $\beta \in \varphi(M,\alpha) \cap p(M)$ the following holds:

$$\mathfrak{M} \models \forall x(x \ge \beta \to (\varphi(x,\alpha) \leftrightarrow \varphi(x,\beta)))$$
$$\big(\mathfrak{M} \models \forall x(x \le \beta \to (\varphi(x,\alpha) \leftrightarrow \varphi(x,\beta)))\big).$$

By $CRF(p)$ ($CLF(p)$) we denote the family of all p-preserving convex to the right (left) A-formulas.

Restriction. *Let A and B be subsets of a model of a linearly ordered theory T, A be finite, B be A-definable. We consider 1-types $p \in S_1(A)$ such that*

(i) for every A-formula $E(x,y,\bar{z})$ there is no infinite sequence $\bar{b}_1, \bar{b}_2, ..., \bar{b}_i, ... \in B$ such that for every $i < \omega$, $E(x,y,\bar{b}_i)$ is an equivalence relation on p with classes partitioned into infinitely many of infinite $E(x,y,\bar{b}_{i+1})$-classes;

(ii) the set $\{q \in S_1(A) \mid p^c = q^c\}$ is finite;

(iii) all p-preserving convex to the right formulas are equivalence generating.

Theorem 1. *Let T be a countable complete linearly ordered theory, A be a finite subset of a model of T, and let $p(x) \in S_1(A)$ be a non-algebraic 1-type satisfying the Restriction. Then T has $2^{\aleph_0}$ countable non-isomorphic models*

(i) [3] if $CRF(p)$ is infinite and has no greatest formula;

(ii) if $CRF(p)$ is infinite and has no least formula;

(iii) if $CRF(p)$ is infinite.

Funding: The authors were supported by the grant No. AP08955727 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: small theory, countable model, families of complete 1-types.

2010 Mathematics Subject Classification: MSC2010

References

[1] Alibek A.A., Baizhanov B.S., Zambarnaya T.S. Discrete order on a definable set and the number of models, *Mathematical Journal*, **14**:3 (2014), 5–13.

[2] Baizhanov B., Baldwin J.T., Zambarnaya T. Finding $2^{\aleph_0}$ countable models for ordered theories, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **15**:7 (2018), 719–727.

[3] Baizhanov B., Umbetbayev O., Zambarnaya T. Non-existence of uniformly definable family of convex equivalence relations in an 1-type of small ordered theories and maximal number of models, *Kazakh Mathematical Journal*, **19**:4 (2019), 98–106.

[4] Baizhanov B.S., Verbovskiy V.V. O-Stable Theories, *Algebra and Logic*, **50**:3 (2011), 303–325.

[5] Baizhanov B.S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates, *The Journal of Symbolic Logic*, **66** (2001), 1382–1414.

[6] Baizhanov B.S., Kulpeshov B.Sh. On behaviour of 2-formulas in weakly o-minimal theories, *Mathematical Logic in Asia, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference*, (2006), 31–40.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

EXPANSION OF DIVISIBLE ABELIAN GROUP AND INDEPENDENCE PROPERTY

Sayan BAIZHANOV[1,a], Fatima SARGULOVA[1,2,b]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan*
E-mail: [a]*sayan-5225@mail.ru*, [b]*fsargulova@gmail.com*

If $\mathfrak{M}$ is a structure $\mathfrak{M} =< M; \Sigma >$, consider $\mathfrak{M}^+ =< M; \Sigma^+ >$, where $\Sigma^+ = \Sigma \cup \{P^n\}$. This expansion will be essential , if $P^n(\mathfrak{M}^+) \neq \varphi(\mathfrak{M}, \overline{a})$, for any formula of signature $\Sigma(M)$ $\varphi(\overline{x}, \overline{a}), \overline{a} \in M$. We say that expansion is an externally definable in elementary extension $\mathfrak{N}$ of $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$), if for any formula $H^+(\overline{x})$ of signature Σ^+ there exists the formula $K_{H^+}(\overline{x}, \overline{\alpha}, \overline{a})$ of signature $\Sigma(N)$, where $\overline{\alpha} \in N/M$, such that $K_H(N, \overline{\alpha}, \overline{a}) \cap M^l = H^+(\mathfrak{M}^+)$.

$\mathfrak{M}$ has strict ordered property SOP: There exists formula φ and exists sequense $b_i \in M$ such that $\varphi(\overline{x}, \overline{b}_i)$ is $\varphi(\mathfrak{M}, \overline{b}_i) \subsetneq \varphi(\mathfrak{N}, \overline{b}_{i+1})$, where $i \in N$.

A theory has the independent property if and only if there exists a formula $\varphi(x, \overline{y})$ with one free variable x that has the independence property for any $n < \omega$ there is sequence $\overline{b}_1, ...\overline{b}_n$ such that for any bit string $\tau = (\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n)$ such that $\models \exists x(\bigwedge_{j=i}^{n} {}^{\tau_i}\varphi_i(x, \overline{b}_i))$ where ${}^{\tau_i}\varphi_i(x, \overline{b_i}) = \varphi_i(x, \overline{b_i})$, if τ =1; ${}^{\tau_i}\varphi_i(x, \overline{b_i}) = \neg\varphi_i(x, \overline{b_i})$, if $\tau = 0$.;

In our talk we consider the expansion of divisible abelian group (in particular case, the group of all rational numbers) by unary predicate such that expended structure has Independent Property. We detect conditions for the set that expansion by this set has NIP theory.

Funding: The authors were supported by the grant no. AP08955727 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: expansion models, independent property, dependent theory.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C64, 03C07, 03C15

References

[1] Baizhanov B.S., Baizhanov S.S. Some questions on external definability, *NEWS of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan*, **17** (2019), A.138-A.142

[2] Baizhanov B. S., Kulpeshov B.Sh., Zambarnaya T. S. A.D. Taimanov and model theory in Kazakhstan, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **17** (2020), A.1-A.58

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ON SOME EXPANSIONS OF DENSE ORDERS

Aigerim DAULETIYAROVA[1,a], Sergey SUDOPLATOV[2,b]

[1] *Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia*
[2] *Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*
E-mail: [a]*d_aigera95@mail.ru*, [b]*sudoplat@math.nsc.ru*

We consider some possibilities of simple complete expansions T of a theory $T_{\rm fdo}$ of a dense partial order with finitely many maximal chains and of the theory $T_{\rm dmt}$ of a dense meet-tree $\langle M, < \rangle$ [1]. Some expansions of these theories produce classical examples of Ehrenfeucht theories [2, 3], see also [4, Examples 1.1.1.3, 1.1.1.4].

Theorem 1. *Let T be an expansion of $T_{\rm fdo}$ or $T_{\rm dmt}$ by countably many disjoint convex nonempty unary predicates P_n, $n \in \omega$. The following conditions are equivalent:*

(1) *T is Ehrenfeucht;*

(2) *T has finitely many nonisolated* 1*-types.*

Theorem 2. *Let T be an expansion of $T_{\rm fdo}$ or $T_{\rm dmt}$ by countably many disjoint convex nonempty unary predicates P_n, $n \in \omega$. The following conditions are equivalent:*

(1) $I(T,\omega)=2^\omega$;

(2) T *has infinitely many nonisolated* 1*-types.*

Replacing predicates P_n by constants c_n we obtain the following theorems.

Theorem 3. *Let T be an expansion of $T_{\rm fdo}$ or $T_{\rm dmt}$ by countably many distinct constants c_n, $n\in\omega$. The following conditions are equivalent:*

(1) *T is Ehrenfeucht;*

(2) *the set $C=\{c_n\mid n\in\omega\}$ has finitely many accumulation points in a saturated model of T;*

(3) *T has finitely many nonisolated* 1*-types.*

Theorem 4. *Let T be an expansion of $T_{\rm fdo}$ or $T_{\rm dmt}$ by countably many distinct constants c_n, $n\in\omega$. The following conditions are equivalent:*

(1) $I(T,\omega)=2^\omega$;

(2) *the set $C=\{c_n\mid n\in\omega\}$ has infinitely many accumulation points in a saturated model of T;*

(3) *T has infinitely many nonisolated* 1*-types.*

Theorems 1–4 confirm the Vaught conjecture for special expansions of $T_{\rm fdo}$ and $T_{\rm dmt}$.

Corollary. *Let T be an expansion of $T_{\rm fdo}$ or $T_{\rm dmt}$ by countably many disjoint convex unary predicates or by countably many constants. Then either T is Ehrenfeucht or $I(T,\omega)=2^\omega$.*

For expansions of dense linear orders and their finite disjoint unions the results above hold by [5, 6, 7, 8]. Using [5, 6] they can be spread for partial ordering analogues of quite o-minimal and weakly o-minimal theories admitting the description of distributions of countable models similar to [4, 7, 8].

Funding: This research was partially supported by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08855544), and the program of fundamental scientific researches of the SB RAS No. I.1.1, project No. 0314-2019-0002.

Keywords: dense order, Ehrenfeucht theory, maximal number of countable models.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C64, 03C07, 03C15, 03C50

References

[1] Mennuni R. Weakly binary expansions of dense meet-trees, *arXiv:2006.13004v1 [math.LO]* , (2020). 20 pp.

[2] Vaught R. Denumerable models of complete theories, in:*Infinistic Methods*, Pergamon, London (1961), 303–321.

[3] Peretyat'kin M.G. On complete theories with a finite number of denumerable models, *Algebra and Logic*, **12**:5 (1973), 310–326.

[4] Sudoplatov S.V. *Classification of Countable Models of Complete Theories*, NSTU, Novosibirsk (2018).

[5] Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. Vaught's conjecture for quite o-minimal theories, *Ann. Pure and Appl. Logic*, **169**:1 (2017), 129–149.

[6] Alibek A., Baizhanov B.S., Kulpeshov B.Sh., Zambarnaya T.S. Vaught's conjecture for weakly o-minimal theories of convexity rank 1, *Ann. Pure and Appl. Logic*, **169**:11 (2018), 1190–1209.

[7] Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. Distributions of countable models of quite o-minimal Ehrenfeucht theories, *Eurasian Math. J.*, **11**:3 (2020), 66–78.

[8] Sudoplatov S.V. Distributions of countable models of disjoint unions of Ehrenfeucht theories, *Lobachevskii J. Math.*, **42**:1 (2021), 195–205.

— ⋇ ⋇ ⋇ —

SOME PROPERTIES OF THE VARIETY OF BICOMMUTATIVE ALGEBRAS

Nurlan ISMAILOV[1,a], Bauyrzhan SARTAYEV[2,b]

[1] *Astana IT University, Nur-Sultan, Kazakhstan and Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan.*

[2] *Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia and Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan.*

E-mail: [a]*nurlan.ismail@gmail.com* [b]*baurjai@gmail.com*

An algebra with identities

$$a(bc) = b(ac) \tag{1}$$

$$(ab)c = (ac)b \tag{2}$$

is called *bicommutative*. The identity (1) is called *left-commutative* and the identity (2) is called *right-commutative*.

Let $\mathcal{B}icom$ be the variety of bicommutative algebras. In [1] and [2], it was proved that if $A \in \mathcal{B}icom$, then the commutator algebra $A^{(-)} = (A, [,])$ is a metabelian Lie algebra, where $[a, b] = ab - ba$ is the commutator product on A for all $a, b \in A$. In other words, A satisfies the Jacobi and the metabelian identities under commutator product:

$$[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0,$$

$$[[a, b], [c, d]] = 0.$$

In [3], it was proved that every identity satisfied by the commutator in every bicommutative algebra is a consequence of anti-commutativity, the Jacobi and the metabelian identities.

It was noted in [2] that a bicommutative algebra A satisfies the Tortken-minus identity under anti-commutator $\{a, b\} = ab + ba$:

$$\{\{a, b\}, \{c, d\}\} - \{\{a, d\}, \{c, b\}\} = -\{(a, b, c), d\} + \{(a, d, c), b\} \tag{3}$$

where $(a, b, c) = \{a, \{b, c\}\} - \{\{a, b\}, c\}$ is the associator of $a, b, c \in A$.

In addition to the Tortken-minus identity, a bicommutative algebra satisfies the weak right-commutativity identity

$$\{\{\{a, b\}, c\}, d\} = \{\{\{a, b\}, d\}, c\} \tag{4}$$

and every identity satisfied by the anti-commutator in every bicommutative algebra is a consequence of commutativity, the minus-Tortken and weak right-commutativity identities [3].

Theorem 1. *Pair of varieties of bicommutative and metabelian Lie algebras is not a PBW-pair.*

Theorem 2. *The class $\mathcal{B}icom^{(+)}$ does not form a variety.*

Proposition 3. *The variety $\mathcal{B}icom$ is not Schreier.*

Proposition 4. *Varieties of metabelian Lie algebras and bicommutative algebras does not satisfy the Freiheitssatz.*

Funding: The authors were supported by grant AP08052405 of MES RK.

Keywords: Gröbner-Shirshov bases, bicommutative algebra, metabelian Lie algebra.

2010 Mathematics Subject Classification: 17A30, 17A50

References

[1] D. Burde, K. Dekimpe, S. Deschamps. *LR-algebras*, New Developments in Lie Theory and Geometry, Amer. Math. Soc., Providence, RI, Contemporary Mathematics 491 (2009), 125-140.

[2] A.S. Dzhumadil'daev, K.M. Tulenbaev. *Bi-commutative algebras*, Uspechi Math. Nauk, 58 (2003), No.6, 149-150=engl.transl.Russian Math.Surv., 1196-1197.

[3] A.S. Dzhumadil'daev, N.A. Ismailov. *Polynomial identities of bicommutative algebras, Lie and Jordan elements*, Communications in Algebra, DOI:10.1080/00927872.2018.1461890.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

A CRITERION FOR EFFECTIVE COMPLETE DECOMPOSABILITY OF ABELIAN GROUPs

N.G. KHISAMIEV [1,a], V.A. ROMAN'KOV[2,b], D.A. TUSUPOV[1,c], S.D. TYNYBEKOVA[3,d]

[1] *Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Republic of Kazakstan*
[2] *Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia*
[3] *Fin Academy, Nur-Sultan, Republic of Kazakstan*
E-mail: [a]hisamiev@mail.ru, [b]romankov48@mail.ru, [c]tussupov@mail.ru, [d]Saule.tynybekova 57@bk.ru

A countable torsion-free abelian group A is called *completely decomposable* if the equality

$$A = \oplus\{A_i | i \in \omega\}, \tag{1}$$

is true for some subgroups A_i of the rationals $\langle \mathbb{Q}, +, 0\rangle$ under addition.

Definition 1. Let there exists a computable numbering ν of the group A of the form (1) such that the pair (A, ν) contains a computably enumerable maximal linearly independent system of elements $\langle a_i \mid a_i \in A_i\rangle$. In this case, the pair (A, ν) is called a *computably completely decomposed* group, and A itself is called an *effectively completely decomposed* group.

In what follows, we assume that the base set of the group A is the set $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$. P is the set of all prime numbers. By p we denote a prime number.

We introduce the following predicates:

$$R(x, p, n, y) \rightleftharpoons (x = p^n y), D(x, p) \rightleftharpoons \forall n \exists x R(x, p, n, x).$$

Definition 2. If on the group A of the form (1), the formula

$$H(p, n, a) \leftrightharpoons \exists x R(a, p, n, x) \wedge \forall y \neg R(a, p, n + 1, y),$$

is true then we say that the *p-height* of the element $a \in A$ is equal to n and denote this fact as $h_p(a) = n$; if $A \models D(a, p)$ then we say that the *p-height* of a is equal to ω and denote $h_p(a) = \omega$.

For any nonzero element a of the group A of the form (1), we introduce the following sets:

$$H_{<\omega}(a) \leftrightharpoons \{p \mid 0 < h_p(a) < \omega,\ p \in P\},$$
$$H_\omega(a) \leftrightharpoons \{p \mid h_p(a) = \omega,\ p \in P\}.$$

Definition 3. The p-heigh sequence $\chi(a) = \langle h_{p_0}(a), \ldots, h_{p_n}(a), \ldots\rangle$ is called *characteristic* of the element $a \in A \setminus \{0\}$, where p_i is the i-th prime and $h_p(a)$ is introduced by definition 2. Characteristics $\langle k_0, \ldots, k_n, \ldots\rangle$ and $\langle l_0, \ldots, l_n, \ldots\rangle$ are *equivalent* if $k_n \neq l_n$ holds only for a finite set of numbers n and only if k_n and l_n are finite.

Definition 4. Let A be a group defined by (1). Then A is called $\langle p, \omega\rangle$-*decomposable* if each A_i contains an element a_i for which the set $H_{<\omega}(a_i)$ is finite.

Definition 5. Let A be a $\langle p, \omega\rangle$-decomposable abelian group of the form (1), and $\langle a_i \mid a_i \in A_i\rangle$ be a maximal linearly independent system of elements in A. Then the sequence of sets $\chi(A) = \langle H_\omega(a_i) \mid i \in \omega\rangle$, is called *characteristic* of A.

Definition 6. If predicate $R(i, p, n, x)$ for $p \in P$, $i, n, x \in \omega$ satisfies the conditions

$$R(i, p, 0, i);\ R(i, p, n, x) \wedge R(i, p, n, y) \to x = y;$$

$$(R(i, p, n, x) \wedge 0 < m < n) \to (\exists y (R(i, p, m, y) \wedge R(y, p, n - m, x))),$$

then it is called *F-predicate*. For a F-predicate $R(i,p,n,x)$ we introduce the following set:

$$I(i) \leftrightharpoons \{p \mid \forall n \exists x \ R(i,p,n,x)\}.$$

Theorem. *L*et the abelian group A defined by (1) be $\langle p,\omega\rangle$-decomposable. Then it is effectively $\langle p,\omega\rangle$-decomposable if and only if there exist a computable function $f(i)$ and a computable F-finite predicate $R(i,p,n,x)$ such that the following equality holds:

$$\chi(A) = \langle I(f(i)) \mid i \in \omega\rangle.$$

Funding: D. A. Tusupov and N. G. Khisamiev were partially supported by the Science Committee Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (grant AP08855497: Model-theoretic and algorithmic properties of algebraic structures). V. A. Roman'kov was supported by the Russian Science Foundation (project No. 19-71-10017).

Keywords: abelian group, effective complete decomposability.

2010 Mathematics Subject Classification: 03D45, 20K25, 03D80.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

COMPLEXITY OF THE QUASIVARIETY LATTICE FOR THE VARIETY OF LUKASIEWICZ ALGEBRAS

Svetlana LUTSAK[1,a], Olga VORONINA[2,b]

[1] *M. Kozybayev North Kazakhstan University, Petropavlovsk, Kazakhstan*
[2] *M. Kozybayev North Kazakhstan University, Petropavlovsk, Kazakhstan*
E-mail: [a]*sveta_lutsak@mail.ru*, [b]*oavyu@mail.ru*

Recall that a quasivariety is a class of structures of the same signature which is closed under substructures, direct products (including the direct product of an empty family) and ultraproducts. A variety is a quasivariety which is closed under homomorphic images. A quasivariety $\mathbf{K}'$ which is contained in a quasivariety $\mathbf{K}$ is called a subquasivariety of $\mathbf{K}$. The set $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ of all subquasivarieties of a given quasivariety $\mathbf{K}$ forms a complete lattice (under inclusion) which is called a lattice of quasivarieties of $\mathbf{K}$ or a quasivariety lattice of $\mathbf{K}$.

After M.V. Sapir [1], a quasivariety $\mathbf{K}$ is Q-universal if, for any quasivariety $\mathbf{K}'$ of a finite signature, a quasivariety lattice $\mathrm{Lq}(\mathbf{K}')$ is a homomorphic image of some sublattice of the quasivariety lattice $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$, that is $\mathrm{Lq}(\mathbf{K}') \in \mathbf{HS}\big(\mathrm{Lq}(\mathbf{K})\big)$. In this case the quasivariety lattice $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ of a quasivariety $\mathbf{K}$ is called Q-universal. Note that Q-universality indicates maximum complexity in the lattice-theoretic sense.

Sufficient conditions for Q-universality of quasivarieties are found in the paper of M. Adams and W. Dziobiak [2]. These conditions have received some generalization in the paper of M. V. Schwidefsky [3]. The first example of a Q-universal quasivariety was found by M. V. Sapir [1]. In [4] A. M. Nurakunov proved Q-universality of the quasivariety of pointed Abelian groups. To date a lot of Q-universal classes of algebraic systems are known and their number is constantly growing.

Let

$$\mathcal{A}_n = \left(\left\{0, \frac{1}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\right\}, \to, \neg\right), n \geq 1,$$

be an algebra with the operations defined as follows: for all x,y $x \to y = \min\{1, 1-x+y\}$ and $\neg x = 1 - x$. This algebra is due to Jan Lukasiewicz. Let $\mathbf{M}$ be a variety of all Lukasiewicz algebras and let $\mathrm{Lq}(\mathbf{M})$ denote the subquasivariety lattice (quasivariety lattice) of the variety $\mathbf{M}$.

The main purpose of this work is to study the complexity of the structure of the quasivariety lattice $\mathrm{Lq}(\mathbf{M})$ and to prove the following theorem.

Theorem. *The lattice* $\mathrm{Lq}(\mathbf{M})$ *is* Q*-universal.*

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09058390).

Keywords: lattice, quasivariety, quasivariety lattice, Q-universality, Lukasiewicz algebra

2010 Mathematics Subject Classification: 06B15, 08C15

References

[1] Sapir M.V. The lattice of quasivarieties of semigroups, *Algebra Universalis*, **21**:2/3 (1985), 172–180.

[2] Adams M., Dziobiak W. Q-universal quasivarieties of algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **120**:4 (1994), 1053–1059.

[3] Schwidefsky M.V. On the omplexity of quasivariety lattices, *Algebra and Logic*, **54**:3 (2015), 381–398.

[4] Nurakunov A.M. Quasivariety lattices of pointed Abelian groups, *Algebra and Logic*, **53**:3 (2014), 372–400.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ON RANKS AND APPROXIMATIONS FOR FAMILIES OF CUBIC THEORIES

Nurlan MARKHABATOV

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia
E-mail: markhabatov@gmail.com,

We continue to study approximations of the theories [1] and describe the ranks introduced in [2], for natural classes of structures.

Definition [3, 4]. A *n-dimensional cube*, or a *n-cube* (where $n \in \omega$) is a graph isomorphic to the graph $\mathcal{Q}_n$ with the universe $\{0;\ 1\}^n$ and such that any two vertices $(\delta_1; \ldots;\ \delta_n)$ and $(\delta'_1\ \ldots\ \ \delta'_n)$ are adjacent if and only if these vertices differ exactly in one coordinate. The described graph $\mathcal{Q}_n$ is called the *canonical representative* for the class of n-cubes.

Any graph $\Gamma = \langle X;\ R\rangle$, where any connected component is a cube, is called a *cubic structure*. A theory T of graph language $\{R^{(2)}\}$ is *cubic* if $T = Th(\mathcal{M})$ for some cubic structure $\mathcal{M}$. In this case, the structure $\mathcal{M}$ is called a *cubic model* of T.

Definition [5, 6]. An infinite structure $\mathcal{M}$ is *pseudofinite* if every sentence true in $\mathcal{M}$ has a finite model.

Theorem 1. *Any cubic theory T with an infinite model is pseudofinite.*

Let a language Σ consist of $R^{(2)}$. Denote by $\mathcal{T}_\Sigma$ family of all cubic theories of language Σ.

Theorem 2. *For any countable ordinal α and natural $n \geq 1$ there exists a family $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_\Sigma$, such that $RS(\mathcal{T}) = \alpha$ and $ds(\mathcal{T}) = n$.*

Funding: The research is partially supported by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grants No. AP08855544), Russian Foundation for Basic Researches (Grant No. 20-31-90003)

Keywords: approximation of theory, cube, cubic structure, cubic theory, pseudofinite theory, ω-categorical theory.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C30, 03C15, 03C50, 54A05.

References

[1] Sudoplatov S. V. Approximations of theories, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, Vol. **17** (2020) 715-725. DOI10.33048/semi.2020.17.049

[2] Sudoplatov S. V. Ranks for families of theories and their spectra / S. V. Sudoplatov. — Novosibirsk, 2019. — 17 p. — (Preprint).

[3] Sudoplatov S.V. *Group polygonometries.* – Novosibirsk: Publishing House of Novosibirsk State Technical University, (2013) – 302 p.

[4] Sudoplatov S.V. Models of Cubic Theories, *Bulletin of the Section of Logic*, **43**:1-2 (2014), 19-34.

[5] Ax J. The elementary theory of finite fields, *Ann. Math.* **88**, (1968)239–271 .

[6] Rosen E. Some Aspects of Model Theory and Finite Structures, *The Bulletin of Symbolic Logic*, **8**:3 (2002), 380–403.

— ⁂ —

VARIETIES OF MONO AND BINARY ZINBIEL ALGEBRAS

Farukh MASHUROV[1,2,a], Nurken SMADYAROV[1,3,b]

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan*
[3] *Suleyman Demirel University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]f.mashurov@gmail.com, [b]nurken.smadyar@gmail.com

An algebra with identity $a(bc) = (ab)c+(ba)c$ is called *(right)-Zinbiel algebra* [1]. An algebra is said to be a *mono Zinbiel algebra* if every one-generated subalgebra is a Zinbiel algebra. An algebra is said to be a *binary Zinbiel algebra* if every two-generated subalgebra is a Zinbiel algebra. We give an independent system of defining identities of varieties of mono and binary Zinbiel algebras.

