УДК.510.49 Б.С.Байжанов

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ТОТАЛЬНО ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ТЕОРИЙ КОНЕЧНОГО РАНГА

I.

Теорема I. Пусть T – тотально трансцендентная теория ранга 2 степени n, $I(T, \alpha)$ – мощность максимального множества попарно неизоморфных моделей теории T мощности α. Тогда для всех $\alpha \geqslant 1$ выполняется одно из следующих возможностей

I) $I(T, \alpha) = ...$,

2) $I(T, \alpha) \leqslant max(\omega, |\alpha|), I(T, \alpha) = |\alpha|$ для бесконечных α,

3) $I(T, \alpha) = |\alpha + 1|^{\omega}$,

4) $I(T, \alpha) = max(2^{\omega}, 2^{|\alpha|})$, $|\alpha+1|^{\omega}$

5) $I(T, \alpha) = min(2^{\omega_\alpha}, |\alpha + 1|$),

6) $I(T, \alpha) = 2^{\omega_\alpha}$.

Доказательство. $\varphi_1(x, \bar{a}_1)$, $\varphi_2(x, \bar{a}_2)$ – сильно минимальные формулы. Будем говорить, что $\varphi_1(x, \bar{a}_1)$ и $\varphi_2(x, \bar{a}_2)$ зависимы, если для любых M_1, M_2 из условий

$M_1 \prec M_2$; $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in M_1$; $\varphi_1(M_1, \bar{a}_1) \neq \varphi_1(M_2, \bar{a}_1)$

следует $\varphi_2(M_1, \bar{a}_2) \neq \varphi_2(M_2, \bar{a}_2)$.

Пусть $t(\bar{a}_1; \emptyset) = p_1(\bar{x})$; $t(\bar{a}_2; \emptyset) = p_2(\bar{y})$.

Из работы Лахлана [ ] следует существование такого типа $q_0(x, y)$, не обязательно полного, что для каждых $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$, реализующих, соответственно, $p_1(\bar{x})$ и $p_2(\bar{y})$, из зависимости $\varphi_1(x, \bar{b}_1)$ и $\varphi_2(x, \bar{b}_2)$ следует, что $(\bar{b}_1, \bar{b}_2)$ реализует q_0.

Тотально трансцендентную теорию назовем разложимой, если любая формула ранга формулы $x = x$ степени I разложима 2. Заметим, что свойство разложимости сохраняется при ограничении теории на формулу, имеющую ранг теории.

Нам понадобятся некоторые результаты А.Лахлана [4] об описании разложимых тотально трансцендентных теорий ранга 2 степени I. Пусть T – разложимая тотально трансцендентная теория ранга 2 степени I. Тогда можно выбрать формулу $\varphi(x, \bar{y})$ и полный m-тип p такой, что для всех $n < \omega$ существуют $\bar{b}_0, \ldots, \bar{b}_{n-1}$, все реализующие тип p и такие, что

$$\tau(\varphi(x,\bar{b}_i)) = d(\varphi(x,\bar{b}_i)) = 1, \ \tau(\varphi(x,\bar{b}_i) \wedge \varphi(x,\bar{b}_j)) \leq 0$$

для любых различных i и j, меньших n.

С помощью нормализационной леммы [3] мы можем получить формулу $\varphi'(x,\bar{y})$ такую, что для всех $\bar{b}_1, \bar{b}_2$, реализующих p,

$\varphi'(x,\bar{b}_1)$, $\varphi'(x,\bar{b}_1) \wedge \varphi'(x,\bar{b}_2)$ сильно минимальны,

$\varphi'(x,\bar{b}_1)$ и $\varphi'(x,\bar{b}_2)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\tau(\varphi(x,\bar{b}_1) \wedge \varphi(x,\bar{b}_2)) = 1$.

Для $\bar{b}_1, \bar{b}_2$, реализующих тип p, существует $m < \omega$, что в каждой модели M

$$[\, |\varphi'(M,\bar{b}_1) \wedge \varphi'(M,\bar{b}_2)| \geq m \Rightarrow M \models \forall x [\varphi'(x,\bar{b}_1) \leftrightarrow \varphi'(x,\bar{b}_2)]].$$

Тогда, используя теорему компактности, можно выбрать конечный подтип $p_0 \subset p$, что $T \vdash \forall \bar{y}_1, \bar{y}_2 [\exists^{\geq m} x (\varphi'(x,\bar{y}_1) \wedge \varphi'(x,\bar{y}_2) \wedge p_0(\bar{y}_1) \wedge p_0(\bar{y}_2)) \rightarrow \forall x (\varphi'(x,\bar{y}_1) \leftrightarrow \varphi'(x,\bar{y}_2))]$.

Пусть $\varphi''(x,\bar{y}) = \varphi'(x,\bar{y}) \wedge p_0(\bar{y})$. Очевидно, $\forall x [\varphi''(x,\bar{y}_1) \leftrightarrow \varphi''(x,\bar{y}_2)]$ определяет отношение эквивалентности на кортежах длины $l(\bar{y}) = k$. К языку теории T добавим новый $(k+1)$ - местный предикат $R(\bar{y},x)$ и определим T_φ. Модели теории T_φ получаются следующим образом. Для каждого класса эквивалентности вводится один новый элемент c так, чтобы $R(\bar{y},c)$ определяло класс эквивалентности в теории T_φ. Тем самым каждая модель теории T_φ расширяет некоторую модель теории T добавлением указанных дополнительных элементов c. Таким образом вместо формулы $\varphi(x,\bar{y})$ можно рассматривать формулу $\varphi(x,y)$ с таким свойством

$$\models \forall y_1, y_2 [\exists^{\geq m} x (\varphi(x,y_1) \wedge \varphi(x,y_2)) \rightarrow y_1 = y_2].$$

По выбору предиката $R(\bar{y},x)$, ранг формулы $\exists \bar{y} R(\bar{y},x)$ равен 2 и степень его равна I. Лахлан в работе [4] изучил ранг типа $\exists^{\geq\omega} y\, \varphi(y,x)$ и указал, что если $\tau(\exists^{\geq\omega} y\, \varphi(y,x)) \geq 2$ или $\tau(\exists^{\geq\omega} y\, \varphi(y,x)) = 1$, $d(\exists^{\geq\omega} y\, \varphi(y,x)) \geq 3$, то в первоначальной теории можно выделить ω_1 -категоричную формулу ранга 2. В таком случае, такие теории являются почти категоричными, и их спектр описан в работе Белеградека [5] и у Лахлана [4]. Лахлан рассматривал теории такие, что

$$\tau(\exists^{\geq\omega} y\, \varphi(y,x)) = d(\exists^{\geq\omega} y\, \varphi(y,x)) = 1$$

и если $\{b_1, b_2\}$ - независимое множество в типе $\exists^{\geq\omega}_y\, \varphi(y,x)$, то $\varphi(x,b_1), \varphi(x,b_2)$ - независимы. Он доказал, что такие теории почти категоричны. Оставшийся случай такой:

I) $\tau(\exists^{\geq\omega} y\ \varphi(y,x)) = d(\exists^{\geq\omega} y\ \varphi(y,x)) = 1$;

2) $\forall y_1, y_2\ [y_1 \neq y_2 \to \neg(\exists x(\varphi(x, y_1) \wedge \varphi(x, y_2)))]$;

3) если $\{b_1, b_2\}$ – независимое множество в типе $\exists^{\geq\omega} y\ \varphi(y,x)$ то $\varphi(x, b_1), \varphi(x, b_2)$ – независимы.

Лахлан рассмотрел два случая:

а) $\exists^{\geq\omega} y(\varphi(y,x))$ – связный,

б) $\exists^{\geq\omega} y(\varphi(y,x))$ – несвязный.

