Министерство образования и науки Республики Казахстан
Институт математики и математического моделирования

Традиционная международная научная апрельская конференция

тезисы докладов

Алматы 2018

УДК 51

ББК 22.1

Традиционная международная научная апрельская конференция

Издание - Институт математики и математического моделирования МОН РК. -Алматы: ИМММ. - 2018. 95 с.

В книге представлены тезисы докладов традиционной международной научной апрельской конференции. Тезисы докладов разделены на 3 секции: Алгебра, математическая логика и геометрия; Дифференциальные уравнения и теория операторов. Теория функций и функциональный анализ; Математическое моделирование и уравнения математической физики.

Книга предназначена для широкого круга читателей - научным работникам в области математики, механики и информатики; преподователям; студентам высших учебных заведений механико-математического профиля: магистрантам, докторантам, а также всем тем, кто интересуется актуальными проблемами чистой и прикладной математики.

УДК 51

ББК 22.1

Программный комитет

- академик НАН РК Т. Ш. Кальменов председатель (Алматы, Казахстан)
- профессор Л. А. Алексеева (Алматы, Казахстан)
- член-корреспондент НАН РК Б. С. Байжанов (Алматы, Казахстан)
- профессор Г. И. Бижанова (Алматы, Казахстан)
- академик НАН РК Н. К. Блиев (Алматы, Казахстан)
- академик НАН РК А. С. Джумадильдаев (Алматы, Казахстан)
- член-корреспондент НАН РК Б. Ш. Кулпешов (Алматы, Казахстан)
- академик НАН РК М. О. Отелбаев (Алматы, Казахстан)
- член-корреспондент НАН РК М.А. Садыбеков (Алматы, Казахстан)
- академик НАН РК С. Н. Харин (Алматы, Казахстан)

Организационный комитет

- Б.С. Байжанов, председатель (ИМММ)
- Б.Ш. Кулпешов, сопредседатель (МУИТ, ИМММ)
- М.И. Алькенов (ИМММ)
- С.С. Байжанов (КазНУ, ИМММ)
- В.В. Вербовский (СДУ, ИМММ)
- Т.Е. Жакупбеков (ИМММ)
- Т.С. Замбарная (КазНУ, ИМММ)
- Ф.Е. Кобдикбаева (КазНУ, ИМММ)
- А. Муканкызы, ответственный секретарь (КазНУ, ИМММ)

СЕКЦИИ:

1. Алгебра, математическая логика и геометрия

Председатель секции – Байжанов Бектур Сембиевич

2. Дифференциальные уравнения и теория операторов. Теория функций и функциональный анализ.

Председатель секции – Садыбеков Махмуд Абдысаметович

3. Математическое моделирование и уравнения математической физики

Председатель секции – Алексеева Людмила Алексеевна

Содержание

1 Алгебра, математическая логика и геометрия

On countable models of ordered theories

Bektur Baizhanov[1,a], Tatyana Zambarnaya[1,2,b]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

[2] *Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

E-mail: [a]*baizhanov@math.kz* , [b]*t.zambar@gmail.com*

Let T be a small complete theory, $p(\bar{x})$ be a non-principal type over a finite subset A of some model of T. We say that the type p is **extremely trivial**, if for every natural number $n \geq 1$, and every realizations $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, ...\bar{\beta}_n$ of p, $p(M(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, ..., \bar{\beta}_n, \bar{a})) = \{\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2...\bar{\beta}_n\}$, where $\bar{a}$ is some enumeration of the set A, and $p(M(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, ..., \bar{\beta}_n, \bar{a}))$ is the set of realizations of the type p in a prime model of T over$\bar{\beta}_1$, $\bar{\beta}_2$, ..., $\bar{\beta}_n$, and $\bar{a}$. The type p is **almost extremely trivial**, if for every $n \geq 1$ and every realizations $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, ...\bar{\beta}_n$ of p, the set $p(M(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, ..., \bar{\beta}_m, \bar{a}))$ is finite. The type p is **eventually extremely trivial**, if for every $n \geq 1$ there exist $m \geq n$ and realizations $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, ...\bar{\beta}_m$ of p such that $p(M(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, ..., \bar{\beta}_m, \bar{a})) = \{\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2...\bar{\beta}_m\}$.

We will give examples of such types, show the connection with type-preserving formulas, and prove the following theorems:

Theorem 1. *Let T be a small complete theory. If there exists a finite subset A of some model of T and an eventually extremely trivial non-isolated type $p(\bar{x}) \in S(A)$, then $I(T \cup tp(\bar{a}/\emptyset), \omega) \geq \omega$, where $\bar{a}$ is a tuple enumerating the set A.*

Theorem 2. *Let T be a small complete theory with a dense linear order without endpoints. If there exists a finite subset A of a model $\mathfrak{M} \models T$ and a non-principal extremely trivial type $p(x) \in S_1(A)$, then T has 2^ω countable non-isomorphic models.*

Funding: The authors were supported by the grant no. AP05134992 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: small theory, linear order, number of countable models

2010 Mathematics Subject Classification: 03C15, 03C64

References

[1] Alibek A.A., Baizhanov B.S., Zambarnaya T.S. Discrete order on a definable set and the number of models, *Matematicheskij zhurnal*, **14**:3 (2014), 5–13.

On expansion of o-λ-stable theories by externally definable sets

V. VERBOVSKIY

Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhsnat

E-mail:viktor.verbovskiy@gmail.com

Definition 1. [1]

1. An ordered structure $\mathcal{M}$ is *o-stable in* λ if for any $A \subseteq M$ with $|A| \leq \lambda$ and for any cut $\langle C, D \rangle$ in $\mathcal{M}$ there are at most λ 1-types over A which are consistent with the cut $\langle C, D \rangle$, i.e. $\left|S^1_{\langle C,D\rangle}(A)\right| \leq \lambda$.

2. A theory T is *o-stable in* λ if every model of T is o-stable. Sometimes I write T is o-λ-stable.

3. A theory T is *o-stable* if there exists an infinite cardinal λ in which T is o-stable.

4. A theory T is *o-superstable* if there exists a cardinal λ such that T is o-stable in all $\mu \geq \lambda$.

Definition 2. [2]

1. We say that Morley o-rank of a formula $\phi(x)$ inside a cut $\langle C, D \rangle$ in $\mathcal{M}$ is equal to or greater than 1 and write $RM_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}(\phi)\geq 1$ for this, if $\{\phi(x)\} \cup \langle C, D \rangle$ is consistent.

2. $RM_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}(\phi) \geq \alpha + 1$ if there are infinitely many pairwise inconsistent formulae $\psi_i(x)$ such that $RM_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}\big(\phi(x) \wedge \psi_i(x)\big) \geq \alpha$.

3. If α is a limit ordinal, then $RM_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}(\phi) \geq \alpha$ if $RM_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}(\phi) \geq \beta$ for all $\beta < \alpha$.

4. $RM_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}(\phi) = \alpha$ if $RM_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}(\phi) \geq \alpha$ and $RM_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}(\phi) \not\geq \alpha + 1$.

Let T be a theory of a language $\mathcal{L}$, and $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ two models of T such that $\mathcal{N}$ is $|M|^+$-saturated. For any formula $\phi(\bar{x}, \bar{\alpha})$ with parameters $\bar{\alpha}$ in N I add a new relational symbol $P_{\phi(\bar{x},\bar{\alpha})}(\bar{x})$ interpreted by $P_{\phi(\bar{x},\bar{\alpha})}(M) = \phi(N, \bar{\alpha}) \cap M^k$ in order to form language $\mathcal{L}^*$. The set $P_{\phi(\bar{x},\bar{\alpha})}(M)$ is called *externally definable.*

The author proved in [2] the following theorem.

Theorem 3. [2] Let T be an o-stable theory of a language $\mathcal{L}$, and $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ two models of T such that $\mathcal{N}$ is $|M|^+$-saturated. Then the elementary theory T^* of the expansion $\mathcal{M}^*$ of $\mathcal{M}$ is o-stable.

Here we give a stronger version of Theorem 3.

Theorem 4. Let T be an o-λ-stable theory of a language $\mathcal{L}$, and $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ two models of T such that $\mathcal{N}$ is $|M|^+$-saturated. Then the elementary theory T^* of the expansion $\mathcal{M}^*$ of $\mathcal{M}$ is o-λ-stable. In particular, if T is o-ω-stable, then so is T^*, and if T is o-superstable, then so is T^*.

Theorem 5. There exists an example of a o-ω-stable theory of a language $\mathcal{L}$, such that in any model of T there exists a cut such that Morley o-rank of the formula $x = x$ inside this cut in the language $\mathcal{L}$ is less than Morley o-rank of the formula $x = x$ inside this cut in the language $\mathcal{L}^*$.

Funding: The author was supported by the grant no. AP05132688 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: o-minimal, stable, externally definable sets, expansion, NIP

2010 Mathematics Subject Classification: 03B10, 03C52, 03C60, 03C64

References

[1] Baizhanov B. and Verbovskii V. O-stable theories, *Algebra and Logic*, **50**:3 (2011), 211–225.

[2] Verbovskiy V. O-stable ordered groups, *Siberian Advances in Mathemtics*, **22**:1 (2012), 60–74.

Continued fraction expansion and Fractal Geometry

Sh.KADYROV

Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan
E-mail: shirali.kadyrov@sdu.edu.kz

Continued fraction expansion theory is a subbranch of Number Theory. For every real number x there exists a sequence $a_0, a_1, a_2, \dots$ (called *partial quotients*) such that x can be written in the continued fraction expansion form

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}; \quad a_0 \in \mathbb{Z}, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{N}.$$

For convenience we write $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$. Continued fraction expansion gives a coding between real numbers x and sequences of natural numbers $[a_0; a_1, a_2, \dots]$. It is an interesting question to investigate common properties of the coding sequences for 'most' of the real numbers. Some of the well-known properties are obtained in Corollary 3.8 of [1]. In particular, it is well-known that for *almost every* real number x the partial quotients satisfy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \infty.$$

In words, for almost every real number the partial quotients diverges to infinity on average. On the other hand, the set S of all real numbers with divergent partial quotients, that is $a_n \to \infty$ as $n \to \infty$, has Lebesgue measure zero. Whenever a set is a null set, it is interesting to study its size in the sense of fractal geometry. Fractal dimension is a way to measure complexity of sets. The larger the fractal dimension the more complex the set is. There are various fractal dimension notions and our interest in this study is Hausdorff dimension.

Going back to the null set S above Good in [2] showed that

Theorem 1. *The set S of reals whose partial quotients diverges has Hausdorff dimension equal to* $1/2$.

In this talk, we briefly define the notion of fractal dimension and consider various exceptional sets related to the behavior of partial quotients and their fractal dimensions.

Keywords: Continued fractions, Diophantine approximation, Dirichlet's approximation theorem, Hausdorff dimension.

2010 Mathematics Subject Classification: 11A55, 11K55

References

[1] Einsiedler, M., Ward, T. *Ergodic Theory with a view towards Number Theory*, Springer, London (2013).

[2] Good I.J The fractional dimensional theory of continued fractions, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* , **37** (1941), 199–228.

Relative separability in hypergraphs of models of theories: general and ordered cases

B. KULPESHOV[1,a], S. SUDOPLATOV[2,b]

[1] *International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan*

[2] *Sobolev Institute of Mathematics, NSTU, NSU, Russia*

E-mail: [a]*b.kulpeshov@iitu.kz*, [b]*sudoplat@math.nsc.ru*

We transform the studying of separability of elements and sets in hypergraphs of models of a theory [1] to the relative one applying it for ordered theories [2], too.

Let (X, Y) be a hypergraph, x_1, x_2 be distinct elements of X, $Z \subset X$, $x_2 \notin Z$. We say that the element x_1 is *Z-separated* or *Z-separable* from the element x_2, or *(T_0, Z)-separable* if there is $y \in Y$ such that $x_1 \in y \cup Z$ and $x_2 \notin y$. In this case the set y is called *Z-separating* x_1 from x_2. At the additional condition $x_1 \notin Z$ the elements x_1 and x_2 are called *Z-separable*, *(T_2, Z)-separable*, or *Hausdorff Z-separable* if there are $y_1, y_2 \in Y$ such that $(y_1 \cap y_2) \setminus Z = \varnothing$, $x_1 \in y_1$ and $x_2 \in y_2$.

Let X_1, X_2 be nonempty subsets of the set X, $(X_1 \cap X_2) \setminus Z = \emptyset$, $X_2 \not\subseteq Z$. We say that the set X_1 is *Z-separated* or *Z-separable* from the set X_2, or *(T_0, Z)-separable* if there is $y \in Y$ such that $X_1 \subseteq y \cup Z$ and $(X_2 \cap y) \setminus Z = \varnothing$. At the additional condition $X_1 \not\subseteq Z$ the sets X_1 and X_2 are called *Z-separable*, *(T_2, Z)-separable*, or *Hausdorff Z-separable* if there are $y_1, y_2 \in Y$ such that $(y_1 \cap y_2) \setminus Z = \varnothing$, $X_1 \subseteq y_1 \cup Z$ and $X_2 \subseteq y_2 \cup Z$.

Let $\mathcal{M}$ be some model of a complete theory T. Following [1], we denote by $H(\mathcal{M})$ a family of all subsets N of the universe M of $\mathcal{M}$ that are universes of elementary submodels $\mathcal{N}$ of the model $\mathcal{M}$: $H(\mathcal{M}) = \{N \mid \mathcal{N} \preccurlyeq \mathcal{M}\}$. The pair $(M, H(\mathcal{M}))$ is called the *hypergraph of elementary submodels* of the model $\mathcal{M}$ and denoted by $\mathcal{H}(\mathcal{M})$. For a cardinality λ by $H_\lambda(\mathcal{M})$ and $\mathcal{H}_\lambda(\mathcal{M})$ are denoted restrictions for $H(\mathcal{M})$ and $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ respectively on the class of elementary submodels $\mathcal{N}$ of models $\mathcal{M}$ such that $|N| < \lambda$.

Theorem 1. *Let $\mathcal{M}$ be an ω-saturated model of a countable complete theory T, Z be the algebraic closure of some finite set in $\mathcal{M}$, a and b be elements of $\mathcal{M}$, $b \notin Z$. The following are equivalent:*

(1) *the element a is Z-separable from the element b in $H(\mathcal{M})$ by some set y from $H(\mathcal{M})$ containing Z;*

(2) *the element a is Z-separable from the element b in $H_{\omega_1}(\mathcal{M})$ by some set y from $H_{\omega_1}(\mathcal{M})$ containing Z;*

(3) $b \notin \mathrm{acl}(aZ)$.

Theorem 2. *Let $\mathcal{M}$ be an ω-saturated model of a countable complete theory T, Z be the algebraic closure of some finite set in $\mathcal{M}$, a and b be elements of $\mathcal{M}$, $a, b \notin Z$. The following are equivalent:*

(1) *the elements a and b are Z-separable in $H(\mathcal{M})$ by some sets y_1 and y_2 from $H(\mathcal{M})$ containing Z;*

(2) *the elements a and b are Z-separable in $H_{\omega_1}(\mathcal{M})$ by some sets y_1 and y_2 from $H_{\omega_1}(\mathcal{M})$ containing Z;*

(3) $(\mathrm{acl}(aZ) \cap \mathrm{acl}(bZ)) \setminus Z = \varnothing$.

Theorem 3. *Let T be an almost ω-categorical quite o-minimal theory, $\mathcal{M}$ be an ω-saturated model of the theory T, Z be the algebraic closure of some finite set in $\mathcal{M}$, $a, b \in M \setminus Z$. Then the following conditions are equivalent:*

(1) *a is Z-separable from b in $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ by some set y from $H(\mathcal{M})$ containing Z;*

(2) *b is Z-separable from a in $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ by some set y from $H(\mathcal{M})$ containing Z;*

(3) *the elements a and b are Z-separable in $H(\mathcal{M})$ by some sets y_1 and y_2 from $H(\mathcal{M})$ containing Z;*

(4) $a \notin \mathrm{dcl}(\{bZ\})$;

(5) $b \notin \mathrm{dcl}(\{aZ\})$.

(6) $(\mathrm{dcl}(aZ) \cap \mathrm{dcl}(bZ)) \setminus Z = \varnothing$.

Funding: This research was partially supported by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP05132546) and Russian Foundation for Basic Researches (Project No. 17-01-00531-a).

Keywords: hypergraph of models, elementary theory, relative separability, quite o-minimal theory

2010 Mathematics Subject Classification: 03C50, 03C64, 03C35, 05C65, 54A05

References

[1] Sudoplatov S.V. On the separability of elements and sets in hypergraphs of models of a theory, *Bulletin of Karagandy University. Series Mathematics*, **82**:2 (2016), 113–120.

[2] Kulpeshov B.Sh. Convexity rank and orthogonality in weakly o-minimal theories, *News of National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, series physics-mathematics*, **227** (2003), 26–31.

Relations of equivalences and dp-rank

A. MUKANKYZY

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, 050010, Almaty, 125 Pushkin Str.

Al-Farabi Kazakh National University, 050040, Almaty, 71 al-Farabi Ave.
E-mail: amukankyzy@gmail.com

In this paper we establish the connection between dp-rank and different families of relations of equivalences.

Definition. A theory T has dp-rank ≥ n, if there are formulas $\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y), ..., \varphi_n(x,y)$ and mutually indescernible sequences $(a_i^1)_{i<\omega}, (a_i^2)_{i<\omega}, ..., (a_i^n)_{i<\omega}$, such that for any function $\sigma : \{1, ..., n\} \to \omega$ the type

$$\{\varphi_k(x, a^k_{\sigma(k)}) : k \leq n\} \cup \{\neg\varphi_k(x, a^k_i) : i \neq \sigma(k), k \leq n\}$$

is consistent.

Definition. A theory T has dp-rank ω, if for any $n < \omega$ T has dp-rank ≥ n.

Proposition. There exists an ω-stable theory with dp-rank ω.

Definition. A theory T has dp-rank infinity, if there is countable set of formulas $\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y), ...$ and mutually indescernible sequences $(a_i^1)_{i<\omega}, (a_i^2)_{i<\omega}, ...$ such that for any function $\sigma : \omega \to \omega$ the type

$$\{\varphi_k(x, a^k_{\sigma(k)}) : k \leq \omega\} \cup \{\neg\varphi_k(x, a^k_i) : i \neq \sigma(k), k \leq \omega\}$$

is consistent.

Theorem. If theory has dp-rank infinity then it is non-superstable.

Definition. We say, that a model $\mathfrak{M}$ has a family of relations of equivalences $F = \{E_i^2 \mid i \in I\}$ of depth $\geq n$, if the following holds:

1. There exists definable set such that for any $i \in I$, $E_i^2(x,y)$ is relation of equivalence that determines a partition of the definable set into infinite number of classes of equivalence.

2. Any two classess of different equivalence reltaions have non-empty intersection.

3. Conjunction of any number of different relations of equivalences less than n does not generate trivial relations of equivalences.

We say that a model $\mathfrak{M}$ has a family of relations of equivalences of depth ω if (3) holds for any n.

Proposition.

1. If complete theory T has a model with family of relations of equivalences of depth $\geq n$, then T has dp-rank $\geq n$.

2. If complete theory T has a model with the family of relations of equivalences of depth ω, then T is non-superstable.

Definition. We say that family of equivalence relations F of depth ω is uniformly if there is a formula $E(x,y,\bar{z})$ such that for any $i \in I$ there is $\bar{\alpha}_i$ and $E_i(x,y) = E(x,y,\bar{\alpha}_i)$.

Theorem.

Any of theory with uniform family of equivalences of depth ω has Independence property.

Funding: The author was supported by the grant no. AP05134992 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: trees of formulas, dp-rank, independence property, superstable theory, relation of equivalence

References

[1] Shelah S. *Classification theory and the number of non-isomorphis models*, 1978.

[2] Simon P. *Dp-minimality: invariant types and dp-rank*, *Journal of Symbolic Logic*, **1**:2 (2014), 79 (4)–1025–1045.

[3] Baizhanov B., Shelah S., Baldwin J. *Subsets of superstable structures are weakly benign*, *Journal of Symbolic Logic*, 70 (1)–142–150 (2005) ,

Эквивалентность-генерируемые формулы в слабо о-минимальных теориях

С.С. БАЙЖАНОВ[1,a], Б.Ш. КУЛПЕШОВ[2,b]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

[2] *Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан*

E-mail: [a]*sayan-5225@mail.ru*, [b]*b.kulepshov@iitu.kz*

В настоящем докладе мы обсуждаем вопрос сохранения свойств при обогащениях моделей счетно категоричных слабо о-минимальных теорий бинарными предикатами. Ранее в работе [1] нами был исследован вопрос сохранения свойств при обогащениях моделей счетно категоричных слабо о-минимальных теорий унарными предикатами, а в работе [4] — отношениями эквивалентности.

Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический, $R(x,y)$ — A-определимая формула, являющаяся p-стабильной. В силу слабой о-минимальности M множество $R(M,a)$ является объединением конечного числа $A \cup \{a\}$-определимых выпуклых множеств. Существует конечное число таких множеств, находящихся левее элемента a. Обозначим их через $R_1^l(x,y), \ldots, R_s^l(x,y)$, при этом будем считать что $R_s^l(M,a) > R_{s-1}^l(M,a) > \ldots > R_1^l(M,a) \geq a$. Аналогично существует конечное число определимых выпуклых множеств, находящихся правее элемента a. Обозначим их через $R_1^r(x,y)$, $\ldots$, $R_m^r(x,y)$, при этом будем считать что $a \leq R_1^r(M,a) < R_2^r(M,a) < \ldots < R_m^r(M,a)$.

Возможно существует определимое выпуклое множество, внутренность которого содержит элемент a. Обозначим его через $R^c(x,y)$. Таким образом, если $R^c(M,a) \neq \emptyset$, то существуют $b_1, b_2 \in R^c(M,a)$ такие, что $b_1 < a < b_2$. Определим следующие формулы: $F^c(x,y) := y \leq x \wedge R^c(x,y)$, $F_i^r(x,y) := y \leq x \wedge \forall t[R_i^r(t,y) \to x < t], F_i^{r*}(x,y) :=$

$y \le x \wedge \exists t[R_i^r(t,y) \wedge x \le t]$, где $1 \le i \le m$. Аналогично определяются формулы $G^c(x,y), G_j^l(x,y), G_j^{l*}(x,y)$. Очевидно что формулы $F^c(x,y), F_i^r(x,y), F_i^{r*}(x,y), 1 \le i \le m$, являются p-стабильными выпуклыми вправо, а формулы $G^c(x,y)$, $G_j^l(x,y)$, $G_j^{l*}(x,\ y)$, $1 \le j \le s$, являются p-стабильными выпуклыми влево.

Будем говорить, что формула $R(x,y)$ является *эквивалентность-генерируемой*, если каждая нетривиальная формула из множества $\Delta := \{F^c(x,y),\ F_i^r(x,y),\ F_i^{r*}(x,y),\ G^c(x,y),\ G_j^l(x,y),\ G_j^{l*}(x,y) \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le s\}$ является эквивалентность-генерирующей.

Пример. Пусть $M := \langle \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, < \rangle$ — линейно упорядоченная структура. Очевидно что M — счетно категоричная о-минимальная структура. Введем следующие две бинарные формулы $E(x,y)$ и $R_1(x,y)$ на множестве $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$: для любых $a = (m_1,n_1), b = (m_2,n_2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ $E(a,b) \Leftrightarrow m_1 = m_2$, $R_1(a,b) \Leftrightarrow m_1 = m_2 \wedge n_1 \le n_2 < n_1 + \sqrt{2}$.

Пусть $R(x,y) := y \le x \wedge E(x,y) \wedge \neg R_1(x,y)$ и $M' := \langle \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, <, R^2 \rangle$ — обогащение модели M бинарным предикатом $R(x,y)$. Очевидно что M' — 1-неразличимая не счетно категоричная слабо о-минимальная структура. Пусть $F_1(x,y) := y \le x \wedge \forall t[R(t,y) \to x < t]$, $F_2(x,y) := y \le x \wedge \exists t[R(t,y) \wedge x \le t]$. Формула $F_2(x,y)$ является эквивалентность-генерирующей, а $F_1(x,\ y)$ не является эквивалентность-генерирующей. Следовательно, предикат $R(x,y)$ не является эквивалентность-генерируемым.

Теорема 1. *Пусть M — 1-неразличимая счетно категоричная слабо о-минимальная структура ранга выпуклости 1, M' — 1-неразличимое слабо о-минимальное обогащение структуры M бинарным предикатом $R(x,y)$.*
Тогда $Th(M')$ — счетно категорична тогда и только тогда, когда

(1) $R(x,y)$ и $L(x,y) := R(y,x)$ — эквивалентность-генерируемые;

(2) Для каждого $\emptyset$-определимого отношения эквивалентности $E(x,y)$, порожденного предикатом $R(x,y)$, множество E-классов является плотно упорядоченным.

Funding: Исследования поддержаны КН МОН РК (грант AP05132546).

Ключевые слова: слабая о-минимальность, эквивалентность-генерирующая формула, счетная категоричность, обогащение модели

2010 Mathematics Subject Classification: 03C64, 03C15, 03C07

Литература

[1] Байжанов С.С., Кулпешов Б.Ш. Обогащение моделей счетно категоричных слабо о-минимальных теорий унарными предикатами, Тезисы международной конференции "Актуальные проблемы чистой и прикладной математики", посвященной 100-летию академика Тайманова А.Д., Алматы, 2017, 13–15.

[2] Baizhanov S.S., Kulpeshov B.Sh. Expanding 1-indsicernible countably categorical weakly o-minimal theories by equivalence relations, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **15** (2018), 106–114.

О структуре алгебр бинарных формул полигонометрических теорий с условием симметрии

Д. ЕМЕЛЬЯНОВ[1,a], С.СУДОПЛАТОВ[2,b]

[1] *НГУ, Новосибирск, Россия*

[2] *ИМ СО РАН, НГТУ, НГУ, Новосибирск, Россия*

E-mail: [a]*dima-pavlyk@mail.ru*, [b]*sudoplat@math.nsc.ru*

В работе рассматриваются алгебры бинарных формул [1, 2, 3] полигонометрических теорий с условием симметрии [4], описывается структура этих алгебр.

Отметим, что алгебры $\mathfrak{A}$ бинарных формул полигонометрических теорий легко сводятся к их подалгебрам $\mathfrak{A}_c$ для компонент связности.