Theorem 1. Let $\mathbf{K}$ be a field of characteristic zero. An algebra A over $\mathbf{K}$ is mono Zinbiel if and only if it satisfies the following identities:

$$a(aa) = 2(aa)a,$$

$$(aa)(aa) = 3((aa)a)a.$$

Theorem 2. Let $\mathbf{K}$ be a field of characteristic different from two. An algebra A over $\mathbf{K}$ is binary Zinbiel if and only if it satisfies the following identities:

$$a(ba) = (ab + ba)a,$$

$$a(ab) = 2(aa)b.$$

Funding: The authors were supported by grant AP08052405 of MES RK.

Keywords: dual Leibniz algebras, polynomial identities.

2010 Mathematics Subject Classification: 17A30, 17A50

References

[1] Loday J.-L. Cup-product for Leibniz cohomology and dual-Leibniz algebras, *Math. Scand.*, **77** (1995), No.2, pp. 189-196.

— ⁂ —

ON FORMULAS AND PROPERTIES FOR FAMILIES OF THEORIES OF ABELIAN GROUPS

Inessa PAVLYUK[1,a], Sergey SUDOPLATOV[2,b]

[1] *Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk State Pedagogical University, Novosibirsk, Russia*
[2] *Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*
E-mail: [a]inessa7772@mail.ru, [b]sudoplat@math.nsc.ru

We study links between formulas and properties for families of theories of abelian groups, using E-closures [1] and the rank RS [2].

Let Σ be a language. If Σ is relational we denote by $\mathcal{T}_\Sigma$ the family of all theories of the language Σ. If Σ contains functional symbols f then $\mathcal{T}_\Sigma$ is the family of all theories of the language Σ', which is obtained by replacements of all n-ary symbols f with $(n+1)$-ary predicate symbols R_f interpreted by $R_f = \{(\bar{a}, b) \mid f(\bar{a}) = b\}$.

We denote by $\overline{\mathcal{TA}}$ the relativization above for the set of all theories of abelian groups.

In [2], the *rank* $\mathrm{RS}(\cdot)$ and the degree $\mathrm{ds}(\cdot)$ is defined for properties $P \subseteq \mathcal{T}_\Sigma$, similar to Morley rank for a fixed theory.

By $F(\Sigma)$ we denote the set of all formulas in the language Σ and by $\mathrm{Sent}(\Sigma)$ the set of all sentences in $F(\Sigma)$.

For a sentence $\varphi \in \mathrm{Sent}(\Sigma)$ we denote by P_φ the set of all theories $T \in P$ with $\varphi \in T$.

Definition. For a sentence $\varphi \in \mathrm{Sent}(\Sigma)$ and a property $P = P_t \subseteq \mathcal{T}_\Sigma$ we put $\mathrm{RS}_P(\varphi) = \mathrm{RS}(P_\varphi)$, and $\mathrm{ds}_P(\varphi) = \mathrm{ds}(P_\varphi)$ if $\mathrm{ds}(P_\varphi)$ is defined.

If $P = \mathcal{T}_\Sigma$ then we omit P and write $\mathrm{RS}(\varphi)$, $\mathrm{ds}(\varphi)$ instead of $\mathrm{RS}_P(\varphi)$ and $\mathrm{ds}_P(\varphi)$, respectively.

Definition. (cf. [3, 4, 5]) For a property $P \subseteq \mathcal{T}_\Sigma$, a sentence $\varphi \in \mathrm{Sent}(\Sigma)$ is called *P-generic* if $\mathrm{RS}_P(\varphi) = \mathrm{RS}(P)$, and $\mathrm{ds}_P(\varphi) = \mathrm{ds}(P)$ if $\mathrm{ds}(P)$ is defined.

Theorem 1. *For any sentence $\varphi \in \mathrm{Sent}(\Sigma_0)$ and $P = \overline{\mathcal{TA}}$ the following possibilities hold:*

(1) $\mathrm{RS}_P(\varphi) = -1$, *if φ is $\overline{\mathcal{TA}}$-inconsistent;*

(2) $\mathrm{RS}_P(\varphi) = 0$, *if φ is $\overline{\mathcal{TA}}$-consistent and belongs to (finitely many) theories in $\overline{\mathcal{TA}}$ with finite models only;*

(3) $\mathrm{RS}_P(\varphi) = \infty$, *if φ belongs to a theory $T \in \overline{\mathcal{TA}}$ with an infinite model.*

Theorem 2. *For any sentence $\varphi \in \mathrm{Sent}(\Sigma_0)$ and $P = \overline{\mathcal{TA}}$ either P_φ is E-closed and finite or P_φ is E-closed with $|P_\varphi| = 2^\omega$.*

Corollary. *For any sentence $\varphi \in \mathrm{Sent}(\Sigma_0)$ and $P = \overline{\mathcal{TA}}$ either φ is represented by finitely many sentences φ_i isolating theories $T_i \in \overline{\mathcal{TA}}$ with finite models, or φ is P-generic.*

Theorem 3. *For any at most countable set X of finite or countable ordinals, a set $Y = \{(\alpha, n_\alpha) \mid \alpha \in X, n_\alpha \in \omega \setminus \{0\}\}$, and a property $P \subseteq \overline{\mathcal{TA}}$ with $\mathrm{RS}(P) = \infty$ there exist $P' \subseteq P$ and a set $\Phi \subseteq \mathrm{Sent}(\Sigma)$ such that P'_φ are pairwise disjoint for $\varphi \in \Phi$ and $\{(\mathrm{RS}(P'_\varphi), \mathrm{ds}(P'_\varphi)) \mid \varphi \in \Phi\} = Y$ (respectively, the set of pairs $(\mathrm{RS}(P'_\varphi), \mathrm{ds}(P'_\varphi))$ with totally transcendental P'_φ, and values $\mathrm{RS}(P'_\varphi) = \infty$ with non-totally transcendental P'_φ, for $\varphi \in \Phi$, equals $Y \cup \{\infty\}$).*

Funding: This research was partially supported by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08855544), and the program of fundamental scientific researches of the SB RAS No. I.1.1, project No. 0314-2019-0002.

Keywords: formula, property, family of theories, abelian group

2010 Mathematics Subject Classification: 03C30, 03C15, 03C50, 20K45

References

[1] Sudoplatov S.V. Closures and generating sets related to combinations of structures, *Bulletin of Irkutsk State University. Series "Mathematics"*, **16** (2016), 131–144.

[2] Sudoplatov S.V. Ranks for families of theories and their spectra, arXiv:1901.08464v1 [math.LO], 2019.

[3] Poizat B. *Groupes Stables*, Nur Al-Mantiq Wal-Marifah, Villeurbanne (1987).

[4] Truss J.K. Generic Automorphisms of Homogeneous Structures, *Proceedings of the London Mathematical Society*, **65**:3 (1992), 121–141.

[5] Tent K., Ziegler M. *A Course in Model Theory*, (Lecture Notes in Logic. No. 40, Cambridge University Press, Cambridge (2012).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ON AXIOMATIZABILITY OF THE CLASS OF SUBDIRECTLY IRREDUCIBLE ACTS OVER A COMMUTATIVE MONOID

A.A. STEPANOVA[a], E.L. EFREMOV[b]

Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia
[a]stepltd@mail.ru, [b]efremov-el@mail.ru

In this work we consider the questions of axiomatizability for the classes of subdirectly irreducible acts over a commutative monoid. The same questions for the classes of regular, free, projective and (strongly, weakly) flat acts are considered in [1–4]. In [5] a description of Abelian groups, a class of subdirectly irreducible acts over which is axiomatizable, is obtained.

A class of L-structures $\mathcal{K}$ for a first order language L is *axiomatisable* if there is a set of sentences Π in L such that an L-structure $\mathcal{A}$ lies in $\mathcal{K}$ if and only if every sentence in Π is true in $\mathcal{A}$.

Let S be a monoid with identity 1, $L_S = \{s^{(1)} \mid s \in S\}$. An L-structure ${}_SA = \langle A; L_S\rangle$ is called *a (left) act over S* whenever $s_1(s_2a) = (s_1s_2)a$ and $1a = a$ for all $a \in A$, $s_1, s_2 \in S$. An act ${}_SA$ is called *subdirectly irreducible* if $\bigcap\{\rho_i \mid \rho_i \neq \Delta, i \in I\} \neq \Delta$ for every family of congruences ρ_i on ${}_SA$ where Δ is zero congruence on ${}_SA$. Denote by $SIr(S)$ the class of subdirectly irreducible acts over a monoid S.

Remark. [6] Every subdirectly irreducible act ${}_SA$ has the smallest nontrivial subact of ${}_SA$ with respect to inclusion. Denote this subact by $\ker {}_SA$.

Theorem. *Let S be a commutative monoid. If $SIr(S)$ is axiomatizable class then there exists $n \in \omega$ such that $|\ker {}_SA| \leqslant n$ for all ${}_SA \in SIr(S)$.*

Funding: Supported by RF Ministry of Education and Science (Suppl. Agreement No. 075-02-2020-1482-1 of 21.04.2020).

Key words: subdirectly irreducible act, axiomatizability.

References

[1] Gould V. Axiomatisability problems for S-systems, *J. London Math. Soc.*, **35** (1987), 193–201.

[2] Stepanova A.A. Axiomatizability and completeness of some classes of S-polygons, *Algebra and Logic*, **3**:5 (1991), 379–388.

[3] Stepanova A.A. Axiomatizability and model completeness of classes of regular polygons, *Sib. Math. J.*, **35**:1 (1994), 181–193.

[4] Bulman-Fleming S., Gould V. Axiomatisability of weakly flat, flat and projective acts, *Communications in Algebra*, **30** (2002), 5575–5593.

[5] Stepanova A.A., Ptakhov D.O. Axiomatizability of the class of subdirectly irreducible acts over an Abelian group, *Algebra and Logic*, **59**:5 (2020), 395–403.

[6] Kozhukhov I.B., Mikhalev A.V. Acts over semigroups, *Fundamental and Applied Mathematics*, **23**:2 (2020), 81–140.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ON FORMULAS AND PROPERTIES FOR FAMILIES OF THEORIES

Sergey SUDOPLATOV[1,a]

[1] *Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*
E-mail: [a]sudoplat@math.nsc.ru

We study links between formulas and arbitrary properties for families of structures, families of theories and their E-closures [1].

Definition. Let Σ be a language, $\varphi \rightleftharpoons \varphi(\overline{x})$ be a formula in $F(\Sigma)$, P_s be a subclass of the class $K(\Sigma)$ of all structures $\mathcal{A}$ in the language Σ. We say that $\varphi(\overline{x})$ *partially* (respectively, *totally*) *satisfies* P_s, denoted by $\varphi \rhd_{\rm ps} P_s$ or $\varphi \rhd^{\exists}_s P_s$ ($\varphi \rhd_{\rm ts} P_s$ or $\varphi \rhd^{\forall}_s P_s$), if there are $\mathcal{A} \in P_s$ and $\overline{a} \in A$ (for any $\mathcal{A} \in P_s$ there is $\overline{a} \in A$) such that $\mathcal{A} \models \varphi(\overline{a})$. If $P_{\rm is}$ is a subclass of the class

ITK(Σ) of isomorphism types for the class $K(\Sigma)$ then we say that $\varphi(\overline{x})$ *partially* (respectively, *totally*) *satisfies* $P_{\rm its}$, denoted by $\varphi \rhd_{\rm pits} P_{\rm its}$ or $\varphi \rhd^{\exists}_{\rm its} P_{\rm its}$ ($\varphi \rhd_{\rm tits} P_{\rm its}$ or $\varphi \rhd^{\forall}_{\rm its} P_{\rm its}$) if $\varphi \rhd_{\rm ps} P_s$ ($\varphi \rhd_{\rm ts} P_s$, where P_s consists of all structures whose isomorphism types belong to $P_{\rm its}$. If P_t is a subset of the set $\mathcal{T}_\Sigma$ of all complete theories in the language Σ then we say that $\varphi(\overline{x})$ *partially* (respectively, *totally*) *satisfies* P_t, denoted by $\varphi \rhd_{\rm pt} P_t$ or $\varphi \rhd^{\exists}_t P_t$ ($\varphi \rhd_{\rm tt} P_t$ or $\varphi \rhd^{\forall}_t P_t$), if there are $T \in P_t$, $\mathcal{M} \models T$, and $\overline{a} \in M$ (for any $T \in P_t$ there are $\mathcal{M} \models T$ and $\overline{a} \in M$) such that $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a})$.

For a property P_s we denote by ITK(P_s) the class of isomorphism types for structures in P_s, and by Th(P_s) the set $\{T \in \mathcal{T}_\Sigma \mid \mathcal{A} \models T$ for some $\mathcal{A} \in P_s\}$. For a property $P_{\rm its}$ we denote by $K(P_{\rm its})$ the class of all structures whose isomorphism types are represented in $P_{\rm its}$, and by Th$(P_{\rm its})$ the set Th$(K(P_{\rm its}))$. For a property P_t we denote by $K(P_t)$ the class of all models of theories in P_t, and by ITK(P_t) the class ITK$(K(P_t))$.

Proposition. *For any formula* $\varphi \in F(\Sigma)$ *and properties* P_s, $P_{\rm its}$, P_t *the following conditions hold:* (1) $\varphi \rhd_{\rm ps} P_s$ *iff* $\varphi \rhd_{\rm pits} {\rm ITK}(P_s)$, *and iff* $\varphi \rhd_{\rm pt} {\rm Th}(P_s)$; (2) $\varphi \rhd_{\rm ts} P_s$ *iff* $\varphi \rhd_{\rm tits} {\rm ITK}(P_s)$, *and iff* $\varphi \rhd_{\rm tt} {\rm Th}(P_s)$; (3) $\varphi \rhd_{\rm pits} P_{\rm its}$ *iff* $\varphi \rhd_{\rm ps} K(P_{\rm its})$, *and iff* $\varphi \rhd_{\rm pt} {\rm Th}(P_{\rm its})$; (4) $\varphi \rhd_{\rm tits} P_{\rm its}$ *iff* $\varphi \rhd_{\rm ts} K(P_{\rm its})$, *and iff* $\varphi \rhd_{\rm tt} {\rm Th}(P_{\rm its})$; (5) $\varphi \rhd_{\rm pt} P_t$ *iff* $\varphi \rhd_{\rm ps} K(P_t)$, *and iff* $\varphi \rhd_{\rm pits} {\rm ITK}(P_t)$; (6) $\varphi \rhd_{\rm tt} P_t$ *iff* $\varphi \rhd_{\rm ts} K(P_t)$, *and iff* $\varphi \rhd_{\rm tits} {\rm ITK}(P_t)$.

In the items (3) *and* (4) *the class* $K(P_{\rm its})$ *can be replaced by a subclass* K' *such that* ${\rm ITK}(K') = P_{\rm its}$. *Similarly, in the items* (5) *and* (6) *the class* $K(P_t)$ *can be replaced by a subclass* K' *such that* ${\rm Th}(K') = P_t$, *and independently* ${\rm ITK}(P_t)$ *can be replaced by a subclass* K'' *such that* ${\rm Th}(K'') = P_t$.

By Proposition semantic properties P_s and $P_{\rm its}$ can be naturally transformed into syntactic ones P_t, and vice versa. It means that natural model-theoretic properties such as ω-categoricity, stability, simplicity etc. can be formulated both for theories, for structures and for their isomorphism types. The links between $\rhd$-relations which pointed out in Proposition allow to reduce our consideration to the relations $\rhd_{\rm pt}$ and $\rhd_{\rm tt}$. Besides, for the simplicity we will principally consider sentences φ instead of formulas in general. Reductions of formulas $\psi(\overline{x})$ to sentences use the operators $\psi(\overline{x}) \mapsto \forall \overline{x}\, \psi(\overline{x})$ and $\psi(\overline{x}) \mapsto \exists \overline{x}\, \psi(\overline{x})$.

Theorem 1. *For any sentence* $\varphi \in {\rm Sent}(\Sigma)$ *and a property* $P_t \subseteq \mathcal{T}_\Sigma$ *the following conditions are equivalent:* (1) $\varphi \rhd_{\rm pt} P_t$, (2) $\varphi \rhd_{\rm pt} {\rm Cl}_E(P_t)$, (3) $\varphi \rhd_{\rm pt} P'_t$ *for any/some* P'_t *with* ${\rm Cl}_E(P'_t) = {\rm Cl}_E(P_t)$.

Theorem 2. *For any sentence* $\varphi \in {\rm Sent}(\Sigma)$ *and a property* $P_t \subseteq \mathcal{T}_\Sigma$ *the following conditions are equivalent:* (1) $\varphi \rhd_{\rm tt} P_t$, (2) $\varphi \rhd_{\rm tt} {\rm Cl}_E(P_t)$, (3) $\varphi \rhd_{\rm tt} P'_t$ *for any/some* P'_t *with* ${\rm Cl}_E(P'_t) = {\rm Cl}_E(P_t)$.

Corollary 1. (1) *For any properties* $P_1, P_2 \subseteq \mathcal{T}_\Sigma$ *the following conditions hold:* (1) *there exists* $\varphi \in {\rm Sent}(\Sigma)$ *such that* $\varphi \rhd_{\rm pt} P_1$ *and* $\neg\varphi \rhd_{\rm pt} P_2$ *iff* P_1 *and* P_2 *are nonempty and* $|P_1 \cup P_2| \geq 2$; *in particular, there exists* $\varphi \in {\rm Sent}(\Sigma)$ *such that* $\varphi \rhd_{\rm pt} P_1$ *and* $\neg\varphi \rhd_{\rm pt} P_1$ *iff* $|P_1| \geq 2$; (2) *there exists* $\varphi \in {\rm Sent}(\Sigma)$ *such that* $\varphi \rhd_{\rm tt} P_1$ *and* $\neg\varphi \rhd_{\rm tt} P_2$ *iff* ${\rm Cl}_E(P_1) \cap {\rm Cl}_E(P_2) = \emptyset$.

Corollary 2. *For any nonempty property* $P_t \subseteq \mathcal{T}_\Sigma$ *the following conditions hold:* (1) *the set* $\bigcap P_t$ *forms a filter* $\bigcap P_t/\!\equiv$ *on* $\{\equiv(\varphi) \mid \varphi \in {\rm Sent}(\Sigma)\}$ *with respect to* $\vdash$; (2) *the filter* $\bigcap P_t/\!\equiv$ *is principal iff* $\bigcap P_t$ *is forced by some its sentence, i.e.,* $\bigcap P_t$ *is a finitely axiomatizable theory, which is incomplete for* $|P_t| \geq 2$; (3) *the filter* $\bigcap P_t/\!\equiv$ *is an ultrafilter iff* P_t *is a singleton.*

Funding: This research was partially supported by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08855544), and the program of fundamental scientific researches of the SB RAS No. I.1.1, project No. 0314-2019-0002.

Keywords: formula, property, family of theories

2010 Mathematics Subject Classification: 03C30, 03C15, 03C50

References

[1] Sudoplatov S.V. Closures and generating sets related to combinations of structures, *Bulletin of Irkutsk State University. Series "Mathematics"*, **16** (2016), 131–144.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ON SPECIAL RELATIONS FOR FORMULAS AND FAMILIES OF THEORIES

Sergey SUDOPLATOV[1,a]

[1] *Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*
E-mail: [a]*sudoplat@math.nsc.ru*

We study special relations for formulas and families of theories producing links with respect to equivalence relations and possibilities to connect definable sets and theories in various languages.

Definition. Let $F(\Sigma)$ be the set of all formulas in a language Σ, V be an infinite set of variables, V^* be the set of all tuples $\overline{x} \in V^n$, $n \in \omega$. A ternary relation $E \subseteq F(\Sigma) \times F(\Sigma) \times V^*$ is called *special* (for $F(\Sigma)$) if for each $\overline{x} \in V^*$, $E_{\overline{x}} = \{(\varphi, \psi) \mid (\varphi, \psi, \overline{x}) \in E\}$ is an equivalence relation on the set $X \subset F(\Sigma)$ consisting of all formulas φ whose each free variable belongs to $\overline{x}$.

We denote by $\mathrm{SR}(\Sigma)$ the family of all special relations for $F(\Sigma)$.

The special relation $E \in \mathrm{SR}(\Sigma)$ is called *coordinated* if the relation $E^* = \{(\varphi, \psi) \mid (\varphi, \psi, \overline{x}) \in E$ for some $\overline{x}\}$ is an equivalence relation.

A special relation $E \in \mathrm{SR}(\Sigma)$ is called *upward directed* if $E_{\overline{x}} \cup E_{\overline{y}} \subseteq E_{\overline{x}\hat{\ }\overline{y}}$ for any $\overline{x}, \overline{y} \in V^*$.

A special relation $E \in \mathrm{SR}(\Sigma)$ is called *elementary* if there exists a consistent theory T of given language Σ such that $E = \{(\varphi, \psi, \overline{x}) \mid T \vdash \forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x}))\}$.

Here the relation E (respectively, E^*) is called the *special* (*equivalence*) *relation for* T.

The set of all elementary special relations $E \in \mathrm{SR}(\Sigma)$ is denoted by $\mathrm{ESR}(\Sigma)$.

By the definition any elementary special relation $E \in \mathrm{ESR}(\Sigma)$ for T is upward directed, so it is coordinated, and the relation E^* is the equivalence relation $\equiv_T$ modulo T, where for any $\overline{x} \in V^*$, $E_{\overline{x}}$ is the restriction of $\equiv_T$ to the set of formulas $\varphi(\overline{x})$.

Any relation $E \in \mathrm{ESR}(\Sigma)$ uniquely defines a theory $T(E) = T$, and conversely any consistent theory T uniquely defines an elementary special relation E with $E^* = \equiv_T$. Moreover, both $T(E)$ and $\equiv_T$ are uniquely defined by the E^*-class $E^*(1)$ containing identically true formulas. Therefore there are one-to-one correspondences between the class EE of elementary equivalence relations E^*, the class $\mathcal{T}$ of consistent theories $T = T(E)$, and the class EE(1) consisting of the E^*-classes $E^*(1)$. These correspondences are denoted by $\mathrm{EE} \to \mathcal{T}$, $\mathrm{EE} \to \mathrm{EE}(1)$. Additionally we obtain correspondences $\mathcal{T} \to \mathrm{EE}$, $\mathrm{EE}(1) \to \mathrm{EE}$, $\mathcal{T} \to \mathrm{EE}(1)$, $\mathrm{EE}(1) \to \mathcal{T}$.

Any elementary special relation E, for a theory $T = T(E)$, produces an appropriate Lindenbaum–Tarski algebra defined by the partial order $\leq$ in the following way: for equivalence classes $\equiv_T(\varphi)$ and $\equiv_T(\psi)$, where $\varphi, \psi \in F(\Sigma)$,

$$\equiv_T(\varphi) \leq \equiv_T(\psi) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi, \varphi) \in E^*.$$

We denote this algebra by $\mathrm{LT}(E)$ and by $\mathrm{LT}(T)$, and the class of these algebras by $\mathcal{LT}$.

The algebras in $\mathcal{LT}$ are connected with theories in $\mathcal{T}$ by the one-to-one correspondences $\mathcal{LT} \to \mathcal{T}$ and $\mathcal{T} \to \mathcal{LT}$ with the rules $\mathrm{LT}(T) \mapsto T$ and $T \mapsto \mathrm{LT}(T)$.

Homomorphisms between algebras in $\mathcal{LT}$ induce by these correspondences homomorphisms between elements in $\mathcal{T}$, in EE, and in EE(1). Therefore we obtain four categories $\mathcal{LT}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{EE}$, $\mathcal{EE}(1)$, whose morphisms are homomorphisms.

Theorem. *The categories* $\mathcal{LT}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{EE}$, $\mathcal{EE}(1)$ *are connected by functors* $\alpha \to \beta$, *where* $\alpha, \beta \in \{\mathcal{LT}, \mathcal{T}, \mathcal{EE}, \mathcal{EE}(1)\}$.

The considerations above produce both transformations of the rank RS [1] for a general case using appropriate equivalence relations on sets of formulas as well as a general approach for a hierarchy of links between definable relations [2].

Funding: This research was partially supported by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08855497), and the program of fundamental scientific researches of the SB RAS No. I.1.1, project No. 0314-2019-0002.

Keywords: special relation, formula, family of theories

2010 Mathematics Subject Classification: 03C30, 03C15, 03C50

References

[1] Sudoplatov S.V. Ranks for families of theories and their spectra, arXiv:1901.08464v1 [math.LO], 2019.

[2] Morozov A.S., Tussupov D.A. Minimal predicates for Δ-definability, *Algebra and Logic*, **59**:4 (2020), 328–340.

— ⋇ ⋇ ⋇ —

TWO-DIMENSIONAL LEFT-WEAK LEIBNIZ ALGEBRAS

K.M. TULENBAEV[1,a], A.K. KUNANBAYEV[2,b]

[1] *Suleyman Demirel University, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*kaysart1@mail.ru*, [b]*kunanbayev@math.kz*

A nonassociative algebra A over a field K is called a Left-weak Leibniz algebras if it satisfies the following identity: $(t_1t_2 - t_2t_1)t_3 = 2t_1(t_2t_3) - 2t_2(t_1t_3)$.

Left-weak Leibniz algebras were introduced by A. S. Dzhumadil'daev in [1].

Theorem 1. $dimA^2 = 1$, $A = lin < e_1, e_2 >$

$e_1e_1 = \alpha e_1$
$e_1e_2 = \sqrt{\alpha \cdot \theta}e_1$
$e_2e_1 = \sqrt{\alpha \cdot \theta}e_1$
$e_2e_2 = \theta e_1$

Remark. Algebra $A(\alpha, \theta)$ must be commutative and associative.