В случае а) во всех несчетных мощностях число попарно неизоморфных моделей 2^{ω_α} .

В описании случая б) Лахлан [4] сделал ошибку.

В произвольной модели M на элементах, удовлетворяющих формуле $\neg\exists\bar{y}\ R(x, \bar{y})$, он определяет отношение эквивалентности

$E(a_0, a_1) \Leftrightarrow \exists b_0, b_1 \in M, [b_0 \in cl(b_1), b_1 \in cl(b_0), \models(\exists^{\geq\omega} y(\varphi(y, b_0))), \models(\exists^{\geq\omega} y\ \varphi(y, b_1))), \models \varphi(a_0, b_0) \wedge \varphi(a_1, b_1)$.

Класс эквивалентности относительно E называется блоком. Возникает вопрос: Сколько может быть попарно неизоморфных блоков мощности $\leq \omega_\alpha\ (\alpha+1)$? Лахлан ([4] , стр.162) посчитал, что их может быть $|\alpha+1|$.

Пусть $b_0 \neq b_1$, $\models \exists^{\geq\omega} y\ \varphi(y, b_0), \exists^{\geq\omega} y\ \varphi(y, b_1)$.

Рассмотрим два случая.

I. Если b_0, b_1 взаимно алгебраичны, то $\varphi(x, b_0), \varphi(x, b_1)$ зависимы.

II. $\varphi(x, b_0)$, $\varphi(x, b_1)$ – независимы.

В случае I число неизоморфных блоков случаев равно $|\alpha+1|$.

В случае II число неизоморфных блоков есть $|\alpha+1|$ или $|\alpha+1|^\omega$.

Это зависит от того, сколько для одного элемента, реализующегося в типе $\exists^{\geq\omega} y\ \varphi(y,x)$, существует взаимно алгебраичных элементов. Так как тип $\exists^{\geq\omega} y\ \varphi(y,x)$ сильно минимален, число их может быть или конечно или счетно. Пронумеруем все неизоморфные блоки мощности $\leq\omega_\alpha$ ординалами $\gamma < |\alpha+1|^\omega$. Тогда любой модели M теории T можно поставить в соответствие функцию

$f_M : |\alpha+1|^k \to \omega \cup \{\omega_i / i \leq \alpha\}, k \leq \omega$. Число различных функций равно $|\alpha+\omega|^{|\alpha+1|^k}$. Тогда число моделей равно

$$I(T, \alpha) = \min(2^{\omega_\alpha}, |\alpha+\omega|^{|\alpha+1|^k}).$$

Разделим разложимые теории ранга 2, степени I на 6 классов.

А). Почти категоричные или категоричные теории.

Б). Теории, у которых сильно минимальный тип $\exists^{\geq\omega}y\,\varphi(y,x)$ связный.

Теории у которых сильно минимальный тип $\exists^{\geq\omega}y\,\varphi(y,x)$ несвязный делятся на 4 класса.

В).1). $\forall b_0, b_1 [\exists^{\geq\omega}y\,\varphi(y,b_0), \exists^{\geq\omega}y\,\varphi(y,b_1)], [b_0 \in cl(b_1) \Rightarrow \varphi(x,b_0), \varphi(x,b_1)$ зависимы.

2). Для любого в реализующего тип $\exists^{\geq\omega}y\,\varphi(y,x)$ существует только конечное число взаимно алгебраичных с ним элементов, реализующих тип $\exists^{\geq\omega}y\,\varphi(y,x)$.

Г).1). $\forall b_0, b_1 [\exists^{\geq\omega}y\,\varphi(y,b_0), \exists^{\geq\omega}y\,\varphi(y,b_1)], [b_0 \in cl(b_1) \Rightarrow \varphi(x,b_0), \varphi(x,b_1)$ зависимы].

2). Для любого b, реализующего тип $\exists^{\geq\omega}y\,\varphi(y,x)$, существует бесконечное число взаимно алгебраичных с ним элементов, реализующих тип $\exists^{\geq\omega}y\,\varphi(y,x)$.

Теории с условием $\forall b_0, b_1 [\exists^{\geq\omega}y\,\varphi(y,b_0), \exists^{\geq\omega}y\,\varphi(y,b_1)]$ $\varphi(x,b_0), \varphi(x,b_1)$ независимы делятся на два класса.

Д). $\forall b [\exists^{\geq\omega}y\,\varphi(y,b)]$, b – имеет конечное число взаимно алгебраичных элементов, реализующих $\exists^{\geq\omega}y\,\varphi(y,x)$.

Е). $\forall b [\exists^{\geq\omega}y\,\varphi(y,b) \Longrightarrow b$ имеет бесконечное число взаимно алгебраичных элементов, реализующих $\exists^{\geq\omega}y\,\varphi(y,x)]$.

Из леммы Шелаха о конечной эквивалентности следует, что любую теорию ранга α степени n можно разбить эквивалентностью $E(x,y)$ на n непересекающихся теорий ранга α степени I. Проделаем это с разложимыми теориями ранга 2. Рассмотрим случай, когда все $E(x,a_i)$, $i<n$, определяют теории только одного класса.

а). Пусть все $E(x,a_i)$ определяют теории вида А). Тогда легко понять, что теория T почти категорична, т.е. определяется конечным числом сильно минимальных формул.

б). Все $E(x,a_i)$ определяют теории вида Б). Из теоремы Лахлана [4] следует, что число моделей 2^{ω_α} для $\alpha \geq 1$.

в). Для простоты рассуждения, но теряя при этом общности, можно считать, что $n=2$. Пусть в теориях $T_1 = T\upharpoonright E(x,a_1)$, $T_2 = T\upharpoonright E(x,a_2)$ [6] формулы $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$ определяют разложения теорий T_1 и T_2. Тогда для сильно минимальных типов $\exists^{\geq\omega}y\,\varphi_1(y,x)$, $\exists^{\geq\omega}y\,\varphi_2(y,x)$ возможно одно из двух.

I. $\exists^{\geq\omega} y\, \varphi_1(y,x),\ \exists^{\geq\omega} y\, \varphi_2(y,x)$ зависимы.

II. $\exists^{\geq\omega} y\, \varphi_1(y,x),\ \exists^{\geq\omega} y\, \varphi_2(y,x)$ – независимы.

1. Пусть $\Phi(x,y)$ определяет зависимость сильно минимальных типов (замечание).

I.I) $\forall a, b\ [\ \models \exists^{\geq\omega} y\, \varphi_1(y,a),\ \models \exists^{\geq\omega} y\, \varphi_2(y,b),\ \models \Phi(a,b)$ $\Rightarrow$ $\varphi_1(x,a_1),\ \varphi_2(x,b)$ зависимы].

I.2) $\forall a, b\ [\ \models \exists^{\geq\omega} y\, \varphi_1(y,a),\ \models \exists^{\geq\omega} y\, \varphi_2(y,b),\ \models \neg\Phi(a,b)$ $\Rightarrow$ $\varphi_1(x,a),\ \varphi_2(x,b)$ независимы].

Из независимости $\varphi_1(x,a_1)$ и $\varphi_1(x,a_2)$, $\varphi_2(x,b_1)$ и $\varphi_2(x,b_2)$, когда $\{a_1,a_2\}, \{b_1, b_2\}$ независимые, следует, что других подслучаев случая I не может быть.

Подсчитаем число моделей теории T в мощности ω_α.

I. I). $I(T,\alpha) = I(T_1, \alpha)$

I. 2). Любая модель M мощности ω_α теории T определяется функцией $\eta_M : |\alpha + k_1| \times |\alpha + k_2| \to \omega \cup \{\omega_i / i \leq \alpha\}$, где $k_j \in [1,\omega]$; $j = 1, 2$; $k_j = \omega$, если сильно минимальная формула $\varphi_j(x,a)$ может иметь конечную размерность.