Алгебра $\mathfrak{A}_c$ для компоненты связности C s-полигонометрии spm пары групп (G_1, G_2) включает метки u для предикатов Q_g, $g \in \mathrm{Pos}(G_1)$, а также метки v для наборов параметров ломаных, соединяющих элементы из C. При этом множество U_0 меток u естественно считать подмножеством множества V меток v. Метки из U_0 будем называть *реберными*, а метки из $V \setminus U_0$ — *нереберными*.

Предложение 1. *Алгебра $\mathfrak{A}_c$ состоит из реберных меток из $u \in U_0$ тогда и только тогда, когда $(|G_1|, |G_2|)$-псевдоплоскость для C образует плоскость.*

Замечание. В общем случае алгебра $\mathfrak{A}_c$ задается параметрами многоугольников простой модели теории $T(\mathrm{spm})$: для меток v и v', задаваемых параметрами $(g_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, g_k)$, $(g'_1, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{m-1}, g'_m)$ двух ломаных, множество $u \cdot v$ состоит из меток w, задаваемых параметрами

$$(g_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, g_k, \beta, g'_1, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{m-1}, g'_m),$$

$\beta \in G_2$. При этом метки w могут быть как реберными, если в spm имеется $(G_1, G_2)^s$-многоугольник вида

$$\begin{pmatrix} g_1 & \ldots & g_{k-1} & g_k & g'_1 & \ldots & g'_{m-1} & g'_m & h \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_{k-1} & \beta & \alpha'_1 & \ldots & \alpha'_{m-1} & \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

так и нереберными, в случае отсутствия $(G_1, G_2)^s$-многоугольников указанного вида с некоторыми β.

Предложение 2. *Для любых точек $p_1 \neq p_2$ s-полигонометрии $\mathrm{spm} = \mathrm{spm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$, не имеющих препятствий для проведения линий $l(p_1, p_2)$, а также для любого положительного элемента h из упорядоченного абелева расширения G'_1 группы G_1 существует s-полигонометрия*

$$\mathrm{spm}' = \mathrm{spm}(G'_1, G_2 * \langle \beta, \gamma \rangle, \mathcal{P}'),$$

расширяющая s-полигонометрию spm и такая, что метка изолирующей формулы, связывающей p_1 и p_2, принадлежит множеству U'_0 реберных меток формул $Q_g(x, y)$, $g \in G'_1$.

На основании предложений 1 и 2 справедлива следующая

Теорема. *Для связной s-полигонометрии* $\mathrm{spm} = \mathrm{spm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$ *следующие условия эквивалентны:*

(1) *существует расширение s-полигонометрии* spm *до некоторой s-полигонометрии* spm' *на плоскости;*

(2) *существует расширение s-полигонометрии* spm *до некоторой s-полигонометрии* spm', *не имеющей нереберных меток;*

(3) spm *не имеет точек $p_1 \neq p_2$, для которых имеются препятствия к проведению линий* $l(p_1, p_2)$.

Funding: Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант No. AP05132546) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-01-00531-а).

Ключевые слова: алгебра бинарных формул, полигонометрическая теория с условием симметрии

2010 Mathematics Subject Classification: 03C65, 03G15, 20N02, 08A02

Литература

[1] Shulepov I.V., Sudoplatov S.V. Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **11** (2014), 380–407.

[2] Судоплатов С.В. *Классификация счетных моделей полных теорий*, НГТУ, Новосибирск (2014).

[3] Емельянов Д.Ю., Судоплатов С.В. О детерминированных и поглощающих алгебрах бинарных формул полигонометрических теорий, *Известия Иркутского государственного университета. Серия "Математика"*, **20** (2017), 32–44.

[4] Судоплатов С.В. *Полигонометрии групп*, НГТУ, Новосибирск (2013).

Ортогональность в почти ω-категоричных вполне о-минимальных теориях

Б.Ш. Кулпешов

Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан
E-mail: b.kulpeshov@iitu.kz

Пусть L — счетный язык первого порядка. Мы рассматриваем L-структуры и предполагаем что L содержит символ бинарного отношения $<$, который интерпретируется как линейный порядок в этих структурах. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M.

В следующих определениях M — слабо о-минимальная структура, A, $B \subseteq M$, M — $|A|^+$-насыщена, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические.

Будем говорить что тип p не является *слабо ортогональным* типу q ($p \not\perp^w q$), если существуют A-определимая формула $H(x, y)$, $\alpha \in p(M)$ и $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ такие что $\beta_1 \in H(M, \alpha)$ и $\beta_2 \notin H(M, \alpha)$.

Будем говорить что тип p не является *вполне ортогональным* типу q ($p \not\perp^q q$), если существует A-определимая биекция $f : p(M) \to q(M)$. Будем говорить что слабо о-минимальная теория является *вполне о-минимальной*, если понятия слабой и вполне ортогональности 1-типов совпадают.

Вполне о-минимальные теории являются подклассом класса слабо о-минимальных теорий, наследующим многие свойства о-минимальных теорий. В работе [1] была решена проблема Воота для вполне о-минимальных теорий: было доказано, что любая счетная вполне о-минимальная теория является либо счетно категоричной, либо эренфойхтовой, либо имеет максимальное число счетных моделей. Этот результат обобщает теорему Л. Майер [2], являющуюся решением проблемы Воота для о-минимальных теорий. Почти ω-категоричность тесно связана с понятием эренфойхтовости теории. Так, в работе [3] доказано, что если T — почти ω-категоричная теория с условием $I(T, \omega) = 3$, то в теории T интерпретируется плотный линейный порядок. В работе [4] были установлены почти ω-категоричность эренфойхтовых вполне о-минимальных теорий и выполнимость принципа замены для алгебраического замыкания в почти ω-категоричных вполне о-минимальных теориях. В настоящем докладе мы представляем теорему ортогональности семейства попарно слабо ортогональных неалгебраических 1-типов в почти ω-категоричных вполне о-минимальных теориях.

Пусть $p_1(x_1), \ldots, p_n(x_n) \in S_1(T)$. Тип $q(x_1, \ldots, x_n) \in S(T)$ называется $(p_1, \ldots, p_n)$-*типом*, если $q(x_1, \ldots, x_n) \supseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} p_i(x_i)$. Множество всех $(p_1, \ldots, p_n)$-типов теории T обозначается через $S_{p_1,\ldots,p_n}(T)$. Счетная теория T называется *почти ω-категоричной*, если для любых типов $p_1(x_1), \ldots, p_n(x_n) \in S(T)$ существует лишь конечное число типов $q(x_1, \ldots, x_n)$ $\in S_{p_1,\ldots,p_n}(T)$.

Пусть $A \subseteq B \subseteq M$, B конечно, $p_1, p_2, \ldots, p_s \in S_1(A)$ — неалгебраические. Мы говорим, что семейство 1-типов $\{p_1, \ldots, p_s\}$ является *слабо ортогональным над B*, если каждый s–кортеж $\langle a_1, \ldots, a_s\rangle \in p_1(M) \times \ldots \times p_s(M)$ удовлетворяет одному и тому же типу над B. Мы говорим, что семейство 1-типов $\{p_1, \ldots, p_s\}$ является *ортогональным над B*, если для любой последовательности $(n_1, \ldots, n_s) \in \omega^s$, для любых возрастающих кортежей $\bar{a}_1, \bar{a}_1' \in [p_1(M)]^{n_1}$, …, $\bar{a}_s, \bar{a}_s' \in [p_s(M)]^{n_s}$ таких, что $tp(\bar{a}_1/B) = tp(\bar{a}_1'/B)$, …, $tp(\bar{a}_s/B) = tp(\bar{a}_s'/B)$ мы имеем $tp(\langle\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_s\rangle/B) = tp(\langle\bar{a}_1', \ldots, \bar{a}_s'\rangle/B)$.

Теорема 1. *Пусть T — почти ω-категоричная вполне о-минимальная теория, p_1, …, $p_m \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические попарно слабо ортогональные типы. Тогда $\{p_1, \ldots, p_m\}$ ортогонально над $\emptyset$.*

Funding: Исследования поддержаны КН МОН РК (грант AP05132546).

Ключевые слова: почти ω-категоричность, слабая о-минимальность, вполне о-минимальность, бинарная теория

2010 Mathematics Subject Classification: 03C64, 03C15, 03C07

Литература

[1] Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. Vaught's conjecture for quite o-minimal theories, *Annals of Pure and Applied Logic*, **168**: 1 (2017), 129–149.

[2] Mayer L.L. Vaught's conjecture for o-minimal theories, *The Journal of Symbolic Logic*, **53**: 1 (1988), 146–159.

[3] Ikeda K., Pillay A., Tsuboi A. On theories having three countable models, *Mathematical Logic Quarterly*, **44**: 2 (1998), 161–166.

[4] Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Линейно упорядоченные теории, близкие к счетно категоричным, *Математические заметки*, **101** :3 (2017), 413–424.

2 Дифференциальные уравнения и теория операторов. Теория функций и функциональный анализ.

On a Green's function of a heat problem with a periodic and antiperiodic boundary conditions

B. AIBEK[1,a], A. AIMAKHANOVA[1,2,b]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

[2] *Asfendiyarov Kazakh National Medical University, Almaty, Kazakhstan*

E-mail: [a]*jpartskz@gmail.com*, [b]*aizat.68@mail.ru*

We investigate a non-local initial-boundary value problem for a non-homogeneous one-dimensional heat equation. The domain under consideration is a rectangle: $\Omega = \{0 < x < \ell,\ 0 < t < T\}$. A non-local periodic boundary condition with respect to a spatial variable x is put.

We consider a heat equation

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t)$$

with initial condition

$$u(x,0) = \tau(x),\ \ 0 \le x \le \ell,$$

and homogeneous periodic boundary conditions ($k = 1$ or $k = 2$)

$$u_x(0,t) = (-1)^k u_x(1,t), \quad u(0,t) = (-1)^k u(1,t), \quad 0 \le t \le T.$$

These problems are well-researched, their solution (in classical and generalized sense) exists, is unique and can be constructed by the method of separation of variables. It is well-known that a solution of problem can be constructed in the form of convergent orthonormal series according to eigenfunctions of a spectral problem for an operator of multiple differentiation with periodic boundary conditions. Therefore Green's function can be also written in the form of an infinite series with respect to trigonometric functions (Fourier series).

The solution can be represented with the help of the Green's function in the form

$$u(x,t) = \int_0^t ds \int_0^\ell G(x,\xi,t-s) f(\xi,s) d\xi + \int_0^\ell G(x,\xi,t)\tau(\xi)d\xi. \qquad (*)$$

Definition. The Green's function of the heat conduction problem is a function $G(x,\xi,t-s)$ such that any solution to the problem can be represented by a formula (*).

For classical first and second initial-boundary value problems there also exists a second representation of the Green's function by Jacobi function. In this report we find the representation of the Green's function of the non-local initial-boundary value problem with periodic boundary conditions in the form of series according to exponents.

Funding: The authors was supported by the target program no. BR05236656 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: heat equation, initial-boundary value problems, periodic boundary condition, Green's function

2010 Mathematics Subject Classification: 35C15, 35E15, 35K05, 35K20

On the multi-point problem for loaded partial differential equation of the third order

A. ASSANOVA[1,a], A. IMANCHIYEV[1,2,b]
Zh. KADIRBAYEVA[1,3,c]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2] *K.Zhubanov Aktobe Regional State University, Aktobe, Kazakhstan*
[3] *Kazakh State Women's Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan*
E-mail: [a]*assanova@math.kz*, [b]*imanchiev_ae@mail.ru* [c]*apelman86pm@mail.ru*

We consider the following multipoint problem for loaded partial differential equations at the domain $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = A(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(t,x)\frac{\partial^2 u(\theta_1,x)}{\partial x^2} + C(t,x)\frac{\partial^2 u(\theta_2,x)}{\partial x^2} + f(t,x), \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{m} M_i(x)\frac{\partial u(t_i,x)}{\partial x} = \varphi(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{2}$$

$$u(t,0) = \psi_1(t), \qquad t \in [0,T], \tag{3}$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \psi_2(t), \qquad t \in [0,T], \tag{4}$$

where $u(t,x)$ is unknown function, the functions $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$ and $f(t,x)$ are continuous on Ω, $0 < \theta_1 < \theta_2 < T$, the functions $M_i(x)$, $i = \overline{0,m}$, and $\varphi(x)$ are continuously differentiable on $[0,\omega]$, $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{m-1} < t_m = T$, the functions $\psi_1(t)$ and $\psi_2(t)$ are continuously differentiable on $[0,T]$.

The function $u(t,x) \in C(\Omega,R)$ that has partial derivatives $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \in C(\Omega,R)$, $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in C(\Omega,R)$, $\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \in C(\Omega,R)$, $\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x \partial t} \in C(\Omega,R)$, $\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^2 \partial t} \in C(\Omega,R)$ is called a *classical solution* to problem (1)–(4) if it satisfies equation (1) for all $(t,x) \in \Omega$, multipoint condition (2) for all $x \in [0,\omega]$, and boundary conditions (3), (4) for all $t \in [0,T]$.
Multipoint and nonlocal problems for loaded partial differential equations of the third order arise in the study of various phenomena of biology, medicine and other natural sciences [1-6].

In the present report, we study the existence of classical solutions to multipoint problem for the loaded partial differential equations of the third-order (1)–(4) and offer the methods for constructing their approximate solutions. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of classical solution to multipoint problem for the loaded partial differential equations of the third order are established. By introduction of new unknown functions [7-8], we have reduced the considered problem to an equivalent problem consisting of a family of multipoint problems for loaded ordinary differential equations first order with functional parameters and an integral relations. We have offered the algorithm to find approximate solution to investigated problem and have proved its convergence. We use of results in [6, 9] for establishing of solvability to the family of multipoint problems for loaded ordinary differential equations.

Funding: The results of this report were partially supported by the grant no. AP05131220 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: loaded partial differential equation of the third order, multipoint problem, loaded ordinary differential equations, solvability, algorithm

2010 Mathematics Subject Classification: 34A30, 34B10, 35G16, 35Q92

References

[1] Ptashnyck B.I. *Ill-posed boundary value problems for partial differential equations*, Naukova Dumka, Kiev (1984) (in Russian).

[2] Nakhushev A.M. *Equations of Mathematical Biology*, Vyschaya chkola, Moscow (1995) (in Russian).

[3] Nakhushev A.M. *Problems with shift for a partial differential equations*, Nauka, Moskow (2006).

[4] Jenaliev M.T., Ramazanov M.I. *Loaded equations as the perturbations of differential equations*, Gylym, Almaty, Kazakhstan (2010) (in Russian).

[5] Nakhushev A.M. *Loaded equations and applications*, Nauka, Moscow (2012) (in Russian).

[5] Kiguradze T., Lakshmikantham V. On initial-boundary value problems in bounded and unbounded domains for a class of nonlinear hyperbolic equations of the third order, *J. Math. Anal. and Appl.*, **324**:8 (2006), 1242–1261.

[6] Assanova A.T., Imanchiyev A.E., Kadirbayeva Z.M. Numerical solution of systems of loaded ordinary differential equations with multipoint conditions, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **58**:4 (2018), 508–516.

[7] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations, *J. Math. Anal. and Appl.*, **402**:1 (2013), 167–178.

[8] Asanova A.T. Multipoint problem for a system of hyperbolic equations with mixed derivative, *Journal of Mathematical Sciences (United States)*, **212**:3 (2016), 213–233.

[9] Assanova A.T., Imanchiev A.E. Solvability of multipoint-integral boundary value problem for a third-order differential equation and parametrization method, in: *T.Sh. Kalmenov et al. (eds.), Functional Analysis in Interdisciplinary Applications, Springer Proceedings in Mathematics* & *Statistics*, Springer International Publishing, Cham **216** (2017), 113–122.

On the solvability of initial-boundary value problem for system of partial differential equations third order

A. ASSANOVA[1,a], A. SABALAKHOVA[2,b]

Z. TOLEUKHANOVA[3,c]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

[2] *M.Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan*

[3] *Kazakh State Women's Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan*

E-mail: [a]*assanova@math.kz*, [b]*sabalahova@mail.ru* [c]*zauresh03@mail.ru*

At the domain $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$ we consider the following initial-boundary value problem for the system of partial differential equations

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = A(t,x)u + f(t,x), \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{2} \Big\{ K_i(x) \frac{\partial^2 u(t_i,x)}{\partial x^2} + L_i(x) \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x \partial t} \mid_{t=t_i} + M_i(x) \frac{\partial u(t_i,x)}{\partial x} \Big\} = \varphi(x), \tag{2}$$

$$x \in [0,\omega],$$

$$u(t,0) = \psi_1(t), \qquad t \in [0,T], \tag{3}$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \psi_2(t), \qquad t \in [0,T], \tag{4}$$

where $u(t,x) = col(u_1(t,x), u_2(t,x), ..., u_n(t,x))$ is unknown function, the $n \times n$ matrix $A(t,x)$ and n vector function $f(t,x)$ are continuous on Ω, the $n \times n$ matrices $K_i(x)$, $L_i(x)$, $M_i(x)$, $i = \overline{0,2}$, and n vector function $\varphi(x)$ are continuous on $[0,\omega]$, $0 \le t_0 < t_1 < t_2 \le T$, the n vector functions $\psi_1(t)$ and $\psi_2(t)$ are continuously differentiable on $[0,T]$.

The function $u(t,x) \in C(\Omega, R^n)$ that has partial derivatives $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in$ $\in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x \partial t} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^2 \partial t} \in C(\Omega, R^n)$ is called a *classical solution* to problem (1)–(4) if it satisfies system (1) for all $(t,x) \in \Omega$ and boundary conditions (2), (3) and (4).

Initial-boundary value problems for systems of partial differential equations of the third order arise in the study of various phenomena of natural science and technology [1-6].

In the present communication, we study the existence of classical solutions to nonlocal problem for the system of partial differential equations third-order (1)–(4) and offer the methods for constructing their approximate solutions. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of classical solution to nonlocal problem for the system of partial differential equations third order are established. By introduction of new unknown function [7-8], we have reduced the considered problem to an equivalent problem consisting of a nonlocal problem for the system of hyperbolic equations of second order with functional parameter and an integral relation. We have offered the algorithm to find approximate solution to investigated problem and have proved its convergence.

Funding: The results of this report were partially supported by the grant no. AP05131220 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: partial differential equation of third order, initial-boundary value problem, nonlocal problem, system of hyperbolic equations, solvability, algorithm

2010 Mathematics Subject Classification: 35G16, 35G46, 35L35, 35L51, 35L53

References

[1] Ptashnyck B.I. *Ill-posed boundary value problems for partial differential equations*, Naukova Dumka, Kiev (1984) (in Russian).

[2] Nakhushev A.M. *Problems with shift for a partial differential equations*, Nauka, Moskow (2006).

[3] Kiguradze T., Lakshmikantham V. On initial-boundary value problems in bounded and unbounded domains for a class of nonlinear hyperbolic equations of the third order, *J. Math. Anal. and Appl.*, **324**:8 (2006), 1242–1261.

[4] Dzhokhadze O.M. The Riemann function for higher-order hyperbolic equations and systems with dominated lower terms, *Differ. Equ.*, **39**:10 (2003), 1440—1453.

[5] Andreev A.A., Yakovleva J.O. The Goursat problem for one hyperbolic system of the third order differential equations with two independent variables, *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, **15**:3(24) (2011), 35–41.

[6] Assanova A.T., Imanchiev A.E. Solvability of multipoint-integral boundary value problem for a third-order differential equation and parametrization method, in: *T.Sh. Kalmenov et al. (eds.), Functional Analysis in Interdisciplinary Applications, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, Springer International Publishing, Cham **216** (2017), 113–122.

[7] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations, *J. Math. Anal. and Appl.*, **402**:1 (2013), 167–178.

[8] Asanova A.T. Multipoint problem for a system of hyperbolic equations with mixed derivative, *Journal of Mathematical Sciences (United States)*, **212**:3 (2016), 213–233.

Solving a boundary value problem for a nonlinear loaded differential equation with weak nonlinearity

E. BAKIROVA [1,a], R. UTESHOVA[2,b]

[1,2] *Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan*

[2] *International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan*

E-mail: [a]*bakirova1974@mail.ru*, [b]*ruteshova@mail.ru*

On the interval $[0,T]$, consider the nonlinear two-point boundary value problem for the loaded ordinary differential equation

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{j=0}^{m} K_j(t)x(\theta_j) + \varepsilon f_0(t, x(\theta_0), x(\theta_1), \ldots, x(\theta_m)), \quad x \in R^n, \tag{1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \tag{2}$$

where $A(t) : [0,T] \to R^n$, $K_j(t) : [0,T] \to R^n$, $j = \overline{1,m}$, $f_0 : [0,T] \times R^{(m+1)n} \to R^n$ are continuous functions, $\theta_0 = 0 < \theta_1 < \ldots < \theta_m = T$, $\varepsilon > 0$.

Divide the interval $[0,T)$ into m parts by the load points: $[0,T) = \bigcup\limits_{r=1}^{m} [\theta_{r-1}, \theta_r)$. Let $x_r(t)$ be the restriction of the function $x(t)$ to the subinterval $[\theta_{r-1}, \theta_r)$, $r = \overline{1,m}$. Introduce the parameters $\lambda_r = x_r(t_{r-1})$, $r = \overline{1,m}$, and $\lambda_{m+1} = x(\theta_m)$. Making the substitution $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$ on every subinterval $[\theta_{r-1}, \theta_r)$, $r = \overline{1,m}$, we obtain the boundary value problem with parameters

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)(u_r + \lambda_r) + \sum_{j=1}^{m+1} K_j(t)\lambda_j + \varepsilon f_0(t, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+1}),$$

$$u_r(\theta_{r-1}) = 0, \qquad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \qquad r = \overline{1, m}$$

$$B\lambda_1 + C\lambda_{m+1} = d,$$

$$\lambda_p + \lim_{t \to \theta_p - 0} u_p(t) = \lambda_{p+1}, \qquad p = \overline{1, m}.$$

To solve boundary value problem (1), (2), we propose a numerical method based on solving the constructed multipoint boundary value problem with parameters.

Nonlocal inverse problem of mathematical modeling of extraction processes

I. ORAZOV[1,2,a], G. BESBAEV[1,2,b]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

[2] *M.Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan*

E-mail: [a]*i_orazov@mail.ru*, [b]*besbaev@math.kz*

We consider issues of constructing mathematical models of extraction processes from solid polydisperse porous materials considering the porosity of structure of particles, taking into account the connection of the residence time of fractions with particle size in the extractant, based on inverse problems of recovery of coefficients of diffusion processes under various variants of boundary conditions by a spatial variable.

We consider a mathematical model which models the extraction process of a target component from the polydispersed porous material. The suggested model is demonstrated by the example of a at solid material with bidispersed pores of different size in the form of a system of channels of macropores with micropores facing their walls. The macropores and the micropores in the material have homogeneous size. We model a case when micropores of the solid material (dispersed medium) are initially filled with an oil (dispersion phase), which is our target component. And the macropores are filled in with a pure solvent. In the process of extraction the oil diffuses from the micropore to the macropore, and then from the micropores to the external solvent volume, wherein the ratio of concentrations in the macropore and the micropore is taken in accordance with the linear law of adsorption. The well-posedness of the formulated mathematical model has been justified.

The theoretical mathematical science has deep enough advanced in solving inverse problems for diffusion processes. And besides, as a rule, the problems are researched under simplest selfadjoint boundary conditions by a spatial variable. Unlike the mentioned works we propose to consider the problems with more general boundary conditions by a spatial variable. The selfadjointness of the boundary conditions is not assumed, only requirement of their regularity by Birkhoff is sufficient. The inverse problems researched by us are directly obtained from mathematical models of technological processes.

Funding: The author was supported by the target program no. BR05236656 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: extraction processes, non-local conditions, inverse problems

2010 Mathematics Subject Classification: 35K15, 35P10, 35R30

References

[1] Orazov I., Sadybekov M.A. On a class of problems of determining the temperature and density of heat sources given initial and final temperature, *Siberian Math. J.*, **53**:1 (2012), 146–151.

[2] Orazov I., Sadybekov M.A. On an inverse problem of mathematical modeling of the extraction process of polydisperse porous materials, *AIP Conference Proceedings*, **1676** (2015), 020005.

[3] Orazov I., Sadybekov M.A. One-dimensional Diffusion Problem with not Strengthened Regular Boundary Conditions, *AIP Conference Proceedings*, **1690** (2015), 040007.

On the classical solution of the nonlinear two-phase free boundary problem for the parabolic equations

Galina Bizhanova

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: galina_math@mail.ru

There is studied nonlinear two-phase boundary value problem for the parabolic equations in the unknown domains. Such problem is a mathematical model of the physical process with phase transition. The unknown functions satisfying parabolic equations may be temperature, concentration of the admixture in the substances, pressure of liquid and gas in porous medium and so on.

The problem in the unknown domains is reduced to the nonlinear problem in the given domains with the help of the non degenerate Hanzawa coordinate mapping.

The solution of the model problem corresponding to this nonlinear one is derived in the explicit form. By direct estimation of the solution the existence, estimates of the solution in the Hölder space are established.

Keywords: parabolic equation, free boundary problem, Hölder space, existence, estimate of the solution

2010 Mathematics Subject Classification: 35K10, 35R35, 35A01

Maximum principle and its application for the nonlinear time-fractional Stokes's first problem

M. BORIKHANOV

Al–Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: borikhanov@math.kz,

In this report we study the nonlinear time-fractional diffusion equation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_{*t}^{1-\alpha} u(x,t + F(x,t,u), \text{ in } (0,a)\times(0,T] = \Omega, \tag{1}$$

with the following nonhomogeneous Cauchy-Dirichlet conditions

$$u(x,0) = \varphi(x), x \in [0,a], \tag{2}$$

$$u(0,t) = \lambda(t), u(a,t) = \mu(t), 0 \le t \le T, \tag{3}$$

where the functions $F(x,t,u), \varphi(x), \lambda(t), \mu(t)$ are continuous and $\lambda(t)$, $\mu(t)$ are nondecreasing functions, D_{*t}^{α} is the Caputo-Fabrizio type fractional derivative [2].

We estimate the fractional derivative of a function at its extreme points. These results are analogous to the ones obtained in [1] for the Caputo fractional derivative. Then we use these results to establish new maximum principles for linear fractional equations with Caputo-Fabrizio type fractional derivative of non-singular kernel.

Funding: The author was supported by the grant no. AP05131756 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: fractional derivative, nonlinear time-fractional diffusion equation, maximum principile.