Theorem 2. $dimA^2 = 2$, $A = lin < e_1, e_2 >$

$e_1e_1 = \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2$
$e_1e_2 = \beta_1e_1 + \beta_2e_2$
$e_2e_1 = \gamma_1e_1 + \gamma_2e_2$
$e_2e_2 = \theta_1e_1 + \theta_2e_2$

We have 3-parametric algebra $A(\alpha_2, \beta_2, \theta_1)$ $\beta_1 = \gamma_2 = 0$ and $\gamma_1 = -2\theta_1$. and 4-parametric algebra $A(\beta_1, \gamma_1, \theta_1, \theta_2)$

$\alpha_1 = \frac{-\beta_2\gamma_1+\gamma_2\gamma_1+2\theta_2\beta_1-2\beta_1\gamma_1-2\beta_2\theta_1}{\beta_1-\gamma_1-2\theta_1}$
$\alpha_2 = \frac{-\beta_2\gamma_2+\gamma_2\gamma_2-2\beta_1\gamma_2}{\beta_1-\gamma_1-2\theta_1}$
$\beta_2 = \frac{\gamma_2\theta_1+2\theta_1\alpha_1+2\beta_1\theta_2-\beta_1*\beta_1-\beta_1\gamma_1}{3\theta_1}$
$\gamma_2 = 3(5\beta_1 - 3\theta_1 - \gamma_1 + \theta_2)^{-1}(\theta_1\alpha_2 + (\gamma_1 - \theta_2 - \beta_1) * (2\theta_1\alpha_1 + 2\theta_2\beta_1 - \beta_1\beta_1 - \beta_1\gamma_1)(\theta_1)^{-1})$

Funding: The first author is supported by the MES RK grant AP08855944.

Keywords: Nonassociative algebras, Leibniz algebras.

2010 Mathematics Subject Classification: 16R10, 17A50, 17A30, 17D25, 17C50

References

[1] A. S. Dzhumadil'daev Associative-admissible algebras, *Annual International April Mathematical Conference Thesis*, (2020), 13–14

— ⋇ ⋇ ⋇ —

CLASSIFICATION OF FINITE-DIMENSIONAL REVERSE ASSOCIATIVE ALGEBRAS

K.M. TULENBAEV[1,a], S.D. NURZHAUOV[2,b]

[1] *Suleyman Demirel University, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*kaysart1@mail.ru,* [b]*nurzhauov@math.kz*

A nonassociative algebra A over a field K is called a Reverse-associative algebras if it satisfies the following identity: $(t_3t_2)t_1 = t_1(t_2t_3)$.

Reverse-associative algebras were introduced by A. S. Dzhumadil'daev in [1].

Theorem 1. $A^2 = A^+ + A^-$. *Intersection* $A^+ \bigcap A^- \subseteq Z(A)$

Remark. Any two-dimensional algebra must be commutative and associative or a Lie algebra.

Theorem 2. *dim* $A^2 = m$, *dim* $A^+ \bigcap A^- = t$, A^+ *and* A^- *are invariants of n-dimensional Reverse-associative algebra A*

Funding: The first author is supported by the MES RK grant AP08855944.

Keywords: Nonassociative algebras, Reverse-associative algebras.

2010 Mathematics Subject Classification: 16R10, 17A50, 17A30, 17D25, 17C50

References

[1] A. S. Dzhumadil'daev Associative-admissible algebras, *Annual International April Mathematical Conference Thesis*, (2020), 13–14

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ON TRIVIALITY OF DEFINABLE CLOSURE IN HRUSHOVSKI'S STRONGLY MINIMAL SETS

Viktor VERBOVSKIY[1,a],

[1] *Satbayev University, Almaty, Kazakhstan*
[1] *Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*viktor.verbovskiy@gmail.com,*

E. Hrushovksi constructed new strongly minimal sets refuting B/ Zilber's trichotomy conjecture. In order to make this construction he introduced a class K_0 of finite $\mathcal{L}$-structures for a relational vocabulary $\mathcal{L}$ along with a notion of strong substructure which yields a generic structure that is a strongly minimal set D. Since that time a series of modifications by various model theorists were investigated.

Recall that a pair of two disjoint sets A and B is called a *good pair* if $B \le A \cup B$, $\delta(B) = \delta(A \cup B)$, for any proper non-empty subset C of A it holds that $\delta(B) < \delta(C \cup B)$ and each element in B is in some relation with some element in A. Here the predimension $\delta(A)$ is defined as $|A| - r(A)$, where $r(A)$ is the number of tuples (up to permutations) of elements of A which satisfies an atomic relation from $\mathcal{L}$ (excluding equality). As usual, the dimension $d(A, M)$ is defined as $\inf\{\delta(C) : A \subseteq C \subseteq M\}$. When M is the generic model, we omit M and simply write $d(A)$.

Then E. Hrushovski defined a function μ from the set of all good pairs to the set of naturals numbers which satisfies the condition $\mu(A, B) \ge \delta(B)$ for any good pair A and B.

The following results are joint with John Baldwin. Below let $I = \{a_1, \dots, a_n\}$ be independent, that is $d(I) = n$ and $n \ge 2$. We define $x \in \mathrm{dcl}*(I)$ as $x \in \mathrm{dcl}(I)$ but $x \notin \mathrm{dcl}(U)$ for any proper subset U of I.

Theorem *For any Hrushoski's strongly minimal example if $\mu(B, A) \geq 3$ for any good pair (B, A) with $\delta(B) = 2$, then $\mathrm{dcl}^*(I) = \emptyset$. As a corollary we obtain that $\mathrm{dcl}(I) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{dcl}(a_i)$.*

Funding: The authors were supported by the grant AP09259295 of SC of the MES of RK.

Keywords: function, stability, strongly minimal structure, definable closure

2010 Mathematics Subject Classification: 03C45, 03C68, 03C30

— ⁂ ⁂ ⁂ —

DISTRIBUTIVITY OF LATTICES OF SUBVARIETIES OF VARIETIES OF NOVIKOV ALGEBRAS

Bekzat K. ZHAKHAYEV[1,a] Aiken KAZIN[2,b]

[1,2] *Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan*
e-mail: [a]bekzat22@hotmail.com
e-mail: [b]aikenkazin@gmail.com

An algebra with identities

$$(a, b, c) = (a, c, b), \quad a(bc) = b(ac)$$

where $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ is associator, is called *Novikov.* For more details see [1], [2].

In [3] Bokut formed the following question: Describe (in terms of identities) varieties of rings (respectively algebras) with a distributive lattice of subvarieties.

In [4] Ananin and Kemer described in terms of identities varieties of associative algebras over a field K of characteristic 0.

In this work, we are investigated Bokut's question for varieties of Novikov algebras.

Theorem. Let $\mathcal{N}$ *be a variety of Novikov algebras over a field K of characteristic zero. The lattice of subvarieties of variety $\mathcal{N}$ is distributive if and only if for some $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$, $((\alpha, \beta) \neq (0, 0), (\gamma, \delta) \neq (0, 0))$ all algebras in $\mathcal{N}$ satisfy the following identities*

$$\alpha(aa)a + \beta a(aa) = 0,$$

$$\gamma[a, b]a + \delta a[a, b] = 0,$$

where $[x, y] = xy - yx$ is commutator.

Funding: The author was supported by the grant No. AP08053036 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: Novikov algebra, variety of algebras, lattice of subvarieties

2010 Mathematics Subject Classification: 17D99, 20C30

References

[1] Dzhumadil'daev A.S., Löfwall C. Trees, free right-symmetric algebras, free Novikov algebras and identities *Homology, Homotopy and Applications*, **V. 4(2)** (2002), 165–190.

[2] Dzhumadil'daev A.S., Ismailov N.A. S_n- and GL_n- modules structures on free Novikov Algebras *Journal of Algebra*, **V. 416** (2014), 287–313.

[3] Dniestr Notebook: Unsolved Problems in the Theory of Rings and Modules, Mathematics Institute, Russian Academy of Science Siberian Branch, Novosibirsk, 1976 (in Russian)

[4] Ananin A.Z., Kemer A.R. Varieties of associative algebras whose lattices of subvarieties are distributive *Siberian Math. J.*, **V. 17** (1976), 723 – 730.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

3 Математическое моделирование и уравнения математической физики

Руководители: профессор, д.ф.-.м.н., академик МАНЕ Алексеева Людмила Алексеевна,
профессор, д.ф.-.м.н., академик НАН РК Харин Станислав Николаевич

Секретарь: Курманов Ергали Бержигитович.

АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РАЗВИТИЯ ЭПИДЕМИИ

Анель АБДИБЕКОВА[1,a]

[1] *Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]derivativeofr@gmail.com

В связи с развитием пандемии COVID-19 представляет особый интерес исследование математических моделей развития эпидемий. Основная цель настоящей работы заключается в качественном и количественном анализе моделей SIR и SEIRD с целью выявления степени их соответствия фактическому ходу развития эпидемии.

Модель SIR представляет собой систему трех дифференциальных уравнений:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\beta SI, \ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \beta SI - \gamma I, \ \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \gamma I$$

с соответствующими начальными условиями, где $S(t)$ – количество восприимчивых, $I(t)$ – количество инфицированных, $R(t)$ – количество выздоровевших,
β – вероятность получения болезни в случае контакта восприимчивого индивидуума с инфицированным, γ – скорость выздоровления, N – общая численность населения.

Из качественного анализа системы следует, что общая численность населения со временем не меняется, количество восприимчивых индивидов монотонно убывает, выздоровевших Џ возрастает, а заболевших Џ меняется не монотонно. Также отметим, что число инфицированных стремится к нулю, откуда следует, что эпидемия завершается.

Численный анализ показал, что наиболее эффективный способ борьбы с распространением эпидемии, является снижение параметра интерпретирующего вероятность контакта инфицированных и восприимчивых индивидов. Следует подчеркнуть,что данные полученные в ходе численного анализа, согласуются с предсказаниями качественного анализа.

Минусом модели является то, что из-за своей простоты, не учитывает такие параметры, как инкубационный период и смертность, вследствие чего мы переходим к более точной модели SEIRD, которая выражена следующим набором дифференциальных уравнений:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\beta SI, \ \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \beta SI - \alpha E - \mu E, \ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \alpha E - \gamma I - \mu I,$$

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \gamma I, \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = \ \mu I + \mu E$$

с соответствующими начальными условиями, где $E(t)$ – количество госпитализированных индивидуумов, $D(t)$ – летальные случаи заболевания среди населения, μ – уровень смертности, α – величина, обратная среднему инкубационному периоду заболевания.

Из качественного анализа системы следует, что общая численность населения со временем не меняется, наблюдается интенсивный рост (рост инфицированных и госпитализированных), снижение роста эпидемии (рост госпитализированных, но сокращение инфицированных), затухание эпидемии (монотонное убывание этих характеристик). Главным выводом является то, что в равновесии число инфицированных равно нулю, откуда следует, что эпидемия завершается. Используя оценки параметров, полученные в ходе количественного анализа модели на разных этапах эпидемического процесса, стоит отметить, что при определенном сочетании параметров присутствуют не все этапы, представленные в количественном анализе.

Проанализировав результат, приходим к выводу, что рассматриваемая модель не учитывает факторы, присущие эпидемии большого масштаба. В дальнейших исследованиях стоит учесть, во - первых, что для практического применения результатов требуется настраивать параметры модели на основе имеющейся информации (решение обратной задачи), во - вторых, в силу большого роста эпидемии, необходим учет случайных величин (переход к стохастической модели), также необходимо рассмотрение ограниченности времени нахождения в группах больных и контактных, что будет являться главным фактором в будущей модели.

— ⁎ ⁎ ⁎ —

БИКВАТЕРНИОННАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРО-ГРАВИМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ. БИКВАТЕРНИОНЫ ФОТОНОВ И АТОМОВ

Л.А. АЛЕКСЕЕВА

Институт математики и математического моделирования , Алматы, Казахстан
E-mail: alexeeva@math.kz

Современная ньютоновская механика базируется на трех законах, сформулированных Ньютоном для материальной точки. Исходя из них построены уравнения движения абсолютно твердого тела, механики сплошных сред. Однако реальные тела не являются материальными точками, а состоят из распределенных масс, характеризующихся гравитационной плотностью, электрическим зарядом, которые движутся (состояние покоя всегда относительное). Можно ли построить уравнения движения сплошной среды, не пользуясь изначально моделью материальной точки, которая требует дискретизации среды для построения уравнений движения? Показательным здесь является уравнение Пуассона, решения которого описывают потенциалы гравитационного или электрического поля, если в правой части уравнения стоят плотности масс или электрических зарядов соответственно. А если они движутся? Для движущихся электрических зарядов и токов возникающие электромагнитные поля описывают уравнения Максвелла. А какими будут гравитационные поля у движущихся масс?.. Вопрос открыт по сей день.

Однако у этих вопросов есть положительный ответ, если воспользоваться для описания движения более сложным математическим аппаратом, коим является дифференциальная алгебра бикватернионов [1-3]. Автором на основе этой алгебры предложены уравнения движения распределенных масс и электрических зарядов и порождаемые ими гравитационные и электромагнитные поля. Построены уравнения взаимодействия зарядов и токов и энергетические соотношения, характеризующие энергию взаимодействия [4-6]. При этом в основе модели лежат те же ньютоновские законы инерции, пропорциональности силы и ускорения, действия и противодействия, только сформулированные в терминах бикватернионных градиентов, обобщающих понятие градиента на скалярно-векторные поля.

Построенные уравнения являются бикватернионным обобщением уравнений Максвелла (ОУМ) и уравнений Дирака [7,8]. Статические решения ОУМ описывают статические гравитационные и электрические поля, скалярные потенциалы которых удовлетворяют уравнению Пуассона. Т.е. предложенная модель включает в себя известные классические уравнения математической физики и теории поля, которая объединяет гравитационное поле и электромагнитное поле в единое электро-гравимагнитное поле. При этом бикватернионный полевой аналог второго закона Ньютона помимо известных физических сил, содержит новые силы, которые предлагаются аудитории для обсуждения.

На основе этой бикватернионной модели ЭГМ поля и ЭГМ взаимодействий получено бикватернионное представление фотонов [9] и построена периодическая система элементарных атомов на основе гармонической музыкальной гаммы [10,11].

Funding: Авторы были поддержаны грантом No. AP05132272 МОН РК.

Ключевые слова:бикватернион, биволновое уравнение, уравнения Ньютона, обобщенные уравнения Максвелла-Дирака, фотон, бозон, атом

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Литература

[1] Rastall R. Quaternions in relativity, в *Review of modern physics*, 1964.

[2] Ефремов А.П. Кватернионы: алгебры, геометрии и физические теории, *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, **1**:1 (2004), 111Ц127.

[3] Alexeyeva L.A. Biquaternions algebra and its applications by solving of some theoretical physics equations, *Clifford Analysis, Clifford algebras and applications*, **7**:1 (20120, 19-39.

[4] Alexeyeva L.A. Biquaternionic model of electro-gravimagnetic field, charges and currents. Law of inertia, *Journal of modern physics*, **7**:5(2016), 435-444, doi: 10.4236/jmp.2016.75045.

[5] Alexeyeva L. A. Biquaternionic Form of Laws of Electro-Gravimagnetic Charges and Currents Interactions, *Journal of Modern Physics*, **7**:11 (2016), 1351Ц1358.
http://dx.doi.org/10.4236/jmp.2016.711121.

[6] Alexeyeva L.A. Biquaternionic model of electro-gravimagnetic fields an interactions, *Scientific federation. 2nd Global summit on physics. Plenary forum*, Paris, 26-27 September 2019, 19.

[7] Alexeyeva L.A. Maxwell equations, their hamiltonian and biquaternionic forms and properties of their solutions, *Математический журнал*, **16**:2 (2016), 25-39.

[8] Alexeyeva, L.A. Differential Algebra of Biquaternions. Dirac Equation and Its Generalized Solutions,*Progress in Analysis. Proceedings of the 8th Congress ISAAC*, Moscow, 22-27 August 2013, 153-161.

[9] Alexeyeva L.A. Ether and photons in biquaternionic presentation,*SSRG Int. Journal of Applied Physics*, **7**:1(2020), 1-7.

[10] Alexeyeva L. A Periodic system of atoms as simple gamma in biquaternionic representation, *nternational Journal of Applied Physics*, **6**:3 (2019), 74-80.
DOI: 10.14445/23500301/IJAP-V6I3P112

[11] Alexeyeva L.A. Periodic system of atoms as simple gamma in biquaternionic representation , S*cientific federation. 2nd International Conference on Quantum Mechanics and Nuclear Engineering. Keynote forum*, Paris, 23-24 September 2019, 56.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЦЕПНОЙ ЧЕРЫРЕХМАССОВОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПАРАМЕТРОМ

Е.Т. БОЖАНОВ[1,a], Ж.А. ТОКИБЕТОВ[2,b] С.Н. БУГАНОВА[3,]

[1] *Сатбаев Университет, Алматы, Казахстан*
[2] *Казахский Национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
[3] *Международная образовательная корпорация, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*bozhanovesbergen@gmail.com*, [b]*tokibetov@mail.ru*
svetlanabuganova7@gmail.com

При изучении гомотопической классификации эллиптических систем представляют интерес системы, зависящие от некоторого действительного параметра λ [1], [2]:

$$a_0(x)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + a_1(x)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a_2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_3(x)\frac{\partial u}{\partial x} + a_4(x)\,u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p(x;t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\varepsilon(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta(x)\frac{\partial u}{\partial x} + k(x)\,u\right] = q_k(x)\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$-\triangle u_j + \lambda\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \qquad j = 1, 2, \dots, n \tag{1}$$

Эта система при $\lambda < 1$ сильно эллиптична, при $\lambda = 1$ она вырождается и при $\lambda > 1$ она эллиптична, но не является сильно эллиптической. При $n = 2$ и $\lambda = 2$ из этой системы получается известная система Бицадзе [3]. При $\lambda \neq 1$ и $\lambda \neq 2$ в случае $n = 2$ найдем представление решений через две аналитические функции φ и ψ в виде:

$$\frac{\lambda(1-z^2)\overline{\varphi}'}{\overline{z}} + (\lambda-2)\,\varphi - \lambda\frac{\overline{\varphi}'}{z} + \psi(z)$$

Считая, что это общее уравнение из класса $\mathrm{C}^{1,\,\alpha}\left(\overline{D}\right)$, $0 < \alpha \leq 1$, в ограниченной области D. Сначала построено решение следующей краевой задачи, когда область D представляет круг $|z| < 1$: требуется найти решение системы (1), удовлетворяющей на границе Γ условиям

$$u_1 = f_1\,(t)\,,\; u_2 = f_2\,(t)\,,\quad t \in \Gamma$$

Здесь $f\,(t) = f_{1}\,(t) + if_2\,(t)\,,$ заданная на Γ функция.

Решение дается формулой

$$u_1 + iu_2 = \frac{\lambda}{\lambda-2}\;\frac{1-|z|^2}{\overline{z}}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\overline{f(t)}?t}{(1+\overline{z}t)^2} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)\overline{?t}}{\overline{t}-\overline{z}} - \frac{z}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)\overline{?t}}{t-z\overline{t}}$$

Затем задача рассматривается для любой односвязной области D с Ляпуновской границей L. Для определения $\varphi\,(z)\,,\;\psi(z)$ имеем краевые условия на окружности $|\tau| = 1$:

$$Re[-\lambda\omega(\tau)\varphi'^{(\tau)+(\lambda-2)\varphi(\tau)+\psi(\tau)}] = f_1(\tau), \tag{2}$$

$$Rei\left[-\lambda\omega\,(\tau)\,\varphi'^{(\tau)+(\lambda-2)\varphi(\tau)-\psi(\tau)}\right] = f_2\,(\tau)$$

где $z'\,(\tau)\,\omega\,(\tau) = z\,(\tau)\,,\quad \omega\,(\tau)\,,\;f_1\,(\tau)\,,\quad f_2\,(\tau) \in \mathrm{C}^{1,\,\alpha}$, причем $\overline{\psi\,(0)} = (\lambda-2)\varphi(0)$

Применив оператор Шварца S [3] к равенствам (2) при условии, что $\omega(z)$ аналитическая функция, $\psi\,(0) = (\lambda-2)\varphi(0)$ и при принятых относительно гладкости данных решение задачи (2) единственно [5], всегда существует при $\lambda \neq 1$ и $\lambda \neq 2$ и дается формулой

$$u_1 + iu_2 = S\left(\overline{f}\right) - \frac{\lambda\,(\omega\,(\overline{z}) + z)}{2\,(\lambda-2)}\overline{S\left(\overline{f}\right)'}.$$

Литература

[1] Божанов Е.Т., Ибраимкулов А.М. Динамика деформируемых систем под действием поперечных динамических нагрузок, Материалы межд. конф. Современные проблемы дифференциальных уравнений, теории операторов и космических технологий. Алматы, 2006.

[2] Божанов Е.Т., Буганова С.Н., Токибетов А.Ж. Reliability of dynamic calculation of oil mixture pumping in a four-mass chain system, taking into account the heat wave effect., *Материалы Второго Международного Джолдасбековского Симпозиума кМеханика будущегоь*, (2021)

[3] Бицадзе А.В. *Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка,Наука, Москва (1966), 203с.*

[4] Гахов Ф.Д.*Краевые задачи,Физматгиз, Москва (1963), 545с.*

[5] Янушаускас А.И. *Задача о наклонной производной теории потенциала,Наука, Новосибирск (1985), 264с.*

— ⁂ —

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ НАЧАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ И СОСТАВА ТРЕХКОМПОНЕНТНОЙ ГАЗОВОЙ СМЕСИ НА КОНЦЕНТРАЦИОННУЮ КОНВЕКЦИЮ

Айнур ЖУМАЛИ[1,a], Оксана КАРУНА[1,b]

[1] *Казахский Национальный Университет имени аль- Фараби, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]Ainura.z89@gmail.com, [b] Okskaruna@gmail.com

Исследование концентрационной конвекции в многокомпонентной газовой смеси является актуальной задачей на сегодняшний день. Исследование конвективной неустойчивости с помощью экспериментальных методов показало существенное влияние на интенсивность конвективного смешения геометрических характеристик диффузионного канала и таких параметров как давление, исходный состав газовой смеси.

При определенных ситуациях, связанных с увеличением числа компонентов газовой смеси, изменении геометрических характеристик канала, проведение экспериментов становится затруднительным и дорогостоящим. Множество существующих работ по исследованию процесса с помощью различных численных методов имеют общий характер - описываются лишь эффекты безразмерных величин, таких как число Прандтля, число Рэлея, число Грасгофа, число Льюиса на исследуемый процесс. Однако влияние начального давления и состава газовой смеси на концентрационную конвекцию мало изучено.

Целью данной работы является численное моделирование влияния начального давления и состава трехкомпонентной газовой смеси на концентрационную конвекцию на основе решения системы уравнений Навье-Стокса, уравнения неразрывности и уравнений для концентрации компонентов трехкомпонентной газовой смеси. Исследуется процесс, когда тяжелый газ и легкий газ находятся в верхней части ограниченной полости, а газ со средней массой находится в нижней части. Численные расчеты были проведены для систем $0.55Ar+0.45He\text{-}N_2$, $0.66Ar+0.34He\text{-}N_2$, $0.55CO_2+0.45He\text{-}N_2$ на равномерной прямоугольной сетке. Численное моделирование осуществляется на базе схемы D3Q19 решеточного метода Больцмана.

Проведенные расчеты показывают, что в трехкомпонентных газовых смесях при определенных начальных давлениях и составах возможно возникновение сложного массопереноса, связанного с возникновением конвективных возмущений. Полученные в данной работе численные результаты были сравнены с результатами экспериментальных исследований, и показали хорошее согласование.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP08053154 МОН РК.

Ключевые слова: концентрационная конвекция, диффузия, трехкомпонентная газовая смесь, неустойчивость, LBM.

— ⁂ —

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

О.С.ЗИКИРОВ, М.М.САГДУЛЛАЕВА

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, г. Ташкент, Узбекистагн
zikirov@yandex.ru, sagdullayevam@mail.ru

В области $D = (x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T$ рассмотрим нагруженное уравнение теплопроводности вида
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t) - \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} \tag{6}$$

где $f(x,t)$ – заданная функция.

Различные классы нагруженных уравнений рассмотрены в работах [1]–[3]. Как близкие к настоящей работе, отметим работы [3], которые посвящены исследованию некоторых классов нагруженных уравнений параболического типа.

Особенностью рассматриваемого уравнения является то, что порядок производной в нагруженном слагаемом равен порядку дифференциальной части оператора. Доказано, что рассматриваемая в работе нелокальная граничная задача является корректной.

Для уравнения (1) рассматривается следующая нелокальная задача: *Требуется найти в области D решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному*

$$u(x,t) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{7}$$

граничным

$$u_x(l,t) = \psi_1(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{8}$$

и интегральным условием

$$u(0,t) = \alpha(t)u(l,t) + \int\limits_0^t h(t,\tau)u(l,\tau)d\tau + \psi_2(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{9}$$

где $f(x,t) \in C^2(\overline{D})$; $\varphi(x) \in C^2[0,l]$; $\psi_i(t), (i=1,2)$, $\alpha(t)$, $h(t,\tau)$ – функции, непрерывные на $t \in [0,T]$, $0 \le \tau \le t$, удовлетворяющие условиям соглосования:

$$\varphi'(l) = \psi_1(0), \qquad \varphi(0) = \alpha(0)\varphi(l) + \psi_2(0).$$

Определение. *Регулярным в области D решением уравнения (1) называется действительная функция $u(x,t)$, из класса $C^{2,1}(\overline{D})$, удовлетворяющая ему в обычном смысле.*

Основным результатом данной работы является следующая теорема о разрешимости нелокальной задачи (1)–(4).