II. Из независимости сильно минимальных типов $\exists^{\geq\omega} y\, \varphi_1(y,x)$, $\exists^{\geq\omega} y\, \varphi_2(y,x)$, следует, что любые две модели теории T_1, T_2 когда согласованы конечное число сильно минимальных формул с той и другой стороны. Отсюда следует $I(T,\alpha) = I(T_1,\alpha) \times I(T_2,\alpha)$

г).д).е). Рассуждая, как в случае в), можно понять, что для любой сильно минимальной формулы $\psi(y,\bar c) \subset \mathcal{E}(x,a_i)$ существует конечное (в случае г) не более, чем счетное), число сильно минимальных формул $\theta(x,\bar d) \subset \mathcal{E}(x,a_j)$, $j \neq i < n$, что $\theta(y,d)$, $\psi(x,\bar c)$ зависимы. Тогда функция спектра в случаях г),д),е) определяется так же, как и в случае в).

Теперь рассмотрим разложение теории ранга 2 степени n. Применив лемму Шелаха, разобъем формулу $x = x$ на n непересекающихся формул ранга 2 степени I. Присутствие формулы вида А) не влияет на число моделей. Это следует из того, что любая модель $T \restriction \mathcal{E}(x,a_i)$ ($T \restriction \mathcal{E}(x,a_i)$ – вида А)) определяется размерностями конечного числа сильно минимальных формул. Если присутствует формула вида Б), то во всех несчетных мощностях число попарно неизоморфных моделей максимальное. Нам остается рассмотреть теории, имеющие формулы вида В),Г),Д),Е). Так же, как в случае в), можно понять, что для любой сильно минимальной формулы $\psi(y,\bar c) \subset \mathcal{E}(x,a_i)$ существует не более, чем счетное, множество попарно не пересекающихся сильно минимальных формул $\theta(x,\bar{d}) \subset \xi(x,a_j)$, $j \neq i < n$, что $\psi(y,\bar{c})$, $\theta(x,\bar{d})$ зависимы. Тогда функция спектра определяется так же, как и в):

$I(\cdot,\alpha) = max(I(T \wedge \xi(x,a_i),\alpha), i < n)$ так же для каждого $\alpha \geq 1$.

Пусть T -произвольная тотально трансцендентная теория ранга 2 степени n. По лемме [4] существует формула без констант, что $T \wedge \phi(x)$ разложима, $T \wedge \neg\phi(x)$ - неразложима. Тогда $I(T,\alpha) = max(I(T \wedge \phi(x)), I(T \wedge \neg\phi(x)))$ для каждого $\alpha \geq 1$. Пусть M - насыщенная модель теории T. $\{\psi_1(x,\bar{c}_1), \ldots, \psi_k(x,\bar{c}_k), \ldots\}$ $k \leq \omega$, $\psi_i(x,\bar{c}_i) \in F_1(M)$ максимальное множество попарно независимых сильно минимальных формул, таких, что $\psi_k(x,\bar{c}_k) \subset \neg\phi(x)$. Тогда для каждой разложимой формулы $\xi(x,a_i)$ вида В), Г), Д), Е), для каждой формулы $\psi_k(x,\bar{c}_k)$, $k < \gamma \leq \omega$, существует конечное число сильно минимальных формул $\theta(x,\bar{d}) \subset \xi(x,a_i)$, что $\theta(x,\bar{d})$, $\psi(x,\bar{c})$ зависимы. Отсюда и из теоремы 2([2]) следует, что любая модель мощности ω_α теории T определяется размерностями всех попарно независимых сильно минимальных формул и размерностью несвязного типа, определенного в неразложимой теории. Теорема доказана.

В заключении приведем пример тотально трансцендентной теории ранга 2 степени I, опровергающий функцию спектра Лахлана для этих теорий [4]. Язык $\mathcal{L}$ теории T содержит один одноместный предикатный символ $P(x)$ и одноместный функциональный символ $f(x)$. Теория T имеет следующие аксиомы:

I. $n < \omega$, $\exists^{\geq n} x\, P(x) \wedge \exists^{\geq n} x\, \neg P(x)$.

2. $r < \omega$. $\forall x[\neg P(x) \rightarrow (f^n(x) \neq x \wedge P(f^n(x)))]$.

3. $\forall x\, [\neg P(x) \rightarrow P(f(x))]$.

4. $n < \omega$. $\forall x[P(x) \rightarrow \exists^{\geq n} y[\neg P(y) \wedge f(y) = x]]$.

Легко показать, что эта теория полна, $R(x=x)=2$, $d(x=x)=1$. Будем говорить, что элементы x, y лежат в одном блоке, если существует $n < \omega$, что $[(P(x) \wedge P(y)) \rightarrow (f^n(x) = y) \vee f^n(y) = x)] \vee [(P(x) \wedge \neg P(y)) \rightarrow (f^n(y) = x \vee f^n(x) = f(y))] \vee [(P(y) \wedge \neg P(x)) \rightarrow (f^n(x) = y \vee f^n(y) = f(x))] \vee [\neg P(x) \wedge \neg P(y) \rightarrow f^n(x) = f(y)]$.

Ясно, что один блок образует модель теории T. Любая модель теории T состоит из непересекающихся блоков. Подсчитаем, сколько может быть неизоморфных блоков мощности ω_α для $\alpha \geq 1$. Число неизоморфных блоков равно числу неизоморфных функций $f: \omega^*+\omega \to \{\omega_i / i \leq \alpha\}$.

Таких функций $|\alpha+1|^{\omega}$. Пронумеруем все неизоморфные блоки ординалами $\gamma < |\alpha+1|^{\omega}$. Тогда любая модель M теории T характеризуется следующей функцией:

$$g_M : |\alpha+1|^{\omega} \to \omega \cup \{\omega_i / \ i \leq \alpha\},$$

где $g_M(\gamma)$ – мощность множества всех блоков с номером γ, входящих в данную модель. Ясно, что две модели с одной функцией изоморфны. Мощность множества таких функций $|\alpha+\omega|^{|\alpha+1|^{\omega}}$. Тогда

$$I(T, \alpha) = \min(2^{\omega_\alpha}, |\alpha+\omega|^{|\alpha+1|^{\omega}}).$$

Литература

I. Lachlan A., Spectra of -stable theories, Z.Math.Logik Grund.Math., 24, N 5 (1978).

2. Байжанов Б., Тотально трансцендентные теории ранга 2, имеющие размерность, Тезисы докладов V Всесоюзной конференции по математической логике, Новосибирск, 1979, II.

3. Lachlan A., Two conjectures on the stability of -categorical theories, Fund.Math., 81(1974), 135-145.

4. Lachlan A., Dimension and totally transcendenthal theories rank 2, degree 1, Lect.Notes, 1976, N 537, 153-183.

5. Белеградек О., О почти категоричных теориях, Сиб.мат.журнал, т.I4, № 2, I973, 277-288.

6. Байжанов Б., Омаров Б., Об ограничении теории на формулу, В сб."Теория нерегулярных кривых в различных геометрических пространствах", Алма-Ата, I979, 9-II.

7. Shelah S., Classification theorem and number of nonisorphic models, North-Holland, 1978.

8. Lascar D., Types definissables et product de types, C.R.Acad.Sci., 276(1973), 1253-1256.

9-3931

II.