2010 Mathematics Subject Classification: 517.95, 26A33.

References

[1] Luchko Y. Maximum principle for the generalized time-fractional diffusion equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **V. 351** (2009), 218–223.

[2] Atangana A., Baleanu D., New fractional derivative with non-local and non-singular kernel, *Thermal Science*, **V. 20**:2 (2016), 763–769.

On an inverse problem of reconstructing a heat conduction process from nonlocal data

M. SADYBEKOV[1,a], G. DILDABEK[1,2,b], M. IVANOVA[1,3,c]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

[2] *Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

[3] *South-Kazakhstan State Pharmaceutical Academy, Shymkent, Kazakhstan*

E-mail: [a]*sadybekov@math.kz*, [b]*dildabek.g@gmail.com*, [c]*marina-iv@mail.ru*

The problems that imply the determination of coefficients or the right-hand side of a differential equation (together with its solution) are commonly referred to inverse problems of mathematical physics. In this paper we consider one family of problems implying the determination of the density distribution and of heat sources from given values of initial and final distributions. This problem simulates the process of heat propagation in a thin closed wire wrapped around a weakly permeable insulation. The mathematical statement of such problems leads to a inverse problem for the heat equation, where it is required to find not only a solution of the problem, but also its right-hand side that depends only on a spatial variable.

We consider an inverse problem for a one-dimensional heat equation with involution and with periodic boundary conditions with respect to a space variable. This problem simulates the process of heat propagation in a thin closed wire wrapped around a weakly permeable insulation. The inverse problem consists in the restoration (simultaneously with the solution) of the unknown right-hand side of the equation, which depends only on the spatial variable. The conditions for redefinition are initial and final states. Existence and uniqueness results for the given problem are obtained via the method of separation of variables.

In this talk, we will consider an inverse problem close to that investigated in [1], [2]. Together with the solution it is necessary to find the unknown right-hand side of the equation. The equation contains the usual time derivative and an involution with respect to the spatial variable. In contrast to [1], we investigate the problem under nonlocal boundary conditions with respect to the spatial variable. The conditions for redefinition are initial and final states.

The second of the main differences in the investigated inverse problem being studied is that the unknown function enters, both in the right-hand side of the equation, and in the conditions of the initial and final overdetermination.

Let us consider a problem of modeling the thermal diffusion process which is close to that described in the report of Cabada and Tojo [2], where the example that describes a concrete situation in physics is given. Consider a closed metal wire (length 2π) wrapped around a thin sheet of insulation material.

Assuming that the position $x = 0$ is the lowest of the wire, and the insulation goes up to the left at $-\pi$ and to the right up to π. Since the wire is closed, points $-\pi$ and π coincide.

The layer of insulation is assumed to be slightly permeable. Therefore, the temperature value from one side affects the diffusion process on the other side. For this reason, the standard heat equation is modified and to its right-hand side $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t)$ a third term $\varepsilon\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(-x,t)$ (where $|\varepsilon| < 1$) is added. Here $\Phi(x,t)$ is the temperature at point x of the wire at time t.

We will consider the process which is so slow that it is described by an heat equation. Thus, this process is described by the equation

$$\Phi_t\left(x,t\right) - \Phi_{xx}\left(x,t\right) + \varepsilon\Phi_{xx}\left(-x,t\right) = f\left(x\right) \tag{1}$$

in the domain $\Omega = \{(x,t): \ -\pi < x < \pi, \ 0 < t < T\}$. Here $f(x)$ is the influence of an external source that does not change with time; $t = 0$ is an initial time point and $t = T$ is a final one.

As the additional information we take values of the initial and final conditions of the temperature

$$\Phi\left(x,0\right) = \phi\left(x\right), \quad \Phi(x,T) = \psi(x), \quad x \in [-\pi,\pi]. \tag{2}$$

Since the wire is closed, it is natural to assume that the temperature at the ends of the wire is the same at all times:

$$\Phi(-\pi, t) = \Phi(\pi, t), \ t \in [0, T]. \tag{3}$$

Consider the process in which the temperature at one end at every time point t is proportional to the rate of change speed of the average value of the temperature throughout the wire. Then,

$$\Phi(-\pi, t) = \gamma \frac{d}{dt} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\xi, t)\, d\xi, \ t \in [0, T]. \tag{4}$$

Here γ is a proportionality coefficient.

Thus the investigated process is reduced to the following mathematical inverse problem: *Find the right-hand side $f(x)$ of the heat equation (1), and its solution $\Phi(x,t)$ subject to the initial and final conditions (2), the boundary condition (3), and condition (4).*

Existence and uniqueness results for the given problem are obtained via the method of separation of variables.

Funding: The authors were supported in parts by the MES RK target grant BR05236656.

Keywords: Inverse problem; heat equation; equation with involution; periodic boundary conditions; method of separation of variables

2010 Mathematics Subject Classification: 35K20, 35R30, 35R10

References

[1] Ahmad B., Alsaedi A., Kirane M., Tapdigoglu R.G. An in-verse problem for space and time fractional evolution equations with an involution perturbation, *Quaestiones Mathematicae*, **40**:2 (2017), 151–160.

[2] Cabada A., Tojo A.F. Equations with involutions, Workshop on Differential Equationsl, (Malla Moravka, Czech Republic, p. 240, March, 28, 2014),

Available from: http://users.math.cas.cz/ sremr/wde2014/prezentace/cabada.pdf.

On the nonhomogeneous boundary value problem for the Burgers equation in the angular domain

M. JENALIYEV[1,a], M. RAMAZANOV[2,b]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

[2] *Buketov Karaganda Stated University, Karaganda, Kazakhstan*

E-mail: [a]*muvasharkhan@gmail.com*, [b]*ramamur@mail.ru*

Research of Burgers equation has a long history, some of which is given in works [1–2] and in the books [3] and [4]. In work [1–2] in the Sobolev classes it is established the existence, uniqueness and regularity of the solution to the Burgers equation in non-cylindrical (non-degenerating and degenerated) domains.

In this paper we consider the questions of solvability of the nonhomogeneous boundary value problem for the Burgers equation in infinite angular domain $G = \{x, t:\ 0 < x < t,\ t > 0\}$

$$\begin{cases} w_t + ww_x - a^2 w_{xx} = 0, \ \ \{x,t\} \in G, \\ w\big|_{x=0} = w_0(t), \ \ w\big|_{x=t} = w_1(t), \end{cases} \tag{1}$$

where $w_0(t)$, $w_1(t)$ are some given on $(0, \infty)$ functions.

The boundary value problem (1) is reduced to the study of the solvability of a system consisting of two homogeneous integral equations

$$\nu(t) - \frac{w_0(t)}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\nu(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} = \left(N_{w_0}(t)\varphi_1\right)(t), \tag{2}$$

$$\varphi_1(t) - \frac{1 - w_1(t)}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi_1(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} = \left(\Phi_{w_1}(t)\nu\right)(t), \tag{3}$$

where

$$\left(N_{w_0}(t)\varphi_1\right)(t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \left[\frac{\tau}{(t-\tau)^{3/2}} + \frac{w_0(t)}{(t-\tau)^{1/2}}\right] E(t,\tau)\varphi_1(\tau)d\tau, \tag{4}$$

$$\left(\Phi_{w_1}(t)\nu\right)(t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \left[\frac{\tau}{(t-\tau)^{3/2}} + \frac{1 - w_1(t)}{(t-\tau)^{1/2}}\right] E(t,\tau)\nu(\tau)d\tau, \tag{5}$$

$$E(t,\tau) = \exp\left\{-\frac{t\tau}{4a^2(t-\tau)}\right\}, \quad \varphi_1(t) = \varphi(t)\exp\left\{\frac{t}{4a^2}\right\}.$$

Thus, the nonhomogeneous boundary problem (1) is reduced to the problem on the solvability for the system of integral equations (2)–(3).

We prove some lemmas which establish properties of integral operators (4)–(5) in weighted space of essentially bounded functions and prove the existence of non-trivial solutions to the homogeneous integral equations (2)–(3). On the basis of Lemmas the solvability theorems of the nonhomogeneous boundary value problem for the Burgers equation in infinite angular domain are established.

Partially the results of our report are published in the paper [5–6].

Funding: The authors were supported by the grant no. AP05130928 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: Burgers equation, heat equation, boundary value problems, solution

2010 Mathematics Subject Classification: 35K05, 35K20, 35Q35

References

[1] Benia Y., Sadallah B.-K. Existence of solutions to Burgers equations in domains that can be transformed into rectangles, *Electronic Journal of Differential Equations*, **2016**:157 (2016), 1–13.

[2] Benia Y., Sadallah B.-K. Existence of solutions to Burgers equations in a non-parabolic domain, *Electronic Journal of Differential Equations*, **2018**:20 (2018), 1–13.

[3] Burgers J.M. *The nonlinear diffusion equation. Asymptotic solutions and statistical problems*, D.Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland / Boston USA (1974).

[4] Vishik M.I., Fursikov A.V. *Mathematical problems of statistical hydrodynamics* (in Russian), Nauka, Moscow (1980).

[5] Amangaliyeva M.M., Jenaliyev M.T., Kosmakova M.T., and Ramazanov M.I. On the solvability of nonhomogeneous boundary value problem for the Burgers equation in the angular domain and related integral equations, Springer International Publishing AG 2017. *Functional Analysis in Interdisciplinary Applications*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics **216**, 123–141.

[6] Jenaliyev M., Ramazanov M., and Yergaliyev M. On linear and nonlinear heat equations in degenerating domains, Proceedings of the 43rd International Conference Applications of Mathematics in Engineering and Economics (AMEE-2017), AIP Conference Proceedings, 1910. American Institute of Physics, Melville, NY, 2017, 040001 (2017).

ON THE S-NUMBER INEQUALITIES OF TRIANGULAR CYLINDERS FOR THE HEAT OPERATOR

A. KASSYMOV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

Al–Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

E-mail: kassymov@math.kz,

This talk is devoted to study s-number inequalities of triangular cylinders for the heat operator. G. Polya [1] considered the same problem in the class of polygons with a given number of sides. He obtained easily expected result for triangles. He proves that the first eigenvalue of the Dirichlet Laplacian is minimized in the equilateral triangle among all traingles of given area. For Neumann Laplacian operator, R.S. Laugersen and B. Siudeja [2] proved that the first nonzero Neumann Laplacian eigenvalue is shown to be maximal for the equilateral triangle among all triangles of given area. In this talk, we extend these inequalities for the s-numbers of the heat operator.

Funding: The author was supported by the grant no. AP05130981 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: s-numbers, heat operator, spectral geometry.

2010 Mathematics Subject Classification: 35P05, 58J50.

References

1. Henrot A. Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators.//- Springer Science and Business Media, - 2006.

2. Laugesen R. S., Siudeja B. A. Maximizing Neumann fundamental tones of triangles //Journal of Mathematical Physics. - 2009. -**50:11** - C. 112903

Nonharmonic Analysis and its Applications

N. TOKMAGAMBETOV[1,a]

[1] Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: [a]tokmagambetov@math.kz

We consider the development of pseudo–differential operators generated by boundary value problems. In particular, we derive an explicit formula for the quantization of pseudo–differential operators induced by the derivative operator on a segment. Starts an interesting direction of discrete analysis based on elliptic boundary value problems, continuing, in a sense, the analysis on the torus started by M. Ruzhansky and V. Turunen, in which case one may think of a problem having periodic boundary conditions.

Joint work with Professor Michael Ruzhansky.

Funding: The author was supported by the grant no. AP05130994 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: partial differential equations, boundary condition, nonharmonic analysis

2010 Mathematics Subject Classification: 43A50

Global unsolvability of some time-fractional nonlinear problems

Berikbol T. TOREBEK,

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: torebek@math.kz,

This paper is devoted to singular solutions of the time-fractional Burgers and Korteweg-de Vries equations, more precisely, to solutions that blow up in a finite time. The problem of the non-existence of global (with respect to $t > 0$) solutions of Cauchy problem is considered in this paper.

The approach to the problem is based on the method of nonlinear capacity. This concept for analyzing blow-up of solutions of nonlinear equations was suggested by Pokhozhaev in [1] and further developed in joint papers with Mitidieri [2, 3]. Here, we give a simplest case of the analysis of a "rough"crash i.e., the case where the solution tends to infinity as $t \to T$ on some set Ω of values x, more exactly, when the corresponding integral of the form $\int\limits_{\Omega} u(t,x)\phi(x)dx$ tends to infinity as $t \to T$.

Funding: The authors were supported by the grant No.AP05131756 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: Burgers equation, Korteweg-de Vries equation, blow-up solution, fractional derivative

2010 Mathematics Subject Classification: 35R30; 35K05; 35K20

References

[1] Pokhozhaev S. I. Essentially nonlinear capacities induced by differential operators. *Dokl. Ros. Akad. Nauk*, **357**:5 (1997), 592–594.

[2] Mitidieri E., Pokhozhaev S. I. A priori estimates and blow-up of solutions of nonlinear partial differential equations and inequalities. *Proc. Steklov Inst. Math.*, **234** (2001), 1–362.

[3] Mitidieri E., Pokhozhaev S. I. Towards a unified approach to nonexistence of solutions for a class of differential inequalities. *Milan J. Math.*, **72** (2004), 129–162.

Stability of a program manifolg of nonautomous basic control systems

S.S. ZHUMATOV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan.
sailau.math@mail.ru

We will introduce for consideration a class of continuously-differentiable at times t and bounded on a norm matrices Ξ.

Consider the problem of construction of a material system by given $(n-s)$-dimensional program manifold $\Omega\,(t) \equiv \omega(t,x) = 0$, in the following form [1]:

$$\dot{x} = f\,(t,x) - B(t)\xi, \quad \xi = \varphi\,(\sigma)\,, \quad \sigma = P^T(t)\omega, \quad t \in I = [0,\ \infty)\,, \tag{2.1}$$

where $x \in R^n$ is a state vector of the object, $f \in R^n$ is a vector-function, satisfying to conditions of existence of a solution $x(t) = 0$, $B \in \Xi^{n\times r}$, $P \in \Xi^{s\times r}$ are matrices, $\omega \in R^s (s \leq n)$ is a vector, $\xi \in R^r$ is a vector-function, satisfying to conditions of local quadratic connection

$$\varphi(0) = 0 \ \wedge \ \varphi^T\theta(\sigma - K^{-1}\varphi) > 0, \quad \forall\, \sigma \neq 0, \tag{2.2}$$

$$\theta = diag\,\|\,\theta_1, \ldots, \theta_r\|\ , \quad K = K^T > 0.$$

Taking into account that $\Omega(t)$ is the integral manifold for the system (1), and assuming that the Erugin function $F(t,x,\omega) = -A\omega, -A \in R^{s\times s}$ is Hurwitz matrix and differentiating the manifold $\Omega(t)$ with respect to time t along the solutions of system (1), we get [2]:

$$\dot{\omega} = -A\omega - HB\xi, \quad \xi = \varphi\,(\sigma)\,, \quad \sigma = P^T\omega, \tag{2.3}$$

The given program $\Omega\,(t)$ is exactly realized only if the initial values of the state vector satisfy the condition $\omega(t_0, x_0) = 0$. However, this condition cannot always be exactly satisfied. Therefore, in the construction of systems of program motion, the requirement of the stability of the program manifold $\Omega\,(t)$ with respect to the vector function ω should also be taken into account (see[3-5]).

Statment of the problem. To get the condition of stability of a program manifold $\Omega(t)$ of the basic control systems in relation to the given vector-function ω.

Theorem 1. *Suppose that there exist matrices*

$$L = L^T > 0,\ \beta = diag\,(\beta_1, \ldots, \beta_r) > 0$$

and non-linear function $\varphi(\sigma)$ satisfies the conditions (4). Then, for the absolute stability of the program manifold $\Omega(t)$ with respect to the vector function ω it is sufficient performing of the following conditions

$$l_1(\|\omega\|^2 \leq V \leq l_2(\|\omega\|^2, \tag{2.4}$$

$$g_1(\|\omega\|^2 \leq -\dot{V} \leq g_2(\|\omega\|^2, \tag{2.5}$$

where l_1, l_2, g_1, g_2 are positive constants.

Sketch of the proof. In this paper we use Lyapunov function in the form of "quadratic form plus an integral from nonlinearity"and estimates of positive defined quadratic form.

Refrences

1.Maygarin B. G. *Stability and quality of process of nonlinear automatic control system.* Alma-Ata, Nauka, 1981.

2. Erugin N. P. *Construction of the entire set of systems of differential equations that have a given integral curve* // Prikl. mat. Mech. 1952. Vol. 10. Issue. 6, P. 659–670.

3. Galiullin A. S., Mukhametzyanov I. A., Mukharlyamov R. G. *Review of researches on the analytical construction of the systems programmatic motions* // Vestnik RUDN. 1994. № 1. P. 5–21.

4. Zhumatov S. S., Krementulo B. B., Maygarin B. G., *Lyapunov's second method in the problems of stability and control by motion.* Almaty, Gylym, 1999.

5. Llibre J., Ramirez R. *Inverse Problems in Ordinary Differential Equations and Applications.* Springer International Publishing Switzerland. 2016.

Об одной задаче с конормальной производной для уравнения эллиптического типа второго рода.

А. АБДУЛЛАЕВ

Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, Ташкент, Узбекистан

E-mail:akmal09.07.85@mail.ru

УДК 517.956.6

Краевые задачи с конормальной производной для уравнения эллиптического типа с одной линией вырождения, в случае, когда на линии вырождения задается, след или производную от искомой функции, а также их линейные комбинации изучены сравнительно мало. Отметим работу М.А.Усанаташвили [1], Х.Исломов [2].

В настоящей работе исследуется краевая задача с конормальным производным для уравнения эллиптического типа второго рода

$$y^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad -1 < m < 0. \tag{1}$$

Пусть D - конечная однозначная область в плоскости (x, y), ограничена кривой σ при $x > 0,\ y > 0$ с концами в точках $A(0,0),\ B(1,0)$ и отрезком AB оси Ox ов.

Введем обозначения $J = \{(x,y):\ 0<x<1,\ y=0\}$, $\partial D = \vec{\sigma} \cup \overline{AB}$, $2\beta = \frac{m}{m+2}$, причем

$$-\frac{1}{2} < \beta < 0 \tag{2}$$

Задача СК. Требуется найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C\left(\bar{D}\right) \cup C^1\left(D \cup \sigma \cup J\right)$, причем u_x и u_y могут обращаться бесконечность порядка меньше чем -2β в точках $A\,(0,0)$ и $B\,(1,0)$;

2) $u(x,y)-$ дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1) в области D;

3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\left.\{\delta(s)A_s[u] + \rho(s)u\}\right|_{\sigma} = \varphi(s), \quad 0<s<l,$$

$$a_0\,(x)\,u_y\,(x,0) + \sum_{j=1}^{n} a_j\,(x) D_{0x}^{\alpha_j} u\,(x,0) + a_{n+1}\,(x)\,u\,(x,0) = b(x), \quad 0<x<1,$$

где $\delta(s)$, $\rho(s)$, $\varphi(s)$, $a_j(x)$, $b(x)$ заданные функции, причём

$$b(0)=0, \quad a_0(1) \neq 0, \tag{3}$$

$$\begin{cases} a_j(x) = x^{\alpha_1}\bar{a}_j(x),\ (j=\overline{1,n}),\ \ a_0(x) = x^{\alpha_2}\bar{a}_0(x), \\ a_{n+1}(x) = x^{\alpha_3}\bar{a}_{n+1}(x),\ \ \bar{a}_j(x), b(x) \in C\left(\overline{J}\right) \cap C^2\left(J\right),\quad j=\overline{0,n+1}. \\ \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > 0, \quad \alpha_2 + \alpha_3 > 1 \end{cases} \tag{4}$$

$$\delta(s), \rho(s), \varphi(s) \in C[0,l]$$

$$\delta^2(s) + \rho^2(s) \neq 0, \quad \forall s \in [0,l] \tag{5}$$

l - длина всей кривой σ , s - длина дуги кривой σ , отсчитываемая от точки $B\,(1,0)$, а $D_{0x}^{\alpha_j}[*]$ – оператор (в смысле Римана - Лиувилля) интегрирования – дробного порядка $\alpha_j \in (-1,0)$ [3].

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. Если выполнены условия (2) – (5) и

$$\delta(s)\rho(s) \geq 0, \quad 0 \leq s \leq l,$$

$$\frac{a_{n+1}(x)}{a_0(x)} \leq 0, \quad \left(\frac{a_j(x)}{a_0(x)}\right)_x' \geq 0, \quad \frac{a_j(1)}{a_0(1)} \leq 0, \quad \left(j=\overline{1,n}\right),$$

то в области D существует единственное решения задачи СК.

Единственность решения задачи доказывается методом интегралов энергии[4], а существование методом интегральных уравнений.

Литература

[1] Усанаташвили М.А. *Сообщение АН ГССР.*, (1978г), Т90. -No 34. С. 10 - 16.

[2] Исломов Х. Задача с конормальной производной для уравнения эллиптического типа с одной линией вырождения, *Уз.Мат.Жур.*, **-No 1** (2012)

[3] Смирнов М.М. *Уравнения смешанного типа*, М. (1985г). 304 с.

[4] Abdullayev A.A. О единственности решения аналога задачи Пуанкаре - Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода, *Уз.Мат.Жур.*, **-No 4** (2010) С. 3-12.

О построении силовой функции в вероятностной постановке

М. ТЛЕУБЕРГЕНОВ[1,a], Д. АЖЫМБАЕВ[2,b]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

[2] *Актюбинский региональный государственный университет, Актобе, Казахстан*

E-mail: [a]marat207@mail.ru, [b]darkhan70@gmail.com

По заданному множеству

$$\Lambda(t):\lambda(x,t)=0,\quad \lambda\in R^m\quad x\in R^n,\quad \lambda\in C^{22}_{xt} \tag{1}$$

требуется построить обобщенную силовую функцию $U=U\left(x,\dot{x},t\right)$ так, чтобы заданное множество $\Lambda\left(t\right)$ было интегральным многообразием стохастического уравнения лагранжевой структуры

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\nu}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_\nu}=\sigma'_{\nu j}(x,\dot{x},t)\dot{\xi}_j,\left(\nu=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,r}\right). \tag{2}$$

Здесь $\{\xi_1(t,\omega),\ldots,\xi_r(t,\omega)\}$ - системы случайных процессов с независимыми приращениями, которые, следуя [1], можно представить в виде суммы процессов:$\xi=\xi_0+\int c(y)P^0(t,dy)$, где $\xi=(\xi_1(t,\omega),\ldots,\xi_r(t,\omega))^T$, ξ_0-векторный винеровский процесс. P^0- пуассоновский процесс.

В данной работе в отличие от [2] строится силовая функция в предположении, что заданное интегральное многообразие зависит лишь от обобщенных координат и не зависит от обобщенных скоростей. Для решения поставленной задачи на первом этапе по заданному множеству методом квазиобращения [3] в сочетании с методом Еругина и в силу стохастического дифференцирования сложной функции [1] строится уравнение Ито $\ddot{x}=f(x,\dot{x},t)+\sigma(x,\dot{x},t)\dot{\xi}$ так, чтобы множество $\Lambda(t)$ (1) являлось интегральным многообразием построенного уравнения. Затем, на втором этапе по построенному уравнению Ито строятся эквивалентные ему уравнения лагранжевой структуры. И на третьем этапе искомую силовую функцию определим в виде $U\left(x,\dot{x},t\right)=L\left(x,\dot{x},t\right)-a_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j$ в предположении, что обобщенный лагранжиан имеет вид

$$L=T\left(x,\dot{x},t\right)+U\left(x,\dot{x},t\right),\quad \text{где}\quad T=a_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j,\ \left(i,j=\overline{1,n}\right). \tag{3}$$

Далее, вводится матрица h_ν^k и рассматривается задача непрямого представления построенного уравнения Ито $h_\nu^k\left(\ddot{x}_k - f_k - \sigma_{kj}\dot{\xi}^j\right) \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x_\nu}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} - \sigma'_{\nu j}\dot{\xi}^j$.

С использованием обозначений работ [1-3] формулируется и доказывается следующая теорема.

Теорема. *Для непрямого построения множества стохастических уравнений лагранжевой структуры (2) по заданному множеству (1) с обобщенным лагранжианом вида (3) так, чтобы множество (1) было интегральным многообразием построенных уравнений необходимо и достаточно, чтобы обобщенная силовая функция* $U = U(x, \dot{x}, t)$ *удовлетворяла условиям (4)*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{x}_\nu \partial \dot{x}_k} = h_\nu^k - a_{\nu k}; \quad \frac{\partial U}{\partial x_\nu} = \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{x}_\nu \partial t} + \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{x}_\nu \partial x_k}\dot{x}_k + \tilde{S}_{1\nu} + \tilde{S}_{2\nu} + \tilde{S}_{3\nu} + h_v^k f_k, \tag{4}$$

а вектор-функция f *и матрица* σ *- соответственно следующим условиям*

$$f = k\left[\frac{\partial \lambda}{\partial x}C\right] + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^+ \left(A - \dot{x}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial x}\dot{x} - 2\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2}\right),$$

$$\sigma_i = s_i\left[\frac{\partial \lambda}{\partial x}C\right] + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^+ B_i, \qquad i, j = \overline{1, r}, \nu = \overline{1, n}.$$

Funding: Авторы были поддержаны грантом 3357/ГФ4 МОН РК.

Ключевые слова: Обратные задачи, стохастические дифференциальные уравнения, интегральное многообразие, силовая функция.

2010 Mathematics Subject Classification: 34K29, 60H10

Литература

[1] Пугачев В.С., Синицын И.Н. *Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация*, Наука, М.(1990). [2] Тлеубергенов М.И., Ажымбаев Д.Т. О построении дифференциальных уравнений по заданному интегральному многообразию при наличии случайных возмущений с независимыми приращениями, *Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика*, **2** (2013), 94-104. [3] Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г. *Уравнения программных движений*, Изд-во РУДН, М. (1986).

УДК 517.956

Задачи Дирихле для одного класса вырождающихся многомерных эллиптико-параболических уравнений

Алдашев С.А.
aldash51@mail.ru

Корректность краевых задач на плоскости для эллиптических уравнений методом теории аналитических функций комплексного переменного хорошо изучены. При исследовании аналогичных вопросов, когда число независимых переменных больше двух, возникают трудности принципиального характера. Весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений теряют свою силу из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка в областях с ребрами подробно изучены.