Теорема. *Пусть выполнены условия $|\alpha(t)| \le \alpha_0 < 1$, для всех $t \in [0,T]$. Тогда задача (1)–(4) имеет единственное регулярное решение.*

Литература

[1] Нахушев А. М. *Нагруженные уравнения и их приложения.* – М.: Наука. 2012, 232 с.

[2] Кожанов А. И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера.// *Дифференц. уравнения,* 2004, Т. 40, No 6. – С. 763–774.

[3] Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И. *Нагруженные уравнения – как возмущения дифференциальных уравнения.*– Алматы. Гылым. 2010, 334 с.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ВОЗДУХА В НОСОВОЙ ПОЛОСТИ ЧЕЛОВЕКА НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО И КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Алибек ИСАХОВ[1,a], Айнур МАНАПОВА[2,b]

[1] *Казахский национальный университет имени Аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
[2] *Казахстанско-Британский технический университет, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]alibek.issakhov@gmail.com, [b]manapova.a.k.math@gmail.com

Структура носовой полости человека практически исключает исследование воздушного потока в ней экспериментальными методами визуализации и диагностики потоков, поэтому в настоящее время для этой цели активно используется математическое и компьютерное моделирования, которое позволяет детально изучить структуру воздушного потока в полости носа. Была проведена тестовая задача, где рассматривается движение воздуха в носовой полости человека в трехмерном пространстве. Течения воздуха описывается системой уравнений Навье-Стокса, также в математический модель входят уравнения температуры и концентрации:

$$\begin{cases} \nabla U = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + (U\nabla)\,U = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\nabla^2 U \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (U\nabla)\,T = \frac{k}{\rho c_p}\nabla^2 T \\ \frac{\partial C}{\partial t} + (U\nabla)\,C = -D\nabla^2 C \end{cases} \tag{10}$$

где U - вектор скорости, T - температура, C - концентрация, t - время, x, y, z - пространственные координаты, ρ - плотность, k - температуропроводность, c_p - удельная теплоемкость, ν - кинематическая вязкость, D - молекулярно-диффузионный коэффицент, ∇^2 - лапласиан.

Начальные условия: $u_{t=0} = v_{t=0} = w_{t=0} = 0$ *м/с*, $T_{t=0} = 37^0C$, $C_{t=0} = 0.041$ *кг*H_2O/*м*^{2}.

Граничные условия на входе для скорости: $u = v = w = 2$ *м/с* - для нормального вдоха.

Граничные условия на входе для температуры и концентрации: $T = 25^0\ C$, $C = 0.004$ *кг*H_2O/*м*^{2}.

Граничные условия для скорости на стенках носовой полости и носовой раковины задаются ввиде условии прилипания. Граничные условия на стенках для температуры и концентрации: $T_{wall} = 37^0\ C$, $C_{wall} = 0.041$ *кг*H_2O/*м*^{2}.

Был построен перспективный 3D модель носа [1] в графическом пакете AutoCAD. Система уравнений Навье - Стокса замыкается ламинарной моделью, для связи компонентов скорости и давления применен метод SIMPLE [2-4]. Получены контуры скоростей, температуры и концентрации.

Были выявлены, что появляются вихри в близи и самой носовой раковины, температура увеличивается на 37өС из-за нагрева воздуха, также в близи раковины, из-за сужения носовой полости увеличивается влага.

Дальнейшие исследования будут направлены на лучшее моделирование схемы переноса через носовые стенки, их способность обеспечивать необходимое тепло и водяной пар во время повышенных дыхательных усилий и патологических состояний.

Ключевые слова: построение 3D модели носовой полости, система уравнений Навье-Стокса, ламинарная модель, структура течения воздуха.

Литература

[1] Naftali S., Rosenfeld M., Wolf M., Elad D. The Air-Conditioning Capacity of the Human Nose, *Annals of Biomedical Engineering*, Tel-Aviv (2004).

[2] Issakhov Al., Zhandaulet Y., Abylkassymova A., Issakhov As. A numerical simulation of air flow in the human respiratory system for various environmental conditions, *The Biology and Medical Modelling*, **18**:12 (2021), 1–12.

[3] Issakhov A., Alimbek A., Zhandaulet Y. The assessment of water pollution by chemical reaction products from the activities of industrial facilities: Numerical study, *J Clean Prod.*, (2020)

[4] Patankar S. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow: Taylor & Francis, (1980)

— ⁂⁂⁂ —

НОРМАЛЬНО-РЕГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ СВЯЗАННЫЕ С ФУНКЦИЯМИ ГУМБЕРТА И ИХ СВОЙСТВА

Аккенже ИСЕНОВА[1,a]

[1]*Актюбинский региональный университет, Актобе, Казахстан*
E-mail: [a]*akkenje_ia@mail.ru*

В данной работе даются краткие сведения о гипергеометрических рядах двух переменных Аппеля F_1-F_4 и показаны особенности предельного перехода в них. Эти функции являются источниками получения всех двадцати вырожденных гипергеометрических функций двух переменных.

Действительно, из функций Аппеля $F_1(\alpha;\beta,\beta';x,y)$ с помощью предельного перехода определяется ряд Гумберта Φ_1 [1]:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F_1\Big(\alpha;\beta,\frac{1}{\varepsilon};\gamma;x,\varepsilon y\Big)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha,m+n)(\beta,m)}{(\gamma,m+n)}\cdot\frac{x^m}{(1,m)}\cdot\frac{y^n}{(1,n)} \tag{1}$$

Теорема 1. *Вырожденная гипергеометрическая функция двух переменных* $\Phi_1(\alpha,\beta;\gamma;x,y)$ *является частным решением системы*

$$x(1-x)\cdot Z_{xx}+y(1-x)\cdot Z_{xy}+\Big[\gamma-(\alpha+\beta+1)x\Big]Z_x-\beta yZ_y-\alpha\beta Z=0,$$
$$y\cdot Z_{yy}+x\cdot Z_{xy}+(\gamma-y)Z_y-xZ_x-\alpha Z=0. \tag{2}$$

Известно, что все вырожденные системы вида (2) имеют ранги $p=1$. Поэтому, согласно методу Фробениуса-Латышевой для построения нормально-регулярного решения применяется преобразование

$$Z=\exp(\alpha_{10}x+\alpha_{01}y)U(x,y), \tag{3}$$

где α_{10} и α_{01} неопределенные постоянные, $U(x,y)$- обобщенный степенной ряд двух переменных.

С помощью преобразования (3) получаем вспомогательную систему, из которой определяются три пары неопределенных коэффициентов: I. $(\alpha_{10}=0,\alpha_{01}=0)$, II. $(\alpha_{10}=1,\alpha_{01}=0)$, III. $(\alpha_{10}=0,\alpha_{01}=1)$.

При $(\alpha_{10}=0,\alpha_{01}=0)$ присоединенная система получится в виде (2) с известным решением (1).

Вторая присоединенная система, полученная при II. $(\alpha_{10}=1,\alpha_{01}=0)$ имеет решение вида:

$$Z_4(x,y)=e^y\Phi_1\Big(\gamma-\alpha-\beta,\beta;\gamma;-x,y-x\Big)$$

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$\Phi_1\Big(\alpha,\beta;\gamma;x,y\Big)=e^y\Phi_1\Big(\gamma-\alpha-\beta,\beta;\gamma;-x,y-x\Big).$$

Первая теорема Куммера справедливо [2] и для функций Гумберта двух переменных.
Теорема 3. *Имеет место равенство*

$$e^{-y}\Phi_1\Big(\alpha,\beta;\gamma;x,y\Big)=\Phi_1\Big(\gamma-\alpha-\beta,\beta;\gamma;-x,y-x\Big).$$

Аналогичные свойства имеют и функции Гумберта Φ_2 и Φ_3.

Теорема 4. *Имеет место равенство Куммера для функции $\Phi_2(\beta,\beta';\gamma;x,y)$:*

$$e^{-x}\Phi_2(\beta,\beta';\gamma;x,y)=\Phi_2(\gamma-\beta-\beta';\beta';\gamma;-x,y-x).$$

Теорема 5. *Имеет место равенство*

$$e^{-y}\Phi_2(\beta,\beta';\gamma;x,y)=\Phi_2(\beta,\gamma-\beta-\beta';\gamma;x-y,-y).$$

Теорема 6. *Имеет место равенство*

$$\Psi_2(\alpha;\gamma,\gamma';x,y)=e^y\Big(1+\frac{\alpha}{\gamma}x-\frac{\gamma'-\alpha}{\gamma'}y+\frac{\alpha(\alpha+1-\gamma')}{\gamma\gamma'}xy+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2!}+\cdots\Big).$$

Доказаны еще ряд свойств функций Ψ_2. Эта функция находит большое применение в теории гипергеометрических функций многих переменных.

Теорема 7. *Справедливо равенство*

$$e^{-y}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha,m)(\beta,m)(\alpha',n)}{(\gamma,m+n)}\cdot\frac{x^m}{m!}\cdot\frac{y^n}{n!}=$$

$$=\Big(1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{x}{1!}+\frac{\alpha'-\gamma'}{\gamma}\frac{y}{1!}+\frac{\alpha\beta(\alpha'-1-\gamma)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{xy}{1!}+\cdots\Big).$$

Таким образом, мы убеждаемся, что применение метода Фробениуса-Латышевой к построению нормально-регулярных решений вырожденных систем, способствует выявлению ряд различных свойств функций Гумберта двух переменных.

Литература

[1] Appell P, Kampe de Feriet M.J. *Fonctions hypergeometriques et hypesperiques*, Gauthier Villars, Paris (1926).
[2] Слейтер Люси Дж. *Вырожденные гипергеометрические функции*, ВЦ АН. СССР, Москва (1966).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С КОНОРМАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

Бозор ИСЛОМОВ[1,a], Акмалжон АБДУЛЛАЕВ[2,b]

[1] *Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан*
[2] *Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, Ташкент, Узбекистан*
E-mail: [a] islomovbozor@yandex.com, [b]akmal09.07.85@mail.ru

В настоящем работе исследуется краевая задача с конормальным условием для уравнения эллиптического типа второго рода[1]

$$sgn y|y|^m u_{xx}+u_{yy}=0,\qquad -1<m<0 \tag{1}$$

Пусть D - конечная однозначная область в плоскости (x,y), ограничена кривой σ при $x>0, y>0$ с концами в точках $A(0,0), B(1,0)$ и отрезком AB $(y=0)$ оси Ox ов.

Введчм обозначения

$$J=\{(x,y):\ \ 0<x<1,\ \ y=0\},\ \ \partial D=\vec{\sigma}\cup\overline{AB},\quad 2\beta=\frac{m}{m+2},$$

приччм

$$-\frac{1}{2}<\beta<0. \tag{2}$$

В области D для уравнения (1) исследуем следующую задачу.

Задача E. Требуется найти функцию $u(x, y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x, y) \in C\left(\bar{D}\right) \cup C^1\left(D \cup \sigma \cup J\right)$ - причем u_x и u_y могут обращаться бесконечность порядка меньше чем -2β в точках $A\left(0, 0\right)$ и $B\left(1, 0\right)$;

2) $u(x, y)-$ дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1) в области D;

3) $u(x, y)-$ удовлетворяет краевым условиям

$$\left\{\delta(s)A_s[u] + \rho(s)u\right\}\big|_\sigma = \phi(s), \qquad 0 < s < l, \tag{3}$$

$$a(x)u(x, 0) + b(x)u_y(x, 0) = c(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{4}$$

где $\delta(s)$, $\rho(s)$, $\varphi(s)$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ - заданные функции, приччм

$$c(0) = 0, \tag{5}$$

$$a\left(x\right),\ b(x) \neq 0, \quad \forall x \in \bar{J} \tag{6}$$

$$\delta^2(s) + \rho^2(s) \neq 0, \quad \forall s \in [0, l], \tag{7}$$

$\delta(s), \rho(s), \varphi(s) \in C\left[0, l\right]$, $a(x), b(x) \in C\left(\overline{J}\right) \cap C^2\left(J\right)$ и

$$A_s\left[u\right] = y^m \frac{dy}{ds}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{dx}{ds}\frac{\partial u}{\partial y},$$

$\frac{dx}{ds} = -\cos(n, y)$, $\frac{dy}{ds} = \cos(n, x)$, n внешняя нормаль к кривой σ, l длина всей кривой σ, s длина дуги кривой σ, отсчитываемая от точки $B\left(1, 0\right)$.

Будем предполагать, что кривая σ удовлетворяет следующим условиям:

1) функции $x(s)$, $y(s)$, дающие параметрическое уравнение кривой σ, имеют непрерывные производные $x'(s)$, $y'(s)$, необращающиеся одновременно в нуль и имеют вторые производные, удовлетворяющие условию Гчльдера порядка $\kappa\left(0 < \kappa < 1\right)$ в промежутке $0 \leq s \leq l$;

2) в окрестности конечных точках кривая σ удовлетворяет неравенства:

$$\left|\frac{dx}{ds}\right| \leq C\, y^{m+1}(s),$$

приччм $x(l) = y(0) = 0,\ x(0) = 1,\ y(l) = 0.$

Теорема. *Если выполнены условия (2), (5), (6), (7) и*

$$\delta(s)\rho(s) \geq 0, \quad 0 \leq s \leq l, \quad \frac{a(x)}{b(x)} \leq 0,$$

то задача $\boldsymbol{E}$ *в области* D *не может иметь более одного решения.*

Единственность решения задачи **E** доказывается методом интегралов энергии, а существование методом интегральных уравнение[2,3].

Литература

[1] Islomov B., Abdullayev A.A. On a problem for an elliptic type equation of the second kind with a conormal and integral condition, *Journal Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*, **9**:3 (2018), 307–318.

[2] Смирнов М.М. *Уравнения смешанного типа*, М.: Высшая школа, (1985).

[3] Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения*, Наука, (1968).

— ⁂ —

О разрешимости нелокальной начально-краевой задачи для волнового уравнения

А. КАЛБАЕВА[1,a]

[1] *Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]*kalbaev aaydana7@gmail.com*

Нелокальные краевые задачи для параболических и гиперболических уравнений с интегральным условием на боковой границе весьма активно изучаются. Также отметим, что для нелинейных уравнений гиперболического типа вопросам существования или отсутствия глобальных решений различных задач (начальные, смешанные, различного вида нелокальные задачи, в том числе периодические) посвящено много работ. А в настоящей работе расмотрена нелокальное гиперболическое уравнения с интегральным условием и доказаны существование и единственность обобщенных решений поставленных задач.

Постановка задачи.

Рассмотрим в прямоугольнике $Q_T = (x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T$ начально краевую задачу для квазилинейного гиперболического уравнения, требуется определить функцию $u(x,t)$ которая удовлетворяет:

$$u_{tt} - \chi u_{xxt} - a u_{xx} + b|u|^{p-2}u = f(x,t), (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

начальным условиям

$$u(x,t) = 0, u_t(x,0) = 0, x \in [0,l], \tag{2}$$

и нелинейным краевым условиям

$$u_x(0,t) = \int_0^l K(0,y,t)u(y,t)^{q-1}u(y,t)\,dy, t \in [0,T], \tag{3}$$

$$u_x(1,t) = \int_0^l K(1,y,t)u(y,t)^{q-1}u(y,t)\,dy, t \in [0,T]. \tag{4}$$

Здесь $f(x,t), K(x,y,t)$ – заданные функции, χ, a, b, p, q – положительные константы.

Литература

[1] Лионс Ж. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, Москва (1972).

[2] Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений, *Дифференциальные уравнения*, **42**:9 (2006), 1166–1179.

[3] Пулькина Л.С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода, *Известия вузов. Математика*, **4** (2012), 74–83.

[4] Берикелашвили К.Г., Джохадзе О.М., Мидодашвили Б.Г., Харибегашвили С.С. О существовании и отсутствии глобальных решений первой задачи Дарбу для нелинейных волновых уравнений, *Дифференциальные уравнения*, **44**:3 (2008), 359–372.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ГУРСА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА-ЛЯВА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ МЕТОДОМ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Ш.Т. КАРИМОВ[1,a], Ш.А. ОРИПОВ[2,b]

[1] *Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан*
[2] *Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан*
E-mail: [a]shaxkarimov@gmail.com, [b]shoripov1991@gmail.com

В настоящее время в связи с проблемами геофизики, океанологии, физики атмосферы, использованием криогенных жидкостей в технике и ряда других проблем значительно возрос интерес к изучению динамики неоднородных, и в частности, стратифицированных жидкостей, которые приводят к начально-краевым и краевым задачам для неклассических уравнений математической физики. К таким неклассическим уравнениям относится уравнение Буссинеска-Лява четвертого порядка вида

$$\Delta_x u_{tt}(x,t) - u_{tt}(x,t) + \Delta_x u(x,t) = 0, \tag{1}$$

которое описывает процесс нестационарного движения вязкой стратифицированной жидкости, где Δ_x – многомерный оператор Лапласа.

Исследованию задачи Коши, смешанных и обратных задач для уравнений Буссинеска-Лява посвящен очень много работ обзор которых можно найти в монографии [1].

Данная работа посвящена изучению вопросов разрешимости в классическом смысле аналога краевой задачи Гурса для уравнения

$$L_\alpha^{\lambda,\mu}(u) \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\alpha}{x}\frac{\partial u}{\partial x} - \lambda u\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\alpha}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \mu u = f(x,t), \tag{2}$$

где α, λ, $\mu \in R$, а $f(x,t)$ –заданная функция.

Параметр α, входящее в уравнение (2), определяет порядок сингулярности уравнения и задач с ним связанных. При $\alpha = 0,\ \mu = 0$ уравнение (2) переходит в одномерное уравнение Буссинеска-Лява (1), а при $\alpha = (n-1)/2,\ \mu = 0$ мы получим сферически симметричный случай уравнения (1), причем в последнем случае переменная x выполняет роль переменной $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ в сферической системе координат.

Уравнение (2) по классификации работы [2], принадлежит гиперболическому типу. Прямые $x = const,\ t = const$ являются действительными двукратными характеристиками.

Задача G. В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < h\}$ требуется найти функцию $u(x,t) \in C^1(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (2) при $0 < \alpha < 1/2$ и краевым условиям

$$u(x,0) = \psi_1(x), \quad u_t(x,0) = \psi_2(x), \ \ 0 \le x \le l;$$
$$u(0,t) = \varphi_1(t), \quad \lim_{x\to 0} x^{2\alpha} u_x(x,t) = \varphi_2(t), \ \ 0 \le t \le h,$$

где $\psi_k(x)$, $\varphi_k(t)$, $(k = 1,2)$ – заданные гладкие функции, причем $\varphi_1(0) = \psi_1(0)$, $\psi_2(0) = {\varphi'}_1(0)$, $\varphi_2(0) = 0$.

Исследованием различных задач для одномерного общего линейного уравнения со старшей производной u_{xxtt} и с гладкими коэффициентами занимались Т.Д.Джураев, А.П.Солдатов, А.И.Кожанов, В.И.Жегалов, А.К.Уринов, А.Сопуев, М.Х.Шхануков, А.Н.Миронов, Е.А.Уткина и другие.

Использовав оператор преобразования Эрдейи-Кобера [3] и метод Римана, нами получена явная формула решения поставленной задачи. В работе построена функция Римана оператора $L_\alpha^{\lambda,\mu}(u)$, которая выражается через гипергеометрическую функцию Кампе де

Ферье. При $\alpha = 0$, $\mu = 0$ из этой функции получим функцию Римана одномерного уравнения Буссинеска-Лява.

Пользуясь полученным решением задачи Гурса и функцией Римана, можно исследовать и другие начальные, краевые и нелокальные задачи для уравнения (2).

Ключевые слова: задача Гурса, уравнение Буссинеска-Лява, оператор преобразования, метод Римана

2010 Mathematics Subject Classification: 35G15

Литература

[1] Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.Ю., Плетнер Ю.Д. *Линейные и нелинейные уравнения Соболевского типа*, Физматлит, Москва (2007).

[2] Джураев Т.Д., Сопуев А. *К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка*, ФАН, Ташкент (2000).

[3] Karimov Sh.T. Method of Solving the Cauchy Problem for One-Dimensional Polywave Equation With Singular Bessel Operator, *Russian Mathematics*, **61**:8 (2017), 22–35.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ ОДНОГО ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Ш.Т. КАРИМОВ[1,a], Х.А ЮЛБАРСОВ[2,b]

[1] *Ферганский государственный университет,Узбекистан, Фергана*
[2] *Ферганский политехнический институт, Узбекистан, Фергана*
[a]*shaxkarimov@gmail.com*, [b]*xojiakbaryulbarsov1@gmail.com*

В настоящее время в связи с проблемами передачи тепла в гетерогенной среде, влагопереноса в почвенных грунтах, нестационарного процесса фильтрации в трещиновато-пористой среде и ряда других проблем значительно возрос интерес к изучению начально-краевых и краевых задач для неклассических уравнений с частными производными. К таким неклассическим уравнениям относится уравнения псевдопараболического типа. Под псевдопараболическими уравнениями подразумевается уравнения высокого порядка с производными по времени первого порядка.

В работе Г.И.Баренблатта, Ю.П.Желтова, И.Н.Кочиной [1] получено линейное псевдопараболическое уравнение вида

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta_x u(x,t) + cu(x,t)) + \Delta_x u(x,t) = 0, \tag{1}$$

описывающее нестационарный процесс фильтрации в трещиновато-пористой среде, где Δ_x - многомерный оператор Лапласа, $c = const \in R$.

Исследованию уравнений псевдопараболического типа посвящено большое количество работ, обзор которых можно найти в работе [2].

Данная работа посвящена изучению вопросов разрешимости в классическом смысле аналога краевой задачи Гурса для уравнения

$$L_\alpha^{\lambda,\mu}(u) \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\alpha}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda^2 u\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\alpha}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \mu^2 u = f(x,t), \tag{2}$$

где $\alpha, \lambda, \mu \in R$, $f(x,t)$-заданная функция.

Параметр α, входящее в уравнение (2), определяет порядок сингулярности уравнения и задач с ним связанных. При $\alpha = 0$, $\mu = 0$ уравнение (2) переходит в одномерное уравнение Баренблатта, Желтова, Кочиной (1), а при $\alpha = (n-1)/2$, $\mu = 0$ мы получим сферически симметричный случай уравнения (1), причем в последнем случае переменная x выполняет роль переменной $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ в сферической системе координат.

Задача G. В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < h\}$ требуется найти функцию $u(x,t) \in C(\bar{\Omega})$ удовлетворяющую уравнению (2) и краевым условиям

$$u(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{3}$$

$$u(0,t) = \varphi_1(t), \quad \lim_{x\to 0} x^{2\alpha} u_x(x,t) = \varphi_2(t), \ \ 0 \le t \le h, \tag{4}$$

где $\psi(x)$, $\varphi_k(t)$, $(k = 1,2)$ - заданные гладкие функции, причем $\varphi_1(0) = \psi(0)$, $\varphi_2(0) = 0$.

Используя оператор преобразования Лаундеса [3] и метод Римана, нами получена явная формула решения поставленной задачи. В работе построена функция Римана оператора $L_{\alpha}^{\lambda,\mu}(u)$, которая выражается через гипергеометрическую функцию Кампе де Ферье. При $\alpha = 0$, $\mu = 0$ из этой функции получим функцию Римана одномерного уравнения (1).

Пользуясь полученным решением задачи Гурса и функцией Римана можно исследовать и другие начальные, краевые и нелокальные задачи для уравнения (2). Данный метод также можно применить к решению краевых задач для многомерного уравнения и уравнения высокого порядка типа (2) с многими сингулярными коэффициентами.

Ключевые слова: задача Гурса, псевдопараболическое уравнение, оператор преобразования, метод Римана.

2010 Mathematics Subject Classification: 35G15

Литература

[1] Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах, *Прикл. мат. мех.*, **24**:5 (1960).

[2] Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.Ю., Плетнер Ю.Д. *Линейные и нелинейные уравнения Соболевского типа*, Физматлит, Москва (2007)

[3] Karimov Sh.T. On some generalizations of properties of the Lowndes operator and their applications to partial differential equations of high order, *Filomat*, **32**:3 (2018), 873–883.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ МНОГОФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Н.М. КАСЫМБЕК[1,a], Д.В. ЛЕБЕДЕВ[2] Д.Ж. АХМЕД-ЗАКИ[2]

[1] *Казахский Национальный Университет имени Аль-Фараби, Алматы, Казахстан*

[2] *Astana IT University, Нур-Султан, Казахстан*

E-mail: [a]*nuryslam.qassymbek@gmail.com,*

Развитие высокопроизводительных вычислений позволяет человечеству решать важнейшие научные и прикладные задачи в различных областях. Расчет таких задач на сетках с большим количеством ячеек требует больших ресурсов. Например, суперкомпьютеры могут быть загружены задачами моделирования погоды и климата, экономических процессов, акустических задач, гидродинамики, производства медицинских препаратов, биологических исследований. Технологический прогресс в этих областях связан с тем, насколько правильно и успешно используются компьютерные вычисления.

Использование суперкомпьютеров позволяет значительно ускорить решение задач при использовании численных методов. Одна из таких задач - прогнозирование добычи нефти и газа на конкретных месторождениях. Моделирование течения многокомпонентных многофазных жидкостей (нефти и газа) в пористых средах (в нефтяных пластах) является актуальной и в то же время сложной задачей гидродинамического моделирования.