Если $\varphi(x,\bar a)$ ($p(x)$) – формула (тип), то $r(\varphi(x,\bar a))$ ($r(p)$) будет обозначать ранг формулы (типа) по Морли. Пусть $p(x)$ такой тип над A, не обязательно полный, что

$d(p(x)) = 1$, $r(p(x)) > 0$, $A \subseteq B$.

Тогда через $h_{A,B}(p(x))$ обозначим такой полный тип q над B, что

1) $p(x) \subset q(x)$
2) $r(p(x)) = r(q)$

Пусть M – модель полной тотально трансцендентной теории и $\varphi(x,\bar a) \in F_1(M)$, $r(\varphi(x,\bar a))>0$, $d(\varphi(x,\bar a))=1$. Тогда $A \subset \varphi(M,\bar a)$ называется независимым в формуле $\varphi(x,\bar a)$, если

$r(b; A\setminus\{b\}) = r(\varphi(x,\bar a))$ для каждого $b \in A$

Мощность максимального независимого множества в формуле $\varphi(x,\bar a)$ в модели M называется размерностью формулы $\varphi(x,\bar a)$ в модели M и обозначается $dim(\varphi(x,\bar a), M)$. Из теоремы Шелаха [7] следует, что в тотально трансцендентных теориях $dim(\varphi(x,\bar a), M)$ определяется однозначно с точностью до счетного множества.

Пусть p, q – I-типы относительно A, $d(p)=d(q)=1$, a, b такие, что a реализует p, b реализует $h_{A,A\cup\{a\}}(q)$. Тогда произведением $p \times q$ типов p и q назовем двухместный тип $t(\langle a,b\rangle; A)$ над A. [8] Ласкар доказал, что $p(x)\times q(y) = q(y)\times p(x)$.

Пусть $\varphi_0(x,\bar a_0),\ldots,\varphi_n(x,\bar a_n)\in F_1(M)$, $d(\varphi_i(x,\bar a_i))=1$. Тогда $\langle m_k\rangle_n$ – независимостью для $\langle\varphi_k\rangle_{k\le n}$ над моделью M назовем кортеж $\bar a \notin M$ длины $m_0+m_1+\dots+m_n$, реализующий тип $p_0^{m_0}\times\dots\times p_n^{m_n}$, где $p_i = h_{\bar a_i, M}(\varphi_i(x,\bar a_i))$, $i\le n$.
Пусть $\varphi_i(x,\bar a_i), \psi_j(x,\bar b_j)\in F_1(M)$, $i\le m$, $j\le n$, $r(\varphi_i)>0$, $d(\psi)>0$, $d(\varphi_i)=d(\psi_j)=1$, $i\le m$, $j\le n$. Говорят, что $\langle\psi_0,\ldots,\psi_n\rangle$ по Рудину-Кислеру вытягивают $\langle\varphi_0,\ldots,\varphi_m\rangle$ над моделью M, если для каждой $M' \succ M$ выполняется условие:

Если в M' реализуется $\langle 1,\ldots,1\rangle_{n+1}$ независимость для $\langle\psi_k\rangle_{k\le n}$ над M, то в M' реализуется $\langle 1,\ldots,1\rangle_{m+1}$ – независимость для $\langle\varphi_k\rangle_{k\le m}$.

Обозначается это так:

$< \varphi_0, \dots, \varphi_m > \le_{RK,M} < \psi_0, \dots, \psi_n >$.

Пусть $\varphi(x,\bar a), \psi(x,\bar b) \in F_1(M)$, $d(\ ) = 1$. Говорят, $\psi(x,\bar b)$ по Δ вытягивает $\varphi(x,\bar a)$ над моделью M и пишут: $\varphi(x,\bar a) \Delta_M \psi(x,\bar b)$, ког а для каждой $M' \succ M$, если M' содержит I- независимость для ψ над M, то $\varphi(M') \neq \varphi(M)$.

А.Лахлан заметил: [I] для любых формул $\varphi(x,\bar a)$, $\psi(x,\bar b)$, $[d(\psi(x,\bar b))] = 1$, если существует модель M, ч $\varphi(x,\bar a) \Delta_M \psi(x,\bar b)$, то это верно для всех моделей M', что $\bar a, \bar b \in M'$.

Пусть T - тоталь о трансцендентная теория. M -счетная насыщенная модель теории T. $\Phi = < \varphi_n(x,\bar b_n) / n < \omega$, $\varphi_n(x,\bar b_n) \in F_1(M)$, $\tau(\varphi_n(x,\bar b_n)) > 0$, $d(\varphi_n(x,\bar b_n)) = 1 >$ - некоторое Φ -перечисление всех формул языка $\mathcal{L}(M)$ ранга больше нуля степени I. Определим максимальное φ -перечисление формул языка $\mathcal{L}(M)$ ранга больше нуля степени один со следующими условиями:

$$< \varphi_i(x,\bar a_i) / i < \gamma, (\forall j < i < \gamma) \urcorner [\varphi_i(x,\bar a_i) \Delta \varphi_j(x,\bar a_j)] >.$$

Пусть определено φ - перечисление $< \varphi_i / i < \beta >$.

$$B_\beta = \{ \Phi(x,\bar c) \in \Phi / (\forall i < \beta) \urcorner (\varphi_j(x,\bar a_j) \Delta \Phi(x,\bar c)) \},$$

$$B'_\beta = \{ \Phi(x,\bar c) \in B_\beta / (\forall \psi(x,\bar d) \in B_\beta) (\tau(\Phi(x,\bar c)) < \tau(\psi)) \},$$

$$B''_\beta = \{ \Phi(x,\bar c) \in B'_\beta / (\exists \gamma < \beta) (\varphi_\gamma(x,\bar a_\gamma) \text{ - копия } \Phi(x,\bar c)) \}.$$

Если $B''_\beta \neq \emptyset$, то в качестве $\varphi_\beta(x,\bar a_\beta)$ возьмем формулу $\Phi(x,\ ) \in B''_\beta$ с наименьшим Φ -номером. Если $B''_\beta = \emptyset$, $B'_\beta \neq \emptyset$, то в качестве $\varphi_\beta(x,\bar a_\beta)$ возьмем формулу $\Phi(x,\bar c) \in B'_\beta$ с наименьшим Φ - номером. Если $B_\beta = \emptyset$ то определение φ - перечисления заканчивается.

Будем говорить, что $\varphi_\beta(x,\bar a_\beta)$ определяет копии, если $(\forall n < \omega)(\varphi_{\beta+n}(x,\bar y) = \varphi_\beta(x,\bar y) \ \& \ t(\bar a_\beta; \emptyset) = t(\bar a_{\beta+n}; \emptyset))$. Пусть $\varphi_\beta(x,\bar a_\beta)$ определяет копии, $k < \omega$ такое, что $\tau(\bar a_{\beta+k}; \{\bar a_\beta, \dots, \bar a_{\beta+k-1}\}) > 0$, $d(\bar a_{\beta+k}; \{\bar a_\beta, \dots, \bar a_{\beta+k-1}\}) = 1$. Существует бесконечное множество $\{\bar a_i / i \in \{\beta+k, \dots, \beta+k+n, \dots\}_{n<\omega}\}$, независимое в типе $t(\bar a_{\beta+k}; \{\bar a_\beta, \dots, \bar a_{\beta+k-1}\})$. Тогда говорят, что $t(\bar a_{\beta+k}; \{\bar a_\beta, \dots, \bar a_{\beta+k-1}\})$ определяет φ_β - копии, если $\tau(\bar a_{\beta+k}; \{\bar a_\beta, \dots, \bar a_{\beta+k-1}\})$ -наименьший с таким свойством. Из работы А.Лахлана ([I], стр.135) следует, что если в φ - перечислении существует формула φ_β, определяющая копии, то существует тип, определяющий φ_β - копии. Г работы [ ] следует, что тип, определяющий ψ_β – копии можно считать одноместн. . Ясно, что для полного описания спектральных функций тотально трансцендентных теорий, нужно найти необходимые и достаточные условия чтобы теория имела максимальное число попарно неизоморфных моделей во всех несчетных мощностях. Поэтому представляет интерес изучение таких теорий.