п.1. Постановка задачи и результат. Для общих эллиптико - параболических уравнений второго порядка постановку первой краевой задачи (или задача Дирихле) впервые осуществил Г. Фикера [1]. Дальнейшее изучение этой задачи приведено в [2]. В данной работе для одного класса вырождающихся многомерных эллиптико -параболических уравнений доказана однозначная разрешимость и получен явный вид классического решения задачи Дирихле в цилиндрической области. В статье используется метод, предложенный в работах [3-6].

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}-$ цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,...,x_m,t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma=\{(x,t):\,:|x|=1\}$, плоскостями $t=\alpha>0$ и $t=\beta<0$, где $|x|-$ длина вектора $x=(x_1,...,x_m)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через Γ_α, $\Gamma_\beta-$ части поверхности Γ, лежащие в полупространствах $t>0$и $t<0$; σ_α-верхнее, а σ_β - нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть далее S - общая часть границ областей Ω_α, Ω_β представляющее множество $\{t=0,\,0<|x|<1\}$ в E_m.

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим вырождающихся многомерные эллиптико-параболические уравнения

$$0=\begin{cases} t^q\Delta_x u-u_t+\sum\limits_{i=1}^m d_i(x,t)u_{x_i}+e(x,t)u,\ t>0,\\ |t|^p\Delta_x \upsilon+u_{tt}+\sum\limits_{i=1}^m a_i(x,t)u_{x_i}+b(x,t)u_t+c(x,t)u,\ t<0,\end{cases} \tag{1}$$

где $p,q=const$, $q\geq 0$, $p>0$, Δ_x- оператор Лапласа по переменным $x_1,...,x_m$, $m\geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,...,x_m,t$ к сферическим $r,\theta_1,...,\theta_{m-1},t$, $r\geq 0$, $0\leq\theta_1<2\pi$, $0\leq\theta_i\leq\pi$, $i=2,3,...,m-1$, $\theta=(\theta_1,...,\theta_{m-1})$.

Задача 1(Дирихле). Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t\neq 0$ из класса $C(\overline{\Omega}_{\alpha\beta})\cap C^2(\Omega_\alpha\cup\Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{\sigma_\alpha}=\varphi_1(r,\theta),\quad u\Big|_{\Gamma_\alpha}=\psi_1(t,\theta),$$

$$u\Big|_{\Gamma_\beta}=\psi_2(t,\theta),\ u\Big|_{\sigma_\beta}=\varphi_2(t,\theta).$$

при этом $\varphi_1(1,\theta)=\psi_1(\alpha,\theta)$, $\varphi_2(1,\theta)=\psi_2(\beta,\theta)$, $\psi_1(0,\theta)=\psi_2(0,\theta)$

Пусть $d_i(r,\theta,t)$, $e(r,\theta,t)\in W_2^l(\Omega_\alpha)\subset C(\bar\Omega_\alpha)$, $a_i(r,\theta,t)$, $b(r,\theta,t)$, $c(r,\theta,t)\in W_2^l(\Omega_\beta)$, $i=1,...,m, l\geq m+1,\ e(r,\theta,t)\leq 0,\ \forall(r,\theta,t)\in\Omega_\alpha,\ c(r,\theta,t)\leq 0,\ \forall(r,\theta,t)\in\Omega_\beta$.

Тогда справедлива

Теорема. Если $\varphi_1(r,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta)\in W_2^p(S),\ \psi_1(t,\theta)\in W_2^p(\Gamma_\alpha),\ \psi_2(t,\theta)\in W_2^p(\Gamma_\beta)$, $p>\frac{3m}{2}$, то задача 1 однозначно разрешима.

Отметим, что в случае, когда $a_i(x,t)=b(x,t)=c(x,t)=d_i(x,t)=e(x,t)\equiv 0$ для задачи 1 теорема получена в [7].

Работа поддержана грантом AP05134615 Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Литература

1. Фикера Г. К единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений второго порядка: Сб. переводов. Математика, 1963, т.7, № 6 -с.99-121.

2. Олейник О.А., Радкевич Е. В. Уравнения с неотрицательной характерической формой, М.: Изд-во Моск. ун-та, 2010-360с.

3. Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений // Вестник НГУ, Сер.: мат., мех., инф., 2012, т.12, вып. 1 -с.7-13.

4. Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для вырождающихся многомерных эллиптических уравнений // Матем. заметки, 2013, т 94, вып. 6 -с.936-939

5. Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного эллиптико-параболического уравнения // Изв. Сарат. ун-та. Нов.сер. Сер. мат., мех., инф., 2014, т.14, вып. 1 -с.5-10.

6. Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле для одного класса многомерных эллиптико-параболических уравнений // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. мат., мех., инф., 2016, т.16, вып. 2 -с.125-132.

7. Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для вырождающегося многомерного эллиптико - параболического уравнения // Журнал вычислительной и прикладной математики, КНУ им. Т. Шевченко, Киев, 2014, №3(117)-с.17-22

Подвижные координаты одного класса нелинейных систем уравнений

Тынысбек КАЛЬМЕНОВ[1,a], Махмуд САДЫБЕКОВ[1,b] Гаухар АРЕПОВА[1,c]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

E-mail: [a]kalmenov@math.kz, [b]sadybekov@math.kz, [c]arepova@math.kz

На отрезке $0 < t < T$ рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} + u_i(y,t) = 0, \tag{1}$$

$$y_i|_{t=0} = \xi_i. \tag{2}$$

Здесь $y(t) = (y_1(t), y_2(t), ..., y_n(t)) \in R^n$ – неизвестная вектор функция, а $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in R^n$ – заданный постоянный вектор. Функции $u_i(y,t)$ являются известными и достаточно гладкими.

В докладе исследуется вопрос: если множество векторов ξ заполняет все пространство R^n, то в каких случаях решения задачи Коши (1)-(2) будут заполнять все пространство R^n?

Имеет место

Теорема 1. *Пусть $u_i(y,t) \in C^1(R^n \times [0,T])$ и удовлетворяют условиям Липшица*

$$\left|u_i(y,t) - u_i(\overline{y},t)\right| \leq M|y - \overline{y}|, \quad \forall y, \overline{y} \in R^n, \tag{3}$$

$$|u_i| \leq M,$$

где M – постоянная не зависящая от $u = (u_1, ..., u_n)$. Тогда, если $\xi = R^n$, заполняет все пространство R^n, то решение $\{y(\xi,t)\} = R^n$ для фиксированных $t \in [0,T]$.

Пример. Пусть $n = 1$ и $u(y) \equiv u = const$. Тогда решение системы (1)-(2) представимо в виде $y = e^{-ut}\xi$ и действительно $y(t) = e^{-ut}\xi$ наряду с ξ является подвижной (по t) системой координат в R^1.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05133239 и BR05236656 МОН РК.

Ключевые слова: Система обыкновенных дифференциальных уравнений, задача Коши.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B15

Литература

[1] Петровский И.Г. *Системы уравнений с частными производными: алгебраическая геометрия: избранные труды*, Академия наук СССР, Москва, (1986).

О существовании суммируемых многообразий для разностно-динамических систем

К. Бапаев[1,a], С. Сламжанова[2,b]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

[2] *Жетысуский Государственный университет им. И.Жансугурова, Талдыкорган, Казахстан*

E-mail: [a]*v_gulmira@mail.ru*, [b]*beksultan.82@mail.ru*

Рассматривается следующая разностно-динамическая система

$$x_{n+1} = \Lambda x_n + X(n, x_n, y_n, z_n)$$
$$z_{n+1} = A(n)z_n + z_n + Z(n, x_n, y_n, z_n), \tag{1}$$

где $\Lambda = (\delta_{sj}e^{i\varphi j})_1^m$ – диагональная матрица, $x_n = \bar{y}_n - m$ – мерные векторы (черта означает комплексную сопряженность), $A(n)$ – $k \times k$-матрица, собственные числа которой отделены (по модулю) от единицы, среди которых есть по модулю больше и меньше единицы. $X(n, x_n, y_n, z_n), Z(n, x_n, y_n, z_n)$ являются функциями, удовлетворяющими условиям Липшица с малой константой.

С помощью дискретных неравенств доказывается существование $2m$-параметрических суммируемых многообразий для разностно-динамической системы (1).

Funding: Авторы были поддержаны грантом No. AP05131369 МОН РК.

Ключевые слова: Разностно-динамическая система, суммируемые многообразия

2010 Mathematics Subject Classification: 34C41

К теории вложения Соболевских пространств

Ш. БИЛАЛ[1,a], С. ШАЛГИНБАЕВА[2,b]

[1] *Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан*

[2] *Университет международных отношений и мировых языков, Алматы, Казахстан*

E-mail: [a]*bilal44@mail.ru*, [b]*salta_sinar@mail.ru*

Пусть ρ, v, r – заданные весовые функции, определенные на интервале $J = (a, b)$, $-\infty \le a < b \le \infty$, удовлетворяют на этом интервале следующим требованиям:

$$\begin{cases} 0 < \rho(x) \in L_\infty^{loc}(J), & \rho^{-1}(x) \in L_1^{loc}(J), \\ 0 < v(x) \in C^{loc}(J), & 0 \le r(x) \in C^{loc}(J). \end{cases}$$

Введем в рассмотрение следующие величины, характеризующие локальное поведение весовых функций:

$$\omega(x, y) = \sup\Big\{d > 0 : \int\limits_{x-d}^{x} \rho^{-1}(\tau)d\tau \le \int\limits_{x}^{x+y} \rho^{-1}(\tau)d\tau,\ (x - d, x + y] \subset J\Big\},$$

$$d^+(x) = \sup\Big\{d > 0 : \sup_{x-\omega(x,d)\le t\le x+d} v(t) \int\limits_{x-\omega(x,d)}^{x+d} \rho^{-1}(\tau)d\tau \le 1,\ [x, x + d) \subset J\Big\},$$

$d^-(x) = \omega(x, d^+(x))$.

Обозначим

$$\Delta(x) = [x - d^-(x), x + d^-(x)] = [x^-, x^+],\ \Delta^-(x) = [x - d^-(x), x],$$

$\Delta^+(x) = [x, x + d^+(x)]$.

Пусть $AC^{n+1}\left(\overset{\circ}{R}_+\right), \overset{\circ}{R}_+ = [0, \infty)$ – совокупность функций, имеющих абсолютно непрерывные производные $(n+1)$-го порядка и обращающихся в нуль некоторой окрестности бесконечно удаленной точки, своей для каждой функции.

Обозначим через H^n_∞ пополнение пространства $AC^{n+1}\left(\overset{\circ}{R}_+\right)$ по норме

$$\|f\|_{H^n_\infty} = \left\|\rho f^{(n+1)}\right\|_\infty + \left\|\upsilon f^{(n)}\right\|_\infty.$$

Здесь $\upsilon, \rho \in C\,[0, N]\,,\ \forall N > 0$. Продолжим функции υ, ρ четным образом на всю ось и пусть

$$\rho_*\,(x) = \left(\int\limits_{\Delta^+(x)} \rho^{-1}\,(\tau)\,d\tau\right)^{-1}.$$

Лемма. Имеет место неравенство

$$\left\|\rho_* f^{(n)}\right\|_\infty \le K\,\|f\|_{H^n_\infty} \quad \forall f \in AC^{n+1}\left(\overset{\circ}{R}_+\right),$$

где постоянная $K > 0$ не зависит от υ, ρ и f. Положим

$$\mathrm{B}_n\,(x) = r\,(x) \int\limits_x^\infty (s)^{n-1}\,\rho^{-1}\,(s)\,ds.$$

Теорема. Вложение пространств $H^n_\infty \hookrightarrow L_{\infty,r}$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{B}_n = \sup_{x>0} \mathrm{B}_n\,(x) < \infty.$$

И для нормы оператора вложения $E : H^n_\infty \subset L_{\infty,r}$ имеет место оценка

$$C^{-1}\mathrm{B}_n \le \|E\| \le C\mathrm{B}_n,$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от $r,\ \rho,\ \upsilon$.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05130928 Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Ключевые слова: весовые неравенства,весовая функция,вложение, весовые пространства, компактность, абсолютная непрерывность

2010 Mathematics Subject Classification: 26D15,42A10

Достаточные условия предкомпактности множеств в глобальных пространствах типа Морри.

Н. БОКАЕВ[1,a], Д. МАТИН[1,b]

[1] Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева г.Астана, Казахстан
E-mail: [a]bokayev2011@yandex.ru, [b]d.matin@mail.ru

В данной работе приводятся достаточные условия предкомпактности множеств в глобальных пространствах типа Морри $GM_{p\theta}^{w(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Из приведенной теоремы в случае $\theta = \infty$ вытекает результат для обобщенного пространства $M_p^{w(\cdot)}$, а при $w(r) = r^{-\lambda}$, $\theta = \infty 0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$ вытекает известный результат для пространства Морри $M_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)$, а в случае $\lambda = 0$ – это хорошо известная теорема Фреше-Колмогорова.

Пусть $1 \le p \le \infty$, w – измеримая неотрицательная функция на $(0, \infty)$ не эквивалентная нулю. Глобальное пространство типа Морри $GM_{p\theta}^{w(\cdot)} \equiv GM_{p\theta}^{w(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ определяется как множество всех функций $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ с конечной квазинормой

$$\|f\|_{GM_{p\theta}^{w(\cdot)}} \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left\| w(r) \, \|f\|_{L_p(B(x,r))} \right\|_{L_\theta(0,\infty)},$$

где $B(x,r)$ - открытый шар с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$ радиуса $r > 0$.

Пространство $GM_{p\theta}^{w(\cdot)}$ совпадает с обобщенным пространством Морри при $\theta = \infty$ [3], [4]. Обобщенным пространством Морри $M_p^{w(\cdot)}$ совпадает с классическим пространством Морри M_p^{λ} при $w(r) = r^{-\lambda}$, где $0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$, которое, в свою очередь, при $\lambda = 0$ совпадает с пространством $L_p(\mathbb{R}^n)$, а при $\lambda = \frac{n}{p}$ с пространством $L_\infty(\mathbb{R}^n)$.

В соответствии [1], [2], обозначим через $\Omega_{p\theta}$ множество всех функций, которые являются неотрицательными, измеримыми на $(0, \infty)$, не эквивалентными 0 и такими, что для некоторого $t > 0$ (а, значит, и для любых $t > 0$)

$$\|w(r) r^{\frac{n}{p}}\|_{L_\theta(0,t)} < \infty, \quad \|w(r)\|_{L_\theta(t,\infty)} < \infty.$$

Пространство $GM_{p\theta}^{w(\cdot)}$ нетривиально, то есть состоит не только из функций, эквивалентных 0 на $\mathbb{R}^n$, тогда и только тогда, когда $w \in \Omega_{p\theta}$ (см. [3], [4]). Пусть $\chi(A)$ – характеристическая функция множества $A \subset \mathbb{R}^n$ и ${}^cA$ – дополнение A.

Теорема. Пусть $1 \le p \le \theta \le \infty$ и $w \in \Omega_{p\theta}$. Предположим, что множество$S \subset GM_{p\theta,w}(R^n)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\sup_{f\in S} \|f\|_{GM_{p\theta,w}} < \infty,$$

$$\lim_{u\to 0} \sup_{f\in S} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_{GM_{p\theta,w}} = 0$$

и

$$\lim_{r\to\infty}\sup_{f\in S}\left\|f\chi_{C_{B(0,r)}}\right\|_{GM_{p\theta,w}}=0$$

Тогда S является предкомпактным множеством в $GM_{p\theta,w}(R^n)$.

Замечание. В случае пространства Морри $M_p^\lambda(0<\lambda<\frac{n}{p})$ аналогичная теорема была доказана в работе [5], а в случае $\lambda=0$ – достаточное условия хорошо известной теоремы Фреше-Колмогорова (см. [6]).

Ключевые слова: пространства Морри, предкомпактность множеств, глобальные пространства типа Морри.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Литература

[1] Burenkov V. I. *Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces. I.*, *Eurasian Mathematical Journal*, Volume 3, Number 3, (2012), pp. 11 – 32. (год).

[2] Burenkov V. I. Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces. II. *Eurasian Mathematical Journal*, 2013, Volume 4, Number 1, pp. 21 - 45.

[3] Chen Y., Ding Y., Wang X. Compactness of Commutators for singular integrals on Morrey spaces. *Canad. J. Math.*, 2012, Volume 64(2), pp. 257-281.

[4] Bokayev N.A., Burenkov V.I., Matin D.T. Sufficient conditions for pre-compactness of sets in the generalized Morrey spaces. *Bulletin of the KARAGANDA UNIVERCITY*, 2016, Number 4, pp. 18—40.

[5] Bokayev N., Burenkov V., Matin D. On precompactness of a set in general local and global Morrey-type spaces *Eurasian Mathematical Journal* , 2017, Volume 8, Number 3. pp.109 - 115.

[6] Yosida K. Functional Analysis. Springer-Verlag, Berlin, 1978

Граничные условия одномерного волнового объемного потенциала

Б. ДЕРБИСАЛЫ[1,a], М. САДЫБЕКОВ[2,b]

[1] *Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан*

[2] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

E-mail: [a]*b.derbissaly@gmail.com*, [b]*sadybekov@math.kz*

Пусть $\Omega\in\mathbb{R}^2$ – область, ограниченная кривыми $x=\alpha(t)$ и $x=\beta(t)$ и отрезками прямых $t=0$ и $t=T>0$. Здесь $\alpha(t)<\beta(t)$, $\alpha(0)=0$, $\beta(0)=1$, $|\alpha'(t)|<1$, $|\beta'(t)|<1$.

В Ω рассмотрим объемный волновой потенциал

$$u(x,t)=\int_\Omega\varepsilon(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{1}$$

где $\varepsilon(x,t)=\frac{1}{2}\theta(t-|x|)$ – фундаментальное решение задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^2_+=\{(x,t)\in\mathbb{R},t>0\}$:

$$\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}=f(x,t). \tag{2}$$

Рассмотрим уравнение (2) в области Ω. Хорошо известно, что при $T > 1/2$ решение уравнения (2) в Ω не однозначно восстанавливается по начальным условиям

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \; 0 \le x \le 1. \tag{3}$$

Для однозначности необходимо использование краевых условий.

Ставится задачей построение краевых условий, по которым решение уравнения (2) в Ω будет однозначно определяться в виде (1).

В докладе обосновывается, что объемный волновой потенциал (1) на боковых сторонах Ω удовлетворяет краевым условиям

$$u_x(\alpha(t),t) - u_t(\alpha(t),t) = 0, \;\; 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$u_x(\beta(t),t) + u_t(\beta(t),t) = 0, \;\; 0 \le t \le T. \tag{5}$$

Обратно, решение уравнения (2) с начальными условиями (3) краевыми условиями (4), (5) существует, единственно и определяется в виде (1).

В случае $\alpha(t) \equiv 0$, $\beta(t) \equiv 1$ данный результат получен в [1].

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05133271 КН МОН РК.

Ключевые слова: волновое уравнение, объемный волновой потенциал, краевые условия

2010 Mathematics Subject Classification: 35L05, 35L15, 35L20

Литература

[1] Kalmenov T.Sh., Suragan D. Initial-boundary value problems for the wave equation, *Electronic J. Differential Equations*, **2014**, Art. No. 48 (2014), 1–6.

О гладкости одной нелокальной краевой задачи с постоянным коэффициентом для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в пространстве

С.З.Джамалов

Институт Математики АН РУз.,Ташкент, Узбекистан E-mail:siroj63@mail.ru

Введение и постановки задач

Пусть Ω-ограниченная односвязная область в пространстве $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Обозначим: $Q = \Omega\times(0,T)\times(0,\ell) = Q_1\times(0,\ell) = \{(x,t,y); x \in \Omega, 0 < y < \ell, 0 < t < T < +\infty\}$ и $S = \partial\Omega \times (0,T)$.

В области Q рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$Lu = K(x,t)u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)u_{x_j}) - a(x,t)u_{yy} + \alpha(x,t)u_t + $$
$$+ c(x,t)u = f(x,t,y). \tag{1}$$

предположим, что коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции. Предположим: $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in R^n$, $|\xi|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2$.
Кроме того, пусть выполнено одно из условие
a). $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2$; где $a_0 - const > 0$,
b). $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq a_1|\xi|^2$; где $a_1 - const < 0$,
Кроме того, пусть $K(x,0) \leq 0 \leq K(x,T)$, при $x \in \bar{\Omega}$ и на знак функции $K(x,t)$ по переменной t внутри области $\bar{Q}$ не накладываем никаких ограничений, то есть функция $K(x,t)$ внутри области может менять знак. Уравнение (1)- эллиптическое, параболическое или гиперболическое внутри если соответственно $K(x,t) > 0$, $K(x,t) = 0$ и $K(x,t) < 0$. Такие уравнения называются уравнениями смешанного типа [2].

Нелокальная краевая задача.

Найти обобщенное решение $u(x,t,y)$ уравнения (1) из пространства Соболева $W_2^{m+2}(Q)$, $(m = 0, 1, 2, ...)$, удовлетворяющее нелокальным краевым условиям

$$\gamma \cdot u(x,0,y) = u(x,T,y), \tag{2}$$

$$u|_S = 0, \tag{3}$$

$$u(x,t,0) = u(x,t,\ell) = 0, \tag{4}$$

Отметим, что в работах [2],[3] в случае, когда $K(x,0) \leq 0 \leq K(x,T)$, $a(x,t) = 0$ и при ослабленных условиях на коэффициенты уравнения смешанного типа второго порядка (1), изучены однозначное разрешимости и гладкостьи решения нелокальной краевой задачи (1)-(3) в пространствах Соболева. В данной работе, в случае $a(x,t) \neq 0$ и при выполнение условие (1)-(4) на решение уравнения (1) изучается однозначное разрешимости и гладкости решение задачи (1)-(4) в многомерных пространствах Соболева $W_2^{m+2}(Q)$, $m = 0, 1, 2....$

Ключевые слова: уравнения смешанного типа второго рода, однозначное разрешимости и гладкости решения.

2010 Mathematics Subject Classification: 35M10, 35M20

Литература

[1] Врагов В.Н. *Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики*,НГУ, Новосибирск (1983).

[2] Джамалов С.З. Об одной нелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка, *Уз. мат.журн.*, **1**(2014),5–14.

[3] Djamalov.S.Z.On the correctness of a nonlocal problem for the second order mixed type equations of the second kind in a rectangle,

IIUM journal,**17(2)**(2016),95–104.

Решение квазилинейной краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма

Дулат ДЖУМАБАЕВ[1,a], Сандугаш МЫНБАЕВА[2,b]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

[2] *Актюбинский региональный государственный университет им.К.Жубанова, Актобе, Казахстан*

E-mail: [a]*dzhumabaev@list.ru*, [b]*mynbaevast@mail.ru*

На $[0, T]$ рассматривается краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(t, x) + \varphi(t)\int_0^T \psi(\tau)x(\tau)d\tau, \ \ t \in (0, T), \ \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$$g[x(0), x(T)] = 0, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$, $(n \times n)$ матрицы $\varphi(t), \psi(\tau)$ непрерывны на $[0, T]$, $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, и $g : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ непрерывные функии.

В [1] был предложен новый подход к определению общего решения для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма. Введено Δ_N общее решение для линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма и предложены методы решения линейной краевой задачи для этого уравнения. Показано, что для любого регулярного решения Δ_N существует единственное новое общее решение и даны алгоритмы нахождения его коэффициентов и правых частей. Основная идея предлагаемых методов является построения системы линейных алгебраических уравнений относительно произвольных параметров Δ_N общего решения.

В настоящим сообщении Δ_N общее решение построено для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма (1). Подставляя его соответствующие выражения в краевое условие, (2) и условиям непрерывности решения во внутренних точках разбиения Δ_N получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно его произвольных параметров

$$Q_*(\Delta_N; \lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}^{nN}. \tag{3}$$

Предлагается метод решения краевой задачи (1), (2) основанной на решений системы (3). Значение $Q_T(\Delta_N; \widehat{\lambda})$ для выбранного $\widehat{\lambda}$ находятся решением специальной задачи Коши для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений [2].

Для нахождения элементов матрицы Якоби $\frac{\partial Q_*(\Delta_N;\lambda)}{\partial \lambda} : \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}^{nN}$
решаются матричные специальные задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма.

Ключевые слова: Δ_N общее решение, специальная задача Коши, регулярное разбиение, алгоритм решения краевой задачи.

2010 Mathematics Subject Classification: 34K29, 60H10

Литература

[1] Dzhumabaev, D.S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems, J. Comp. Appl. Math., 2018, 327, 79-108. [2] Джумабаев Д. С., Бакирова Э.А., Мынбаева С.Т. Численная реализация одного алгоритма нахождения решения специальной задачи Коши для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма. Мат.журнал., 2017, №4(66), 25-36.

Краевая задача для волнового уравнения в прямоугольнике с данными на всей границе области

А. ДУКЕНБАЕВА[1,a], М. САДЫБЕКОВ[1,b]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

E-mail: [a]*dukenbayeva@math.kz,* [b]*sadybekov@math.kz*

Пусть $\Omega \subset R^2$ - прямоугольная область, ограниченная прямыми: $AB : 0 \leq x \leq a,\ y = 0$; $BC : x = a,\ 0 \leq y \leq b$; $CD : 0 \leq x \leq a, y = b$ и $AD : x = 0,\ 0 \leq y \leq b$.

В Ω рассмотрим неоднородное волновое уравнение:

$$u_{xx} - u_{yy} = f(x, y). \tag{1}$$

Хорошо известно, что задача Дирихле для волнового уравнения (1) в прямоугольной области, вообще говоря, не является корректной. Например, в случае нашей области Ω, легко видеть, что однородное уравнение (1) с условиями Дирихле

$$u|_{AB\cup BC\cup AD} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{CD} = 0 \tag{3}$$

имеет счетное число ненулевых решений вида

$$u_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad m, n = 1, 2, ...$$

при выполнении условий $na = mb$.

Задача Дирихле для волнового уравнения является одной из наиболее сложных моделей математической физики. Волновое уравнение описывает почти все разновидности малых колебаний в распределенных механических системах, таких как продольные звуковые колебания в газе, в жидкости, в твердом теле; поперечные колебания в струнах и т.п. Компоненты электромагнитных векторов и потенциалов, и, следовательно, многие электромагнитные явления (от квазистатики до оптики) в той или иной мере объясняются свойствами решений волнового уравнения.