В данной работе рассматривается численное моделирование многокомпонентного многофазного течения в пористых средах[1]. Рассматриваемая модель многофазного, многокомпонентного течения в пористых средах позволяет моделировать такие современные методы добычи углеводородов, как закачка теплоносителя в нефтяной пласт, горение, закачка химических реагентов (полимер, ПАВ) и другие.

Система нелинейных уравнений, описывающая модель движения многокомпонентной многофазной жидкости, линеаризована методом Ньютона-Рафсона [2] и решена с помощью итерационного алгоритма метода обобщенных минимальных невязок (GMRES)[3,4]. Для достижения лучшей сходимости был использован предобуславливатель ILU(0)[5]. В результате, для решения данной задачи, была использована полностью неявная схема, называемая алгоритмом Newton-ILU(0)-GMRES. На основе полученного последовательного алгоритма реализован параллельный алгоритм с использованием технологии интерфейса передачи сообщений (MPI) и фрагментированный алгоритм в системе LuNA[6].

Тесты проведены на суперкомпьютере МВС-10П межведомственного суперкомпьютерного центра Российской академии наук и были проанализированы.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP09260564 МОН РК.

Ключевые слова: метод Ньютона, методы Крыловского типа, GMRES, предобуславливатель, многокомпонентное течение, система LuNA.

2010 Mathematics Subject Classification: 35F45, 65F08

Литература

[1] Chen Z. *Reservoir Simulation: mathematical techniques in oil recovery*, Society for Industrial and Applied Mathematics (2006).

[2] Chen Z. *Computational methods for multiphase flows in porous media*, Society for Industrial and Applied Mathematics (2007).

[3] Saad Y. *Iterative methods for sparse linear systems.2nd ed.*, SIAM (2003).

[4] Saad Y., Schults M. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, *SIAM J Sci Statist Comput*, **7**:3 (1986), 856–869.

[5] Mittal R.C., Al-Kurdi A.H. An efficient method for constructing an ILU preconditioner for solving large sparse nonsymmetric linear systems by the GMRES method, *Computers & Mathematics with Applications*, **185**:2 (2003), 391–403.

[6] Malyshkin, V.E., Perepelkin, V.A. LuNA Fragmented Programming System, Main Functions and Peculiarities of Run-Time Subsystem, *Proceedings of the 11th International Conference on Parallel Computing Technologies, LNCS*, (2011), 53–61.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДОБЫЧИ НЕФТИ

Е. КЕНЖЕБЕК[1,a], Т.С. ИМАНКУЛОВ[2,b] Д.Ж. АХМЕД-ЗАКИ[3,c]

[1] *Казахский Национальный Университет имени Аль-Фараби, Алматы, Казахстан*

[2] *Yessenov University, Актау, Казахстан*

[3] *Astana IT University, Нур-Султан, Казахстан*

E-mail: [a]*kenzhebekyerzhan@gmail.com,* [b]*imankulov.timur@gmail.com*

Имеются много научных работ связанных с улучшением добычи нефти с использованием методов машинного обучения. В одном из таких работ [1] авторы выясняли, что применение алгоритмов машинного обучения могут оказаться более производительными по сравнению с традиционными вычислениями на регулярной сетке. А так же в данной работе описывается подход к созданию прокси-модели [2] на основе методов машинного обучения, в частности была использована метод случайного леса. В работе [3] рассматривается алгоритмы машинного обучения для оценки коэффициента добычи нефти с использованием комбинации инженерных параметров. Для набора данных, состоявшийся из 30 параметров были применены модели линейной регрессии и метод опорных векторов. В результате, полученные данные были очень близкими к результатам перекрестной проверки. Таким образом, авторы данной работы предполагают, что рассмотренные ими методы могут использоваться для прогнозирования добычи в дальнейшем.

Данная статья была посвящена к применению методов машинного обучения для прогнозирования добычи нефти. Был получен синтетический набор данных с помощью математического моделя Баклея-Леверетта, которая используется для расчета распределения насыщенности в задачах нефтедобычи. В качестве метода машинного обучения был реализован алгоритм многомерной линейной регрессии с полиномиальными свойствами. Выбраны различные комбинации параметров задачи добычи нефти, где в качестве входных параметров для машинного обучения были взяты пористость, вязкость нефтяной фазы и абсолютная проницаемость породы. А в качестве выходного параметра был выбран значение коэффициента нефтеотдачи. Задача была реализована с использованием языка Python, которая поддерживает многие методы машинного обучения. Были протестированы разные степени полиномиальной регрессии, а также было выявлено, что для наших синтетических данных квадратичная полиномиальная модель довольно хорошо обучается и прогнозирует значение коэффициента нефтеотдачи. Для оптимизации полиномиальной регрессии была применена регуляризация вида L1, известная как метод Лассо. Для квадратичной модели полиномиальной регрессии коэффициент детерминации составляет 0.96, что является довольно хорошим результатом для тестовых данных.

Была построена искусственная нейронная сеть с одним скрытым слоем с оптимально подобранными гиперпараметрами. В качестве функции активации дял скрытого слоя была применена relu. Для предотвращения проблемы переобучения была использована функция EarlyStopping, где обучение останавливается при количестве эпох без улучшений.Коэффициент детерминации построенной нейронной сети составил 0.97, которая является немного лучше чем модель полиномиальной регрессии.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP09260564 МОН РК.

Ключевые слова: математическая модель, повышение нефтеотдачи, машинное обучение, метод регрессии, полиномиальная регрессия, нейронная сеть.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q68, 68T99

Литература

[1] Krasnov F., Glavnov N., Sitnikov A. A Machine Learning Approach to Enhanced Oil Recovery Prediction, In: *Analysis of Images, Social Networks and Texts*, Springer, Cham (2017), 164–171.

[2] Guo Z., Reynolds A.C., Zhao H. A Physics-Based Data-Driven Model for History-Matching, Prediction and Characterization of Waterflooding Performance, *SPE Reservoir Simulation Conference*, Texas, USA (2017).

[3] Aliyuda K., Howell J. Machine Learning Algorithm for Estimating Oil Recovery Factor Using a Combination of Engineering and Stratigraphic Dependent Parameters, *Interpretation*, **7**:3 (2019), 1–34.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ОЦЕНКИ СИНГУЛЯРНЫХ (s-ЧИСЕЛ) И СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО СИНГУЛЯРНОГО ОПЕРАТОРА КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА

Мусакан МУРАТБЕКОВ[1,a], Айнаш СУЛЕЙМБЕКОВА [2,b]

[1] *Таразский Региональный универститет имени М.Х.Дулати, Тараз, Казахстан*

[2] *Евразийский Национальный университет имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан*

E-mail: [a]*musahan_m@mail.ru*, [b]*suleimbekovaa@mail.ru*

В настоящей работе рассматривается линейный оператор типа Кортевега-де Фриза

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial y} + R_2(y)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + R_1(y)\frac{\partial u}{\partial x} + R_0(y)u$$

первоначально определенный на $C^{\infty}_{0,\pi}(\overline{\Omega})$, где $\overline{\Omega} = \{(x, y) : -\pi \leq x \leq \pi, -\infty < y < \infty\}$.

$C_{0,\pi}^{\infty}$ - множество, состоящее из бесконечно дифференцируемых финитных функций по переменной у и удовлетворяющих условиям:

$$u_x^{(i)}(-\pi, y) = u_x^{(i)}(\pi, y), \quad i = 0, 1, 2.$$

Относительно коэффициентов оператора L мы предположим, что функции $R_0(y), R_1(y), R_2(y)$ непрерывные функции в $R = (-\infty, \infty)$ и могут быть неограниченными функциями на бесконечности.

В работе при некоторых ограничениях на коэффициенты, помимо выше указанных условий, нами доказаны в пространстве $L_2(\Omega)$ ограниченная обратимость оператора L и наличие оценки

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|_2 + \left\|R_2(y)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right\|_2 + \left\|R_1(y)\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_2 + \|R_0(y)u\|_2 \leq C(\|Lu\|_2 + \|u\|_2),$$

где $C > 0$ - постоянное число, $\|\cdot\|_2$ норма в $L_2(\Omega)$.

Помимо выше указанных свойств оператора L в работе изучены следующие вопросы:

а) оценки сингулярных чисел (s-чисел) резольвенты оператора L;

б) оценки собственных чисел.

Funding: Авторы были поддержаны грантом No. AP08855802 МОН РК.

Ключевые слова: максимальная гладкость решений, уравнение Кортевега-де Фриза, оценки сингулярных (s-чисел) чисел.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Литература

[1] Temam R. Sur un probleme non linearie, *J. Math.Pures. Apple*, **48**:2 (1969), 159–172.

[2] Лионс Ж.Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, Москва (1972).

[3] Villanueva A. On Linearized Korteweg-de Vries Equations, *Journal of Mathematics Research*, **4**:1 (2012), 2–8.

[4] Muratbekov M.B., Muratbekov M.M. Sturm-Liouville operator with a parameter and its usage to spectrum research of some differential operators, *Complex variables and Elliptic Equations*, **64**:9 (2019), 1457–1476.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ПРИМЕНЕНИЕ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В ПРОГНОЗИРОВАНИИ УРОЖАЙНОСТИ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ КУЛЬТУР

В.И. МЯН[1,a]

[1] *Казахский национальный исследовательский технический университет имени К. И. Сатпаева, Алматы, Казахстан*

E-mail: [a]*beromyan@gmail.com,*

Применение искусственного интеллекта в прогнозировании урожайности сельскохозяйственных культур способствует улучшению качества предсказания будущего урожая. С точки зрения научной актуальности данное исследование может быть интересным, так как предлагаемая оптимальная модель прогнозирования состоит из сочетания эмпирической и прогнозной частей, что делает модель более гибкой и эффективной.

Основная идея данного исследования заключается в определении оптимального метода прогнозирования урожайности сельскохозяйственных культур с применением искусственного интеллекта.

В работе используется два подхода к решению задачи. Первый подход состоит в применении только искусственного интеллекта. Второй подход сфокусирован на использовании комбинации эмпирических формул и алгоритмов машинного обучения.

В данном исследовании искусственный интеллект относится к блоку прогнозирования, в котором для чистоты эксперимента было применено три метода машинного обучения: Алгоритм случайного леса (Random Forest algorithm), Гребневая регрессия (Ridge-Regression method) и Лассо-регрессия (Lasso-Regression method).

В качестве блока с эмпирическими формулами была использована система имитационного моделирования продукционного процесса сельскохозяйственного посева Agrotool. Программное обеспечение Agrotool специально разработано для расчета параметров развития растений, где входными данными являются природные факторы такие, как температура, количество осадков, баланс длинноволновой радиации, влагозапас почвенного слоя и другие. Следует отметить, что параметры системы Agrotool изменяются с шагом в 1 день [1], что позволяет отслеживать развитие растения в динамике, улучшая качество прогноза даже в случае различных природных катаклизмов.

Всего в исследовании было проведено 9 экспериментов, в результате которых было выявлено, что прогнозирование, основанное на комбинации эмпирического блока и метода кRidge Ц Regressionњ является самым оптимальным из рассмотренных методов.

По итогам проведенных экспериментов можно сделать вывод, что применение искусственного интеллекта упрощает задачу прогнозирования, но в то же время, использование только искусственного интеллекта не улучшает качество прогноза. Однако, модель, включающая эмпирическую базу, позволяет алгоритмам машинного обучения строить более точные предсказания.

Ключевые слова: прогнозирование урожайности, искусственный интеллект, Agrotool, Random Forest, Ridge-Regression, LASSO.

Литература

[1] R.A. Poluektov, S.M. Fintushal , I.V. Oparina , D.V. Shatskikh , V.V. Terleev & E.T. Zakharova *Agrotool Ч A system for crop simulation*, Archives of Agronomy and Soil Science (2002), 609–635.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В НАГРУЖЕННОЙ ТВЕРДОЙ ЧАСТИЦЕЙ ПОЛОСТИ МЕТОДОМ ПОГРУЖЕННЫХ ГРАНИЦ И ДИСКРЕТНО УНИФИЦИРОВАННОЙ ГАЗОВОКИНЕТИЧЕСКОЙ СХЕМОЙ

Бекзат САТЕНОВА[1,a], Аскар ХИКМЕТОВ[1,b] Даурен ЖАКЕБАЕВ[1,c]

[1] *Казахский Национальный Университет имени аль- Фараби, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]satenova.bekzat89@gmail.com, [b] Askar.Khikmetov@kaznu.kz, [c]zhakebayev@gmail.com

В последние годы естественная конвективная теплопередача в прямоугольных пространствах привлекла много внимания из-за ее широкого применения, например, в процессах охлаждения электронного оборудования, промышленных и экологических приложениях, таких как теплообменники, ядерные и химические реакторы.

В настоящей работе изучается процесс теплового взаимодействия между жидкостью и твердой частицей, где исследуется процесс естественной конвекции от горячего цилиндра, расположенного в квадратной области. Численное решение влияния плотности и температуры среды на движение твердой частицы в жидкой среде основан на решении системы уравнений Навье-Стокса, уравнения неразрывности и уравнений энергии. Метод IB-DUGKS представляет собой эффективный способ моделирования конвективных течений со сложными границами погруженной частицы. Схема DUGKS основана на методе конечных объемов, который эффективно справляется с криволинейными границами теплового потока, а метод погруженной границы IB, основанный на схеме силы прямого воздействия, обеспечивает точность условия неприлипания на твердой поверхности и является численно стабильным из-за его простоты с итерационной процедурой. В методе IB уравнения импульса и энергии для движения жидкости описывается в эйлеровой сетке, а движения твердых частиц в лагранжевой сетке. Взаимодействие между лагранжевыми и эйлеровыми переменными реализуется дискретной дельта-функцией Дирака, которая распространяет силу искаженной упругой границы на соседние узлы жидкости и интерполирует ее с локальной скоростью жидкости для обновления положения границы.

Точность и эффективность существующего метода апробированы на основе тестовой задачи естественной конвекции между горячим стационарным цилиндром и холодным внешним квадратом. Для проверки результатов также были рассчитаны влияние чисел Граскофа и Рэлея на скорость теплопередачи. Полученные результаты имеют хорошее согласование с экспериментальными и численными результатами других авторов.

Funding: Авторы были поддержаны грантом МОН РК AP09260528.

Ключевые слова: естественная конвекция, частица, метод погруженных границ,теплообмен.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

С. СЕРОВАЙСКИЙ

Казахский Национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
serovajskys@mail.ru

Задача математической физики корректна по Адамару, если она имеет единственное решение, непрерывно зависящее от параметров задачи. Иногда требуется дифференцируемость этой зависимости, т.е. *дифференциальная корректность*. Это используется, в частности, в теории оптимального управления и теории обратных задач. В теории оптимального управления параметр имеет смысл управления, и для применения методов оптимизации требуется дифференцируемость критерия оптимальности, для обоснования которой необходима дифференцируемость решения уравнения состояния по управлению. В теории обратных задач параметр системы является неизвестной величиной, которую необходимо найти исходя из информации о состоянии системы. Обратная задача сводится к минимизации невязки, выражающей отклонение состояния системы от результатов измерения. Для решения полученной задачи требуется дифференцируемость функции состояния системы относительно искомого параметра. В настоящей работе исследуется проблема дифференциальной корректности для полулинейного эллиптического уравнения.

В открытой ограниченной n-мерной области Ω рассматривается однородная задача Дирихле для уравнения

$$-\Delta u + a(x,u) = f,$$

где a – функция Каратеодори, удовлетворяющая стандартным ограничениям на монотонность, коэрцитивность и степень роста с показателем $q > 2$. Пользуясь теорией монотонных операторов установим, что задача имеет единственное решение $u = Lf$ из пространства $X = H_0^1 \cap L_q$ для любого $f \in H^{-1} + L_{q'}$, причем оператор L непрерывен.

Предположим, что функция a является непрерывно дифференцируемой по своему второму аргументу, причем соответствующая частная производная a_u удовлетворяет неравенству $|a_u(x,\varphi)| \le b(x) + c|\varphi|^{q-2}$ для любых φ и почти для всех $x \in \Omega$ где $b \in L_{q/q-2}$, $c > 0$. Из теоремы об обратной функции следует

Теорема 1. *При выполнении непрерывного вложения $H_0^1 \subset L_q$ оператор L непрерывно дифференцируем на всем пространстве Y.*

Однако имеет место следующее утверждение

Теорема 2. *В отсутствии вложения $H_0^1 \subset L_q$ существует такая точка $f \in Y$ в которой оператор L не дифференцируем по Гато.*

Итак, дифференциальная корректность задачи обусловлена вложением указанных функциональных пространств. В соответствии с теоремой вложения Соболева желаемый результат гарантирован при размерности $n = 2$ или $q \leq 2n/(n-2)$ при $n \geq 3$, т.е. при достаточно малых значений размерности n данной области и параметра q, характеризующего скорость роста нелинейного члена уравнения.

Ослабление понятия дифференциальной корректности может быть реализовано за счет ослабления понятия производной оператора. Оператор $M : Y \to X$ в точке $f \in Y$ называется $(Y_0, Y_*; X_0, X_*)$-*расширенно дифференцируемым по Гато*, если существуют такие линейные топологические пространства X_0, X_*, Y_0, Y_*, удовлетворяющие непрерывным вложениям $X \subset X_0 \subset X_*$, $Y_* \subset Y_0 \subset Y$ и такой линейный непрерывный оператор $D : Y_0 \to X_0$, что при $\sigma \to 0$ имеет место сходимость $[M(f + \sigma h) - Mf]/\sigma \to Dh$ в Y_* для всех $h \in X_*$.

Определим оператор $\Lambda(u)$ в пространстве L_q с помощью равенства $\Lambda(u)v(x) = \sqrt{a_u(x, u(x))}v(x)$ и пространство $X(u) = H_0^1 \cap \{v |\, \Lambda(u)v \in L_2\}$.

Теорема 3. *Оператор L имеет $(X(Lf)', X(Lf); H^{-1}, H_{0w}^1)$-расширенную производную D в любой точке $f \in Y$, характеризуемую равенством*

$$\int\limits_{\Omega} \mu Dh dx = \int\limits_{\Omega} p(\mu) h dx,$$

где H_{0w}^1 есть пространство H_0^1, наделенное слабой топологией, а $p(\mu)$ решение однородной задачи Дирихле для уравнения $-\Delta p(\mu) + a_u(x, u)p(\mu) = \mu$.

Итак, для рассматриваемой задачи всегда реализуется расширенная дифференциальная корректность, что может быть использовано при решении соответствующих оптимизационных и обратных задач.

— ⋇ ⋇ ⋇ —

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ТИПА КЛАУЗЕНА

Жаксылык ТАСМАМБЕТОВ[1,a]

[1]*Актюбинский региональный университет, Актобе, Казахстан*
E-mail: [a]*tasmam@rambler.ru*

Постановка задачи. Исследуется особенности построения решений вблизи особенности $(0,0)$ регулярной однородной системы, состоящей из двух дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка вида

$$\sum_{j+k=0}^{j+k=\omega+1} (r_{j,k} - \alpha_{j,k}x^h)x^j y^k p_{j,k} = 0,$$
$$\sum_{j+k=0}^{j+k=\omega+1} (t_{j,k} - \beta_{j,k}y^h)x^j y^k p_{j,k} = 0, \tag{1}$$

где $p_{0,0}(x,y) = Z(x,y)(j = 0, k = 0)$ общая неизвестная для двух уравнений системы (1); через $p_{j,k}$ обозначены различные порядки частных производных неизвестной функции $Z(x,y)$. Порядок зависит от значения ω. Если $\omega = 1$, то получим системы второго порядка, частными случаями их являются 34 системы Горна с решениями в виде гипергеометрических функций двух переменных. Когда $\omega = 2$ получим системы третьего порядка, наиболее интересными из них являются системы типа Клаузена. Исследования таких систем не получили достаточного развития.

В данной работе изучены два вида системы типа Клаузена.

Теорема 1. *Система типа Клаузена*

$$x^2(1-x)p_{30}+[1+\beta_1+\beta_2-(3+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x]xp_{20}+[\beta_1\beta_2-(1+\alpha_1+\alpha_2$$

$$+\alpha_3+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)x]p_{10}-\alpha_1\alpha_2\alpha_3p_{00}=0,$$

$$y^2(1-y)p_{03}+[1+\beta_1^{'}+\beta_2^{'}-(3+\alpha_1^{'}+\alpha_2^{'}+\alpha_3^{'})y]yp_{02}+[\beta_1^{'}\beta_2^{'}-(1+\alpha_1^{'}+\alpha_2^{'}$$

$$+\alpha_3^{'}+\alpha_1^{'}\alpha_2^{'}+\alpha_1^{'}\alpha_3^{'}+\alpha_2^{'}\alpha_3^{'})y]p_{01}-\alpha_1^{'}\alpha_2^{'}\alpha_3^{'}p_{00}=0 \tag{2}$$

имеет девять линейно-независимых частных решений в виде произведения различных функций Клаузена, одна из которых является функция Клаузена

$$Z_1(x,y) ={}_3 F_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,x){}_3F_2(\alpha_1^{'},\alpha_2^{'},\alpha_3^{'},\beta_1^{'},\beta_2^{'},y)=$$

$$=. F\begin{pmatrix}\alpha_1,\alpha_1^{'}, & \alpha_2,\alpha_2^{'}, & \alpha_3,\alpha_3^{'} & \\ & & & ,x,y\\ \beta_1,\beta_1^{'} & \beta_2,\beta_2^{'} & & \end{pmatrix}=$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_m(\alpha_1^{'})_n(\alpha_2)_m(\alpha_2^{'})_n(\alpha_3)_m(\alpha_3^{'})_n}{(\beta_1)_m(\beta_1^{'})_n(\beta_2)_m(\beta_2^{'})_n}\cdot\frac{x^m}{m!}\cdot\frac{y^n}{n!}. \tag{3}$$

Далее изучены дифференциальные свойства полученных всех частных решений.

Теорема 2. *Система гипергеометрического типа Клаузена*

$$x^2(1-x)p_{30}+xyp_{21}+[\gamma+\delta+1-(3+\beta_1+\beta_2+\beta_3)x]xp_{20}+\delta yp_{11}+$$

$$+[\gamma\delta-(1+\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_3)x]p_{10}-\beta_1\beta_2\beta_3p_{00}=0,$$

$$y^2(1-y)p_{03}+xyp_{12}+[\gamma+\delta^{'}+1-(3+\beta_1^{'}+\beta_2^{'}+\beta_3^{'})y]yp_{02}+\delta^{'}xp_{11}+$$

$$+[\gamma\delta^{'}-(1+\beta_1^{'}+\beta_2^{'}+\beta_3^{'}+\beta_1^{'}\beta_2^{'}+\beta_1^{'}\beta_3^{'}+\beta_2^{'}\beta_3^{'})y]p_{01}-\beta_1^{'}\beta_2^{'}\beta_3^{'}p_{00}=0 \tag{4}$$

вблизи регулярной особенности $(0,0)$ *имеет девять линейно-независимых частных решений в виде обобщенных степенных рядов двух переменных,при выполнении условий совместности для коэффициентов* $A_{m,n}(m,n=0,1,2,...)$ *и условий интегрируемости*

$$\triangle_1=1-a_{12}b_{21}=1\neq 0,$$

$$\triangle_2=\triangle_1^2-(a_{21}+a_{12}b_{12})(b_{12}+b_{21}a_{21})\neq 0.$$

При этом, одним из частных решений является обобщенный гипергеометрический ряд двух переменных вида (3).

Между свойствами двух систем типа Клаузена проведен сравнительный анализ и выделены их основные свойства.

Литература

[1] Appell P., Kampe de Feriet M.J. *Fonctions hypergeometriques et hypersperiques*, Gauthier Villars, Paris (1926).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ЗАДАЧА СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ТИПА ФЛОРИНА С НЕЛИНЕЙНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

Р.Н. ТУРАЕВ[1], К.Н. ТУРАЕВ[2]

[1,2] *Термезский госудадарственный университет, Термиз, Узбекистан*
E-mail: [1]*rasul.turaev@.ru*, [2]*k.turaev@.ru*

Задачи со свободной границей возникают при математическом описании тепловых процессов, связанных с изменением агрегатного состояния вещества, движения жидкости в пористой среде. Связи с этим они находят широкое применение в металлургии, при изучении процессов сварки, электронной и плазменной обработки материалов, в теории электрических контактов, в геотермии, мерзлотоведении, теории фильтрации, математической биологии, экологии, биомедицины и т.д.[1,2].

В настоящей работе изучается задача со свободной границей типа Флорина (условие для свободной границы задается в неявной для этой границы форме) для квазилинейного параболического уравнения с нелинейным граничным условием.

Постановка задачи. Требуется найти на некотором отрезке $0 \le t \le T$ непрерывно дифференцируемую функцию $s(t)$, такую, что $s(0) = s_0 > 0$, $0 < \dot{s}(t) \le N$, $s(t)$ удовлетворяет условию Гельдера, а функция $u(t,x)$ в области $D = \{(t,x) : 0 < t \le T, 0 < x < s(t)\}$ удовлетворяет уравнению

$$u_t(t,x) = a(t,x,u)u_{xx}(t,x) + bu_x(t,x), \quad (t,x) \in D, \tag{1}$$

и следующим начальным и граничным условиям

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le s_0, \tag{2}$$

$$u_x(t,0) = f(t,u(t,0)), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u(t,s(t)) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$u_x(t,s(t)) = \psi(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

где $s(t)$-свободная (неизвестная) граница, которая определяется вместе с функциям $u(t,x)$. $a(t,x,u)$ - коэффициент фильтрации.