Лемма 2.I. Пусть T тотально трансцендентная теория конечного ранга. $\forall b_1, b_2\ [\ t(b_1;\emptyset) = t(b_2;\emptyset),\ b_2 \in cl(b_1) \Rightarrow b_1 \in cl(b_2)\ ]$.

Доказательство леммы 2.I. значительно упрощено Е.Палютиным, поэтому с его разрешения мы приведем его доказательство.

Пусть T -полная теория, $\mathcal{N} \models T$ достаточно большая насыщенная модель, L -язык T. Пусть p - m - тип, Δ - множество m - формул, λ - кардинал (возможно, конечный) или $\lambda = \infty$. Определим

Degree (Шелах, [7], стр.42) $\mathcal{D}^m(p,\Delta,\lambda)$ индукцией по α. Определяем, когда $\mathcal{D}^m(p,\Delta,\lambda) \geqslant \alpha$.

(I). $\mathcal{D}^m(p,\Delta,\lambda) \geqslant 0$, когда p есть совместный тип. Когда p - несовместное множество m -формул, мы положим $\mathcal{D}^m(p,\Delta,\lambda) = -1$.

(2). $\mathcal{D}^m(p,\Delta,\lambda) \geqslant \delta$ (- предельный ординал), если $\mathcal{D}^m(p,\Delta,\lambda) \geqslant \alpha$ для всех $\alpha < \delta$.

(3). $\mathcal{D}^m(p,\Delta,\lambda) \geqslant \alpha+1$, если для всех $\mu < \lambda$ и для всех $r \subseteq p$ существует конечное $q \supseteq r$, $(\exists n < \omega)$, $\exists \psi(\bar{x},\bar{y}) \in \Delta$ и кортежи $\bar{a}_i$, $i < \mu$, такие, что
(i) $\mathcal{D}^m(q \cup \{\psi(x,\bar{a}_i)\},\Delta,\lambda) \geqslant \alpha$,
(ii) $\{\psi(x,\bar{a}_i)\ i < \mu\}$ - n - противоречиво относительно q т... для каждого $w \subseteq \mu, |w| = n$, $\models \neg(\exists x)(\wedge_{i \in w}(\psi(x,\bar{a}_i) \wedge q))$.

(4). Если $\mathcal{D}^m(p,\Delta,\lambda) \geqslant \alpha$, но $\neg(\mathcal{D}^m(p,\Delta,\lambda) \geqslant \alpha+1)$, то скажем $\mathcal{D}^m(p,\Delta,\lambda) = \alpha$. Если $\mathcal{D}^m(p,\Delta,\lambda) \geqslant$ .. для всех α, определим $\mathcal{D}^m(p,\Delta,\lambda) = \infty$.

Из определения Degree и ранга следует ([7], стр.48), что $R^m(p,\Delta,\lambda) \geqslant \mathcal{D}^m(p,\Delta,\lambda)$ для всех $\lambda \geqslant \omega_1$.

Пусть $\mathcal{D}(p) = \mathcal{D}'(p,1,\infty)$. Значит, $(p) \leqslant r(p)$, где $r(p)$ - ранг Морли.

Лемма 2.2. (Е.Палютин). Пусть $r(x)$ и $p(y)$ - некоторый I-тип, $\varphi(x,y)$ формула, $(\forall y)(\exists^{\leqslant n} x)\ \varphi(x,y)$ и для всех элементов в типе $r(x)$ тип $\{\varphi(b,y)\} \cup \{p(y)\}$ реализуется бесконечным числом элементов.

Если $\mathcal{D}(\tau) \geq n \geq 1$, то $\mathcal{D}(q(y) \cup p(y)) \geq n+1$, где $q(y) = \{\exists x(\psi(x) \wedge \varphi(x,y)) \,/\, \varphi \in \tau\}$.

Доказательство. Индукцией по n. Пусть $\mathcal{D}(\tau \cup \{\psi(x,\bar a_\alpha)\}) \geq n_1, \alpha \in |T|^+, \tau(\bigwedge_{\alpha \in w} \psi(x,\bar a_\alpha)) = 1$ для любого $w \subseteq |T|^+, |w| \geq n_0$. По индукционному предположению (и по определению при $n = 1$),

$$\mathcal{D}(\{\exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x,\bar a_\alpha) \wedge \Phi(x,y)) / \varphi \in \tau\} \cup p(y)) \geq n.$$

Тогда также $\mathcal{D}(q \cup p \cup \{\exists x(\psi(x,\bar a_\alpha) \wedge \Phi(x,y)\}) \geq n$. Ясно, что для w мощности $\geq n_0 \cdot K$ мы имеем $\tau(\bigwedge_{\alpha \in w}(\exists x(\psi(x,\bar a_\alpha) \wedge \Phi(x,y)))) = 1$, следовательно, $\mathcal{D}(q) \geq n+1$.

Предложение 2.1. (Е.Палютин). Пусть $t(b;\emptyset) = t(c;\emptyset) = \tau(x)$, $\mathcal{D}(\tau) = n < \omega$, $c \in cl(b)$. Тогда $b \in cl(c)$.

Доказательство. Если $b \notin cl(c)$, то существует формула $\Phi(x,y)$, для которой $\models \varphi(c,b) \wedge \forall y \exists^{\leq K} x\, \varphi(x,y)$. Следовательно, тройка $\tau(x)$, $\tau(y)$ и $\varphi(x,y)$ удовлетворяет условию леммы. Тогда $\mathcal{D}(q(y) \cup \tau(y)) \geq n+1$. Это противоречит тому, что $\mathcal{D}(\tau(y)) = n$.

Из предложения 2.1. и леммы Шелаха ([7] , стр.48) следует лемма 2.1.

Идея доказательства следующей леммы принадлежит А.Нуртазину.

Лемма 2.3. Пусть $R(x,y)$ — симметричный рефлексивный предикат. Тогда существует 2^{ω_α} попарно неизоморфных моделей мощности ω_α сигнатуры, состоящей из $R(x,y)$.

Доказательство. Определим стандартную модель M. Затем, изменяя M, получим 2^{ω_α} попарно неизоморфных моделей. $M = \{a_\gamma / \gamma < \omega_\alpha\} \cup \{b_{\gamma,i} / \gamma < \omega_\alpha, \gamma = \beta + n, \beta$ — предельный ординал, $0 < n < \omega, i < 2n\}$.

На модели M предикат $R(x,y)$ определяется следующим образом:

1). Пусть μ — предельный ординал $< \omega_\alpha$. Тогда

$(\forall \gamma < \mu)(\forall \beta > \mu)[M \models R(a_\gamma, a_\mu)], [M \models R(a_\mu, a_\beta) \Leftrightarrow$ предельный $\beta]$

2). Пусть $\gamma = \beta + n < \omega_\alpha$, β — предельный ординал, $0 < n < \omega$. Тогда $(\forall i < 2n)[M \models \forall x [R(x, b_{\gamma,i}) \Leftrightarrow x = a_\gamma]$.