Впервые неединственность решения задачи Дирихле для волнового уравнения была отмечена в работах Ж. Адамара, А. Губера. В своей работе Д. Боржин и Р. Даффин рассмотрели задачу Дирихле для однородного уравнения (1) в прямоугольнике Ω. Используя преобразование Лапласа, они показали, что если число a/b – иррациональное, то имеет место единственность решения задачи в классе непрерывно дифференцируемых функций с суммируемыми по Лебегу вторыми производными. А в работах К.Б. Сабитова, когда a/b является алгебраическим числом степени $n \geq 2$, получено условие существования и единственности решения задачи Дирихле.

В докладе нами предлагаются новые постановки локальных краевых задач для волнового уравнения в прямоугольной области, в которой краевые условия задаются на всей границе области. Доказывается корректность сформулированных задач в классическом и обобщенном смыслах.

Для обоснования их корректности необходимо иметь эффективное представление общего решения задачи. В этом направлении нами получена удобная формула представления общего решения волнового уравнения в прямоугольной области, основанная на классической формуле Даламбера. При этом построенное общее решение уже заведомо удовлетворяет краевым условиям по пространственной переменной.

Далее, задавая различные краевые условия по временной переменной, мы получаем некоторые функциональные или функционально-дифференциальные уравнения. Таким образом, доказательство корректности сформулированных задач сведено к вопросу существования и единственности решения соответствующего функционального уравнения.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05133271 КН МОН РК.

Ключевые слова: Волновое уравнение, корректность задач, классическое решение, сильное решение, формула Даламбера

2010 Mathematics Subject Classification: 35L05, 35L20

Максимальная регулярность одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка

К.Н. ОСПАНОВ[1,a], Ж.Б. ЕСКАБЫЛОВА[1,b]

[1] *Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан*
E-mail: [a]ospanov_kn@enu.kz, [b]juli_e92@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$Ly = -y''' + p\,(x)\,y' + q\,(x)\,y = f(x), \tag{1}$$

где $f \in L_2(R)$, $R = (-\infty, +\infty)$. Для $0 \le v(x) \in C_{loc}(R)$ положим
$v^*(x) = \sup\left\{d : d^{-1} \ge \|v\|_{L_1(x-d/2,\, x+d/2)}\right\}, x \in R.$

Теорема 1. *Пусть $p \ge 1$ - непрерывно дифференцируемая, q - непрерывная функции, удовлетворяющие следующим условиям:*
а) найдутся $\delta_- > 0$ и $\delta_+ > 0$ такие, что
$\max\left(\sup\limits_{t>0}\ t\,\|p^*\|^2_{L_2(t-\delta_+,+\infty)},\ \sup\limits_{\tau<0}\ (-\tau)\,\|p^*\|^2_{L_2(-\infty,\tau+\delta_-)}\right) < +\infty$**;**
б) для некоторых чисел $a \ge 1$, $b > 0$ выполнены неравенства
$a^{-1} \le p^*(x)(p^*(\eta))^{-1} \le a \quad \forall \eta \in (x - b/2p^*(x),\ x + b/2p^*(x)),\ \ x \in R,$
причем найдется g такое, что $a^3b^{-1} \le g$;
в) $\sup\limits_{x\in R}\left[\|p\|_{L_2(x-0.25p^*(x),\ x+0.25p^*(x))}\,(p^*(x))^{3/2}\right] < \infty;$
г) $\sup\limits_{x>0}\ \|q\|_{L_2(0,\,x)}\left\|(p^*)^{-2}\right\|_{L_2(\tau(x),\,+\infty)} + \sup\limits_{s<0}\ \|q\|_{L_2(s,\,0)}\left\|(p^*)^{-2}\right\|_{L_2(-\infty,\,\eta(s))} < \infty$
где $\tau(x) = \max\left(x/4, x - 8\sup\limits_{x>0}(p^*)^{-1}(x)\right)$,
$\eta(s) = \min\left(x/4,\ s + 8\sup\limits_{x<0}(p^*)^{-1}(x)\right)$.
Тогда для каждой правой части $f \in L_2(R)$ уравнение (1) имеет, притом единственное решение y. Кроме того, для y справедлива оценка

$$\|y'''\|_2 + \|py'\|_2 + \|qy\|_2 \le C\,\|f\|_2\,. \tag{2}$$

Условия теоремы близки к необходимым, а именно:

- если условие а) не выполняется, то при $q = 0$ для широкого класса функций $p(x)$ решений уравнения (1), принадлежащих $L_2(R)$ нет, т.е. наша задача теряет смысл;

- если $q(x) = 0$, а для y имеет место оценка (2), то выполнено в);

-если имеет место оценка (2) и для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\max\left[\sup_{x>0}\|q\|^{-1}_{L_2(0,\,x)}\,\|q\|_{L_2(x,\,(1+\varepsilon)x)}\,, \sup_{t<0}\|q\|^{-1}_{L_2(t,\,0)}\,\|q\|_{L_2((1-\varepsilon)t,\,t)}\right] < +\infty,$$

то выполняется условие г).

Пример. Условия теоремы выполнены для уравнения

$$-y''' + \left(1 + 20e^{\sqrt{1+x^2}}\sin^2 e^{x^2}\right)y' + x^{2n}\cos^2 5xy = f(x), f \in L_2(R) \tag{3}$$

Следовательно, (3) имеет, притом единственное сильное решение y из $L_2(R)$ и для y справедлива оценка

$$\|y'''\|_2 + \left\|\left(1 + 20e^{\sqrt{1+x^2}}\sin^2 e^{x^2}\right)y'\right\|_2 + \left\|x^{2n}\cos^2 5x\ y\right\|_2 \le C\,\|f\|_2\,.$$

Оценка (2) позволяет при минимальных ограничениях на коэффициенты получить оптимальную гладкость и поведение решения уравнения (1), а также эффективно применяется для изучения квазилинейных дифференциальных уравнений путем использования методов линеаризации, основанных на теоремах о неподвижной точке отображений.

Решаемые в работе задачи в случае, когда $p = 0$, а q знакоопределен, для уравнения (1) изучались Муратбековым М.Б., Амановой Т.Т., Отелбаевым М., Биргебаевым А., Айткожа Ж.Ж. и др. Их результаты можно распространить на уравнение (1), где рост p в некотором смысле подчиняется q. Основное отличие нашей работы состоит в том, что рост p в теореме 1 не зависит от q.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05131649 МОН РК.

Ключевые слова: уравнение третьего порядка, неограниченный коэффициент, обобщенное решение, корректная разрешимость, коэрцитивная оценка,

2010 Mathematics Subject Classification: 34A30, 34B40, 34C11

Характеристический определитель спектральной задачи для оператора Штурма-Лиувилля с интегральным возмущением краевого условия антипериодического типа

Н.С. ИМАНБАЕВ

Южно-Казахстанский государственный педагогический университет, Шымкент, Казахстан

E-mail: imanbaevnur@mail.ru

В настоящей работе рассматривается [1] спектральная задача:

$$L_1(u) \equiv -u''(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < 1, \qquad (1)$$

$$U_1(u) \equiv u(0) + u(1) = 0, \qquad (2)$$

$$U_2(u) \equiv u'(0) + u'(1) = \int_0^1 \overline{p(x)} u(x)\, dx, \ \ p(x) \in L_1(0,1). \qquad (3)$$

Функцию $p(x)$ представим в виде ряда Фурье по тригонометрической системе:

$$p(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(2(k-1)\pi) x + b_k sin(2(k-1)\pi) x\right] \qquad (4)$$

Теорема 1. *Характеристический определитель антипериодической спектральной задачи с возмущенными краевыми условиями (1) - (3) представим в виде*

$$\Delta_1(\lambda) = 2\left(1 + \cos\sqrt{\lambda}\right) - 2\sin\sqrt{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{(2k-1)\pi}{\lambda - ((2k-1)\pi)^2},$$

b_k– *коэффициенты разложения (4) функции $p(x)$ в три-гонометрический ряд Фурье.*

Funding: Авторы были поддержаны при финансовой поддержке государственного гранта "Лучший преподаватель ВУЗа - 2017"МОН РК.

Ключевые слова: собственные значение, собственные функций,оператор Штурма-Лиувилля, Характеристический определитель.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B10, 34L10

Литература

[1] Иманбаев Н.С. Характеристический определитель спектральной задачи для оператора Штурма-Лиувилля с интегральным возмущением краевого условия антипериодического типа, *Вестник КарГУ.-Серия Математика*, **2**:82 (2016), 68–73.

Обратная задача одномерного потенциала

Тынысбек КАЛЬМЕНОВ[1,a], Улзада ИСКАКОВА[1,b], Нурбек КАХАРМАН[1,2,c]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

[2] *Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан*

E-mail: [a]*kalmenov@math.kz*, [b]*iskakova@math.kz*, [c]*n.kakharman@math.kz*

Пусть $\varepsilon(x,\xi)$ – фундаментальное решение уравнения Штурма-Лиувилля

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varepsilon(x,\xi)+q(x)\varepsilon(x,\xi)=\delta(x,\xi),\ 0<x<1, \tag{1}$$

где $q(x)\in C^1[0,1]$.

Рассмотрим обратную задачу потенциала:

Найти плотность $\rho(x)$ одномерного потенциала задаваемого формулой

$$\int\limits_0^1 \varepsilon(x,\xi)\rho(\xi)d\xi=u(x), \tag{2}$$

где $u(x)\in C^2[0,1]$ – заданное значение одномерного потенциала Ньютона.

Задача (1)-(2) является некорректной, поскольку (2) это есть уравнение Фредгольма первого рода.

Основным результатом доклада является определение критерия существования решения этой обратной задачи:

Теорема 1. *Задача (2) имеет решение $\rho(x)$ тогда и только тогда, когда $u(x)$ удовлетворяет потенциальному граничному условию, т.е.*

$$-u'(1)\varepsilon(x,1)+u'(0)\varepsilon(x,0)+u(1)\frac{\partial}{\partial\xi}\varepsilon(x,1)-u(0)\frac{\partial}{\partial\xi}\varepsilon(x,0)\Big|_{x=1}=0, \tag{3}$$

$$-u'(1)\varepsilon(x,1)+u'(0)\varepsilon(x,0)+u(1)\frac{\partial}{\partial\xi}\varepsilon(x,1)-u(0)\frac{\partial}{\partial\xi}\varepsilon(x,0)\Big|_{x=0}=0. \tag{4}$$

В качестве примера рассмотрим случай $q(x) \equiv 0$. Тогда $\varepsilon(x,\xi)$ задается формулой

$$\varepsilon(x,\xi) = \frac{1}{2}\left|x-\xi\right|, \tag{5}$$

а условия (3)-(4) запишутся в виде

$$u'(1) + u'(0) = 0, \quad u'(0) = u(1) + u(0). \tag{6}$$

Тем самым, обратная задача разрешима тогда и только тогда, когда $u(x) \in C^2[0,1]$ и удовлетворяет условиям (5)-(6), при этом $\rho(x) = u''(x)$.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05133239 МОН РК.

Ключевые слова: уравнение Штурма-Лиувилля, фундаментальное решение, Ньютоновый потенциал.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B05, 34B24, 45B05

Литература

[1] Кальменов Т.Ш., Сураган Д. К спектральным вопросам объемного потенциала, *Доклады РАН*, **428**:(1) (2008), 16–19.

[2] Кальменов Т.Ш., Искакова У.А. Критерий сильной разрешимости смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа, *Доклады РАН*, **414**:(2) (2007), 168–171.

Воссоздание кусочно-однородного стержня по собственным частотам

Ж. КАЙЫРБЕК[1,a], А. НУРМЕТОВА[2,b]

[1] *Казахский национальный университет имени Аль-Фараби, Алматы, Казахстан*

[2] *Казахский национальный университет имени Аль-Фараби , Алматы, Казахстан*

E-mail: [a]*kayyrbek.zhalgas@mail.ru*, [b]*serjan.t.90@mail.ru*

В настоящей работе мы покажем как построить кусочно-однородный стержень, имеющий в точности два конечных спектра. Мы рассматриваем колеблющийся стержень, то есть уравнение

$$(A(x)v'(x))' + \omega^2 A(x)v(x) = 0 \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$i)v'(0) = 0 = v'(L); \quad ii)v(0) = 0 = v'(L); \tag{2}$$

Мы заменим уравнение (1) на два спаренных уравнением первого порядка, а именно:

$$v'(x) = i\omega\frac{p(x)}{A(x)}, \quad p'(x) = i\omega(x)A(x)v(x).$$

Заметим, что $i\omega p(x) = A(x)v'(x)$, откуда $v(x)$ и $p(x)$ непрерывны в точке разрыва $A(x)$. Возьмем $\mu(x) = \sqrt{A(x)}$ и определим нижнюю и верхнюю величины

$$D = \frac{1}{2}\left(\mu v + \mu^{-1}p\right), \quad U = \frac{1}{2}\left(\mu v - \mu^{-1}p\right) \tag{3}$$

Они удовлетворяют уравнениям

$$D' = i\omega D + \mu'\mu^{-1}U, \quad U' = -i\omega U\mu'\mu^{-1}D$$

если $A(x)$ постоянна, то $\mu' = 0$ и

$$D' = i\omega D, \quad U' = -i\omega U.$$

Последние уравнения имеют решение

$$D = D_0\exp(i\omega x), \quad U = U_0\exp(-i\omega x) \tag{4}$$

Пусть $A(x)$ имеет вид

$$A(x) = A_j, \quad (j-1)\Delta \le x \le j\Delta, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Определим величины

$$D_j = D(j\Delta+), \quad U_j = U(j\Delta+), \quad D_j^* = D(j\Delta-), \quad U_j^* = U(j\Delta-) \tag{5}$$

где $+$ или $-$ являются значениями справа или слева от $j\Delta$ соответственно. Из уравнения (4) следует

$$D_j^* = \exp(i\omega\Delta)D_{j-1}, \quad U_j^* = \exp(-i\omega\Delta)U_{j-1}$$

Возьмем $z = e^{2i\omega\Delta}$. Так как $z = e^{2i\omega\Delta}$ является периодической функцией от ω с периодом π/Δ, то каждое значение z позволяет построить бесконечную последовательность собственных значений с равными промежутками π/Δ, и каждое z^{-1} дает другую такую последовательность. Следовательно, это система не только имеет собственные значения $(\omega_j)_0^{2n}$, но и

$\omega_{mn+j} = \frac{m\pi}{\Delta} + \omega_j, \quad j = 0, 1, ..., n$, если m является четным,

$\omega_{mn+j} = \frac{m\pi}{\Delta} + \omega_j, \quad j = 0, 1, ..., n$, если m является нечетным.

И так мы по заданным постоянной функций $A(x)$ нашли частоту стержня.

Ключевые слова:стержень,частота,кусочно-однородный стержень

Литература

[1] Глэдвелл Г.Л. *Обратные задачи теории колебаний*, Москва, Ижевск (2008).

Об одной задаче Бицадзе-Самарского для уравнения Штурма-Лиувилля

Нурбек КАХАРМАН[1,2,a],

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

[2] *Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан*

E-mail: [a]*n.kakharman@math.kz*

В 1969 году вышла работа А.В. Бицадзе и А.А. Самарского [1] посвященная постановке и решению нового типа нелокальной задачи.

Основное отличие задач такого типа от обычных граничных задач в том, что на многообразии, участвующем в условии, дифференциальное уравнение выполняется.

Рассмотрим задачу Бицадзе-Самарского на интервале $x \in (-1, 1)$

$$Lu = -u''(x) + q(x)\,u(x) = f(x),\ -1 < x < 1, \tag{1}$$

с внутренне-краевым условием

$$u'(0) + u'(1) = 0, \tag{2}$$

$$u'(0) = u(0) + u(1). \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть $q(x) > 0$, при $0 \leq x \leq 1$. Тогда для любой $f \in L_2(-1, 1)$ существует единственное обобщенное решение $u \in W_2^2(-1, 1)$ задачи Бицадзе-Самарского (1)-(3), и это решение удовлетворяет неравенству*

$$\|u\|_{W_2^1(0,1)} \leq C\|f\|_{L_2(0,1)},$$

где постоянная C не зависит от $u(x)$.

Также в докладе будет дана конструкция регулярного решения и обобщенного решений задачи Бицадзе-Самарского (1)-(3). Построена задача, сопряженная к задаче Бицадзе-Самарского (1)-(3) и установлен критерий гладкости ее решения.

Funding: Автор был поддержаны грантом AP05133239 МОН РК.

Ключевые слова: Задача Бицадзе-Самарского, потенциальные условия.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B05, 34B24

Литература

[1] Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач, *Доклады АН СССР*, **185**:(4) (1969), 739–774.

— ⁂ —

Существование резольвенты и коэрцитивные оценки для оператора Шредингера с отрицательным параметром в пространстве $L_2(R^n)$

М. МУРАТБЕКОВ[1,a], М. МУРАТБЕКОВ[2,b]

[1] *Таразский государственный педагогический университет, Тараз, Казахстан*

[2] *Казахский университет экономики, финансов и международной торговли, Астана, Казахстан*

E-mail: [a]*musahan_m@mail.ru*, [b]*mmuratbekov@kuef.kz*

В работе в пространстве $L_2(R^n)$ изучается оператор Шредингера с отрицательным параметром.

$$L_t = -\Delta + \left(-t^2 + itb(x) + q(x)\right).$$

Здесь $-\infty < t < \infty$, $i^2 = -1$, Δ – оператор Лапласа, $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$.

Оператор L_t, нетрудно убедиться, естественным образом возникает при изучении сингулярных дифференциальных операторов гиперболического типа в пространстве $L_2(R^{n+1})$.

Как известно при $t = 0$ существование резольвенты оператора Шредингера $\Delta + q(x)$ достаточно хорошо изучены, например, в работах Т. Като [1], М. Рида и Б. Саймона [2], М. Отелбаева [3] и др.

Приведем формулировки основных результатов.

Рассмотрим оператор

$$(L_t + \mu I)u = -\Delta u + \left(-t^2 + itb(x) + q(x)\right)u$$

первоначально определенный на множестве $C_0^\infty(R^n)$, где $\mu \geq 0$.

В дальнейшем предположим, что коэффициенты $b(x)$, $q(x)$ удовлетворяют условию: $i)$ $|b(x)| \geq \delta_0 > 0,\ q(x) \geq \delta > 0$ – непрерывные функции в R^n.

Оператор $L_t + \mu I$ допускает замыкание в пространстве $L_2(R^n)$, которое обозначим также через $L_t + \mu I$.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие $i)$. Тогда оператор $L_t + \mu I$ при $\mu \geq 0$ ограниченно обратим в пространстве $L_2(R^n)$.*

Теорема 2. *Пусть выполнено условие $i)$. Тогда при $\mu \geq 0$ для всех $u \in D(L_t)$ справедливы оценки:*

$a)$ $\sum\limits_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_2 + \left\| \sqrt{q(x)}u \right\|_2 \leq c \left\| (L_t + \mu I)u \right\|;$

$b)$ $\sum\limits_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_2 + \left\| \sqrt{q(x)}u \right\|_2 + \left\| \sqrt{t \cdot b(x)}u \right\|_2 \leq c \left\| (L_t + \mu I)u \right\|$

$c > 0$ – постоянное число, $\|t\| \geq \beta > 0$.

Funding: Авторы были поддержаны грантом МОН РК на 2018-2020 гг. (ИРН:AP05131080).

Ключевые слова: оператор Шредингера, резольвента, коэрцитивные оценки, оператор Лапласа

2010 Mathematics Subject Classification: 35J10, 47A10

Литература

[1] Kato T. Schrödinger operators with singular potentials, *Israel Journal of Mathematics*, **13**:1-2 (1972), 135–140.

[2] Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики: Гармонический анализ, самосопряженность*, Мир, Москва (1978), том 2.

[3] Отелбаев М. Об условиях самосопряженности операторов Шредингера с операторным потенциалом, *Украинский математический журнал*, **28**:6 (1976), 763–771.

О существований резольвенты и разделимости одного класса сингулярных линеаризованных операторов Кортвега - де Фриза

М. МУРАТБЕКОВ[1,a], А. СУЛЕЙМБЕКОВА[2,b]

[1] *Таразский государственный педагогический университет, Тараз, Казахстан*

[2] *Таразский государственный педагогический университет, Тараз, Казахстан*

E-mail: [a]*musahan_m@mail.ru*, [b]*suleimbekovaa@mail.ru*

В работе изучается сингулярный линеаризованный оператор Кортвега - де Фриза с неограниченными коэффициентами. Для этого оператора будет изучен вопрос о существовании резольвенты в пространстве $L_2(R)$ и будет показано, как дифференциальные свойства элементов из области определения оператора зависит от коэффициентов оператора.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$Lu + \lambda u = \frac{\partial u}{\partial y} + R_2(y)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + R_1(y)\frac{\partial u}{\partial x} + R_0(y)\, u + \lambda u \tag{1.1}$$

первоначально определенный на $C^{\infty}_{0,\pi}\left(\overline{\Omega}\right)$, где $\overline{\Omega} = \{(x, y) : \, -\pi \le x \le \pi, \, -\infty < y < \infty\}$, $\lambda \ge 0$, где $C^{\infty}_{0,\pi}$ – множество, состоящее из бесконечно дифференцируемых функции и удовлетворяющих условиям:

$$u_x^{(i)}(-\pi, y) = u_x^{(i)}(\pi, y) \quad i = 0,\ 1,\ 2 \tag{1.2}$$

и финитных по переменной y.

В дальнейшем предположим, что коэффициенты $R_0(y)$, $R_1(y)$, $R_2(y)$ удовлетворяют условиям:

$i)$ $R_0(y) \ge \delta_0 > 0$, $R_1(y) \ge \delta_1 > 0$, $-R_2(y) \ge \delta_2 > 0$ – непрерывные функции в $R = (-\infty, \infty)$;

$ii)$ $M_0 = \sup\limits_{|y-t|\le 1} \frac{R_0(y)}{R_0(t)} < \infty$; $M_1 = \sup\limits_{|y-t|\le 1} \frac{R_1(y)}{R_1(t)} < \infty$; $M_2 = \sup\limits_{|y-t|\le 1} \frac{R_2(y)}{R_2(t)} < \infty$.

Оператор $L + \lambda I$ допускает замыкание в пространстве $L_2(\Omega)$, которое обозначим так же через $L + \lambda I$.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие i). Тогда оператор $L+\lambda I$ при $\lambda \ge 0$ непрерывно обратим.*

Определение. Будем говорить оператор L разделим, если для функций $u \in D(L)$ имеет место оценка

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|_2 + \left\|R_2(y)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right\|_2 + \left\|R_1(y)\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_2 + \|R_0(y)\, u\|_2 \leq$$

$$\leq C\left(\|Lu\|_2 + \|u\|_2\right)$$

где C – не зависит от $u(x,y)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия $i) - ii)$. Тогда оператор L разделим.*

Пример. Пусть $R_0(y) = |y| + 1$, $R_1(y) = e^{|y|}$, $R_2(y) = -10 \cdot e^{|y|}$ $-\infty < y < \infty$. Нетрудно убедиться, что выполняются все условия теоремы 2. Следовательно оператор L разделим, т.е.

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|_2 + \left\|10 \cdot e^{|y|}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right\|_2 + \left\|e^{|y|}\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_2 + \|(|y|+1)\, u\|_2 \leq$$

$$\leq C\left(\|Lu\|_2 + \|u\|_2\right)$$

C – постоянное число.

Funding: Авторы были поддержаны грантом МОН РК на 2018-2020 гг. (ИРН:AP05131080).

Ключевые слова: оператор Кортвега - де Фриза, резольвента, разделимость, сингулярный линеаризованный оператор

2010 Mathematics Subject Classification: 47A10, 47A50, 54D65

Литература

[1] Temam R. Sur un problem non lineaire, *J. Math. Pures Apple*, **48**:2 (1969), 159-172.

[2] Лионс Ж.Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, Москва (1972), 586 с.

О дробных аналогах задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа

К. НАЗАРОВА[1,a], Б. ТУРМЕТОВ[2,b]

[1,2] *Международный казахско-турецкий университет им.А.Ясави, Туркестан, Казахстан*
E-mail: [a]*gjnazarova@mail.ru*, [b]*turmetovbh@mail.ru*

В настоящем докладе излагаются вопросы разрешимости дробных аналогов краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. В качестве граничных операторов рассматриваются операторы дробного дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля и Капуто. Рассматриваемые задачи решаются сведением их к интегральным уравнениям Фредгольма. Доказаны теоремы о существовании и единственности решений исследуемых задач.

Пусть Ω - единичный шар, $\partial\Omega$ - единичная сфера,

$$D^{\alpha}u(x) = \frac{d}{dr}J^{1-\alpha}u(x), D_*^{\alpha}u(x) = J^{1-\alpha}\left[\frac{du}{dr}\right](x), 0 < \alpha \leq 1$$

соответственно производные порядка α в смысле Римана-Лиувилля и Капуто [1].

Пусть $0 \leq \alpha_m < ... < \alpha_1 < \alpha \leq 1, a_j \geq 0, j = 1, 2, ..., m, m \geq 1$. Введем обозначения

$$P_m(D) = D^\alpha + \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot D^{\alpha_j}, P_m^*(D) = D_*^\alpha + \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot D_*^{\alpha_j}$$

Рассмотрим в области Ω следующие задачи

Задача D. Пусть $0 \leq \alpha_m < ... < \alpha_1 < \alpha < 1$. Найти гармоническую в области Ω функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, для которой $r^\alpha D^\alpha u(x) \in C\left(\bar{\Omega}\right)$ и удовлетворяющую граничному условию

$$P_m(D)\, u(x) = f(x), x \in \partial\Omega.$$

Задача N. Пусть $0 < \alpha_m < ... < \alpha_1 < \alpha \leq 1$. Найти гармоническую в области Ω функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, для которой $r^\alpha D_*^\alpha u(x) \in C\left(\bar{\Omega}\right)$ и удовлетворяющую граничному условию

$$P_m^*(D)\, u(x) = f(x), x \in \partial\Omega.$$

Отметим, что задачи D и N в случае $a_j = 0, j = 1, 2, ..., m$ были изучены в работах [2,3].

Основные утверждения относительно задач D и N.

Теорема 1. *Пусть* $0 \leq \alpha_m < ... < \alpha_1 < \alpha < 1, a_j \geq 0, j = 1, 2, ..., m$. *Тогда для любого* $f(x) \in C(\partial\Omega)$ *решение задачи D существует и единственно.*

Теорема 2. *Теорема 4. Пусть* $0 < \alpha_m < ... < \alpha_1 < \alpha \leq 1, a_j \geq 0, j = 1, 2, ..., m, f(x) \in C(\partial\Omega)$. *Тогда для разрешимости задачи N необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\int_\Omega f(x)dx = 0. \tag{1}$$

Если решение задачи существует, то оно единственно с точностью до постоянного значения.