Задача (1)-(5) обобщает ранее рассмотренные задачи возникающие при изучении фильтрации с учетом влияния связанной воды. Именно вопросы существования и единственности классического решения однофазной одномерной задачи Флорина изучались в работах [3,4,5,6], когда $a(t,x,u) = 1$, $b = 0$ и условия (3) задано линейными. Асимптотическое поведение решения при $t \to \infty$ рассматривается в работе [7].

Всюду в работе предполагаем, что для заданных функций выполнены следующие основные условия:

1.$f(t,\xi)$ определена и непрерывна при $t \ge 0, |\xi| < \infty$, она ограничена вместе с производными в замкнутом множестве своих аргументов.

2.Функции $a(t,x,u)$, $a'_u(t,x,u)$, $a''_{uu}(t,x,u)$, $a''_{ux}(t,x,u)$ и $a''_{xx}(t,x,u)$ определены для любого значения аргумента и ограничены на любом замкнутом множестве аргумента, причем $a(t,x,u) \ge a_0 > 0$.

3. $\varphi(x)$ трижды, $\psi(t)$ один раз непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi'''(x), \psi'(t)$ удовлетворяют условию Гельдера.

4. Выполнены условия согласования в угловых точках (в т.ч. рассматриваемых в вспомогательных задачах), в частности

$$\varphi'(0) = f(0,\varphi(0)), \varphi(s_0) = 0, \varphi'(s_0) = \psi(0) = \psi_0,$$

$$f'_t(0,\varphi(0)) = a(0,0,\varphi(0))\varphi'''(0) + a'_u(0,0,\varphi(0))\varphi'(0) \cdot \varphi''(0) + a'_x(0,0,\varphi(0))\varphi''(0)-$$

$$-f'_u(0,\varphi(0))\cdot a(0,0,\varphi(0))\cdot\varphi''(0);\psi(0)=a(0,s_0,\varphi(s_0))\varphi'''(s_0)+$$
$$+a'_u(0,s_0,\varphi(s_0))\varphi'(s_0)\cdot\varphi''(s_0)+a_x(0,s_0,\varphi(s_0))\cdot\varphi'(s_0).$$

Исследование проводится по следующей схеме. Сначала устанавливаются априорные оценки для решений $u(t,x)$.

Лемма 1. *Пусть $\varphi(x)\le 0$ и для любого $u(t,x)$ справедливо неравенство $f(t,u)\ge\psi(t)\ge\psi_0>0$, $\frac{f(t,u)-f(t,0)}{u}\ge f_0=const>0$. Тогда для решения задачи (1)-(5) в области $\bar D$ справедлива оценка*

$$-M_1\le u(t,x)\le 0, \tag{6}$$

где $M_1=\max\{\frac{1}{f_0}[\max\limits_{0\le t\le T}|f(t,0)|,\max\limits_{0\le x\le s_0}|\varphi(x)|]\}$.

Далее, устанавливаются некоторые априорные оценки для решений и их производные в норм Гельдера. Чтобы оценить $u_x(t,x)$, а также исследовать характер и гладкость свободной границы $s(t)$, мы перейдем к задаче типа Стефана. Для этого поставленную задачу (1)-(5) сведем к эквивалентной задаче (типа Стефана) для функций $s(t)$,$u_x(t,x)$.

Обозначим $u_x(t,x)=v(t,x)$. Тогда из задачи (1)-(5) получим следующую задачу

$$v_t(t,x)=a(t,x,u)v_{xx}(t,x)+a'_u(t,x,u)v(t,x)\cdot v_x(t,x)+$$
$$+a'_x(t,x,u)v_x(t,x)+bv_x(t,x),\quad (t,x)\in D, \tag{7}$$
$$v(0,x)=\varphi'(x),\quad 0\le x\le s_0, \tag{8}$$
$$v(t,0)=f(t,u(t,0)),\quad 0\le t\le T, \tag{9}$$
$$v(t,s(t))=\psi(t),\quad 0\le t\le T, \tag{10}$$
$$\psi(t)\cdot\dot s(t)=-a(t,s(t),0)v_x(t,s(t))+b\psi(t),\quad 0\le t\le T. \tag{11}$$

Лемма 2. *Пусть $\varphi'(x)\ge\psi(t)\ge\psi_0>0$ и для ограниченных $u(t,x)$ справедливо неравенство $f(t,u)\ge\psi(t)\ge\psi(0)$, а также выполнены условии леммы 1. Тогда справедлива следующая оценка*

$$0<\psi_0\le\psi(t)\le v(t,x)=u_x(t,x)\le M_2,\quad (t,x)\in\bar D, \tag{12}$$

где $M_2=\max\{\max\limits_x|\varphi'(x)|,\max\limits_t|\psi(t)|,\max\limits_t|f(t,u(t,0))|\}$.

Теперь изучается поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени.

Теорема 1. *Пусть $\psi'(t)\ge 0, a'_u(t,x,u)\ge 0, a'_x(t,x,u)\ge 0, b\le 0$ и выполнены условии леммы 2. Тогда существует такая постоянная N, зависящая от заданных функций, что справедливы неравенства*

$$0<\dot s(t)\le N,\quad 0\le t\le T, \tag{13}$$

где $N=\max\{\max\limits_{0\le x\le s_0}\frac{|\varphi'(x)-f_0|}{s_0-x},\max\limits_{0\le t\le T}\frac{|\psi(t)-f(t)|}{s_0}\}$.

Далее на основе установленных оценок доказывается единственности решения первоначальной задачи. И в итоге доказывается существование решения полученных и первоначальных задач методом неподвижной точки Шаудера.

Ключевые слова: Задача Флорина, априорные оценки, неподвижная граница.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K60

Литература

[1] Fasano A. Mathematical Models of Some Diffusive Processes with Free Boundaries. *MAT - Serie A*, 8 (2004), pp. 11-19.

[2] Murray J.D. Mathematical Biology: Spatial Models and Biomedical Applications, *Springer-Verlag*, New York, 2004, p. 811.

[3] Takhirov J., Turaev R. The free boundary problem without initial condition. *J. Math. Sci.* 2012. 187,No.1. pp. 86-100.

[4] Флорин В.А. Уплотнение земляной среды и фильтрация при переменной пористой с учетом влияния связанной воды. *Изв. АН СССР.*,1951, ОТН, є11, с. 1625-1649.

[5] Т. Д. Вентцель. Об одной задаче со свободной границей для уравнения теплопроводности. *Докл. АН СССР*, 1960, том 131, номер 5, 1000Ц1003.

[6] Нгуен Дин Чи. Об одной задаче со свободной границей для параболического уравнения. *Вестник МГУ.* Сер 1. Мат.Мех. No2. 1966.с.40-54.

[7] Нгуен Дин Чи. Об одной задаче со свободной границей для параболического уравнения. *Вестник МГУ.* No.5. 1966. с.51-62.

— ⋇ ⋇ ⋇ —

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПОСТРОЕНИЯ НОРМАЛЬНО-РЕГУЛЯРНОГО РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Жанар УБАЕВА[1,a]

[1]*Актюбинский региональный университет, Актобе, Казахстан*
E-mail: [a]*zhanar_ubaeva@mail.ru*

Вопросу построения частных решений неоднородных уравнений линейных дифференциальных уравнений посвящены много работ, в частности работы [1,2]. Монография [1] отличается тем, что изучаются неоднородные специальные уравнения, элементарными функциями в правых частях, где решениями являются различные специальные функций одной переменной.

В общем случая, задача ставится следующим образом. Требуется построить решение неоднородного дифференциального уравнения

$$\sum_{i=0}^{n} P_i(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = e^{P(x)}x^{\lambda}\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \tag{1}$$

целого ранга $p = k + 1 > 0$, в котором $P_i(x)$- ряд, а $P(x)$- полином степени p.

Фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения (1), будем искать методом Фробениуса-Латышевой. Нормально-ре-гулярное решение определим в виде

$$y_i = e^{Q_i(x)}x^{p_i}\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_{ij}x^j, (i = 1, 2, ..., n), \tag{2}$$

где $Q_i(x)$ - полиноми степени p. $Q_i(x) \neq Q_j(x)$, если $i \neq j$. Частные решение неоднородного уравнения определяется используя метод неопределенных коэффициентов, аналогично построению нормального решения [2]. Продемонстрируем применение указанных методов.

Теорема 1. *Неоднородное уравнение третьего порядка*

$$x^3y''' + (2-\nu)x^2y'' + [x^3 - \nu(\nu+1)x]y' + [x^2(1-\nu)+$$

$$+\nu^2(\nu+1)]y' = [x^2(1-\nu) + \nu^2(\nu+1)]ke^{\alpha x}$$

имеет общее решение вида

$$y = \overline{y}(x) + Y(x) = J_\nu(x)C_1 + J_{-\nu}(x)C_2 + C_3H_\nu(x) + e^{\alpha x}k, \tag{3}$$

где $J_{\pm\nu}(x)$- функций Бесселя, а $H_\nu(x)$- функция Струве, k- постоянное.

Далее показано обобщение этой теории на системы дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка.

Теорема 2. *Построить частное решение неоднородной системы состоящей из двух уравнений дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка*

$$x^3 Z_{xxx} + (2-\nu)x^2 Z_{xx} + [x^3 - \nu(\nu+1)x]Z_x + [x^2(1-\nu) + \nu^2(\nu+1)]Z =$$
$$k_1 e^{\alpha_0 x + \beta_0 y}[x^2(1-\nu) + \nu^2(\nu+1)],$$
$$y^3 Z_{yyy} + (2-\nu)y^2 Z_{yy} + [y^3 - \nu(\nu+1)y]Z_y + [y^2(1-\nu) + \nu^2(\nu+1)]Z$$
$$= k_2 e^{\alpha_0 x + \beta_0 y}[y^2(1-\nu) + \nu^2(\nu+1)]. \quad (4)$$

Преобразование

$$Z(x,y) = exp(\alpha x + \beta y)U(x,y) \quad (5)$$

определяет вспомогательную систему, откуда определяется значения неизвестных $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$. После сокращения на $exp(\alpha_0 x+\beta_0 y)$ обе стороны. Из полученной простой неоднородной системы методом неопределенных коэффициентов, определим требуемое частное решение

$$Y(x,y) = k_1 k_2 exp(\alpha_0 x + \beta_0 y).$$

Используя (3) не сложно определить общее решение соответствующей однородной системы, которое состоит из девяти произведений функций Бесселя и Струве.

Литература

[1] Babister A.W. *Trancendental function satisfying nonhomogeneous linear differential equations*, New York – London (1967).

[2] Сікорский Ю.Г., Терещенко М.І. Про побудову частинних розвязьків ліниних неоднородідних диференцуальних рівнять в околі үррегулярноі особливоі тоски, *УМЖ*, 6 (1971).

— ⁂ —

МНОГОМЕРНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА С НОРМАЛЬНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

Ермек ХАЙРУЛЛИН[1,a], Алия АЖИБЕКОВА[1,b]

[1]*Satbayev University, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]khairullin_42_42@mail.ru, [b]aliya_azhibek@mail.ru

Рассматривается краевая задача для уравнений

$$\frac{\partial U_k(x,t)}{\partial t} = \lambda_k \Delta U_k(x,t),\ k = \overline{1,3} \quad (1)$$

в области

$$Q_T \equiv \left\{(x', x_n, t) : x' \in R^{n-1},\ x_n \in R_+,\ t \in]0,T[\right\},$$

удовлетворяющая начальным условиям:

$$U_k(x,0) = 0 \quad (2)$$

и граничным условиям:

$$\left.(U_k(x,t) + a_k U_3(x,t))\right|_{x_n=0} = \varphi_k(x',t),\ k = 1,2, \quad (3)$$

$$(x', t) \in Q_T^{(1)}, \ Q_T^{(1)} \equiv Q_T \setminus x_n,$$

$$\sum_{k=1}^{3} \sum_{k_n=0}^{3} a_{k_n}^{(k)} \frac{\partial^{k_n} U_k(x,t)}{\partial {x_n}^{k_n}} \Bigg|_{x_n=0} = \varphi_3(x', t), \tag{4}$$

где Δ - оператор Лапласа по переменной $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; λ_k - заданные постоянные, причем $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$; $a_1, a_2, a_{k_n}^{(k)}$ - заданные постоянные, причем $a_3^{(k)} \neq 0$; $\varphi_k(x', t) \in C_{x',t}^{4,2}\left(Q_T^{(1)}\right)$.

Решение краевой задачи (1)-(4) ищется в виде тепловых потенциалов. Используя граничные условия (3)-(4), получена система интегро - дифференциальных уравнений (СИДУ). Характеристическая часть СИДУ решена методом интегральных преобразований Фурье-Лапласа. Найдены условия корректности и некорректности задачи, выраженные через заданные постоянные.

Методом регуляризации СИДУ сведена к системе интегральных уравнений Вольтерра-Фредгольма.

Теорема. *Если $\varphi_k(x', t) \in C_{x',t}^{4,2}\left(Q_T^{(1)}\right)$ и корни характеристического уравнения шестой степени удовлетворяют условию $Re\ q_k > 0$, то существует решение $U_k(x,t) \in C_{x_n}^{3}(Q_T)$.*

Ключевые слова: тепло- и массообмен, краевая задача, нормальные производные третьего порядка, условия разрешимости и регуляризация.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K45, 58J35

Литература

[1] Khairullin E.M., Azhibekova A.S. A general boundary value problem for heat and mass transfer equations with high order normal derivatives in boundary conditions, *AIP Conference Proceedings* **2325**, 020011 (2021); https://doi.org/10.1063/5.0041111.

— ⁂ —

ЗАДАЧА СТЕФАНА С НЕЛИНЕЙНЫМИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Станислав ХАРИН[1,a], Таргын НАУРЫЗ[1,b]

[1]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]staskharin@yahoo.com, [b]n_targyn@ise.ac

Метод подобия для решения задач Стефана с тепловыми характеристиками, зависящими от искомой температуры, был обоснован и получил развитие в работах [1] – [3].

В настоящей работе этот метод обобщается на случай задачи Стефана для сферического уравнения теплопроводности, которая описывает динамику температурного поля электрической дуги при размыкании контактов [4].

Требуется найти решение уравнения

$$c(T)\gamma(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\left[r^2\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right],$$

$$\alpha(t) < r < \beta(t), \quad \alpha(0) = \beta(0) = 0, \quad t > 0,$$

с температурой кипения и плавления на границах раздела фаз

$$T(\alpha(t), t) = T_b, \qquad T(\beta(t), t) = T_m$$

и условиями Стефана

$$-\lambda_b \frac{\partial T(\alpha(t), t)}{\partial r} = L_b \gamma_b\, \alpha'(t), \quad -\lambda_m \frac{\partial T(\beta(t), t)}{\partial r} = L_m \gamma_m\, \beta'(t).$$

Эта задача редуцируется к решению нелинейного интегрального уравнения. Доказывается, что если заданные функции удовлетворяют условию Липшица, то интегральный оператор является оператором сжатия.

На основе полученных результатов рассмотрена и решена задача о тепловом взаимодействии электрической дуги с электродом при самопроизвольном отбросе электрических контактов.

Funding: Авторы были поддержаны грантом 0824/ГФ4 МОН РК.

Ключевые слова: задача Стефана, сферическое уравнение теплопроводности, моделирование процессов в электроконтактной дуге.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K05, 35K20

Литература

[1] Bollati J., Tarzia D.A. Explicit solution for Stefan problem with latent heat depending on the position and a convective boundary condition at the fixed face using Kummer functions, *arXiv:1610.09338v1[math/AP]* 28 Oct 2016.

[2] Kumar A., Singh A.K., Rajeev A Stefan problem with temperature and time dependent thermal conductivity, *Journal of King Saud University of Science*, (2018), March, 32-41, https://doi.org/10.1016/j.jksus.2018.03.005.

[3] Briozzo A.C., Natale M.F. A nonlinear supercooled Stefan problem, *Z. Angew. Math. Phys.* **2** (2017), 46-68, https://doi.org/10.1007/s00033-017-0788-6.

[4]. Kharin S.N. Mathematical models of phenomena in electrical contacts, *The Russian Academy of Sciences, Siberian Branch, A.P. Ershov Institute of Informatics Systems, Novosibirsk*, (2017), 193 pp.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ТЕПЛОПЕРЕНОС В ПОЛУОГРАНИЧЕННОМ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ СТЕРЖНЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ИЗВЕСТНОМ ТЕПЛОВОМ ПОТОКЕ НА ЛЕВОЙ ГРАНИЦЕ

Юрий ШПАДИ[1,a], Адия КУЛАХМЕТОВА[1,b], Алексей КАВОКИН[1,c]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]yu-shpadi@yandex.ru, [b]kulakhmetova@mail.ru, [c]kavokin_alex@yahoo.com

В области $\Omega = \{0 < x < \infty,\ 0 < t < \infty\}$ рассматривается краевая задача для однородного уравнения

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{a^2}{x^\nu}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^\nu \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right), \qquad \nu > -1, \tag{1}$$

при начальном условии

$$u(x,0) = 0, \quad 0 < x < \infty, \tag{2}$$

и граничных условиях

$$-\lim_{x\to 0} x^\nu \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(t), \quad 0 < t < \infty, \tag{3}$$

$$u(\infty,t) = 0, \quad 0 < t < \infty. \tag{4}$$

Теорема 1. *Если функция $\varphi(t)$ непрерывна на интервале $0 < t < \infty$ и удовлетворяет условию*

$$|\varphi(t)| \le Mt^\beta, \quad M \ge 0, \quad \beta \ge \frac{\nu-1}{2}, \quad 0 < t < \infty, \tag{5}$$

то решение задачи (1)–(4) существует, единственно и может быть представлено в виде интеграла

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{(4a^2)^{æ}\varphi(\tau)}{2\Gamma(1-æ)(t-\tau)^{1-æ}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right) d\tau, \tag{6}$$

где $æ = \frac{1-\nu}{2}$, $-\infty < æ < 1$.

Доказательство Теоремы 1 состоит в нахождении решения задачи (1)–(4) в интегральной форме (6) с помощью преобразования Лапласа и последующего обоснования полученного решения с учетом условия (5).

Заключение. Краевая задача (1)–(4) описывает теплоперенос в осесимметричном стержне, ограниченном теплоизолирующей поверхностью вращения с радиусом $r = x^{\nu/2}$. Полагается, что тепловой поток в этом стержне происходит в осевом направлении и распределяется равномерно по площади каждого осевого сечения. Краевое условие (2) отражает суммарный тепловой поток, поступаемый в тело на левой границе $x = 0$ и имеющий конечную мощность. Если $\nu > 0$, то сечение стержня при $x = 0$ вырождается в точку, если же $-1 < \nu < 0$, то радиус сечения неограничен. В случае $\nu > 0$ задача (1)–(4) может быть применена, в частности, в математических моделях теплопереноса в контрагированной электрической дуге, возникающей в плазмотронах и выключателях при больших плотностях тока.

Funding: Авторы были поддержаны грантом 0824/ГФ4 МОН РК.

Ключевые слова: уравнения параболического типа, краевые условия, преобразование Лапласа, математические модели, электрическая дуга.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K05, 35K20

— ⁂ ⁂ ⁂ —

SINGULAR BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS OF PLANE BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF THERMOELASTODYNAMICS

L.A. ALEXEYEVA[1,a], A.N. DADAYEVA[2,b]

[1] 1Institute of Mathematics and Mathematical Modeling , Almaty, Kazakhstan
[2] 2Institute of Cybernetics and Information Technologies, Satbayev University, Almaty, Kazakhstan
E-mail: [a]alexeeva@math.kz, [b]dady1262@mail.ru

The development of thermoelasticity research is associated with the need to develop new mechanical structures, the elements of which operate under conditions of uneven and unsteady heating. This leads to the appearance of temperature gradients in the medium and deterioration of the strength properties of materials. Thermal shock causes some materials to become brittle and degrade.

In 1956, the work of M. Biot [1] was published, in which a complete substantiation of basic relations and equations of coupled thermoelasticity, based on the laws of thermodynamics of irreversible processes, was given for the first time. This author also formulated the basic variational principles and developed some methods for solving the thermoelasticity equations. In the ensuing publications of V. Novatskiy [2,3], various methods of solving the differential equations of thermoelasticity are proposed, and the models of coupled and uncoupled thermoelasticity are substantiated. According to methods of complete and incomplete separation of variables, he constructed and investigated a number of solutions of these equations and considered a whole class of quasi-static and dynamic problems of thermoelasticity. In works devoted to dynamic problems of thermoelasticity, the thermal shock problems stand out separately. In formulating such a problem, it is assumed that at the initial moment the object is at rest, and in the subsequent moment there is a sharp change in the thermoelastic state due to the action of heat and power sources, both external and in the medium itself.

In [4-6], the method boundary integral equations (BIE) was developed to solve boundary value problems of coupled and uncoupled thermoelastic elastodynamics. When solving these problems, BIE were constructed in the space of Laplace transforms in time. One of the main problems of the method BIE in the Laplace transform space, which is well known, is the instability of the numerical procedures for inverting transformants of solutions with increasing time, which does not allow constructing solutions in calculations at even small times.

In order to avoid these problems, the method BIE in the initial space-time is being developed here to solve boundary value problems (BVP) of thermoelasticity under plane deformation. Nonstationary boundary value problems of uncoupled thermoelasticity are considered. A method of boundary integral equations in the initial space-time has been developed for solving boundary value problems of thermoelasticity by plane deformation. Using the methods of theory of generalized functions [7] the generalized solutions of boundary value problems are constructed and their regular integral representations are obtained. These solutions allow, using known boundary values and initial conditions (displacements, temperature, stresses and heat flux), to determine the thermally stressed state of the medium under the influence of various forces and thermal loads. Resolving singular boundary integral equations are constructed to determine the unknown boundary functions.

The constructed boundary integral equations are no classical type. They are very different from BIEs of BVPs problems for elliptic and parabolic equations for which various mathematical methods are well developed. In particular, the use of the method of successive approximations is difficult here due to the presence of an unknown velocity of displacements (for the 1st and 2nd BVP). However, the use of numerical methods based on the boundary element method makes it possible to effectively solve this type of equations.

The resulting formulas have an important engineering application. They make it possible to determine the thermally stressed state of the medium by the boundary values of stresses, displacements, temperature and heat flux, without solving singular BIEs. Because for real engineering problems these process characteristics can be experimentally measured at the boundary. Moreover, the obtained formulas allow to calculate the influence of each of these characteristics of the process on its stress-strain state. The last one is very important in designing structures made of thermoelastic materials.

Funding: The authors were supported by the grant No. AP05132272 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: uncoupled thermoelasticity, fundamental solutions, displacements, temperature, stresses, heat flux.

2010 Mathematics Subject Classification: 74H05; 35K05; 35L05; 35M10

References

[1] Biot M.A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics, *Journal Apply Physics* **27**: 3(1956), 240-253.

[2] Novatskiy V. *Dynamic problems of thermoelasticity*, Mir, Moscow (1970).

[3] Novatsky V. *Theory of elasticity*,Mir, Moscow (1975).

[4] Alekseeva L.A., Dadaeva A.N., Zhanbyrbaev N.B. Method of boundary integral equations in boundary value problems of unconnected thermoelastodynamics, *//Applied Mathematics and Mechanics*,. - 1999. - T.63. - 5. P.853-859.

[5] Alexeyeva L.A., Alipova B.N., Dadayeva A.N. Shock waves as generalized solutions of thermo-elastodynamics equations. On the uniqueness of boundary value problems solutions // Journal American Institute o,*AIP Conference Proceeding*, **1798**, 020003-1-020003-8. Doi: 10.1063 / 1.4972595.

[6] Kupradze V.D., Gegelia T.G., Basheleishvili M.O., Burchuladze T.V. *Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity*,Nauka, Moscow (1976).

[7] Vladimirov V.S. *Generalized functions in mathematical physics*,Nauka,Moscow (1978).

— ⁂ ⁂ ⁂ —

GUI MATLAB GRAPHICAL VISUALIZATION OF DISPERSION PROPERTIES OF THE THERMOELASTIC ISOTROPIC MEDIA FOR DIFFERENT MATERIALS

Bakhyt ALIPOVA

International IT University, Almaty, Kazakhstan
E-mail: b.alipova@iitu.edu.kz

The main objective of the paper is to improve and simplify the work of the design engineer to simulate thermoelastic wave propagation in thermoelastic isotropic media under the influence of non-stationary power and thermal loads of various types. It was implemented on the basis of mathematical models of the dynamics of the thermally stressed state of the dynamics of deformable solid thermoelastic media and structural materials(different rocks, alloyed and non-alloyed steels of various grades, cast irons, etc.), through the creation of a software and technology complex with a GUI MatLab user-friendly interface.

Mathematical modeling of thermal stress state of thermoelastic isotropic media was already constructed in [1,2]. Using the model of coupled thermoelasticity [3,4], a mathematical model of the thermally stressed state was developed for stationary and shock dynamic and thermal effects on the basis of solving direct and inverse stationary and nonstationary boundary value problems. The apparatus of generalized functions, convolution of fundamental solutions (Green's tensor) with various types of loads on the boundary of the region was used for construction of integral equation.

The isotropic thermoelastic medium is characterized by a finite number of positive thermodynamic parameters: the mass density ρ, the Lame elastic constants $\lambda = \frac{vE}{(1+v)(1-2v)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+v)}$, and thermoelastic constants γ, η and κ, E Young modulus, and v - Poissons ratio [5]. All constants are positive: ρ ¿ 0, μ ¿ 0, 3 λ +2 μ ¿0, γ/η ¿0, κ ¿0.