3). Пусть $\gamma_1 \neq \gamma_2$ — непредельные ординалы, меньше ω_α. Тогда $M \models \neg R(a_{\gamma_1}, a_{\gamma_2})$. Для каждой функции $f: \omega_\alpha \to \{0,1\}$ строим модель M_f. Основное множество M_f равно $M \setminus \{b_{\gamma+1,0} / \gamma < \omega_\alpha, f(\gamma) = 0\}$. Предикат $R(x,y)$ на элементах M_f определен точно так же, как на

M. Ясно, что $(\forall f_1 \neq f_2 \in {}^{\omega_2}\{0,1\})\, M_{f_1} \neq M_{f_2}$. Из того, что число таких функций равно 2^{ω_2}, следует утверждение леммы.

Лемма 2.4. Пусть T – счетная тотально трансцендентная теория. Тогда

а). Если $t(a,\emptyset) = t(b,\emptyset)$, $a \in cl(b)$, $b \in cl(a)$, то $\forall \bar c\ (\tau(a;\bar c) = \tau(b;\bar c))$.

б). Если $a \in cl(b)$, $b \in cl(a)$, то $\forall c(\tau(c;a) = \tau(c;b))$.

Доказательство. а). Пусть формула $\varphi(x,y)$, натуральные числа n_0, n_1 такие, что $\models \varphi(a,b) \wedge \forall y \exists^{\leq n_0} x\, \varphi(x,y) \wedge \forall x \exists^{\leq n_1} y\, \varphi(x,y)$, $\tau(\exists y\, \varphi(x,y)) = \tau(\exists x\, \varphi(x,y)) = \tau(a;b)$.

Утверждение леммы будет следовать из следующего факта.

(I). $(\forall \psi(x,\bar c))[\tau(\psi(x,\bar c)) = \alpha$, $\tau(\exists y\, \varphi(x,y) \wedge \psi(x,\bar c)) = \alpha \Rightarrow \tau(\exists x(\varphi(x,y) \wedge \psi(x,\bar c))) = \alpha]$.

Доказательство (I) будем вести индукцией по $\alpha < \tau(\exists y\, \varphi(x,y))$.

Шаг 0. Истинность следует из определения ранга.

Шаг I. По шагу 0, $\tau(\exists x(\varphi(x,y) \wedge \psi(x,\bar c))) \geq 1$. Пусть $d(\psi(x,\bar c)) = n_2$. Тогда существуют n_2 попарно несовместных формул $\psi_i(x,\bar c_i)$, $i < n_2$, что $\models \forall x(\psi(x,\bar c) \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{n_2} \psi_i(x,\bar c_i))$, $\tau(\psi_i(x,\bar c_i)) = 1 = d(\psi_i(x,\bar c_i))$. Если $(\forall i < n_2)\ \tau(\exists x(\psi_i(x,\bar c_i) \wedge \varphi(x,y))) = 1$, то $\tau(\exists x(\psi(x,\bar c) \wedge \varphi(x,y))) = 1$. Это следует из того, что дизъюнкция формул ранга α есть формула ранга α. Предположим противное, $\tau(\exists x(\psi_0(x,\bar c_0) \wedge \varphi(x,y))) \geq 2$. Тогда существуют попарно несовместные формулы $\theta_1(y,\bar d_1), \ldots, \theta_n(y,\bar d_n), \ldots$ $n < \omega$, что $\tau(\exists x(\varphi(x,y) \wedge \psi_0(x) \wedge \theta_n(y))) \geq 1$. Пусть $\exists x(\varphi(x,y) \wedge \psi_0(x,\bar c_0) \wedge \theta_n(y,\bar d_n)) = \Phi_n(y,\bar d_n,\bar c_0)$. По определению формулы $\Phi_n(y,\bar d_n,\bar c_0)$, для каждого $n < \omega$ $\tau(\exists y(\Phi_n(y) \wedge \varphi(x,y) \wedge \psi_0(x))) = 1$. Из сильной минимальности $\psi_0(x,\bar c_0)$ следует, что для каждого $k < \omega$

$\tau(\exists y(\Phi_1(y) \wedge \varphi(x,y) \wedge \psi_0(x)) \wedge \ldots \wedge \exists y(\Phi_k(y) \wedge \varphi(x,y) \wedge \psi_0(x))) = 1$.

Тогда, если взять $k \geq n_1 + 1$, получим противоречие с определением $\varphi(x,y)$.

Шаг α. Пусть $\tau(\psi(x,\bar c)) = \alpha$, $d(\psi(x,\bar c)) = 1$. Тогда по индукционному предположению $\tau(\exists x(\varphi(x,y) \wedge \psi(x,\bar c))) \geq \alpha$. Предположим противное $\tau(\exists x(\varphi(x,y) \wedge \psi(x,\bar c))) \geq \alpha + 1$. Тогда существуют по лемме Шелаха ([7], стр.38) попарно несовместные формулы

$\vartheta_1(x,\alpha_1), \ldots, \theta_n(x,\alpha_n), n<\omega$, что $\tau(\exists x(\varphi(x,y)\wedge\psi(x,\bar c))\wedge\theta_n(y)) = \alpha$ для каждого $n<\omega$.

Пусть $(\exists x)(\varphi(x,y)\wedge\psi(x,\bar c))\wedge\theta_n(y,\alpha_n)) = \Phi_n(y)$. Тогда $\tau(\exists x\,\varphi(x,y)\wedge\Phi_n(y)) =$, по определению $\Phi_n(y)$. Отсюда по индукционному предположению $\tau(\exists y(\varphi(x,y)\wedge\Phi_n(y)))\geqslant\alpha$.
Но из того, что $\vDash\forall x\exists^{\leq n_1}y\,\varphi(x,y)\wedge\forall y\exists^{\leq n_2}x\;\varphi(x,y)$, и для каждого $n<\omega$ $\tau(\exists y(\varphi(x,y)\wedge\Phi_n(y))\wedge\psi(x,\bar c)) = \alpha$. Таким образом, для любой формулы $\psi(x,\bar c)$ имеем:
$\tau(\psi(x,\bar c)) = \alpha$, $d(\psi(x,\bar c)) = n_2$, $\tau(\exists x(\varphi(x,y)\wedge\psi(x,\bar c))) = \alpha$.

б). Следует из того, что дизъюнкция формул ранга α, есть формула ранга α.

Пусть $q(x)$ – тип, $d(q(x)) = 1$. Тогда $q(x)$ – сильно связный, если (I) существует A, $|A|\geqslant 2$, A – независимо в $q(x)$,

2) $(\exists a)\ (\forall X\subsetneqq A)\ t(a;X) = h_{\emptyset,X}(q(x))$,

3) $a\in cl(A)$.

Тип $q(x)$ связный, если

I) существует A, $|A|\geqslant 2$, A независимо в $q(x)$

2) $(\exists a)\ (\forall X\subsetneqq A)$

3) $a\in cl(A)$.

В противном случае тип назовем несвязным.

Теорема 2.5. Пусть T тотально трансцендентная теория конечного ранга. Тогда, если среди типов, определяющих φ_β – копии существует сильно связный тип, то

$$I(T,\alpha) = 2^{\omega_\alpha} \qquad \text{для каждого } \alpha\geqslant 1.$$

Доказательство. Пусть $q(x)$ – сильно связный тип, определяющий φ_β –копии. $\langle A,a\rangle$ удовлетворяет следующим условиям:

I) A независимо в $q(x)$,

2) $(\forall X\subsetneqq A)\quad t(a;X) = h_{\emptyset,X}(q(x))$,

3) $a\in cl(A)$.