Замечание. Из этих утверждений следует, что задача D безусловна разрешима и следовательно обобщает задачу Дирихле на граничные операторы дробного порядка. Для разрешимости задачи N необходимо выполнения условия (1). Это условие совпадает с условием разрешимости задачи Неймана. Поэтому, данная задача обобщает известную задачу Неймана для уравнения Лапласа.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05131268/ГФ МОН РК.

Ключевые слова: : уравнение Лапласа, задача Дирихле, задача Неймана, дробная производная, оператор Римана-Лиувилля, оператор Капуто.

2010 Mathematics Subject Classification: 35J05; 35J25; 26A33

Литература

[1] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam (2006).

[2] Karachik V. V., Turmetov B.Kh.,Torebek B.T. On some integro-differential operators in the class of harmonic functions and their applications, *Siberian Advances in Mathematics*, **22**:2 (2012), 115–134.

[3] Turmetov B.Kh., Torebek B. T. On Solvability of a Boundary Value Problem for the Poisson Equation with the Boundary operator of a fractional order, *Boundary Value Problems*, **2013**:93 (2013), 18 p.

Об одной начальной задаче для вырождающегося уравнения гиперболического типа второго рода

А.Б. ОКБОЕВ[1,a]

[1] *Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан*
E-mail: [a]aoqboyev@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$L_{\alpha,\lambda}\left(u\right)\equiv u_{xx}+y\,u_{yy}+\alpha\,u_{y}-\lambda^{2}\,u=0 \tag{1}$$

в конечной односвязной области D плоскости xOy, ограниченной при $y\leq 0$ характеристиками $AC: x-2\sqrt{-y}=0$, $BC: x+2\sqrt{-y}=1$ и $AB: y=0$ уравнения (1), где $\lambda\in R$ или $i\lambda\in R$, а $\alpha\in R$, причем $\alpha\in(-1/2,\ 0)$.

Видоизмененная задача Коши. Требуется найти функцию $u(x,y)\in C^{2}(D)\cap C(\overline{D})$, удовлетворяющую в области D уравнению (1) и начальным условиям

$$u(x,0)=\tau(x),\ x\in[0,1]\,;\ \lim_{y\to 0}(-y)^{\alpha}\frac{\partial}{\partial y}[u-A_{\alpha}^{-}(\tau,\lambda)]=\nu(x),\ x\in(0,1)\,, \tag{2}$$

где $\tau(x)$ и $\nu(x)$ - заданные функции, $2\beta=2\alpha-1$, $\sigma=4\lambda\sqrt{-yz(1-z)}$,

$$A_{\alpha}^{-}\left(\tau,\lambda\right)=\frac{8\gamma_{1}y}{\left(1+\beta\right)\,\left(1+2\beta\right)}\int\limits_{0}^{1}\left(\lambda^{2}-\frac{d^{2}}{dt^{2}}\right)\tau(t)\left[z(1-z)\right]^{1+\beta}\,\overline{J}_{1+\beta}\left(\sigma\right)dz+$$

$$+\gamma_{1}\int\limits_{0}^{1}\tau(t)\left[z(1-z)\right]^{\beta}\,\overline{J}_{\beta}\left(\sigma\right)dz,\ \gamma_{1}=\frac{\Gamma\left(2+2\beta\right)}{\Gamma^{2}\left(1+\beta\right)},\ \overline{J}_{\gamma}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}(z/2)^{2k}}{k!(1+\gamma)_{k}}.$$

Справедлива следующая

Теорема. *Если* $\tau(x)\in C^{3}\left[0,\,1\right]$ *и* $\nu\left(x\right)\in C^{1}\left[0,\,1\right]$, *то функция* $u(x,y)$, *определенная формулой*

$$u(x,y)=A_{\alpha}^{-}(\tau,\lambda)-\gamma_{2}(-y)^{1-\alpha}\int\limits_{0}^{1}\nu(t)\left[z(1-z)\right]^{-\beta}\overline{J}_{-\beta}(\sigma)dz, \tag{3}$$

является единственным решением задачи $\{(1),(2)\}$, *где* $\gamma_{2}=\frac{2\Gamma(2-2\alpha)}{\Gamma^{2}(3/2-\alpha)}$.

В характеристических координатах $\xi=x-2\sqrt{-y}$ и $\eta=x+2\sqrt{-y}$ уравнение (1) переходит в уравнение типа Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$\frac{\partial^{2}\widetilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\beta}{\eta-\xi}\left(\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\eta}-\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\xi}\right)-\frac{1}{4}\lambda^{2}\,\widetilde{u}=0, \tag{4}$$

область D преобразуется в область $\Delta = \{(\xi,\eta) : 0 < \xi < \eta < 1\}$, а (2) - в

$$\widetilde{u}(\xi,\xi) = \tau\,(\xi)\,,\ \lim_{\eta\to\xi}\frac{(\eta-\xi)^{2\alpha-1}}{4^{2\alpha-1}}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left[\widetilde{u}-\widetilde{A}_{\alpha}^{-}(\tau,\lambda)\right] = \nu(\xi). \tag{5}$$

В дальнейшем для простоты изложения опускаем знак $\sim$.

Согласно формуле (3), решение задачи $\{(4),(5)\}$ определяется формулой

$$u(\xi,\,\eta) = \,A_{\alpha}^{-}(\tau,\lambda) - 4^{2\beta-1}\gamma_2\int\limits_{\xi}^{\eta}\,(\eta-t)^{-\beta}(t-\xi)^{-\beta}\,\overline{J}_{-\beta}(\sigma)\nu(t)dt. \tag{6}$$

Определение. Функция $u(\xi,\,\eta)$ называется обобщенным решением уравнения (1) в области D из класса R_{2s}^{λ}, если ее можно представить в виде (6) и

$$\tau\,(x) = \tau\,(s) + sign(x-s)\int\limits_{s}^{x}|x-\zeta|^{-2\beta}\,\overline{I}_{-\beta}\,[\lambda(x-\zeta)]\,T(\zeta)\,d\zeta, \tag{7}$$

где $\nu(x), T(x) \in C(0,1)\bigcap L[0,1]$, $\overline{I}_{\gamma}(z) = \overline{J}_{\gamma}(iz)$, а $s = \overline{0,1}$.

Подставляя (7) в (6) и выполняя некоторые преобразования, получим представление обобщенного решения уравнения (1) из класса R_{2s}^{λ} :

$$u(\xi,\eta) = \int\limits_{s\eta}^{(1-s)\xi+s} r_1^{-\beta}\,\overline{I}_{-\beta}\,[\lambda\sqrt{r_1}]\,T(\zeta)d\zeta + \int\limits_{\xi}^{\eta} r_2^{-\beta}\overline{J}_{-\beta}\,[\lambda\sqrt{r_2}]N(\zeta)d\zeta,$$

где $r_1 = (\eta-\zeta)\,(\xi-\zeta)$, $r_2 = (\eta-\zeta)\,(\zeta-\xi)$, $N\,(\zeta) = \frac{1}{2\cos\pi\beta}T\,(\zeta) - 4^{2\beta-1}\gamma_2\nu(\zeta)$.

Ключевые слова: Гиперболическое уравнение, вырождающееся уравнения второго рода, видеизмененная задача Коши, общее решение, регулярное решение, обобщенное решение.

2010 Mathematics Subject Classification: 35L15, 35L80

О канторовой компоненте спектра оператора теплопроводности с отклоняющимся аргументом

А. Шалданбаев[1,a], М. Шоманбаева[1,b], И. Оразов[1,c]

[1] *Южно-Казахстанский государственный университет им.М.Ауезова, Шымкент, Казахстан*

E-mail: [a]*shaldanbaev51@mail.ru*, [b]*mtshomanbaeva@mail.ru*, [c]*i_orazov@mail.ru*

Самосопряженный оператор A в гильбертовом пространстве H разлагается в виде

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty}\lambda dE(\lambda), \tag{1}$$

где $dE(\lambda)$ - операторная мера, состоящая и трех компонентов:

$$E(\lambda) = dE_c(\lambda) + dE_a(\lambda) + dE_k(\lambda),$$

где $E_c(\lambda)$ - скачкообразная функция, $E_a(\lambda)$ - абсолютно непрерывна. Функция $E_a(\lambda)$ равна интегралу Лебега от своей производной, а производная $E_k(\lambda)$ равна нулю для почти всех λ. (Функция Кантора является функцией типа $E_k(\lambda)$). Скачки происходят в собственных значениях оператора A. Спектр A называется абсолютно непрерывным в интервале I, если $(v, E_\lambda v)$ абсолютно непрерывная функция в I для каждого v в гильбертовом пространстве H; в противном случае спектр будет кусочным.

Кажется разумным предположение, что спектры гамильтониана атомов и молекул, исключая собственные значения, всегда абсолютно непрерывны, иначе говоря, декомпозиция произведения $(v, E_\lambda v)$ всегда состоит из первых двух членов (1). Однако это не доказано, кроме некоторых случаев, подобных атому водорода, для которых известно явное выражение для $E(\lambda)$ [1].

В связи с этим представляют интерес операторы, обладающие Канторовым составляющим спектра, каковым является изученный нами спектр оператора теплопроводности с отклоняющимся аргументом.

Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^2$ - четырехугольник, ограниченный отрезками: $\{AB : 0 \le t \le T, x = 0; BC : 0 \le x \le l, t = T, CD : 0 \le t \le T, x = l; DA : 0 \le x \le l, t = 0\}$. Через $C^{2,1}(\Omega)$ обозначим множество функций $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемых по x и единожды по t в области Ω. Под границей области Ω понимаем совокупность отрезков $\Gamma = AB \cup AD \cup CD$. Целью работы является изучние свойств спектра оператора, порожденного в области Ω дифференциальным выражением

$$Lu = u_t(x, T - t) + u_{xx}(x,t) + au_x, \qquad a - const \tag{2}$$

и краевыми условиями

$$u|_{t=0} = 0, \, u|_{x=0} = 0, \, u|_{x=l} = 0. \tag{3}$$

Под оператором понимается замыкание этого пока незамкнутого оператора.

Теорема *(a) Если $\frac{T\pi}{2l^2}$ - иррациональное число, то спектр оператора (2)-(3) при $a = 0$ совпадает с числовой осью $(-\infty, +\infty)$. Спектр состоит из бесконечного числа собственных значений и из предельных точек собственных значений. Оператор $\overline{L}$ обратим, но $(\overline{L})^{-1}$ неограничен. (b) Если $\frac{T\pi}{2l^2}$ - рациональное число и $\frac{1}{4} \notin \overline{(m^2\frac{T\pi}{2l^2})}, m = 1, 2, ...,$ то оператор $\overline{L}$ ограниченно обратим. Спектр оператора $\overline{L}$ состоит из бесконечного множества собственных значений и их предельных точек, которые также бесконечны и не имеют предельной точки, точнее, на каждом ограниченном сегменте содержится лишь конечное число предельных точек множества собственных значений $\{\lambda_{m,n}\}, m = 1, 2, ...; n = 0, 1, 2, ...$ (c) Если $\frac{T\pi}{2l^2}$ - рациональное число, то спектр оператора и $\frac{1}{4} \in \overline{(m^2\frac{T\pi}{2l^2})}, m = 1, 2, ...,$ то обратный оператор $(\overline{L})^{-1}$ не существует, $\lambda = 0$ является собственным значением. Спектр* *состоит из бесконечного множества собственных значений и их предельных точек, которые также бесконечны и разбросаны от $-\infty$ до $+\infty$. Каждый ограниченный замкнутый сегмент содержит лишь конечное число предельных точек собственных значений $\lambda_{m,n}, m = 1, 2, ...; n = 0, 1, 2, ...$ Ноль может быть бесконечнократным собственным значением. В спектральном разложении оператора $\overline{L}$ отсутствует абсолютно непрерывная компонента.*

Ключевые слова: оператор теплопроводности, спектр, отклоняющийся аргумент.

2010 Mathematics Subject Classification: 35PXX, 35K05, 35K20

Литература

[1] Рихтмайер Р. *Принципы современной математической физики*, Мир, Москва, (1982).

Некоторые спектральные характеристики дифференциального оператора второго порядка с инволюцией

А.А. САРСЕНБИ

ЮКГУ им. М. Ауэзова, Шымкент, Казахстан

E-mail: abdisalam@mail.ru,

В работе исследованы вопросы абсолютной и равномерной сходимости разложений по собственным функциям, расположение собственных значений дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией. Рассматривается спектральная задача для дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией

$$-X''(x) + \alpha X''(-x) + q(x) X(x) = \lambda X(x), \ -1 < x < 1, \ -1 < \alpha < 1,$$

$$X(-1) = 0, \ X(1) = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) содержит преобразование инволюции. Параметр α удовлетворяет условию $-1 < \alpha < 1$, функция $q(x)$ непрерывна на отрезке $[-1, 1]$. Спектральные задачи типа (1) изучались также в работах [1], [2].

Теорема 1. *Если функция $q(x) \geq 0$ на промежутке $-1 \leq x \leq 1$, то все собственные значения λ_k спектральной задачи (1) положительны.*

Теорема 2. *Если число $\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$ не является четным и коэффициент $q(x)$ уравнения (1) вещественная функция, то для любой дважды дифференцируемой функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей условиям $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$, ряд Фурье*

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, X_k) X_k(x)$$

по полной ортонормированной системе $\{X_k(x)\}$ собственных функций спектральной задачи (1) сходится абсолютно и равномерно.

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05131225 МОН РК.

Ключевые слова: дифференциальные уравнение с инволюций, собственные значение, собственные функций, базис.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B10, 34L10

Литература

[1] Kritskov L., Sarsenbi A.M. Spectral properties of a nonlocal problem for a second-order differential equation with an involution, *Differential Equations*, **51**:8 (2015), 984–990.

[2] Kritskov L., Sarsenbi A.M. Basicity in Lp of root functions for differential equations with involution, *Electronic Journal of Differential Equations*, :278 (2015), 1–9.

Базисные свойства дифференциального оператора второго порядка с инволюцией

А.М. САРСЕНБИ[1,a], А.А. САРСЕНБИ [2,b]

[1] *ЮКГУ им. М. Ауэзова, НЦ ТиПМ, Шымкент, Казахстан*

[2] *ЮКГУ им. М. Ауэзова, Шымкент, Казахстан*

E-mail: [a]*abzhahan@gmail.com* , [b]*abdisalam.sarsenbi@gmail.com*

Работа посвящена исследованию вопросов равносходимости разложений по собственным функциям и базисности собственных функций дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией.

В интервале $G = (-1,1)$ числовой оси рассматривается спектральная задача для дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией

$$-X''(x) + \alpha X''(-x) + q(x)X(x) = \lambda X(x),\ -1 < x < 1,\ -1 < \alpha < 1,$$

$$X'(-1) = 0,\ X'(1) = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) содержит преобразование инволюции. Параметр α удовлетворяет условию $-1 < \alpha < 1$, функция $q(x)$ непрерывна на отрезке $[-1,1]$. Доказано существование функции Грина краевой задачи (1). Установлены асимптотические оценки функции Грина при больших значениях спектрального параметра. При помощи этих результатов доказаны теоремы о равносходимости разложений по собственным функциям спектральной задачи (1) с разложением по собственным функциям спектральной задачи

$$-X''(x) + \alpha X''(-x) = \lambda X(x),\ -1 < x < 1,\ -1 < \alpha < 1,$$

$$X'(-1) = 0,\ X'(1) = 0. \qquad (2)$$

В работе [1] исследована спектральная задача (2), которая имеет две серии собственных значений

$$\lambda_{k1} = (1+\alpha)\left(k+\tfrac{1}{2}\right)^2\pi^2,\ \ \lambda_{k2} = (1-\alpha)\,k^2\pi^2,\ \ k = 0, \pm 1,\ \pm 2,\ ....$$

Было установлено, что система собственных функций вида

$$\left\{\ X_{k1} = \sin(l+\tfrac{1}{2})\pi x,\ \ l = 0,1,2,...;\ X_{k2} = \cos k\pi x,\ \ k = 1,2,...;\right\}$$

образует ортонормированный базис пространства $L_2(-1,1)$.
С помощью функции Грина можно написать, разложение произвольной функции $f\,(x)$ из класса $L_1(-1,1)$ по собственным функциям спектральной задачи (5)..

Замечание. Если число $\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$ не является четным, то все собственные значения однократны.

В комплексной $\rho-$плоскости рассмотрим окружности
$C_{k1}, \quad k = 0,1,2,...;\ C_{k2},\ k = 1,2,\ ...,$ с общим центром в начале координат:

$$C_{k1} : |\rho| = \sqrt{1+\alpha}\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\pi + \tfrac{1}{8};\ \ C_{k2} : |\rho| = \sqrt{1-\alpha}k\pi + \tfrac{1}{8}.$$

Эти окружности не пересекаются и не проходят через точки ρ_{k1} и$\rho_{k2.}$ При $\lambda = \rho^2$окружности C_{k1},C_{k2} соответственно переходят в окружности $\widetilde{C}_{k1}$,$\widetilde{C}_{k2}$ в λ плоскости. Для любой функции $f\,(x) \in L_1\,(-1.1)$ частичные суммы разложения по собственным функциям спектральной задачи (2) можно записать в виде

$$\sigma_m\,(f) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_m}\left(\int\limits_{-1}^{1} G\,(x,t,\lambda)\,f\,(t)\,dt\right)2\rho d\rho.$$

Частичные суммы разложения по собственным функциям спектральной задачи (1) обозначим через

$$S_m\,(f) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\left[\int\limits_{C_m} G_q(x,t,\lambda)2\rho d\rho\right]f(t)dt$$

Последовательность $S_m\,(f)$ назовем равносходящимся с последовательностью $\sigma_m\,(f)$на промежутке$-1 \le x \le 1$, если $S_m - \sigma_m \to 0$ равномерно на этом промежутке при $m \to \infty$.

Сформулируем теорему о равносходимости.

Теорема 1. *Если число* $\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$ *не является четным, то для любой функции* $f\,(x) \in L_1\,(-1,1)$ *последовательность* $S_m\,(f)$ *равносходится с последовательностью* $\sigma_m\,(f)$.

Теорема 2. *Если число* $\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$ *не является четным, то система собственных функций спектральной задачи (1) образует базис пространства* $L_2(-1,1)$.

Сформулируем теорему о базисности собственных функций в самосопряженном случае.

Теорема 3. *Если число* $\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$ *не является четным и коэффициент* $q(x)$ *уравнения (3) вещественная функция, то система собственных функций спектральной задачи (1) образует ортонормированный базис пространства* $L_2(-1,1)$.

Funding: Работа выполнена при финансовой поддержке КН МОН РК, грант AP05131225

Ключевые слова: дифференциальные уравнение с инволюций, собственные значение, собственные функций, базис.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B10, 34L10

Литература

[1] Kopzhassarova A.A., Sarsenbi A.M. Basis Properties of Eigenfunctions of Second-Order Differential Operators with Involution, *Abstract and Applied Analysis*, **2012** Article ID 576843, doi:10.1155/2012/576843, (2012), 6.

3 Математическое моделирование и уравнения математической физики

Green's Tensor of Motion Equations of Two-Components Biot's Media at stationary oscillation

E.B. KURMANOV

Institute of mathematics and mathematical modeling ESM RK, Almaty, Kazakhstan
E-mail: ergaly90@mail.ru,

The study of propagation and diffraction of seismic waves in rock mass requires mathematical modeling such processes in geological structure with different physical properties and for different type of seismic waves. Diffraction of seismic waves is more studied in isotropic and anisotropic elastic media. But these models do not take into account many real properties of the rock mass. These are, for example, porosity and presence of groundwater. Saturated with liquid or gas porous medium, from the point of view of continuum mechanics, is essentially a two-component continuous medium, one component of which is particles of liquid (gas), other are solid elastic particles of the skeleton of a rock mass. There are various mathematical models of the two-component medium, developed by different authors. The most famous of them are the models of M. Biot [1], Ya. I. Frenkel [2], V. N. Nikolaevskiy [3], L. P. Khoroshun [4]. However, the class of solved tasks to them is very limited and mainly associated with the study of particular solutions of these equations based in the classic domains by use the variables separation methods and the theory of special functions. We mark here the school of academician Kh.A. Rakhmatullin [5] and also the investigations of Kazakh mechanics school of academician Zh. S. Erzhanov, which studied propagation of seismic waves in water saturated media, their diffraction on circular tunnels and pipelines by use Biot's model [6]. A variety of multicomponent media, the complexity of processes associated with their deformation, lead to a large difference in the methods of modelling and analysis of seismic problems in them. Here we consider Biot's equations

$$\begin{array}{l} (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,u^s+\mu\Delta u^s+Q\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,u^f+F^S(x,t)=\rho_{11}\ddot{u}^s+\rho_{12}\ddot{u}^f \\ Q\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,u^s+R\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,u^f+F^f(x,t)=\rho_{12}\ddot{u}^s+\rho_{22}\ddot{u}^f, \end{array} \tag{3.1}$$

Here $u^s(x,t)$ is the displacement vector of the elastic skeleton, $u^f(x,t)$ is the displacement vector of the fluid,$x \in R^3$, t is time. The constants ρ_{11}, ρ_{12}, ρ_{22} have the dimension of a density and are associated with the density with the mass density of a composing the skeleton particles and fluid relationships:

$$\rho_{11}=(1-m)\,\rho_s-\rho_{12},$$

where m is the porosity of the medium. The connected density ρ_{12} associated with the variance of the deviations of micro velocity of liquid particles in pores of the average flow velocity of the fluid and depends on the geometry of the pores.

Here N is the dimension of the space ($N = 1, 2, 3$). For a plane deformation $N = 2$, the total spatial deformation corresponds to $N = 3$. The case $N = 2$ describes the processes of propagation of waves in porous rods. Following solutions may be theoretically used for spaces of higher dimension.

Constants λ, μ are Lame's parameters isotropic elastic skeleton, Q and R characterize the interaction of the skeleton with liquid on the basis of the Biot's law for the stresses:

$$\begin{aligned} &\sigma_{ij} = (A\nabla_k u_k + Q\nabla_k U_k)\,\delta_{ij} + N\,(\nabla_i u_i + \nabla_j u_i)\,, \\ &\sigma = -mp = R\nabla_k U_k + Q\nabla_k u_k \end{aligned} \tag{3.2}$$

We constructed Green's tensor - the fundamental solutions of (1) by the action of concentrated mass forces of the type:

$$F_i^j\,(x,t) = \delta_i^j \delta\,(x)\,e^{-i\omega t}, \quad i,j = \overline{1,6},$$

where ω is frequency of oscillation, which satisfies to radiation conditions at infinity. For this the Fourier transformation of this tensor were used [7,8].

On it base the generalized solutions of Biot's medium have been constructed by the action of arbitrary concentrated and distributed forces and sources of oscillations.

Funding: The authors were supported by the grant no. 0824/GF4 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: porous water saturated medium, Biot's equations, generalised solutions .

2010 Mathematics Subject Classification: 74H05, 74K25

References

[1] Biot M.A.Mechanics of deformation and acoustic wave propagation in a porous medium, Mechanics, Periodic collection of translations of foreign articles, No 6, 1963, P.103-104.

[2] Frenkel Ya. I., "To the theory of seismic and seismoelectric phenomena in a moist soil News of USSR Academy of Sciences, geography and geophysics series, 8 „ No 4,1944, P. 133-149.

[3] Nikolaevskyi V.I., Mechanics of porous and fractured medium, Nauka, Moscow,1984, P. 232

[4] Khoroshun L. P.,"To the theory of saturated porous media Applied mechanics, V. 12, No 12, 1976, P. 66-82

[5] Rakhmatullin Kh.A., Saatov Ya.U., Filippov I.G., Artykov T.U. , Waves in two-component media. Nauka Uzb SSR, Tashkent, 1974, P. 266.

[6] Yerzhanov Zh. S., Aitaliev Sh.M., Alexeyeva L.A. , Dynamics of tunnels and underground pipelines, Nauka Kaz SSR, Alma-Ata, 1989, P. 240

[7] Alexeyeva L.A., Kurmanov E.B. Fundamental and generalized solutions of the equations of motion of the two-component M. Biot's medium. 1. Fourier transformation of fundamental solutions and their regularization Math. Journal 2017. V.17, No 2, P. 13-30

[8] Alexeyeva L.A., Kurmanov E.B. Fourier Transform of Fundamental Solutions for the Motion Equations of Two-component Biot's Media // AIP Conference Proceedings 2017

The method of heat polynomials for the solution of gylindrical free boundary problems

S.N. KHARIN

Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan

E-mail: staskharin@yahoo.com,

The method of the heat polynomials enables one to get an analytical solution of the Stefan problem. This approach was successfully applied for the solution of the one- and two-phase Stefan problems [1]–[2]. It can be extended also for the axisymmetric cylindrical problems in a domain with a moving boundary.

1. The heat equation for a circle with moving boundary

Let us consider the problem for the dimensionless heat equation

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r},\quad 0\le r<ct,\quad 0<t<T \tag{1}$$

with the boundary condition

$$\theta(ct,t)=f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}t^n. \tag{2}$$

Here t is the dimensionless Fourier criterion. The initial condition is omitted because the domain degenerates into a point. The solution of this problem can be represented in the form of the heat polynomials

$$\theta(r,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nR_{2n,1}(r,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(4t)^nL_n\left[-\frac{r^2}{4t}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}A_nn!\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{2k}r^{2(n-k)}t^k}{k!\left[(n-k)!\right]^2}. \tag{3}$$

Satisfying the boundary condition (2) we get

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_nR_{2n,1}(ct,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sum_{k=0}^{n}\beta_{k,n}t^{2n-k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}t^n. \tag{4}$$

Comparing the coefficients at similar order of t we get the recurrent expression for the unknown coefficients A_n.

It should be noted that this method is very useful for the small values of the Fourier criterion t. In this case we can take an approximate solution not in the form of a series but as a polynomial.