It is known [6] that a such medium is described by the system of following equations in a Cartesian:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i \\ u_{N+1,jj} - \frac{1}{k}\dot{u}_{N+1} - \eta \dot{u}_{j,j} + \frac{1}{k}Q = 0 \end{cases} i,j = \overline{1,N} \qquad (1)$$

Here $u_i, \sigma(i,j=\overline{1,N})$ are the components of the displacement vector and stress tensor, u_{N+1} is the temperature, F_i are the components of the mass power, $Q = W/\lambda$ is the power of the thermal source, W is the quantity of heat per unit volume per unit time. Here and henceforth the repeated indices imply summation from 1 to N. For N = 2 we consider the 2D case, for N = 3 3D case.

$$\sigma_{ij} = (\lambda u_{k,k} - \gamma u_{N+1})\,\delta_{ij} + \mu\,(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{2}$$

where δ_{ij} is Kronecker symbol.

In view of (2) the system (1) becomes as

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)\,u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} - \gamma\theta_{,i} + F_i = \rho\ddot{u}_i \\ \theta_{,jj} - \frac{1}{k}\dot{\theta} - \eta\dot{u}_{j,j} + \frac{1}{k}Q = 0 \end{cases} \quad i,j=\overline{1,N} \tag{3}$$

We consider charachteristic equation of given system of equation (3) and observe wave propagation behaviour in thermoelastic media for different materials. Investiga tions of physical processes in such media associated with the origin, propagation and diffraction of waves arising under the action of stationary and nonstationary external influences, the action of concentrated sources (power and heat) of natural or artificial origin, is one of the complex scientific and technical problems and is closely related to the solution of a variety of engineering tasks [7-9].

The computer model in form of interactive user-friendly interface allows you to organize a private cloud with multi-tenancy support, providing services for creating, distributing and managing applications that provide high-quality 3D-visualization of needed data. Directly behind the visualization of data on the client device is a special application - the design engineer, which is collected under the management of the platform individually for each user [10]. The platform will include modules that provide overall management of cloud services, create new visualization scenarios, manage users, confi gure access rights and security policies, store resources, distribute applications and updates. The result of the completed tasks is the definite GUI Matlab computer model in the form of an independent, alienable author's work, which is a flexible and intuitive user interface interface (with the publication of the text of programs in the programming language / in the form of executable code (GUI Matlab) and related documentation). MATLAB apps let us see how the algorithms work with our data. The process would be iterated until the needed results obtained, then automatically generate a MATLAB program to reproduce or automate the work of engineer.

Keywords: coupled thermoelasticity, computer GUI MatLab model, dispersion properties, wave propagation.

2010 Mathematics Subject Classification: 68N19, 74A15, 74F05, 74J99, 80A17

References

[1] Alexeyeva L.A., Alipova B. Dynamics of thermoelastic half-plane by action of periodic loads and heat flows at its boundary, *Mathematics and Mechanics of Solids*, **1**:2 (2021), doi:10.1177/ 1081286521993888.

[2] Alexeyeva L.A., Kupesova (Alipova) B. The method of generalized functions in boundary value problems of coupled thermoelastodynamics, *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, **65**:2 (2001), 327–37.

[3] Warwick *Master of Theory: Cambridge and the Rise of Mathematical Physics*, University of Chicago Press (2003).

[4] Biot M. Thermoelasticity and irreversible thermo-dynamics, in: *J Appl Phys*, (1956), 240–253.

[5] Nowacki W. *Thermoelasticity*, Pergamon, Oxford (1962).

[6] Hetnarski R.B. (Editor) *Encyclopedia of Thermal Stresses*, Springer (2014). DOI 10.1007/978-94-007-2739-7

[7] Lykotrafitis G., Georgiadis H.G., Brock L.M. Three-dimensional thermoelastic wave motions in a half-space under the action of a buried source, *Int J Solids Struct*, **1**:38 (2001), 4857–78.

[8] RaoofianNaeeni M., Eskandari-Ghadi M., Ardalan A.A., Sture S., and Rahimian M. Transient response of a thermoelastic half-space to mechanical and thermal buried sources, *ZAMM*, **4**:95 (2015), 354–76.

[9] Mahmoodi Kordkhieli, GhodratiAmiri G., Hosseini M. Axisymmetric analysis of a thermoelastic isotropic half-space under buried sources in displacement and temperature potentials, *J Thermal Stresses*, **2**:40 (2017), 237–54.

[10] Alipova B. *Tutorial on programming in the Matlab Environment as part of Google Class "Programming in high-level languages in the MATLAB environment" as part of the discipline https://classroom.google.com/c/MzA4NjEyNDE3Njda with the code 1c9wz4h*, Russia (2020).

— ⁂ —

TRANSPORT FLOW MODELLING IN THE TERRITORY OF ALMATY CITY

Ayala AMIR[1,a], Assel MUZAPBAROVA[2,b]

[1] *Satbayev University, Almaty, Kazakhstan*
[2] *KBTU, Almaty, Kazakhstan*
[a]*amirova.ayala@gmail.com*, [b]*muza.asel98@gmail.com*

This study investigates the traffic flow in the territory of Almaty with real data collection. The novelty of this work is that we study specifically the territory of Almaty. The transport network is modeled using SUMO DLR, while data were collected using the program 2gis and by human observers. Also, we present further usage of the data from 2gis.

To make simulations we use the SUMO DLR [4]. It consists of roads and intersections. The target area is the square from Tole bi Avenue to Abay Avenue and from Seifullin Avenue to Dostyk Avenue. It contains 100 nodes of which 49 are regulated and 51 are unregulated. The test network consists of 202 edges.

Data collection from 2gis. The online versions of the 2gis include the opportunity to obtain information about the traffic congestion and average speeds on specific parts of the roads. Data collection was started on March 17 at 3 a.m. and finished on April 1 at 3 a.m. As a result, 1098 data files on average speeds were collected in 2 weeks. Subsequently, these data can serve as input data for counting the number of vehicles at the intersections.

Various usage of average speed.

Estimating average travel time. Another way to report the road's traffic congestion is to measure the Annual Average Travel Time. We know the length and average speed on the road, and they will be used to find the average travel time.

Counting the number of vehicles. As we said before the average speed in each direction can serve as input data for counting the number of vehicles at the intersections. Consequently, with the number of vehicles at hand, we can control the traffic lights of the area that was considered in the work of Kurmankhojayev et al. [1], which considered the problem of adaptive light control at a single isolated intersection.

In this research we also present methods for evaluating the number of vehicles from average speeds. To do that we run some simulations with different parameters. We do not need to annotate the data for the task because the demand models are defined by us and their parameters are known to us. The models (NN, the BPR function) are trained on this data.

To estimate the number of vehicles on the collected data we used a fully connected feedforward NN. The output of the model is the one-dimensional vector that contains the estimates of the number of vehicles in each direction. The results of the experiments show that a simple neural network can solve the problem with loss of 67 percent. For comparison, we used the standard BPR function (Bureau of Public Roads [3]), which has been widely used in transportation planning practice. This method showed the 97 percent accuracy for predicting the number of vehicles.

To sum up, in this study we propose a simulation model and data which were collected for the given network. We built a transport network which includes traffic lights, lane separation, vehicle appearance probability. Also, we have collected real data on a certain area of the city Almaty and presented models for estimating the number of vehicles from average speeds. In future, we want to control the traffic lights of the network by using these real data. Tolebi et.al [2] has solved this kind of problem for an Isolated Intersection.

References

[1] D. Kurmankhojayev, N. Suleymenov, and G. Tolebi. Online model-free adaptive traffic signal controller on an isolated intersection. In 2017 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences, *In 2017 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON)*, (2017)

[2] G. Tolebi, N. Dairbekov, and D. Kurmankhojayev. Link Flow Estimation on an Isolated Intersection Based on Deep Learning Models, *In 2020 International Review of Automatic Control (I.RE.A.CO.)*, (2020).

[3] R. Kucharski, A. Drabicki. Estimating Macroscopic Volume Delay Functions with the Traffic Density Derived from Measured Speeds and Flows, *Journal of Advanced Transportation*, (2017).

[4] D. Krajzewicz, J. Erdmann, M. Behrisch, L. Bieker. Recent Development and Applications of SUMO - Simulation of Urban MObility, *International Journal On Advances in Systems and Measurements*, **3**:4 (2012), 128138.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

OIL BLENDS CYCLIC PUMPING SIMULATION IN THE MAIN OIL PIPELINE

Timur BEKIBAYEV[1,a], Uzak ZHAPBASBAYEV[1], Gaukhar RAMAZANOVA[1], Daniyar BOSSINOV[1,2,b]

[1] *Satbayev University, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*timur_bekibaev@mail.ru*, [b]*bossinov.daniyar@gmail.com*

In the cyclic mode, the batch volumes of high-pour-point Mangyshlak and high-viscosity Buzachi oil blends are pumped sequentially [1]. For Mangyshlak and Buzachi oil blends, the values of pour point are equal to $T_{pp} = 27°C$ and $T_{pp} = -12$°C, respectively. The difference in pour point of Mangyshlak and Buzachi oil blends requires the determination of rational technological modes, taking into account the safety of cyclic pumping.

The thermal-hydraulic calculation on the linear part of the pipeline section is carried out by solving the system of equations:

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau} + \frac{\partial\rho u}{\partial x} = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{M} G_i(t_\omega, x_i)\delta(x - x_i) \tag{1}$$

$$\rho\frac{\partial u}{\partial\tau} + \rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = -\xi(Re, \varepsilon)\frac{\rho u^2}{2D_1} - \rho g sin\beta(x)$$

$$+\frac{1}{S}\sum_{i=1}^{M} G_i(t_\omega, x_i)\cdot(u_i cos\gamma_i - u)\delta(x - x_i) \tag{2}$$

$$\frac{\partial t}{\partial\tau} + u\frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{4k}{\rho c_p D_1}(t - t_w) + \frac{ugi}{c_p}$$

$$+\frac{1}{\rho c_p S}\sum_{i=1}^{M} G_i(t_\omega, x_i)\cdot(c_{pi}t_i - c_{pt})\delta(x - x_i) \tag{3}$$

In equations (1)-(3), $G_i(t_w, x_i)$ is the weight flow rate of the i-th intermediate oil pumping station, S is the cross-sectional area of the pipe, p is the oil blend pressure, c_p is the oil blend heat capacity, u is the oil blend velocity, t is the oil blend temperature, ξ is the hydraulic resistance coefficient, Re is the Reynolds number, u_i is the pumped oil speed, t_i is the pumped oil temperature, c_{pi} is the pumped oil heat capacity, k is the heat transfer coefficient, $\delta(x - x_i)$ is the Dirac's delta function, $\frac{ugi}{c_p}$ is the dissipation of kinetic energy into heat, $i = \frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial x}$ is the hydraulic gradient, $\varepsilon = \frac{\delta}{D_1}$ is the pipeline roughness , D_1 is the pipeline inner diameter.

The system of equations (1) - (3) is solved at the initial and boundary conditions:

$$\tau = 0 : u(0, x) = u_0, p(0, x) = p_0, t(0, x) = t_w \tag{4}$$

$$x = 0, \tau_{i-1} \le \tau \le \tau_i : u_i(\tau, 0) = u_i^b, p_i(\tau, 0) = p_i^b, t_i(\tau, 0) = t_i^b, i = 1, 2, ..., n$$

$$x = 0, \tau_i \le \tau \le \tau_{i+1} : u_{i+1}(\tau, 0)$$

$$= u_{i+1}^m, p_{i+1}(\tau, 0) = p_{i+1}^m, t_{i+1}(\tau, 0) = t_{i+1}^m$$

$$x = L, \tau = T : p(L, T) = p_{out} \tag{5}$$

where u_i^b, p_i^b, t_i^b are the operating parameters of the batch of Buzachi oil blend, $u_{i+1}^m, p_{i+1}^m, t_{i+1}^m$ are the operating parameters of the batch of Mangyshlak oil blend.

The close relations of system (1) - (3) are physicochemical and rheological properties of Buzachi and Mangyshlak oil blends, which were determined by empirical formulas depending on temperature [1,2].

The system of equations (1) - (3) with boundary conditions (4), (5) and close relations is solved numerically.

The results of Mangyshlak and Buzachi oil blends cyclic pumping simulation in the Uzen-Atyrau main oil pipeline are presented in this report.

Funding: The authors were supported by the grant No. AP08855607 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: energy consumption, cyclic pumping, high-viscosity and high-pour-point oil blend, optimization criterion, implementation algorithm

2010 Mathematics Subject Classification: 76A05, 76A02

References

[1] Beisembetov I.K., et al. *Management of energy-saving modes of transporting oil blends*, KBTU, Almaty (2016).

[2] Charny I.A. *Unsteady flow of real liquid in pipes*, Nedra, Moscow (1975).

— ⁂ —

REGULAR PRESENTATIONS OF KIRCHHOFF AND STRESS FORMULAS FOR DYNAMICS PROBLEM OF ELASTIC-PLASTIC MEDIA

Shyngyskhan DILDABAYEV[1,a], Gulmira ZAKIRYANOVA[2,b]

[1,2] *Institute of Mechanics and Engineering Science, Almaty, Kazakhstan*

E-mail: [a]*shdilda@bk.ru*, [b]*gulmzak@mail.ru*

Previously in [1], using the methods of the distributions theory, were constructed the generalized solution of the non-stationary problem for an elastic-plastic medium occupying the region D in the space R^2. This solution have singularities on the wave fronts and at the boundary points. In this paper for this solution, are proposed the regular representations of the displacement vector and stress tensor components which are suitable as for inner points of region D as for boundary points:

$$(1 - H_D(\mathbf{x}))u_i(\mathbf{x}, t) = \int\limits_S \int\limits_0^t \Big\{ U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau)p_j(\mathbf{y}, t - \tau) - T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau)\big[u_j(\mathbf{y}, t - \tau) -$$

$$-u_j(\mathbf{x},t)\big]\Big\}dS+\int\limits_D\int\limits_0^t U_{ij,k}(\mathbf{x},\mathbf{y},\tau)\sigma^0_{jk}(\mathbf{y},t-\tau)d\mathbf{y},\quad \mathbf{x}\in D\cup S, \tag{1}$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{1-H_D(\mathbf{x})+\alpha/2\pi}\int\limits_S\int\limits_0^t\Big\{G_{ijk}(\mathbf{x},\mathbf{y},\tau)p_k(\mathbf{y},t-\tau)-W_{ijk}(\mathbf{x},\mathbf{y},\tau)\big[u_j(\mathbf{y},t-\tau)$$

$$-u_j(\mathbf{x},t)\big]\Big\}dS+\int\limits_D\int\limits_0^t W_{ijlk}(\mathbf{x},\mathbf{y},\tau)\sigma^0_{lk}(\mathbf{y},t-\tau)d\mathbf{y},\quad \mathbf{x}\in D\cup S. \tag{2}$$

where U_{ij}, $T_{ij}, G_{ijk}, W_{ijk}, V_{ijk}$ are kernels of single layered, double layered and volume retarded wave potential consequently, σ^0_{ij} is an additional stresses, which are the difference between real and fictitious elastic stresses [1], $H_D(\mathbf{x})$ is the characteristic function of domain D and its value is determined in [2] by next formula

$$H_D(\mathbf{x})=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\mu(D\cap O_\epsilon(\mathbf{x}))}{\mu(O_\epsilon(\mathbf{x}))}=\begin{cases}1 & \mathbf{x}\in D,\\ \alpha/2\pi & \mathbf{x}\in S,\\ 0 & \mathbf{x}\notin D,\end{cases} \tag{3}$$

here $O_\epsilon(\mathbf{x})$– is a sphere in R^n (ring for n=2) with radius ε and center in point $\mathbf{x}, \mu(\cdot)$– is volume (square) of region, α is a value of solid angle, formed by all kinds of tangent planes in boundary point $\mathbf{x}$. The definition of $H_D(\mathbf{x})$ given by (3) makes possible to determine its value not only for interior and exterior points, but also for boundary points. For points in smooth part of boundary in R^n we always have $H_D(\mathbf{x})=0.5$, for point in the corners of rectangular hole in R^2 $H_D(\mathbf{x})=0.25$, for point in the corner of a cube $H_D(\mathbf{x})=1/8$ and so on.

In performing the regular presentations (1,2) the Gauss formula for double-layered retarded potential is used. In this objection were implemented the convolution of characteristic function $H_D(\mathbf{x})H(t)$ (3) of finite domain D with equation of motion with concentrated impulse body force $F_\beta(\mathbf{x},t)=\delta_{i\beta}\delta(\mathbf{x})\delta(t)$. As the result we got:

$$\int\limits_S\int\limits_0^t T_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\tau)d\tau dS_{\mathbf{y}}=-\delta_{i\beta}H(t)H_D(\mathbf{x}). \tag{4}$$

Gauss formula (4) is important in applications because it gives simply and obvious geometric representation to get the values of double layered wave potential (fundamen- tal traction tensor) and to verify its numerical implementation.

The proposed regular presentations of components of displacement vector (2), and stress tensor (3) is subsequent development of the dynamics boundary integral equation method (BIEM). They make it possible to correctly calculate the coefficient in the left-hand side of (2) for boundaries with corner points, which was an intractable problem in the practice of using BIEM. The similar regular representations of Somigli- ana's formulas and formulas for statical BIEM for bodies with arbitrary anisotropy where proposed and implemented in [3] and they demonstrated high efficiency and accuracy in calculating boundary values of displacements and stresses.

Funding: The authors were supported by the grant No. AP09562064 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: dynamics, elasto-plastic, boundary problem, wave potential, kernel, singular, regular.

2010 Mathematics Subject Classification: 30E25, 45F15, 74C05, 74H10, 74S15

References

[1] Dildabayev Sh.A. Application of retarded wave potentials in dynamics problems of elastic-plastic medium, in: *Annual International April Mathematical Conference 2020, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty (2020), 163–165.* (in Russian)

[2] Zakiryanova G.K. Regular representation of Kirchhoff and Somiliana formulas for nonstationary dynamics of anisotropic media on a contour, *Vestnik AN KazSSR*, **3** (1992), 79–84. (in Russian)

[3] Dildabayev Sh.A., Zakiryanova G.K. Green's Tensor and 2Dimiensional BIE Method in Static of Massif with Arbitrary Anisotropy, *Mathematics and Statistics*, **7**:5 (2019), 158–171.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ON A MODEL OF ACIDIZING THE BOTTOMHOLE ZONE FOR POROELASTIC FORMATION

Oleg GALTSEV

National Research University "Belgorod State University", Belgorod, Russia
E-mail: galtsev_o@bsu.edu.ru

There are quite a few methods of soil treatment: acid treatment, hydrosand-jet perforation, vibration treatment, heat treatment, hydraulic fracturing to improve the filtration characteristics of the bottomhole formation zone in order to increase the productivity of production and injectivity of injection wells. The first method of rock dissolution with mixtures based on hydrochloric acid is most often used. This process is accompanied by a thermal reaction that accelerates the change in the geometry of the porous medium.

The known mathematical models of solid materials leaching describe the process only at the macroscopic level (Darcy-scale). Each point of the solid skeleton and fluid in the pores is represented as a continuous medium [1]. We will use the approach described in the papers [2] and [3], where it is proposed to derive the poroelasticity equations based on the laws of continuum mechanics and homogenization methods.

This work is devoted to the mathematical description of the leaching process in an elastic porous medium. It is proposed, first of all, to formulate the problem at the microscopic level, relying on the generally accepted laws of continuum mechanics [4] and the well-known chemical laws [5]. Then, using homogenization methods, derive macroscopic analogs of the original equations.

According to [6], various problems in the mechanics of highly inhomogeneous media and composite materials lead to the need to build averaged models for these media. It is required to construct a model of a medium, the local properties of which change sharply, and therefore it is more convenient to pass from its microscopic description to a macroscopic one, i.e. consider the averaged characteristics of such an environment. In many cases, the considered physical processes in strongly inhomogeneous media are described by partial differential equations, and the strong inhomogeneity of these media leads to differential equations with sharply varying coefficients. Direct numerical solution of such problems, as a rule, is difficult even on modern computers. Therefore, the question arises of constructing models for strongly inhomogeneous media, leading to simpler differential equations, which are called homogenized. Often such differential equations have constant coefficients. The homogenized equations make it possible to determine with high accuracy the effective characteristics of the initial medium. This condition is ensured by the main requirement that the homogenized equations must satisfy the proximity of the solutions of the corresponding boundary value problems for the original and homogenized equations.

To simulate the dynamics of acid impurities in pores, the Stokes equation for an incompressible viscous fluid is used. This approximation is quite acceptable, since the movement in the pores is very slow and we can neglect the convection terms in the Navier-Stokes equations. The Lame equation is used to model the displacements of the elastic soil skeleton. Acid propagation is described by the diffusion-convection equation with the corresponding boundary condition on the free surface “acid-soil”.

Earlier in the work [7] mathematical models of leaching in an absolutely solid soil skeleton were obtained. Continuing the research of the authors, we obtained systems of equations for the poroelastic case.

Funding: This research was supported by the Russian Science Foundation (project No. 19-71-00105)

Keywords: acid treatment, elastic soil, diffusion-convection, free boundary problem

2010 Mathematics Subject Classification: 35M33, 35R35, 36M50

References

[1] Bommer P.M., Schechter R.S. Mathematical modeling of in-situ uranium leaching, *Society of Petroleum Engineers Journal*, **19**:6 (1979), 393–400.

[2] Burridge R. Poroelasticity equations derived from microstructure, *Journal of the Acoustical Society of America*, **70**:4 (1981), 1140–1146.

[3] Sanchez-Palencia E. *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*, Springer, Berlin (1980).

[4] Malvern L.E. *Introduction to Mechanics of a Continuum Medium*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1969).

[5] Brady P.V. Surface-controlled dissolution and growth of minerals, *Physics and chemistry of mineral surfaces*,**12**:1 (1996), 226–298.

[6] Meirmanov A.M., Galtsev O.V., Zimin R.N. *Free Boundaries in Rock Mechanics*, Berlin-New York, Walter de Gruyter (2017).

[7] Meirmanov A., Omarov N., Tcheverda V., Zhumaly A. Mesoscopic dynamics of solid-liquid interfaces. A general mathematical model, *Computational Mathematics*, **12** (2015), 884–900.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A MIXED EQUATION INVOLVING THE HILFER’S DOUBLE-ORDER FRACTIONAL OPERATOR

E.T. KARIMOV [1,a], B.H. TOSHTEMIROV [2,b]

[1,2] *V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan*
E-mail: [a] *erkinjon.karimov@mathinst.uz,* [b] *b.toshtemirov@mathinst.uz*

In the present work we investigate a boundary-value problem (BVP) with nonlocal initial condition for a mixed equation with the Hilfer’s double-order fractional integral-differential operator. Using the method of separation of variables, we prove a unique solvability of the formulated problem. We have found solvability condition in terms of two parameter Mittag-Leffler functions.

Consider the following mixed equation

$$0 = Lu \equiv \begin{cases} L_1 u \equiv D_{0+}^{(\alpha_1,\beta_1)\mu_1} u(x,t) - u_{xx}(x,t) - f(x,t), \ t > 0 \\ L_2 u \equiv D_{0-}^{(\alpha_2,\beta_2)\mu_2} u(x,t) - u_{xx}(x,t) - f(x,t), \ t < 0 \end{cases} \tag{11}$$

in a mixed domain $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup AB$. Here $i-1 < \alpha_i, \beta_i \leq i, \quad 0 \leq \mu_i \leq 1, \, i = \overline{1,2}$,
$\Omega_1 = \{(x,t) : 0 < x < l, \, 0 < t < T\}$, $\Omega_2 = \{(x,t) : 0 < x < l, \, -T < t < 0\}$, $T > 0$,
$AB = \{(x,t) : 0 < x < l, \, t = 0\}$,

$$D_{0\pm}^{(\alpha_i,\beta_i)\mu_i} f(t) = I_{0\pm}^{\mu_i(i-\alpha_i)} \left(\pm \frac{d}{dt} \right)^i I_{0\pm}^{(1-\mu_i)(i-\beta_i)} f(t)$$

is the double-order Hilfer FDO of orders α_i, β_i and of type μ_i [2], where

$$I_{0+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \frac{f(z)dz}{(t-z)^{1-\alpha}}, \quad I_{0-}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_t^0 \frac{f(z)dz}{(z-t)^{1-\alpha}}$$

are the left-sided and right-sided Riemann-Liouville fractional integral of order $\alpha\,(\Re(\alpha)>0)$ [1].

Nonlocal BVP for Eq.(11) in Ω can be formulated as follows:

Problem. To find a solution of the Eq. (11) in $\Omega\backslash AB$, which satisfies the following regularity conditions

$$u(x,t)\in C(\bar{\Omega}\backslash AB),\ u_{xx}(x,t)\in C(\Omega\backslash AB),\ D_t^{(\alpha_i,\beta_i)\mu}u(x,t)\in C(\Omega_i),$$

boundary

$$u(0,t)=0,\ \ u(l,t)=0,\ 0\le t\le T$$

and nonlocal

$$u(x,-T)=u(x,T)+\psi(x),\ \ 0\le x\le l$$

conditions together with conjugation conditions on AB

$$\lim_{t\to+0}I_{0+}^{1-\gamma_1}u(x,t)=\lim_{t\to-0}I_{0-}^{2-\gamma_2}u(x,t),\ \ 0\le x\le l,$$

$$\lim_{t\to+0}t^{1-\delta_1}\left(\frac{\partial}{\partial t}I_{0+}^{1-\gamma_1}u(x,t)\right)=\lim_{t\to-0}\frac{\partial}{\partial t}I_{0-}^{1-\gamma_2}u(x,t)\ \ 0<x<l.$$

Here $\gamma_i=\beta_i+\mu_i(i-\beta_i)\quad \delta_i=\beta_i+\mu_i(\alpha_i-\beta_i),\quad (i=\overline{1,2})$, $\psi(x)$, $f(x,t)$ are given functions.