Тогда из 2) следует, что $(\forall d\in A)\quad \varphi_\beta(x,d)\neq_{RK}\varphi_\beta(x,a)$.
Пусть $a_1,a_2,\ldots,a_\gamma,\ldots\quad(\gamma<\omega_\alpha)$ – последовательность элементов удовлетворяющих условиям:
$t(a_\mu;\ A\cup\{a_\gamma/\gamma<\mu\}) = h_\emptyset,\ A\cup\{a_\gamma/\gamma<\omega_\mu\}(q(x))$.
Тогда $A\cup\{a_\gamma/\gamma<\mu\}$ независимо в $q(x)$, кроме этого A – неразличимое множество. Пусть $A^{(i)}_\gamma = \{c_1,\ldots,c_k,b_i,a_\gamma\}$ $(\gamma<\omega_\alpha,\ i=1,2)$,
$A_{\gamma,\mu} = \{c_1,\ldots,c_k,a_\gamma,a_\mu\}$, $\gamma<\mu<\omega_\alpha$, $B = cl_q(A)$ $\{a/\forall X\subsetneqq A,\ t(a,X) = h_{\emptyset,X}(q(x)),\ a\in cl(A)\}$.

П[illegible]дложение 2.2.

I) $(\forall d \in B_\gamma^{(i)})[\varphi_\beta(x,d) \neq_{RK} \varphi_\beta(x,a_\mu)]$ для $\mu, \gamma < \omega_\alpha;\ i=1,2;$

2) $[\varphi_\beta(x,d) \neq_{RK} \varphi_\beta(x,a_{\gamma_3})]$ для $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3 < \omega_\alpha$ каждого $d \in B_{\gamma_1,\gamma_2}$;

3) $[\langle\gamma,i\rangle \neq \langle\mu,j\rangle \Rightarrow (\forall a \in B_\gamma^{(i)})(\forall b \in B_\mu^{(j)})(\varphi_\beta(x,a) \neq_{RK} \varphi_\beta(x,b))]$ для $\mu,\gamma<\omega_\alpha,\ i,j=1,2$;

4) $(\forall a \in B_\gamma^{(i)})(\forall b \in B_{\gamma,\mu})(\varphi_\beta(x,a) \neq_{RK} \varphi_\beta(x,b))$ для $\gamma \neq \mu < \omega_\alpha,\ i=1,2$

5) $[\langle\gamma_1,\mu_1\rangle \neq \langle\gamma_2,\mu_2\rangle \Rightarrow (\forall a \in B_{\gamma_1,\mu_1})(\forall b \in B_{\gamma_2,\mu_2})(\varphi_\beta(x,a) \neq_{RK} \varphi_\beta(x,b))]$ для $\gamma_1,\gamma_2,\mu_1,\mu_2 < \omega_\alpha$.

Доказательство. I). Если $\mu = \gamma$, то утверждение предложения следует из определения $B_\gamma^{(i)}$.

$\mu \neq \gamma$. Предположим противное, тогда $\varphi_\beta(x,d) =_{RK} \varphi_\beta(x,a_\mu)$. Это означает существование формулы $\Phi(x,a_\mu)$, что $\models \Phi(d,a_\mu)$ и

$$t(d;\ c_1,\dots,c_k,b_i,a_\mu) \neq h_{\Phi;c_1,\dots,c_k,b_i,a_\mu}(q(x)), \quad (I)$$

так как $\Phi(x,a_\mu) \in t(d;\bar c,b_i,a_\mu)$, но $\neg\Phi(x,a_\mu) \in h_{\Phi;\bar c,b_i,a_\mu}(q(x))$. Тогда из того, что $h_\Phi, A_\mu^{(i)} \setminus \{a_\mu\} \subset t(d;A_\mu^{(i)})$, следует $\tau(d;A_\mu^{(i)}) \leqslant \tau(q(x))$ и из (I) следует

$$\tau(d;A_\mu^{(i)}) < \tau(q(x)). \quad (2)$$

Так как d и a_γ над $\{c_1,\dots,c_k,b_i\}$ взаимно алгебраичны, то из леммы I и (2) следует $\tau(a_\gamma;A_\mu^{(i)}) < \tau(q(x))$, что противоречит определению множества $A \cup \{a_\gamma / \gamma < \omega_\alpha\}$.

2). $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3 < \omega_\alpha$. Доказывается аналогично I).

3) $\mu,\gamma<\omega_\alpha,\ i,j=1,2\ [\mu=\gamma \Rightarrow i \neq j]$.

а) $\mu=\gamma,\ i\neq j$. Предположим, существуют $d_1 \in B_\gamma^{(1)}, d_2 \in B_\gamma^{(2)}$, что $\varphi_\beta(x,d_1) =_{RK} \varphi_\beta(x,d_2)$, это означает, что $\models \Phi(d_1,d_2)$, $\Phi(x,y) \in \varphi_0(x,y)$, $t(d_i;\bar c,a_\gamma) = t(d_i;\bar c,a_\gamma) - h_{\Phi;\bar c,a_\gamma}(q(x))$, $i=1,2$.

Из того, что $\tau(d_1;\bar c,a_\gamma) - \tau(q(x))$, $\Phi(x,d_2) \in t(d_1;\bar c,a_\gamma,d_2)$, $\neg\Phi(x,d_2) \in h_{\Phi,\bar c,a_\gamma,d_2}(q(x))$, следует

$\tau(d_1;\bar c,a_\gamma,d_2) < \tau(q(x))$.

Из взаимной алгебраичности d_2 и b_2 над $\{c_1,\dots,c_k,a_\gamma\}$, по лемме 4 (а) $\tau(d_1;\{c_1,\dots,c_k,a_\gamma,b_2\}) < \tau(q(x))$.

Используя лемму 4 (а) и взаимную алгебраичность d_1 и b_1 над $\{c_1,\dots,c_k,a_\gamma\}$, получим $\tau(b_1;A_\gamma^{(2)}) < \tau(q(x))$, что противоречит определению множества $A \cup \{a_\gamma / \gamma < \omega_\alpha\}$.

б, $\mu \neq \delta$, $i \neq j$, $i=1$, $j = 2$. Предположим, существуют $d_1 \in B_\gamma^{(1)}$, $d_2 \in B_\mu^{(2)}$, что $\varphi_\beta(x,d_1) =_{R_K} \varphi_\beta(x,d_2)$ это эквивалентно
$\ni \Phi(x,y) \in \varrho_0(x,y)$, $\models \Phi(d_1, d_2)$.
Из 1), 2) следует $\tau(d_i; \bar{c}, \ldots, B_2) = \tau(\varrho(x))$, $i=1,2$.
Из того, что $\Phi(x,d_2) \in t(d_1; \bar{c}, B_1, B_2, d_2)$ и
$\neg\Phi(x,d_2) \notin h_\beta; \bar{c}, B_1, B_2, d_2(\varrho(x))$ следует $\tau(d_1; \bar{c}, B_1, B_2, d_2) < \tau(\varrho(x))$.
Из взаимной алгебраичности d_2 и a_μ над $\{c_1, \ldots, c_K, B_2\}$ по лемме 4 (б) $\tau(d_1; \bar{c}, B_1, B_2, a_\mu) < \tau(\varrho(x))$. По лемме 4 (а) и взаимной алгебраичности d_1 и a_γ над $\bar{c}, B$ и $\tau(d_1; \bar{c}, B_1, B_2, a_\mu) < \tau(\varrho(x))$ следует $\tau(a_\gamma; \bar{c}, B_1, B_2, a_\mu) < \tau(\varrho(x))$.
А это противоречит определению множества $A \cup \{a_\gamma / \gamma < \omega_\alpha\}$.
4) и 5) доказываем, как 3), предполагая противное, используем лемму 4, приходим к противоречию с определением
$A \cup \{a_\gamma / \gamma < \omega_\alpha\}$.