We can use also the another approach for the solution of this problem using the orthogonality of the Laguerre polynomials. Any function $f(t)$ can be expanded into the power series with respect to Laguerre polynomials

$$\phi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nL_n(t),\qquad C_n=\int_0^{\infty}e^{-t}L_n(t)\phi(t)dt. \tag{5}$$

Thus, satisfying the solution $\theta(r,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(4t)^n L_n\left[-\frac{r^2}{4t}\right]$ the boundary condition $\theta(\alpha(t),t) = f(t)$ we can expand the function $\phi(t) = (4t)^n L_n\left[-\frac{\alpha(t)^2}{4t}\right]$ into series (5) and then find the coefficients A_n.

2. Generalized heat equation

The method described above can be applied also for the generalized heat equation

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r}, \quad 0 \le r < \alpha(t), \quad 0 < t < T, \tag{6}$$

if we use the generalized Laguerre polynomials for the solution of the equation (6)

$$\theta(r,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n R_{n,\nu}(r,t), \quad R_{n,\nu}(r,t) = n!(4t)^n L_n^{(\beta)}\left(-r^2/4t\right), \quad \beta = \frac{\nu-1}{2}. \tag{7}$$

Funding: The authors were supported by the grant no. 5133/GF4 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: heat polynomials, free boundary problems, cylindrical heat equation

2010 Mathematics Subject Classification: 35C11, 35R35, 35K20

References

[1] Kharin S.N., The analytical solution of the two-face Stefan problem with boundary flux condition, *Математический журнал*, **14**:1(51) (2014), 55–76.

[2] Sarsengeldin M.M., Kharin S.N., Method of the Integral Error Functions for the Solution of the One- and Two-Phase Stefan Problems and Its Application, *Filomat* **31**:4 (2017), 1017-1029 DOI 10.2298/FIL1704017S, Available at: http://www.pmf.ni.ac.rs/filomat

Трансформанта Фурье тензора Грина уравнений несвязанной термоупругости в пространственно-одномерном случае

Н. АЙНАКЕЕВА

Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы, Казахстан

E-mail: ainalain95@icloud.com

Стержневые конструкции широко используются в строительстве и машиностроении в качестве опор мостов, соединительных и передаточных звеньев для конструктивных элементов самых разных машин и механизмов. Задачи динамики термоупругих стержней моделируются системами дифференциальных уравнений смешанного гиперболо-параболического типа. В данной работе получены и исследованы трансформанты Фурье фундаментальных решений уравнений несвязанной термоупругости в пространственно-одномерном случае, описывающие динамику стержней с учетом их термоупругих свойств при продольных колебаниях.

Рассматривается термоупругий стержень, который характеризуется линейной плотностью ρ,скоростью распространения упругих волн в стержне си термоупругими константами γ и k [1].Исследуем продольные перемещения сечений стержня $u\,(x,t)$ и температурное поле $\theta\,(x,t)$, которые описываются системой гиперболо-параболических уравнений вида:

$$\rho c^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \gamma\theta_{,x} + \rho F_{,}\,(x,t) = 0, \theta_{,xx} - k^{-1}\theta_{,t} + F_2\,(x,t) = 0 \qquad (1)$$

Термоупругое нарпяжение $\sigma(x,t)$ в стержне описывается соотношением Дюамеля - Неймана:

$$\sigma(x,t) = \rho c^2 u_{,x} - \gamma\theta \qquad (2)$$

здесь F_i - продольная компонента внешней силы на единицу длины; $F_2(x,t)$ - величина, характеризующая количество выделенного тепловыми источникамитепла на единицу длины за единицу времени $u_{i,x} = \frac{\partial u_i}{\partial x}, u_{i,t} = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \ldots, u_1 = u, u_2 = \theta$.Требуется построить решение системы уравнений (1) при F_1 и F_2 принадлежащих классу обобщенных функций медленного роста $S'(R^2)$ с носителем $\{x \in R^1, t \geq 0\}$ [2].

Матрица фундаментальных решений $U_i^j(x,t)$ - это решение системы уравнений (1) при действии сосредоточенного импульсного источника $F_k = \delta(x)\delta(t)\delta_k^j, k, j = 1, 2$, удовлетворяющее условиям излучения. Для ее построения используем прямое и обратное преобразование Фурье по x, tобобщенных функций. В пространстве преобразований Фурье $\bar{U}_i^j$ имеет вид:

$$\bar{U}_1^j = \frac{\delta_1^j(\xi^2 - ik^{-1}\omega) + i\xi\widetilde{\gamma}\delta_2^j}{\Delta(\xi,\omega)}, \bar{U}_2^j = \frac{\delta_2^j(c^2\xi^2 - \omega^2)}{\Delta(\xi,\omega)}, i, j = 1, 2 \qquad (3)$$

где определитель системы $\Delta(\xi,\omega) = (\xi^2 - ik^{-1}\omega)(c^2\xi^2 - \omega^2)$. Результаты исследования действительной и мнимой части этой матрицы, представлены в графическом виде.

Для построения оригинала, удовлетворяющего условиям излучения, получено представление $\bar{U}_k^j(\xi,\omega)$ в виде:

$$\bar{U}_1^j = \frac{\delta_1^j\,(\xi^2 - ik^{-1}\omega) + i\xi\widetilde{\gamma}\delta_2^j}{c^2\,(\lambda_1 - \lambda_2)} \left\{ \frac{1}{\xi^2 - \lambda_1} - \frac{1}{\xi^2 - \lambda_2} \right\}, \qquad (4)$$

$$\bar{U}_2^j = \frac{\delta_2^j(c^2\xi^2 - \omega^2)}{c^2(\lambda_1 - \lambda_2)} \left\{ \frac{1}{\xi^2 - \lambda_1} - \frac{1}{\xi^2 - \lambda_2} \right\} \qquad (5)$$

где $\lambda_1 = \frac{\omega^2}{c^2}$, $\lambda_2 = i\omega k^{-1}$ корни характеристического уравнения: $\Delta\,(\xi,\omega) = 0$. Представление (6) позволяет построить оригинал тензора Грина, используя фундаментальные решения волнового уравнения, уравнения теплопроводности и регуляризацию $\frac{i}{(\omega+i0)}$, которая является преобразованием Фурье функции Хевисайда $H(t)$ [3].

2010 Mathematics Subject Classification: 74H05, 74F05

Литература

[1] Новацкий В. *Теория упругости*, Мир, Москва (1975).

[2] Владимиров В.С. *Уравнения математической физики*, Наука, Москва (1981).

[3] Алексеева Л.А., Ахметжанова М.М. Фундаментальные и обобщенные решения уравнений динамики термоупругих стержней. Стационарные колебания, *Математический журнал института математики и математического моделирования КН МОН РК*, **2**:52 (2014), 5–20.

О разрешимости модели Годунова–Султангазина

Абдигали Акыш[1,a], Назира Баймулдина[1,b], Назгуль Закариянова[1,c]

Институт математики и математического моделирования, Алматы

КазНУ им.аль–Фараби, мех-мат, Алматы

КазНУ им.аль–Фараби, мех-мат, Алматы, Казахстан

E-mail: [a]akysh41@mail.ru,[b]baimuldinanaziko@mail.ru,[c]znazb@mail.ru

Существование глобальных решений системы Годунова-Султангазина [1] доказывалось многими исследователями для узких классов начальных функций.

В докладе рассмотрена эта система:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x} = f_2^2 - f_1 f_3 \equiv F, \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} = -2F, \\ \frac{\partial f_3}{\partial t} - \frac{\partial f_3}{\partial x} = F, \end{cases} \tag{1}$$

в области $Q = [0,T] \times [0,1],\ t \in [0,T],\ x \in [0,1]$ с начальными и периодическими условиями:

$$f_k(0,x) = \varphi_k(x),\ f_k(t,0) = f_k(t,1),\ k = \overline{1,3}. \tag{2}$$

Модель (1) с начально-граничными условиями (2) обладает основными свойствами для нелинейного уравнения Больцмана [1], такими как законы сохранения массы, импульса и $H-$ теорема.

Начальные функции $\{\varphi_k\}$ такие, что

$$\varphi_k(x) > 0 \wedge \varphi_k(x) \in W_p^1(G) \cap L_\infty(G), \quad k = \overline{1,3}; \quad 1 < p \leq \infty \tag{3}$$

и периодические.

Для задачи (1)–(2) используется метод расщепления [2] и решения определяются из следующих подсистем:

$$\begin{cases} \frac{f_1^{n+1/2} - f_1^n}{\tau} = (f_2^n)^2 - f_1^n f_3^n \equiv F^n, \\ \frac{f_2^{n+1/2} - f_2^n}{\tau} = -2F^n, \\ \frac{f_3^{n+1/2} - f_3^n}{\tau} = \quad F^n, \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \frac{f_1^{n+1}-f_1^{n+1/2}}{\tau}+\frac{\partial f_1^{n+1}}{\partial x}=0, \\ \frac{f_2^{n+1}-f_2^{n+1/2}}{\tau}=0, \\ \frac{f_3^{n+1}-f_3^{n+1/2}}{\tau}-\frac{\partial f_3^{n+1}}{\partial x}=0, \end{cases} \tag{5}$$

с начально-граничными условиями (2).

Теорема 1. *Пусть начальные данные $\{\varphi_k(\mathbf{x})\}$ удовлетворяют условиям (3), то для решения систем (4)–(5) с начально-граничными условиями (2), справедливы оценки:*

$$\| V^{n+j/2} \|_{L_p(G)} \leq \| \varphi_1-\varphi_3 \|_{L_p(G)};\ V^{n+1}=f_1^{n+1}-f_3^{n+1},$$

$$\| V_x^{n+j/2} \|_{L_p(G)} \leq \| \varphi_{1,x}-\varphi_{3,x} \|_{L_p(G)},\ j=\overline{1,2}, \tag{6}$$

$$\| \sum_{k=1}^{3} f_k^{n+1/2} \|_{L_p(G)} \leq \| \sum_{k=1}^{3} \varphi_k \|_{L_p(G)} +Tc,\ \{f_k^{n+j/2}\}>0,\ c=\|V_x^0\|_{L_p(G)}$$

$$\max_{1\leq m\leq 3} \| f_m^{n+j/2} \|_{L_p(G)} \leq \sum_{k=1}^{3} \| \varphi_k \|_{L_p(G)} +Tc,\ j=\overline{1,2}, \forall p=2m,\ m\in N,$$

$$\text{где } n=\overline{0,M},\ \tau<\Big(2\big(\sum_{k=1}^{3} \| \varphi_k \|_{L_\infty(G)} +Tc\big) \Big)^{-1},\quad V^0=\varphi_1-\varphi_3, \tag{7}$$

Доказана следующая основная

Теорема 2. *Если начальные функции удовлетворяют условию (3), тогда существует единственное положительное решение задачи* (1)–(2)

$$\{f_k\}\in W_p^1(Q)\cap L_\infty(G),\ \forall p=2m$$

и оно удовлетворяет системе (1) почти всюду в $Q=[0,T]\times G$, $\forall T<\infty$.

Литература

[1] Годунов С. К., Султангазин У. М. О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана//Успехи мат.наук. -1971. -36, 3. С.3-51.

[2] Akysh A. Sh. Convergence of Splitting Method for the Nonlinear Boltzmann Equation// Numerical Analysis and Application, 2013, vol.6, №2, pp.111-118.

Funding: Авторы были поддержаны грантом АР05134909 МОН РК.

О свойствах дифференциальных уравнений

Т. АЛДИБЕКОВ

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан

E-mail: tamash59@mail.ru,

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\sum_{k=1}^{n} p_{1k}(x)y_k\frac{\partial u}{\partial y_1}+\cdots+\sum_{k=1}^{n} p_{nk}(x)y_k\frac{\partial u}{\partial y_n}=0 \tag{1}$$

где $x_0 \leq x < +\infty$, $x_0 > 0$, $-\infty < y_1, \ldots, y_n < +\infty$, функции $p_{ik}(x)$, $i = 1, \ldots, n$; $k = 1, \ldots, n$; имеют непрерывные частные производные первого порядка на промежутке $x_0 \leq x < +\infty$. Следующее дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\sum_{k=1}^{n} p_{1k}(x) y_k + g_1(x, y_1, \ldots, y_n) \right) \frac{\partial u}{\partial y_1} +$$

$$\ldots + \left(\sum_{k=1}^{n} p_{nk}(x) y_k + g_n(x, y_1, \ldots, y_n) \right) \frac{\partial u}{\partial y_n} = 0 \qquad (2)$$

называется возмущенным уравнением, где $g_i(x, y_1, \ldots, y_n)$, $i = 1, \ldots, n$; малые возмущения, которые удовлетворяют некоторому условию малости.

Определение 1.Если выполняются следующие условия:

1) линейное однородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка (1) имеет интегральный базис, который стремятся к нулю при $x_0 \to +\infty$,

2) возмущенное уравнение (2), которое получается из уравнения (1) при малых возмущениях, имеет интегральный базис, который стремятся к нулю при $x_0 \to +\infty$, тогда линейное однородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка (1) называется асимптотически устойчивым при $x_0 \to +\infty$.

Теорема 1. *Если линейное однородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка (1) и возмущенное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка (2) удовлетворяют следующие условия:* $p_{ik}(x), i = 1, \ldots, n. k = 1, \ldots, n$; *непрерывные действительные функций, определенные на полуоси* $I = [x_0, +\infty)$, *кроме того выполняются 1)-4):*

(1)$p_{k-1,k-1}(x) - p_{kk}(x) \geq \alpha\varphi(x)$, $x \in I$, $k = 2, \ldots, n. \alpha > 0$, $\varphi(x) \in \mathbb{C}(I)$, $\varphi(x) > 0$, $q(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(s)ds \uparrow +\infty$;

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{|p_{ik}(x)|}{\varphi(x)} = 0$, $i \neq k$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, n$;

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{q(x)} \int\limits_{x_0}^{x} p_{kk}(s)ds = \beta_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $\beta_1 < 0$;

(4)$g(x, y) = colon\,(g_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, g_n(x, y_1, \ldots, y_n))$ имеет непрерывные частные производные на множестве $x_0 \leq x < +\infty$, $x_0 > 0$, $-\infty < y_1, \ldots, y_n < +\infty$, $g_i(x, 0, \ldots, 0) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. $\|g(x, y)\| \leq \varphi(x)\|y\|$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$ *Тогда линейное однородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка (1) асимптотически устойчиво при* $x_0 \to +\infty$.

Ключевые слова: уравнение, частные производные первого порядка

2010 Mathematics Subject Classification: 35B35

Литература

[1] Смирнов В.М. *Курс высшей математики. Т. 4. Часть вторая.*, Наука, главная редакция физико-математической литературы. Москва (1981).

Бисимуляции в упорядоченных гибридных системах

А.Б. АМАНЖОЛОВА[1,a], Б.Ш. КУЛПЕШОВ[2,b]

[1,2] *Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан*
E-mail: [a]aabi@mail.ru, [b]b.kulpeshov@iitu.kz

В настоящем докладе исследуются вопросы конечности бисимуляций (отношений эквивалентности) в упорядоченных гибридных системах. Доказано что слабо о-минимальные гибридные системы конечного ранга выпуклости, имеющие малое число счетных моделей, допускают конечную бисимуляцию.

Гибридные системы — это математические модели систем управления, в которых непрерывная динамика, порождаемая в каждый момент времени одной из априорно заданного набора непрерывных систем, перемежается с дискретными операциями, подающими команды либо на мгновенное переключение с одной системы на другую, либо на мгновенную перестройку с заданных текущих координат на другие координаты, либо на то и другое одновременно. Гибридная динамика системы заключается в альтернированной комбинации непрерывной динамики с дискретной. Непрерывная и дискретная составляющие системы могут включать некоторые параметры, влияющие на поведение системы.

Гибридные системы часто встречаются в различных прикладных задачах из таких областей знания, как автомобилестроение, авиастроение, робототехника, электроэнергетика, обеспечение безопасного движения в пространстве, на суше, на воде и др. Математическая модель гибридной системы возникает каждый раз, когда необходимо исследовать взаимодействие среды, непрерывно изменяющейся в соответствии с некоторыми физическими законами, и управляющих элементов, срабатывающих в дискретные моменты времени. Примерами таких комплексов могут служить электронные системы автоматического управления самолетом, либо автомобилем, системы автоматического регулирования температуры, влажности в помещении и др.

В настоящем докладе рассматриваются задачи достижимости и верификации для гибридной системы. Задача достижимости состоит в построении множества достижимости гибридной системы, состоящем из всевозможных состояний системы, в которые можно перейти при помощи соответствующего допустимого управляющего воздействия из фиксированного в заданный начальный момент времени состояния (или множества таковых). К задачам достижимости примыкают задачи верификации, в которых необходимо узнать, может ли анализируемая система попасть (или, наоборот, не попасть) в одно из предписанных состояний ("желательных" или "нежелательных"). Такая постановка задачи может быть обусловлена, например, проблемами обеспечения безопасности движения в пространстве.

Важным подходом к вопросам разрешимости для алгоритмов верификации гибридных систем является построение бисимуляции. Бисимуляции — это фактор-пространства с конечным числом состояний, в которых свойства достижимости эквивалентны этим же свойствам в первоначальной гибридной системе с бесконечным числом состояний. Ранее в [1] были введены о-минимальные гибридные системы, являющиеся гибридными системами, у которых соответствующие множества являются определимыми в о-минимальной теории. В настоящее время данные системы являются активным объектом исследования, например, приведем одну из последних работ [2].

Ранг выпуклости введен в [3]. Нами доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Каждая слабо о-минимальная гибридная система конечного ранга выпуклости, имеющая малое число счетных моделей, допускает конечную бисимуляцию.*

Funding: Второй автор был поддержан КН МОН РК (грант AP05132546).

Ключевые слова: гибридная система, бисимуляция, слабая о-минимальность, ранг выпуклости

2010 Mathematics Subject Classification: 68Q60, 68Q85, 03C64

Литература

[1] Lafferriere G., Pappas G.J., and Sastry S. O-minimal hybrid systems, *Mathematics of Control, Signals and Systems*, **13**: 1 (2000), 1–21.

[2] Bouyer P., Brihaye T., and Chevalier F. O-minimal hybrid reachability games, *Logical Methods in Computer Science*, **6**: 1 (2010), 1–48.

[3] Kulpeshov B.Sh. Weakly o-minimal structures and some of their properties, *The Journal of Symbolic Logic*, **63**: 4 (1998), 1511–1528.

Об одной модельной задаче Флорина в пространстве Гельдера

Ж.К. ДЖОБУЛАЕВА

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан,
Казахский национальный университет аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: zhanat-78@mail.ru

Изучается модельная двухфазная задача, которая возникает при решении нелинейной задачи для системы параболических уравнений. Исходная нелинейная задача со свободной границей типа Флорина описывает процесс фильтрации жидкостей и газов в пористой среде. В пространстве Гельдера доказаны существование, единственность и коэрцитивные оценки решения.

Funding: Авторы были поддержаны грантом No. AP05133898 МОН РК.

Ключевые слова: Параболические уравнения, коэрцитивные оценки, пространство Гельдера.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K20, 35B45, 35B30, 35C15, 35R35.

О граничной задаче для уравнения теплопроводности в бесконечной области

Мади ЕРГАЛИЕВ[1,a]

[1] Институт Математики и Математического Моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: ergaliev@math.kz

В бесконечной области $G_1 = \{\tilde{x}, \tilde{t} | \ \tilde{t} > 0, -k_1\tilde{t} < \tilde{x} < k_2\tilde{t}\}$ рассмотрено уравнение теплопроводности

$$\tilde{u}_{\tilde{t}}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{t}) \tag{1}$$

с однородными граничными условиями:

$$\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t})|_{\tilde{x}=-k_1\tilde{t}} = \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t})|_{\tilde{x}=k_2\tilde{t}} = 0, \tag{2}$$

где $k_1 > 0, k_2 > 0$.

В работе было показано, что данную задачу с помощью нескольких преобразований можно свести к задаче для уравнения теплопроводности в области $G = \{x, t | \ t > 0, \ 0 < x < t\}$:

$$u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t), \quad x, t \in G, \tag{3}$$

$$u(x, t)|_{x=0} = u(x, t)|_{x=t} = 0, \tag{4}$$

где $a = \frac{1}{\sqrt{k_1+k_2}}$.

А для задачи (3),(4) авторами работы [3] было показано существование нетривиального решения и вид этого решения.

Также в настоящей работе были приведены и альтернативные преобразования, один из которых - поворот осей на необходимый угол.

Funding: Авторы были поддержаны грантом 0823/ГФ4 МОН РК.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, однородная граничная задача, нетривиальное решение

2010 Mathematics Subject Classification: 35K02, 35K20

Литература

[1] Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. *Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений*, ГЫЛЫМ, Алматы (2010).

[2] Amangaliyeva M.M., Jenaliyev M.T., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. About Dirichlet boundary value problem for the heat equation in the infinite angular domain, *Boundary Value Problems*, **2014**:213 (2014), 1–24.

[3] Amangaliyeva M.M., Jenaliyev M.T., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. On a Volterra equation of the second kind with "incompressible"kernel, *Advances in Difference Equations*, **2015**:71 (2015), 1–14.

Первая краевая задача для уравнения теплопроводности в расширяющейся области

А.А. КАВОКИН[a], А.Т. КУЛАХМЕТОВА[b] Ю.Р. ШПАДИ[c]

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: [a]kavokin_alex@yahoo.com, [b]kulakhmetova@mail.ru
[c]yu-shpadi@yandex.ru

В области $\Omega = \{0 < x < \alpha_0 t,\ 0 < t < T\}$ рассматривается краевая задача для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{1}$$

с условиями на границах области $x = 0$ и $x = \alpha_0 t$

$$u(0,t) = \varphi(t), \qquad u(\alpha_0 t, t) = \psi(t). \tag{2}$$

Решение задачи (1)–(2) ищется в виде интегрального представления

$$u(x,t) = u_1(x,t) + W(x,t) + F(x,t), \tag{3}$$

где $u_1(x,t)$ – частное решение начально-краевой задачи для однородного уравнения (1) в области $0 < x < \infty$, $t > 0$ при условиях $u(x,0) = 0$, $u(0,t) = \varphi(t)$, $u(\infty,t) = 0$, $W(x,t)$ – тепловой потенциал двойного слоя относительно подвижной границы $x = \alpha_0 t$ с неопределенной плотностью $\theta(t)$ и $F(x,t)$ – тепловой объемный потенциал с плотностью $f(x,t)$.

На основании второго краевого условия в (2) и формулы скачка потенциала двойного слоя задача (1)–(2) приводится к интегральному уравнению

$$\theta(t) = g(t) + \int_0^t K(t,\tau)\theta(\tau)d\tau, \tag{4}$$

где

$$K(t,\tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left\{\exp\left(-\frac{\alpha_0^2(t-\tau)}{4a^2}\right) + \frac{t+\tau}{t-\tau}\exp\left(-\frac{\alpha_0^2(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\right\}, \tag{5}$$

$$g(t) = u_1(\alpha_0 t, t) + F(\alpha_0 t, t) - \psi(t). \tag{6}$$

Решение уравнения (4) строится по итерационной схеме Пикара

$$\theta_0(t) = g(t), \qquad \theta_n(t) = g(t) + \int_0^t K(t,\tau)\theta_{n-1}(\tau)d\tau, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Проблема уравнения (4), являющаяся следствием вырождения области Ω в момент $t = 0$, состоит в том, что $\lim_{t\to 0}\int_0^t K(t,\tau)d\tau = 1 \neq 0$. В результате интегральное уравнение (4) лишь формально относится к типу Вольтерра 2-го рода. Впервые этот факт отмечен в [1]. В работе [2] показано существование собственных функций интегрального оператора уравнения (4) и исследованы его спектральные свойства. Тем не менее, для достаточно широкого класса функций $g(t)$ существует решение уравнения (4), имеющее практическое приложение.

Определение 1. *Введем функциональный класс $M_\beta(0,T)$, к которому отнесем все непрерывные функции $h(t)$, $t \in (0,T)$, удовлетворяющие условию $|h(t)| < A_h t^\varepsilon$, где $\varepsilon > \beta$.*

Теорема 1. *Пусть в интегральном уравнении (4) $g(t) \in M_{\frac{1}{2}}(0,T)$. Тогда итерационная схема Пикара (7) сходится к функции $\theta(t) \in M_0(0,T)$.*

Теорема 2. *Пусть функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ принадлежат классу $M_{\frac{1}{2}}(0,T)$, а функция $f(x,t)$ определена в замыкании области Ω, непрерывна в нем по t и удовлетворяет условию*

Гельдера по x. Тогда:

1) функция $g(t)$, определенная выражением (6), принадлежит классу $M_{\frac{1}{2}}(0,T)$;

2) выражение (3), в котором плотность потенциала двойного слоя $\theta(t)$ определена из уравнения (4), является решением краевой задачи (1) – (2).

Funding: Авторы были поддержаны грантом 5133/ГФ4 МОН РК

Ключевые слова: уравнение теплопроводности в вырожденной области, интегральный оператор Вольтерра, метод Пикара

2010 Mathematics Subject Classification: 45D99, 35K20

Литература

[1] Харин С.Н., Тепловые процессы в электрических контактах и связанные с ними сингулярные интегральные уравнения, *Автореф. дис. канд.*, Алма-Ата (1970).

[2] Рамазанов М.И. Исследование собственных значений и собственных функций особого интегрального уравнения Вольтерра второго рода, *Сб. Дифференциальные уравнения и их приложения*, Алма-Ата, (1979) 83–90.

Восстановление площадей сечений продольно колеблющегося стержня по его частотам

Ж. МАДИБАЙУЛЫ

РГП на ПХВ "Институт механики и машиноведения имени академика У.А.Джолдасбекова"КН МОН РК ,

Алматы, Казахстан.

E-mail: zhumabaymadibaiuly@gmail.com.

В монографии [1] показано, что для нахождения коэффициента $A(x)$ достаточно задать две бесконечных последовательности собственных частот продольно колеблющегося стержня. Как известно, продольные колебания стержня описываются дифференциальным уравнением второго порядка

$$(A(x)v'(x))' + \omega^2 A(x)v(x) = 0.$$

Первая последовательность собственных частот продольно колеблющегося стержня соответствует граничным условиям

$$v'(0) = v'(L).$$

Вторая последовательность собственных частот продольно колеблющегося стержня соответствует граничным условиям

$$v(0) = v'(L).$$

В случае кусочно-однородного стержня, то есть когда функция $A(x)$ является кусочно-постоянной, для восстановления $A(x)$ достаточно двух конечных наборов собственных частот [2]. Отметим, что алгоритм восстановления Андерсена требует использование известного в теории функции комплексного переменного алгоритма Шура [3]. Первоначальное назначение алгоритма Шура заключается в том, чтобы получить критерии проверки условия

$$\max_{(|z|<1)} |f(z)| \leq 1,$$

где $f(z)$ - голоморфная функция.