Keywords: Mixed type equation; a boundary value problem; double-order Hilfer operator; non-local condition

2010 Mathematics Subject Classification: 35M10

References

[1] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equation.* , Elsevier, Amsterdam. 2006.

[2] E.Karimov, M.Ruzhansky and B.Toshtemirov. *A boundary-value problem for a mixed type equation involving hyper-Bessel and Hilfer's double-order fractional derivative.* arxiv:2103.08989.

— ⁕ ⁕ ⁕ —

THE HEAT POLYNOMIALS METHOD FOR INVERSE CYLINDRICAL ONE-PHASE STEFAN PROBLEMS

Samat KASSABEK[1,a], S. N. KHARIN[2,b] Durvudkhan SURAGAN[3,c]

[1] *Astana IT University, Nur-Sultan, Kazakhstan*
[2] *Kazakh British Technical University, Almaty, Kazakhstan*
[3] *Nazarbayev University, Nur-Sultan, Kazakhstan*
E-mail: [a]*samat.kassabek@astanait.edu.kz,* [b]*staskharin@yahoo.com,* [c]*durvudkhan.suragan@nu.edu.kz*

Heat transfer problems in domains with moving boundaries involving change of phase, is a Stefan type problems [1]. The inverse Stefan problem [2] consists in the reconstruction of the heat flux $P(r,t)$ and identify the temperature $u(r,z,t)$ in the domain D. Since the Fourier criterion $Fo=\frac{a^2t}{r_0^2}$ is greater than one, the heating process is quasi-stationary and all isothermal surfaces including the melting isotherm are ellipsoids

$$\frac{r^2}{r_0^2+ct}+\frac{z^2}{ct}=1, \tag{12}$$

The quasi-stationary mathematical model describing heat contact at the stage of melting temperature is:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\ 0<z<h(r,t),\ 0<r<\alpha(t),t\in[0,t_{arc}], \tag{13}$$

subjected to following conditions:

$$u(r_0, 0, 0) = \theta_{arc}, \tag{14}$$

$$-\lambda \frac{\partial u(r, 0, t)}{\partial z} = P(r, t), \tag{15}$$

where λ is the thermal conductivity, r_0 is the radius of the contact spot, θ_{arc} is the arcing temperature. At the interface surface $z = h(r, t)$, the boundary temperature

$$\theta_{melt} = u(r, h(r, t), t). \tag{16}$$

and Stefan conditions are

$$-\lambda \frac{\partial u(r, z, t)}{\partial n}\bigg|_{z=h(r,t)} = L\gamma \frac{\partial h(r, t)}{\partial t}, \tag{17}$$

Here L is the latent heat of melting of the contact material, γ is its density, and θ_{melt} is the melting temperature.

The approximate solution of the problem can be represented in the form of linear combination of heat polynomials [3],[4]

$$u_N(r, z, t) = \sum_{n=0}^{N} c_n q_n(r, z, t), \tag{18}$$

where $q_n(r, z, t)$ are heat polynomials and c_n are unknown coefficients in time intervals $t \in [0, t_{arc}]$. To reconstruct the heat flux $P(r, t)$ as a analytical function, we will consider it as a series

$$P(r, t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} p_{m,n} r^{2m} t^n, \tag{19}$$

where $p_{m,n}$ are coefficients of the series which has to be found along with temperature function $u(r, z, t)$.

Funding: The authors were supported by the Nazarbayev University Program 091019CRP2120 "Centre for Interdisciplinary Studies in Mathematics (CISM)" and the second author was supported by the grant AP09258948 "A free boundary problems in mathematical models of electrical contact phenomena".

Keywords: Inverse Stefan problems, approximate solution, heat polynomials, heat flux function.

2010 Mathematics Subject Classification: 80A22, 80A23, 80M30, 35C11

References

[1] S. C. Gupta, *The classical Stefan problem*, Basic Concepts, Modeling and Analysis, Elsevier, Amsterdam, (2003).

[2] N. L. Goldman, *Inverse Stefan problem*, Kluwer, Dordrecht, (1997).

[3] S. Futakiewicz L. Hozejowski, *Heat polynomials method in solving the direct and inverse heat conduction problems in a cylindrical system of coordinates*,Transactions on Engineering Sciences vol. 20, WIT Press, www.witpress.com, ISSN 1743-3533, (1998)

[4] K. Grysa, *Heat polynomials and their applications*, A Archives of Thermodynamics, vol. 24 No. 2, pp. 107-124, (2003).

— ⁕ ⁕ ⁕ —

ON APPROXIMATION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR LAPLACE EQUATION

Allambergen KHUDAYBERGENOV

National university of Uzbekistan , Tashkent, Uzbekistan
E-mail: khudaybergenovallambergen@mail.ru

The process of heating the following cylindrical surface (thin-walled pipe)

$$S \;=\; \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2=1,\; 0\le z\le h\}$$

is considered (see [1]).

At the lower base of the cylinder, the given temperature is maintained and there is no heat flow. We need to find the temperature at the top base of the cylinder.

We introduce the cylindrical coordinates

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x},\quad z=z.$$

Then

$$S \;=\; \{(r,\theta,z) \;:\; r=1,\; -\pi<\theta\le\pi,\; 0\le z\le h\}.$$

We are looking for a stationary solution. Hence, we assume that the temperature $u(\theta,z)$ is a 2π-periodic function with respect to θ which satisfies equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \;=\; 0,\quad (\theta,z)\in S, \tag{1}$$

and boundary conditions

$$u(\theta,0)=\phi(\theta),\quad \frac{\partial u(\theta,0)}{\partial z} \;=\; 0,\quad -\pi\le\theta\le\pi. \tag{2}$$

We need to find the temperature $u(\theta,h)$ on the top base $z=h$.

Let us denote by the symbol $D(S)$ the class of functions infinitely differentiable on the cylindrical surface S and vanishing near the upper base $z=h$.

Definition. *Let $\phi\in L_2[-\pi,\pi]$. We say that the function $u(\theta,z)$ from $L_2(S)$ is a solution to the problem (1)-(2) if for any function $v\in D(S)$ the following equation*

$$\int\limits_S u(\theta,z)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)d\theta\,dz \;=\; \int\limits_{-\pi}^{\pi}\phi(\theta)\frac{\partial v}{\partial z}(\theta,0) \tag{3}$$

is valid.

Proposition 1. *If the problem (1)-(2) has a solution, then this solution is unique.*

Suppose that the function $\phi(\theta)$ that determines the temperature on the lower base belongs to a certain Hilbert space H_1. Further, suppose that the function $\psi(\theta)$ that determines the temperature on the upper base belongs to a some Hilbert space H_2.

Consider operator $A: H_1\to H_2$ that acts as follows:

$$A\phi \;=\; \psi.$$

It is well known that the problem (1)-(2) is ill-posed (see [2]). This means that the operator A acting in classical spaces like Sobolev space is unbounded. Moreover, the domain of the operator A, being part of Sobolev-type spaces, cannot coincide with any of them.

Just as it is done in most papers on ill-posed problems (see [3]), we introduce a one-parameter family of continuous operators A_α approximating the operator A.

For any $\alpha > 0$ consider the auxiliary equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \alpha \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} = 0, \quad -\pi \le \theta \le \pi, \quad 0 < z < h, \tag{4}$$

with the same boundary conditions (2).

Proposition 2. *Assume that $\psi \in L_2(\mathbb{T})$. Then the solutions $u(\theta, z)$ and $u_\alpha(\theta, z)$ of the equations (1) and (4), respectively, with boundary conditions (2) satisfy the relation*

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \|u_\alpha(\theta, z) - u(\theta, z)\|_{L_2(\mathbb{T})} = 0$$

uniformly with respect to $z \in [0, h]$.

Note that the Proposition 2 only asserts the convergence of the auxiliary solution to exact one. In order to estimate the approximation error, it is necessary to require additional smoothness from the solution.

Denote by $L_2^\beta(\mathbb{T})$ the Sobolev space with the norm

$$\|f\|_\beta^2 = (2\pi) \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k|^2 \big(1 + |k|^2\big)^\beta,$$

where f_k are the Fourier coefficients.

Theorem 1. *Assume that $\psi \in L_2^\beta(\mathbb{T})$, where $0 < \beta \le 3$. Then the solutions $u(\theta, z)$ and $u_\alpha(\theta, z)$ of the equations (1) and (4), respectively, with boundary conditions (2) for every $\alpha, 0 < \alpha \le 2^{-6/\beta} h^2$ satisfy the estimate*

$$\|u_\alpha(\theta, z) - u(\theta, z)\|_{L_2(\mathbb{T})} \le \sqrt{2\pi}\, \alpha^{\beta/3} h^{\beta/3} \|\psi\|_\beta$$

uniformly with respect to $z \in [0, h]$.

References

[1] A. Gavrikov, G. Kostin Heat Transfer Processes in a Cylindrical Body Surrounded by Air, *Proc. of 59th MIPT Scientific Conference*, Moscow, Russia, 2016.

[2] Kabanikhin, S. I Inverse and Ill-posed Problems: Theory and Applications, *Walter de Gruyter GmbH & Co. KG*, Berlin/Boston, Inverse Ill-posed Probl. Ser. 55, 2012

[3] Tikhonov A.N., Goncharsky A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems, *Kluwer Academic Publishers*, 1995.

— ⁂⁂⁂ —

ITERATIVE METHOD FOR SOLVING NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF HEAT CONDUCTION

Bolatbek RYSBAIULY[1,a], Sultan ALPAR[2,b]

[1] *International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan*
[2] *International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]b.rysbaiuly@mail.ru, [b]rapla.natlus@gmail.com

The thermophysical properties of the soil play an essential role in the structure of the thermal field of the earth's crust. In turn, the Earth's thermal field largely determines the processes associated with prospecting, exploration, development of oil and gas deposits, the operation of main oil and gas pipelines and underground storage facilities. Thermophysical soil parameters play an important role in solving problems of prospecting and exploration of gas, oil and thermal water deposits using geothermal methods. In addition, studies of the thermophysical parameters of soil and soil are of great importance in the gas industry for solving thermodynamic problems associated with predicting temperatures when drilling deep and superdeep wells, calculating gas reserves, predicting the temperature of fluids at the wellhead of production wells, evaluating the filtration parameters of the reservoir, heat treatment of productive horizons, transport and underground storage of gas.

Temperature is one of the main factors affecting the thermal conductivity of the soil. It was found that the nature of the effect of temperature on the thermophysical parameters of the soil-ground is not linear [1]. In this regard, there is an urgent need to solve the nonlinear equation of heat conduction. To do this, consider a nonlinear heat equation with Robin's boundary conditions

$$c\,(u)\,\rho\,(u)\,\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\,(u)\,\frac{\partial y}{\partial x}\right) \tag{1}$$

$$u|_{t=0}=u_0\,(x) \tag{2}$$

$$k\,(u)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}= h_{ins}\,(u-u_{ins}\,(t))|_{x=0} \tag{3}$$

$$k\,(u)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}= -h_{out}\,(u-u_{out}\,(t))|_{x=l} \tag{4}$$

where the dependence of the coefficients is expressed by the following equations

$$c\,(u)=c_0+c_1u,$$

$$\rho\,(u)=\rho_0+\rho_1u,$$

$$k\,(u)=k_0+k_1u+k_2u^2+k_3u^3$$

Approximating (1) - (4) by a nonlinear difference scheme, we obtain a system of equations. Applying Newton's method for the resulting nonlinear system and taking the linearized solution of system (1) - (4) as an initial approximation, one can obtain a solution for each iteration step using the Thomas method. Note that to solve the problem of soil freezing, the boundary value problem of heat conduction was solved in [2].

Funding: The authors were supported by the grant No. AP08855955 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: nonlinear heat equation, Newton's method, Thomas' method, iterative methods, thermophysical properties

References

[1] Spevak L.F., Nefedova O.A. Solution of the Nonlinear Heat Equation by The Boundary Element Method Using the Dual Reciprocity Method, *International Journal of Applied and Fundamental Research*, **1**:12 (2015), 50–55.

[2] Rysbaiuly B., Rysbaeva N. The method of solving nonlinear heat transfer model in freezing soil, *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications (EJMCA)*, **4**:8 (2020), 83–96.

— ⁂ —

INVERSE PROBLEM FOR DETERMINING THE THERMAL CONDUCTIVITY COEFFICIENT OF TWO-LAYER STRUCTURE

Bolatbek RYSBAIULY[1,a], Nazerke MUKHAMETKALIYEVA [1,2,b]

[1] *International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*b.rysbaiuly@mail.ru*, [b]*nazerkem09@gmail.com*

Methods based on solving inverse problems continue to be a rapidly growing area of research in the field of science and technology. In some cases, they are the most effective tool for obtaining the required results in the production of materials and products. These methods play a special role in those branches of technology where materials and structures are working to the limit of their capabilities. In these cases, the reliability and accuracy of the study are especially important.

Currently, the construction market often receives a variety of new building materials. Often the thermophysical parameters of these materials are unknown or after a long operation of artificial structures under the influence of wind, moisture and the sun, the physical and chemical properties of the materials of the constituent structures change. As a result of which, all thermophysical parameters of composite materials become different. Under these conditions, long-term reliable prediction of the processes occurring in multilayer structures becomes impossible. Produced modern devices, in most cases, are designed to measure the thermophysical parameters of solids and are focused on the study of thermal properties on samples of certain sizes and shapes [1, 2]. Therefore, the development of methods for calculating all the thermophysical parameters of a multilayer medium and the automation of finding these parameters becomes an urgent task.

The object of study is a two-layer rectangular structure which is affected by two different ambient temperatures on both sides. The material is thermally insulated along the other edges. The equation of thermal conductivity was taken as the main equation mathematical model

$$c(x)\,\rho(x)\,\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{1}$$

$$k(x)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left. h_{ins}\left(u-u_{ins}(t)\right)\right|_{x=0} \tag{2}$$

$$k(x)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = \left. -h_{out}\left(u-u_{out}(t)\right)\right|_{x=l} \tag{3}$$

$$\left.u\right|_{t=0}=u_0(x) \tag{4}$$

where the dependence of the coefficients is expressed by the following equations

$$c(u)=c_0+c_1u,$$

$$\rho(u)=\rho_0+\rho_1u,$$

$$k(u)=k_0+k_1u+k_2u^2+k_3u^3$$

On the basis of the functional minimization method, methods for finding the thermal conductivity coefficients of a multilayer medium have been developed [3]. The developed methods will be implemented numerically using optimization methods.

Funding: The authors were supported by the grant No. AP08855955 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: inverse problem, coefficient of thermal conductivity, heat equation

References

[1] Nerpin, S. V. Physics of soil. , *Moscow, Science*, **1**:12 (1967), 584.

[2] Fokin, V. M Non-destructive control of heat-physical properties of building materials, Engineering, **1** (1967), 137.

[3] Bolatbek Rysbaiuly, Zhanat O. Karashbayeva and Meiirzhan Ryskeldi A Boundary Inverse Problem for the Process of Heat and Moisture Transfer in Multilayered Region, *AIP Conference Proceedings 1880*, (2017)

— ⁂ ⁂ ⁂ —

CONTROLLABILITY PROBLEM IN DYNAMICAL MODELS OF COMPLEX NETWORKS

Felix SADYRBAEV[1,2]

[1] *Institute of Mathematics and Computer Science, University of Latvia, Riga, Latvia*

[2] *Daugavpils University, Daugavpils, Latvia*

E-mail: felix@latnet.lv

We consider systems of the form

$$\begin{cases} x_1' = \dfrac{1}{1+e^{-\mu_1(w_{11}x_1+w_{12}x_2+w_{13}x_3-\theta_1)}} - v_1x_1, \\ x_2' = \dfrac{1}{1+e^{-\mu_2(w_{21}x_1+w_{22}x_2+w_{23}x_3-\theta_2)}} - v_2x_2, \\ x_3' = \dfrac{1}{1+e^{-\mu_3(w_{31}x_1+w_{32}x_2+w_{33}x_3-\theta_3)}} - v_3x_3, \end{cases} \tag{1}$$

which model evolution of a network, consisting of elements x_i. The above system is for the case $n = 3$, generally the dimension can be arbitrary. The *regulatory* matrix

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{pmatrix} \tag{2}$$

describes interrelations between the elements of a network. Future states of a network are associated with attractors of the system (1). These attractors can be stable equilibria, stable periodic trajectories and of more complicated structure. The controllability problem arises in a natural way, is relevant and means the ability to redirect a given trajectory from one attractor to the required one.

Keywords: genetic networks, dynamical systems, attractors, control over a network

2010 Mathematics Subject Classification: 34C60, 34D45, 92B20

References

[1] Brokan E., Sadyrbaev F. On controllability of nonlinear dynamical network, *AIP Conference Proceedings*, **2116** (2019), 040005.

[2] Ogorelova D., Sadyrbaev F., Sengileyev V. Control in Inhibitory Genetic Regulatory Network Models, *Contemporary Mathematics*, **1**:5 (2020), 421–428.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTION TO ONE INVERSE PROBLEM OF GRAVIMETRIC MONITORING

Mark SIGALOVSKY[1,a]

[1] *Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Republic of Kazakhstan*
E-mail: [a]*mark.sgl15@yandex.ru*

Definition. Here, under *inverse gravimetric problem of mathematical geophysics*, we mention the problem of data restoration for rock density distribution by the data of gravitational field distribution database over the studied region.

Problem Statement Overview. *Problems 1 and 2.* To get gravitational setting over the deposit, we build mathematical model based on Poisson equation

$$\Delta u(x;y) = -4\pi G\psi(x;y),\ (x;y) \in \Omega \tag{1}$$

(where Ω is whole *search area*), and establish special boundary conditions on the part of boundary which are specified physically (see [1]). In the left-hand side of Poisson equation (1), scalar function u of gravitational potential is involved; and in the right-hand side there is function ψ of density distribution over the region. Finally, we have two some different problems of restoring the pair of parameters: 1) $(a;b)$, where numbers are center coordinates of rectangular target area - Problem 1; 2) $(c;d)$, where c is depth and d is thickness of observed productive layer - Problem 2. In both cases, we finally arrive to minimization problem of a kind:

$$I(k;l) = \int_0^L \left[\frac{\partial u(x,0)}{\partial y} - \beta(x)\right]^2 dx \to \min, \tag{2}$$

where $(k;l)$ represents some of parameter pairs 1), 2) (according to a problem), u holds as mentioned above and β is known distribution of gravitational potential vertical derivative as measured on-Earth surface, and all associated boundary conditions are met (see [1]). However, in both cases we are able to proof that, if the solution exists, then it is unique. This fact does not depend on what numeric method we choose to solve inverse problem (earlier, three numerical methods for this problem were studied in comparison; see full problem statement and according theorems in [1], [2]).

Theorem: *If there exists Solution to Problem 1 (or Problem 2), then it is UNIQUE.*

Proof Outline: 1. Let's conduct our proof by contradiction. Let global minimum $\min I$ *exist.* We state that the solution $I_{min} = I(v_0)$ is unique; so, in contra, let's assume that we have at least two minima: $I^{(1)}_{min} = I(v_1)$ and $I^{(2)}_{min} = I(v_2)$. Also note that if $I(v_1) = I(v_2) = \min I$, then

$$\min I = \frac{I(v_1) + I(v_2)}{2} = \frac{1}{2}I(v_1) + \frac{1}{2}I(v_2) \tag{3}$$

2. In (1), denoting Laplacian by $A(\cdot)$ and right-hand side by $v + f$ with respect to boundary conditions; and letting be $B = \frac{\partial(\cdot)}{\partial y}$ and $\beta(x) = z$ in (2), from (1) and (2) we obtain operator equations

$$Au = v + f \quad (4.1); \quad I(v) = \|Bu - z\|^2 \quad (4.2) \tag{4}$$

in virtue of integral of square in (2) is known form of scalar product [3].

3. Let's take for v some linear combination of minima: $v = \alpha v_1 + (1-\alpha)v_2$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Then from (4.2) we have

$$I(v) = I(v_1 + v_2) = \|Bu(v) - z\|^2 = \|\alpha Bu(v_1) + (1-\alpha)Bu(v_2) - z\|^2$$

.

4. So, due to proven convexity of squares and from norm properties, we obtain:

$$I(v) = \|\alpha Bu(v_1) + (1-\alpha)Bu(v_2) - z\|^2 \leq \|\alpha Bu(v_1) + (1-\alpha)Bu(v_2)\|^2 \leq \tag{5}$$

$$\leq (\|\alpha Bu(v_1)\| + \|(1-\alpha)Bu(v_2)\|)^2$$

5. From (5), going to scalar product form and estimating, we finally obtain:

$$I(v) = \|\alpha Bu(v_1) + (1-\alpha)Bu(v_2) - z\|^2 \leq \|\alpha Bu(v_1) + (1-\alpha)Bu(v_2)\|^2 = \tag{6}$$

$$= (\alpha Bu(v_1) + (1-\alpha)Bu(v_2), \alpha Bu(v_1) + (1-\alpha)Bu(v_2)) < \alpha I(v_1) + (1-\alpha)I(v_2) \leq$$

$\leq \frac{1}{2}I(v_1) + \frac{1}{2}I(v_2) = \min I.$

So, assuming two minima v_1,v_2 existence, we got *contradiction* (for somewhat v, value $I(v)$ is less than global minimum of I, which is impossible). The contradiction proves the theorem, Q.E.D.

Funding: The author was supported by the grant No. AP05135158-OT-19 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: solution existence and uniqueness, inverse problems, mathematical geophysics, oil&gas mining, gravimetric monitoring, conditions on the part of boundary.

2010 Mathematics Subject Classification: 49M30, 86A22, 35J05 , 35R30.

References

[1] Сигаловский М.А,. Дифференциальные свойства целевого функционала в одной обратной задаче гравиметрии. *Abai University Bulletin,*,Phys. Math. Sciences 3(63), Алматы, (2018).

[2] S. Ya. Serovajsky, A. A. Azimov, M. O. Kenzhebayeva, D. B. Nurseitov, A. T. Nurseitova, M. A. Sigalovskiy. Mathematical problems of gravimetry and its applications, *International Journal of Mathematics and Physics.* (2019), Vol. 4, no.2.

[3] А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.:Наука, Физматлит (1981).

— ⋇⋇⋇ —

THE STEADY STATES AND TRAVELING WAVE SOLUTIONS OF THE MODIFIED HEISENBERG EQUATION

Zhanat ZHUNUSSOVA[1,2,a], Anastasios BOUNTIS[3,b] Karlygash DOSMAGULOVA[1,2,c]
Yeskendyr ASHIMOV[1,2,d]

[1]*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
[2]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[3]*University of Patras, Patras, Greece*
E-mail: [a]*zhzhkh@mail.ru,* [b]*anastasios.bountis@nu.edu.kz,* [c]*karlygash.dosmagulova@gmail.com,*
[d]*yeskendyr@mail.ru*

The steady states and traveling wave solutions of the Heisenberg and M-I spin systems were recently studied in [1], where the steady states and traveling wave solutions of the 1+1 Heisenberg spin system were obtained using spherical coordinates on the unit sphere. Analogous solutions for the M-I 2+1 spin system were also discovered in [1]. We then studied the extension of the Heisenberg system to the corresponding 2+1 Landau-Lifshitz-Gilbert (LLG) equation, which includes a dissipation term with a small parameter λ [2,4]

$$\vec{S}_t = \vec{S} \times \vec{S}_{xx} + \lambda(\vec{S}_{xx} - (\vec{S} \cdot \vec{S}_{xx})\vec{S}), \quad \vec{S} = (u, v, w), u^2 + v^2 + w^2 = 1 \tag{1}$$

Equation (1) is the isotropic case of LLG equation, for which it is known that it can be mapped to a damped, non-local nonlinear Schrödinger equation [2]. Proceeding in a manner analogous to [1] we have also obtained steady states and traveling waves for the the LLG equation. As in [1], the graphs of these solutions can constructed by plotting u, v, w variables as functions of x, or $\eta = x - vt$, respectively. Thus, including the damping parameter the graphs of these solutions can be similarly obtained and graphically illustrated.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08856381).

Keywords: Heisenberg equation, nonlinear Schrödinger equation, steady state, traveling wave solution

2010 Mathematics Subject Classification: 34A34, 34B15, 35C07

References

[1] Bountis T., Zhunussova Zh. and Dosmagulova K. Steady states and travelling wave solutions of the Heisenberg and M-I spin systems, *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, **22** (2019), 116–127.

[2] Lakshmanan M. The fascinating world of the Landau-Lifshitz-Gilbert equation: An overview, *Phil. Trans. R. Soc.*, **A 369** (2011), 1280–1300.

[3] Lakshmanan M., Daniel M. Perturbation of solitons in the classical continuum isotropic Heisenberg spin system, *Physica*, **A 120** (1983), 125–152.

[4] Bountis T., Zhunussova Zh., Dosmagulova K., Kanellopoulos G. Integrable and Non-Integrable Lotka-Volterra Systems, *Physics Letters A*, (2021), Preprint submitted for publication.

— ⁂ ⁂ ⁂ —

Предметный указатель