В докладе обсуждается алгоритм восстановления функции $A(x)$ по двум конечным наборам продольных частот. При этом предлагаемый алгоритм не использует алгоритм Шура. Приведены численные иллюстративные примеры.

В заключении выражаю благодарность научному консультанту профессору Б.Е. Кангужину за внимание к работе.

Ключевые слова: алгоритм восстановления, набор продольных частот, алгоритм Шура.

Литература

[1] Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. М.: Наука, 1984.

[2] Andersson, L.-E. (1990) AJgorithms for so]ving inverse eigenvalue proЫems for Sturm-Liouvi!Je equations in Inverse ProЫems in Action, ed. P.C. Sabatier, Berlin: Springer. 449.

[3] Schur, J. (1917) Ober Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschrankt sind. [34], 147, 205-232. 451.

К вопросу определения длины материала в рулоне

Т.С. МУСТАФИН[1,a], Б.Б. СЕРИКОВ[2,b]

[1] *Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан*

[2] *Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан*

E-mail: [a]*mustafintima@mail.ru*, [b]*bagdat@mail.ru*

Данная работа относится к области определения геометрических параметров объектов отраслей промышленности, производственный цикл которых содержит необходимость в измерении длины полосы скатанной в рулон материала на линиях раскроя полосы. Осевая намотка гибких плоских материалов (бумага, металлический лист, ткань, пленка и т.д.) широко применяется в промышленном производстве. В зависимости от специфики технологического процесса и системы логистики предъявляется ряд требований, одним из которых является определение длины намотанного в рулон материала. В связи с этим и увеличением поставок рулонной стали, сдачей металла по массе разрабатываются способы измерения длины полосы в рулоне, являющиеся важными для предприятий машиностроительного профиля при решении задачи оптимального раскроя прямоугольной полосы на меньшие прямоугольники.

Постановка задачи. Пусть объект, имеющий вид полосы прямоугольной формы, скатан в рулон по одной из сторон прямоугольника. Требуется определить длину L полосы из легко извлекаемых геометрических параметров рулона.

Объектом рассмотрения может быть любой материал прямоугольной формы, позволяющий скатывание его в рулон по одной из сторон прямоугольника.

Существует несколько вариантов постановок этой задачи для рулона полосы прямоугольной формы, скатанной в рулон по одной из сторон прямоугольника, в зависимости от характера намотки - плотная, неплотная и произвольная.

По первым двум вариантам типов намотки известны решения, которые сводятся к известным формулам определения длины классических кривых - архимедова спираль и логарифмическая спираль [1].

Рассмотрим каждый вариант намотки спирали отдельно.

1. Плотная намотка. Будем считать спиралью границу между слоями свернутого в рулон материала, так как витки получаемой спирали всегда будут находиться на одинаковом расстоянии друг от друга, равном толщине материала, - архимедова спираль. При плотной намотке и известной толщине полосы материала расчет длины рулона производится по формуле определения длины архимедовой спирали [1].

Недостатки: Форма спирали должна быть близка к форме архимедовой спирали, форма бобины должна быть близка к окружности.

2. Неплотная намотка (равномерная). Пусть промежутки между витками рулона неодинаковы - возрастают от внутренних витков к внешним границам. В математическом смысле витки все время располагаются под одним и тем же углом к прямой, исходящей из центра спирали, - логарифмическая спираль [1]. Если намотка равномерная, но неплотная, можно посчитать длину исходя из известного числа витков и известной толщине полосы материала по формуле определения длины логарифмической спирали [1].

Недостатки: Форма спирали должна быть близка к форме логарифмической спирали, форма бобины должна быть близка к окружности.

3. Неизвестная намотка (неравномерная). Для этого случая предложен способ определения длины материала прямоугольной формы, скатанной в рулон, достоинствами которого являются наличие легкодоступных процедур измерения, отсутствие громоздких операций взвешивания, повышение надежности и точности, управление процессом точности при определении длины материала для задач оптимального раскроя полосы на меньшие части.

Литература

[1] Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. Справочное руководство, М.: Наука (1960) 460.

[2] Пирожок А.В., Супрун А.А., Супрун А.Ю. Математическая модель механического движения металла для реверсивного одноклетевого стана холодной прокатки, *Електро-*

техика та електроенергетика, Kiev: (2007),2/10, 8-14.

Модель определения траектории поведения закладки

Т.С. МУСТАФИН[1,a], Б.Б. СЕРИКОВ[2,b]

[1] *Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан*

[2] *Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан*

E-mail: [a]mustafintima@mail.ru, [b]bagdat@mail.ru

Предлагается модель прогнозирования процесса твердения закладочного массива по данным наблюдений за показателями состояний закладочного материала, выполненных в определенные моменты времени.

Цель модели - повысить достоверность прогнозов и получить средства, которые позволяют более точно определить прогнозируемую траекторию изменения состояния закладочного материала по наборам признаков состояния в определенные моменты времени. Методика построения модели основана на результатах распознавания образов и прогнозирования. Применение разработанной модели к решению конкретных задач прогноза позволяет исследовать состояние закладочного массива по мере развития его состояния и устанавливать момент эксплуатационной готовности.

Постановка задачи. Пусть объектом рассмотрения является химико-технологичкский процесс, рассматриваемый как процесс развития состояния объекта во времени. Требуется определить класс принадлежности траектории изменения состояния.

Существует несколько вариантов постановок и решений этой задачи.

Объектом рассмотрения может быть любой процесс развития, рассматриваемый как динамический объект.

Рассматривается вариант процесса, при котором набор параметров состояний меняется в зависимости от момента времени наблюдения за ним.

Литература

[1] Байконуров, О.А., Крупник Л., Мельников В. Подземная разработка месторождений с закладкой , Алма Ата: Наука (1972) 384.

[2] Журавлев Ю.И. Избранные научные труды, М: Магистр(1998) 420.

[3] Блехман И.И. Прикладная математика: Предмет, логика и особенности подходов с примерами,М:URSS(2007) 376.

Разрешимость одной полупериодической краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных

Н. ОРУМБАЕВА, Ж. НУРГАЛИЕВА

Карагандинский государственный университет имени академика Е.А.Букетова,
Караганда, Казахстан
OrumbayevaN@mail.ru

На $\Omega = [0, X] \times [0, Y]$ рассматривается полупериодическая краевая задача для нелинейного дифференциального уравнения с произвольными функциями

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = k\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + a(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + f(x, y) \tag{1}$$

$$z(0, y) = \varphi(y), \tag{2}$$

$$z(x, 0) = z(x, Y), \tag{3}$$

где $k = const$, $\varphi(y)$ - заданная функция зависящая $y, a(x, y), f(x, y)$ - произвольные функции зависящие от x и y. В работе G.B.Whitham [1] были рассмотрены уравнения содержащие произвольные параметры вида

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = k\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + s\frac{\partial z}{\partial x} + m\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Такие уравнения встречаются в некоторых задачах химической технологии и хромотографии. Замена $u = e^{kz}$ в задаче (1)-(3) приводит к линейной полупериодической краевой задаче

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + kf(x, y)u \tag{4}$$

$$u(0, y) = e^{k\varphi(y)}, \tag{5}$$

$$u(x, 0) = u(x, Y), \tag{6}$$

$$z(x, y) = \frac{1}{k}\ln u(x, y). \tag{7}$$

В работе [2] задача (4)-(6) исследовалась методом параметризации [3]. В терминах матрицы $Q_\nu(x, h)$, элементы которой определяются через $a(x, y)$ были установлены достаточные условия однозначной разрешимости задачи (4)-(6). В сообщении исследуются вопросы существования, единственности решения данной задачи и сходимость алгоритма нахождения ее решения. Справедливо утверждение

Теорема. *Пусть при некотором шаге $h > 0, Nh = Y, N = 1, 2, ...,$ числа подстановок $\nu, \nu = 1, 2, ..., (N \times N)$ - матрица $Q_\nu(x, h)$, обратима при всех $x \in [0, X]$ и выполняются неравенства:*

$$1)\|[Q_\nu(x, h)]^{-1}\| \le \gamma_\nu(x, h),$$

$$2)q_\nu(x, h) = \frac{(\alpha(x)h)^\nu}{\nu!}\left[1 + \gamma_\nu(x, h)\sum_{j=1}^{\nu}\frac{(\alpha(x)h)^j}{j!}\right] \le \mu < 1,$$

где $\mu = const$, $a(x) = \max\limits_{y \in [0, Y]} \|a(x, y)\|$. Тогда существует единственное решение задачи (1)-(3).

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP05132262 КН МОН РК.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, полупериодические условия, произвольные функции, алгоритм

2010 Mathematics Subject Classification: 35L20

Литература

[1] Whitham G.B. *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley and Sons (1999).

[2] Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **29**:1 (1989), 50–66.

[3] Орумбаева Н.Т. Об одном алгоритме нахождения решения периодической краевой задачи для системы гиперболических уравнений, *Сибирские электронные математические известия*, **10** (2013), http://semr.math. nsc.ru/conru.html.

О нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в неограниченной области

М.Х.РУЗИЕВ

Институт Математики АН РУз.,Ташкент, Узбекистан E-mail:mruziev@mail.ru

Пусть $D = D^+ \cup D^- \cup I$ - область комплексной плоскости $z = x + iy$, где D^+- полуплоскость $y > 0$,D^- - конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками AC и BC уравнения

$$signy\,|y|^m\,u_{xx} + u_{yy} - \frac{m}{2y}u_y = 0, m > 0. \tag{1}$$

исходящими из точек $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ и отрезком AB прямой $y = 0$, $I = (x, y) : -1 < x < 1, y = 0$. Введем обознаечения: $I_1 = \{(x, y) : -\infty < x < -1, y = 0\}$, $I_2 = \{(x, y) : 1 < x < \infty, y = 0\}$.

Задача A. Найти в области D функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $u(x, y) \in C(\bar{D})$, где $\bar{D} = D \cup \bar{I}_1 \cup \bar{AC} \cup \bar{BC} \cup \bar{I}_2$;

2) $u(x, y) \in C^2\left(D^+\right)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области D^+;

3) $u(x, y)$ является обобщенным решением класса R_1 [1] ($\tau'(x), \nu(x) \in H$ причем $\tau'(x)$, и $\nu(x)$ непрерывны в точке $x = -1$) уравнения (1) в области D^-;

4) на интервале вырождения имеет место условие сопряжения

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{-m/2}\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to+0} y^{-m/2}\frac{\partial u}{\partial y},\ x \in I,$$

причем эти пределы при $x \to 1$ могут иметь особенности ниже единицы;

5) выполнено $\lim\limits_{R\to+\infty} u(x,y)=0$, $y\geq 0$, $R^2=x^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2}$;

6) удовлетворяет краевым условиям

$u(x,y)|_{y=0}=\tau_i(x)$, $x\in \bar{I}_i$, $i=1,2$,

$u[\theta_0(x)]=\mu u[\theta_k(x)]+(1-\mu)u(x,0)+\psi(x), x\in[-1,1]$,

$\tau_i(x)$, $\psi(x)$ - заданные функции, причем $\tau_i(\pm1)=0$, $i=1,2$, $\psi(-1)=0$, $\mu\neq 1$ постоянная, $\theta_0(x)=\frac{x_0-1}{2}-i(\frac{m+2}{4}(1+x_0))^{\frac{2}{m+2}}$, $\theta_k(x)=\frac{kx_0-1}{1+k}-i(\frac{(m+2)(1+x_0)}{2(1+k)})^{\frac{2}{m+2}}$ - аффиксы точек пересечения характеристики AC и кривой $AC_1: x-\frac{2k}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=-1$,

$k=const>1$, где $C_1\in BC$, с характеристикой , исходящей из точки $(x_0,0)$, $x_0\in(-1,1)$.

Заметим, что краевая задача для уравнения (1) в конечной области исследована в работе [2]. В данной работе изучается краевая задача с аналогом условия Бицадзе-Самарского для уравнения (1) в неограниченной области.

Ключевые слова: функциональное уравнение, единственность решения, существование решения.

2010 Mathematics Subject Classification: 35A02, 35J25, 35J70

Литература

[1] Смирнов М.М. *Уравнения смешанного типа*, Высшая школа, Москва(1985).

[2] Мирсабуров М., Хайруллаев И.Н., Бобомуродов У.Э. Об одном обобщении задачи Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа, *Известия вузов.Математика*, **10**(2016), 36–40.

О нелинейной задаче со свободной границей с одним нелокальным условием для квазилинейного уравнения диффузии

Р.Н.ТУРАЕВ

Институт Математики АН РУз.,Ташкент, Узбекистан E-mail:rasul.turaev@mail.ru

В современной науке наблюдается повышенный интерес к процессам, происходящим в нелинейных средах. Здесь можно указать задачи гидро- и газодинамики, физики плазмы, теории химических реакций и др [1]. В связи с постановкой новых задач возникает необходимость разработки новых подходов в исследовании нелинейных задач математической физики, решающихся с помощью математических моделей процессов в нелинейных средах. При этом многие из указанных задач для параболических уравнений приводятся к краевым задачам со свободной границей. Теория классической разрешимости задачи Стефана и других задач со свободными границами для параболических уравнений построена.

В настоящей работе изучается нелинейная нелокальная задача со свободной границей типа Флорина для квазилинейного параболического уравнения.

Постановка задачи. Требуется найти на некотором отрезке $0 < t \leq T$ непрерывно дифференцируемая функцию $s(t)$, такую, что $s(0) = s_0 > 0$, $0 < \dot{s}(t) \leq N$, $s(t)-$удовлетворяет условию Гельдера, а функция $u(t,x)$ в области $D = \{(t,x) : 0 < t \leq T, 0 < x < s(t)\}$ удовлетворяет уравнению

$$u_t(t,x) = a(u_x)u_{xx}(t,x) + b(u)u_x(t,x), \quad (t,x) \in D \tag{1}$$

и следующим начальным и граничным условиям

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq s_0, \tag{2}$$

$$u_x(t,0) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

$$\alpha u(t,0) = u(t,s(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{4}$$

$$u_x(t,s(t)) = p, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{5}$$

В работе [2] изучена локальная задача Стефана, а в работе [3] изучена задача Стефана с нелокальными условиями для такого уравнения.

Исследование проводится по следующей схеме. Сначала устанавливаются некоторые априорные оценки для решений $s(t), u(t,x)$ и их производные. Для этого поставленную задачу (1)-(5) сведем к эквивалентной задаче (типа Стефана) для функций $s(t), u_x(t,x)$.

Обозначим $u_x(t,x) = v(t,x)$. Тогда из задачи (1)-(5) получим следующую задачу

$$v_t(t,x) = a(v)v_{xx}(t,x) + a'_v(v)v(t,x) \cdot v_x(t,x) +$$

$$+ b(u)v_x(t,x) + b'_u(u) \cdot v^2(t,x), \quad (t,x) \in D, \tag{6}$$

$$v(0,x) = \varphi'(x), \quad 0 \leq x \leq s_0, \tag{7}$$

$$v(t,0) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{8}$$

$$v(t,s(t)) = p, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{9}$$

$$\dot{s}(t) = \frac{\alpha a(\psi(t))}{p} v_x(t,0) - \frac{a(p)}{p} v_x(t,s(t)) +$$

$$+ \frac{\alpha \psi(t)}{p} b(u(t,0)) - b(u(t,s(t))), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{10}$$

Далее, на основе установленных оценок исследуется поведение свободной границы, доказывается единственность решения. И в итоге доказывается существование решения полученный и первоначальной задачи при помощи методом неподвижной точки Шаудера [3].

Ключевые слова: задача Флорина, неизвестная граница, задача Стефана, единственность решения, существование решения.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K05, 35K20, 35K59

Литература

[1] Самарский А.А., Михайлов А.П. *Математическое моделирование: Идеи. Методы.Примеры*, Наука.Физматлит, Москва(1997).320 с.

[2] Douglas,Jr. A uniqueness theorem for the solution of the Stefan problem. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8**(1957), 402–408.

[3] Тахиров Ж.О., Тураев Р.Н. Нелокальная задача Стефана для квазилинейного параболического уравнения, *Вест.Сам.гос.тех.ун-та.Сер.Физ.-мат.науки.*, **28**(2012), 8–16.

Математическое моделирование пространственных колебаний оболочечных конструкций с протекающей жидкостью

Б.А. ХУДАЯРОВ, [1,a], Ф.Ж. ТУРАЕВ [2,b]

[1,2] *Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, Ташкент, Узбекистан*

E-mail: [a]*bakht-flpo@yandex.ru* , [b]*t.fozil86@mail.ru*

Рассмотрим поведение тонкой круговой вязкоупругой цилиндрической оболочки, внутри которой с постоянной скоростью движется идеальная жидкость. Скорость жидкости равна U и имеет направление, совпадающее с направлением оси Ox.

Уравнения движения оболочки, полученные в рамках классических теории оболочек [1], с учетом наличия вязкоупругого основания, имеют вид:

$$
\begin{gathered}
(1-R^*)\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{1+\mu}{2R}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial\theta}+L_1(w)\right\}-\rho\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,\\
(1-R^*)\left\{\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2R}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\theta}+L_2(w)\right\}-\rho\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0,\\
D(1-R^*)\nabla^4 w+L_3^*(u,v,w)+k_1(1-*)w+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=q.
\end{gathered}
$$

С помощью метода Бубнова- Галеркина математическая модель задачи сводится к решению системы обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений, где независимой переменной является время. Решение интегро-дифференциальных уравнений определяются численным методом, основанным на исключении особенности в ядре релаксации интегрального оператора [2-4]. Разработан вычислительный алгоритм, для решения задач динамики вязкоупругих трубопроводов с протекающей жидкости. На основе разработанного вычислительного алгоритма создан комплекс прикладных программ. Численно исследовано влияние сингулярности в ядрах наследственности на колебания конструкций, обладающих вязкоупругими свойствами.

Литература

[1] Григолюк Э.И., Мамай В.И. *Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций. - М.: Наука. Физматлит, (1997). 272 с.*

[2] Бадалов Ф.Б. *Методы решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости. Ташкент: Мехнат, (1987). 269 с.*

[3] Худаяров Б. А. , Тураев Ф. Ж. Численное моделирование нелинейных колебаний вязкоупругого трубопровода с жидкостью *Вестн Том. гос. ун-та. Математика и механика.* (2016) -No 5(43). С. 90-98. DOI: 10.17223/19988621/43/10

[4] Бадалов Ф.Б., Худаяров Б.А., Абдукаримов А. Исследование влияния ядра наследственности на решение линейных и нелинейных динамических задач наследственно-деформируемых систем *Проблемы машиностроения и надежности машин.* (2007) -No 4. С. 107-110.

Второй потенциал двойного слоя для эллиптического уравнения с сингулярным коэффициентом

А.ХАСАНОВ[1,a], Т.Г.ЭРГАШЕВ[2,b]

[1,2] *Институт Математики АН РУз., Ташкент, Узбекистан*

E-mail: [a]*anvarhasanov@yahoo.com*, [b]*ergashev.tukhtasin@gmail.com*

Пусть R_p^+ – половина $x_1 > 0$ $p-$мерного евклидова пространства точек $x = (x_1, ..., x_p)$; Ω – конечная область в R_p^+, ограниченная гиперповерхностью Γ и частью Γ_1 гиперплоскости $x_1 = 0$; $\Omega_e = R_p^+ \setminus (\Omega \cup \Gamma)$.

Рассмотрим в R_p^+ эллиптическое уравнение с сингулярным коэффициентом

$$\sum_{i=1}^{p} u_{x_i x_i} + \frac{2\alpha}{x_1} u_{x_1} = 0, \tag{1}$$

где α – действительное число, причем $0 < 2\alpha < 1$; $p \geq 2$.

Используя второе фундаментальное решение уравнения (1) в виде [1]

$$q_2(x,\xi) = k_2 r^{2\alpha - p} x_1^{1-2\alpha} \xi_1^{1-2\alpha} F\left(\frac{p}{2} - \alpha, 1 - \alpha; 2 - 2\alpha; 1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right),$$

где k_2 – известная постоянная,

$$\xi = (\xi_1, ..., \xi_p), \quad r^2 = \sum_{i=1}^{p} (x_i - \xi_i)^2, \quad r_1^2 = (x_1 + \xi_1)^2 + \sum_{i=2}^{p} (x_i - \xi_i)^2,$$

определим потенциал двойного слоя формулой

$$w^{(2)}(x) = \int_\Gamma \xi_1^{2\alpha} \mu_2(\xi) \frac{\partial q_2(\xi, x)}{\partial n} d\Gamma. \tag{2}$$

Здесь $\mu_2(\xi) \in C(\overline{\Gamma})$ – плотность, $\frac{\partial}{\partial n} = \sum\limits_{i=1}^{p} cos\,(n, x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$ – нормальная производная, $n-$внешняя нормаль к границе Γ. Потенциал двойного слоя (2) при $\mu_2(\xi) = 1$ обозначим через $w_1^{(2)}(x)$.

Потенциал $w^{(2)}(x)$ является регулярным решением уравнения (1) в любой области из R_p^+ , не имеющей общих точек ни с гиперповерхностью Γ, ни с гиперплоскостью $x_1 = 0$. Потенциал двойного слоя $w^{(2)}(x)$ определен во всех точках полупространства $x_1 > 0$.

Лемма 1. *Если Γ – поверхность Ляпунова, которая образует с гиперплоскостью $x_1 = 0$ прямой угол, то*

$$\int_\Gamma \xi_1^{2\alpha} \left| \frac{\partial q_2(\xi, x)}{\partial n} \right| d\Gamma \leq B, \quad w_1^{(2)}(x) = \begin{cases} k_0(x) - 1, & x \in \Omega, \\ k_0(x) - \frac{1}{2}, & x \in \Gamma, \\ k_0(x), & x \in \Omega_e, \end{cases}$$

где

$$k_0(x) = (1 - 2\alpha) k_2 x_1^{1-2\alpha} \int_{\Gamma_1} \left(x_1^2 + \sum_{i=2}^{p} (\xi_i - x_i)^2 \right)^{\alpha - \frac{p}{2}} d_{\xi'} \Gamma_1,$$

$\xi' = (\xi_2, ..., \xi_p)$; *$B$ - постоянная.*

Теорема 1. *Потенциал двойного слоя $w^{(2)}(x)$ имеет пределы при стремлении точки x к точке ξ гиперповерхности Γ извне и изнутри. Если предел значений $w^{(2)}(x)$ изнутри обозначить через $w_i^{(2)}(x)$, а предел извне – через $w_e^{(2)}(x)$, то имеют место формулы*

$$w_i^{(2)}(x) = -\frac{1}{2} + \int_\Gamma \mu_2(\xi) K_2(\xi, x) d\Gamma,$$

$$w_e^{(2)}(x) = \frac{1}{2} + \int_\Gamma \mu_2(\xi) K_2(\xi, x) d\Gamma,$$

где

$$K_2(\xi, x) = \xi_1^{2\alpha} \frac{\partial}{\partial n_\xi} \{q_2(\xi, x)\}, \quad \mu_2(\xi) \in C(\overline{\Gamma}).$$

Лемма 1 и теорема 1 при $p = 2$ доказаны в [2].

Ключевые слова: эллиптическое уравнение с сингулярным коэффициентом, фундаментальное решение, второй потенциал двойного слоя.

2010 Mathematics Subject Classification: 35J15, 35J70; 33C20, 33C65

Литература

[1] Салахитдинов М.С., Хасанов А. К теории многомерного уравнения Геллерстедта, *Узбекский математический журнал*, **3**:(2007), 95–109.

[2] Смирнов М.М.*Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения*. Наука, Москва, 1966.

Численное решение нелинейных интегродифференциальных уравнений с сингулярными ядрами наследственности

Б.А. Худаяров

Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, Ташкент, Узбекистан

E-mail: khudayarovba@gmail.com

Основой численного решения линейных и нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ) типа Вольтерра являются хорошо разработанные численные методы. Для решений интегральных и ИДУ используются различные методы. Например, метод интегральных и типа интегральных преобразований, Рунге-Кутта, усреднения, замораживания и другие. В работах [1-4] предложен эффективный подход к численному решению систем линейных и нелинейных ИДУ со слабо-сингулярными ядрами наследственности. Этот метод основан на совместном рациональном использовании различных аналитических преобразований, позволяющих свести исходные системы к системе интегральных уравнений с регулярными ядрами и устойчивого численного интегрирования, обеспечивающего получение решения задач с высокой степенью точности. В данной работе на основе интегральных моделей, построены математические модели нелинейных динамических задач трубопроводов, с протекающих газо-жидкостей. Полученные нелинейные ИДУ в частных производных с помощью метода Бубнова-Галеркина при рассмотренных граничных условиях сводятся к решению систем нелинейных обыкновенных ИДУ с постоянными или переменными коэффициентами относительно функции времени. Для исследования колебательных процессов трубопроводов предлагается численный алгоритм решение нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными ядрами. На основе разработанного вычислительного алгоритма создан комплекс прикладных программ. Численно исследовано влияние сингулярности в ядрах наследственности на колебания конструкций, обладающих вязкоупругими свойствами.

Литература

[1] Бадалов Ф.Б., Эшматов Х., Юсупов М. О некоторых методах решения систем интегро-дифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости *Прикладная математика и механика*, (1987) Т. 51. -No 5. С. 867-871.

[2] Худаяров Б.А., Бандурин Н.Г. Нелинейный флаттер вязкоупругих отротропных цилиндрических панелей *Математическое моделирование.* (2005) Т. 17. -No 10. С. 79-86.

[3] Бадалов Ф.Б., Худаяров Б.А. Исследование влияния вязкоупругого свойства материала конструкций летательного аппарата на критическое время и критическую скорость флаттера *Известия НАН Армении. Серия "Механика* (2008) Т. 61. -No 1. С. 75-82.

[4] Khudayarov, B. A. Numerical analysis of the nonlinear flutter of viscoelastic plates *International J. Applied Mechanics.* -No 41, (2005) pp.538-542.

Author's Index

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

ТРАДИЦИОННАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ АПРЕЛЬСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

Алматы-2018

Собственник книги: Институт математики и математического моделирования МОН РК

Отпечатано в типографии Институт математики и математического моделирования МОН РК, 050010, г.Алматы, ул.Пушкина, 125, тел.8(727)2 72 70 93