Будем обозначать через I_d – независимое множество в $\varphi_\beta(x,d)$, где $t(d;\emptyset) = \varrho(x)$. Пусть R – произвольный симметричный рефлексивный предикат на ω_α. Тогда
$$X = A \cup \{c_\gamma / \gamma < \omega_\alpha\} \cup \bigcup \{ I_d / d \in \bigcup_{i=1,2} \bigcup_{\gamma < \omega_\alpha} B_\gamma^{(i)} \cup \bigcup_{\gamma, \mu < \omega_\alpha} B_{\gamma,\mu} \},$$
где $\forall d\, [I_d$ независимо относительно $X \setminus I_d$ в $\varphi_\beta(x,d)]$ и $[|I_d| = \omega_\alpha \iff (\exists \gamma < \omega_\alpha)(\exists i < 2)(d \in B_\gamma^{(i)})$ или $(\exists \gamma < \omega_\alpha)(\exists \mu < \omega_\alpha)(d \in B_{\gamma,\mu} \wedge (\omega_\alpha, R) \models R(\gamma, \mu))]$.

Пусть M_R - простая модель относительно X.

Предложение 2.3. Для любого $c \in M_R$ такого, что $t(c;\emptyset) = \varrho(x)$ имеем: $\dim(\varphi_\beta(x,c), M_R) = \omega_\alpha \Leftrightarrow \exists a \in \bigcup_{i=1,2} \bigcup_{\gamma < \omega_\alpha} B_\gamma^{(i)} \cup \bigcup_{\gamma,\mu < \omega_\alpha, \models R(\gamma,\mu)} B_{\gamma,\mu}$, что $\varphi_\beta(x,a) =_{RK} \varphi_\beta(x,c)$ и ... $\exists \psi(x) \in \varrho(x)$, $\tau(\varrho(x)) = \tau(\psi(x))$ ... $\exists m < \omega$, $\varphi_\beta(x,c) \ldots_{RK} \langle \psi(x), \ldots \psi(x) \rangle$.

Доказательство. Пусть $c \in M_R$, $t(c;\varphi) = \varrho(x)$, $Y = A \cup \{a_\gamma / \gamma < \omega_\alpha\}$.
По теореме Шелаха ([7] , теорема 24) для $A \cup \{c\}$ существует $Y_0 \in P_\omega(Y)$, что Y_1 ($Y \setminus Y_0$) – неразличимая последовательность над $A \cup \{c\} \cup Y_0$, где $P_\omega(Y) = \{Z \subset Y / |Z| < \omega\}$.
Пусть M_1 – простая модель над $A \cup \{c_0\} \cup Y_0$. Можно считать Y_1 неразличимой последовательностью над M_1. Очевидно, $|M_1| = \omega$. Тогда M_2 – простая модель над $M_1 \cup Y_1$.
По лемме Лахлана ([1] , т.9) $\dim(\varphi(x,d), M_2) = \omega$ или $\dim(\varphi(x,d), M_2) = \omega_\alpha$ для любой формулы $\varphi(x,d) \in F_1(M_2)$, $d(\varphi) = 1$.
Как следует из доказательства леммы А.Лахлана [1] , если

11-3931

$din(\Phi(x,\bar d),M_2) = \omega_\alpha$, то существует формула $\psi(x)$ и существует $m < \omega$, что

$$<\Phi(x,\bar d)> \leq_{RK} <\overbrace{\psi(x),\ldots,\psi(x)}^{m\ раз}>.$$

Пронумеруем ординалами, мен[illegible]ми ω_α, все a из $\bigcup_{i=1,2}\bigcup_{\gamma<\omega_\alpha} B_\gamma^{(i)}\ \bigcup_{\gamma,\mu<\omega_\alpha,\ldots} B_{\gamma,\mu}$ такие, что $\varphi_\beta(x,a_1) \neq_{RK} \varphi_\beta(x,a_2)$ для всех a_1, a_2 из занумерованного множества. Будем строить модель M_3 по шагам, добавляя на шагах последов[illegible]лях ω_α независимых элементов в формуле $\varphi_\beta(x,b_{\gamma+1})$ и беря простую модель над полученным множеством. На предельных шагах берем объединение моделей. Очевидно, $dim(\varphi_\beta(x,c),M_3) = \omega_\alpha$. Тогда

$$\varphi_\beta(x,c) \leq_{RK} <\overbrace{\psi(x),\ldots,\psi(x)}^{m\ раз}>$$

или существует $b_{\gamma+1}$, что $\varphi_\beta(x,c)$ [illegible]$_{RK}$ $\varphi_\beta(x,b_{\gamma+1})$. В противном случае $dim(\varphi_\beta(x,c),M_3) = \omega$. Зафиксировав Y_1, можно вложить M_R в M_3, тогда

$$dim(\varphi_\beta(x,c),M_R) = dim(\varphi_\beta(x,c),M_3)$$

Рассмотрим произвольное подмножество $\{d_\gamma / \gamma < \omega_\alpha\}$ множества M_R со свойствами $1^0 - 5^0$.

1^0. $A \cup \{d_\gamma / \gamma < \omega_\alpha\}$ –независимое множество в $q(x)$.

2^0. $dim(\varphi_\beta(x,d_\gamma),M_R) = \omega$ для $\gamma < \omega_\alpha$.

3^0. Пусть $C_\gamma^{(i)} = \{a / \forall X \subsetneq \{c_1,\ldots,c_k,b_i,d_\gamma\}$, $t(a;X) = h_{\emptyset}(q(x))$, $a \in cl(\bar c\ [illegible], d_\gamma)\}$.

Тогда $dim(\varphi_\beta(x,a),M_R) = \omega_\alpha$ $(\forall m < \omega)\neg(\varphi_\beta(x,a) \leq_{RK} <\overbrace{\psi(x),\ldots}^{m\ раз}>$ для каждых $\gamma < \omega_\alpha$; $i = 1,2$, $a \in C_\gamma^{(i)}$.

4^0. Пусть $C_{\gamma,\mu} = cl_q(\bar c, d_\gamma, d_\mu)$.

Тогда
$$dim(\varphi_\beta(x,a),M_R) = dim(\varphi_\beta(x,b),M_R)$$

для каждых различных $\gamma,\mu < \omega_\alpha$ и каждых $a,b \in C_{\gamma,\mu}$

5^0. M_R проста над независимыми множествами в формулах $\varphi_\beta(x,a)$, где $a \in \{d_\gamma / \gamma < \omega_\alpha\} \cup \bigcup_{i=1,2}\bigcup_{\gamma<\omega_\alpha} C_\gamma^{(i)} \cup \bigcup_{\mu<\omega_\alpha}\bigcup_{\gamma<\omega_\alpha} C_{\gamma,\mu}$.

<u>Предложение 2.4.</u> Пусть $A \cup \{d_\gamma/\gamma<\omega_\alpha\} \subset M_R$ – подмножество, удовлетворяющее 1^0–5^0. Тогда выполняется:

a) $(\forall \gamma_0 < \omega_\alpha)(\exists \gamma_1 < \omega_\alpha)[(\forall d \in C_{\gamma_0})(\exists a \in B_{\gamma_1})(\varphi_\beta(x,a) =_{RK} \varphi_\beta(x,d))\ \&$ $(\forall d' \in C_{\gamma_0})(\varphi_\beta(x,d') \neq_{RK} \varphi_\beta(x,d) \Rightarrow (\exists a' \in B_{\gamma_1})(\varphi_\beta(x,a') =_{RK} \varphi_\beta(x,d')))]$.

c) $(\forall \gamma_0 < \omega_\alpha)(\exists \gamma_1 < \omega_\alpha)[(\forall a \in B_{\gamma_0})(\exists d \in C_{\gamma_1})(\varphi_\beta(x,a) =_{RK}$ $\varphi_\beta(x,d))\ \&\ (\forall a' \in B_{\gamma_0})(\varphi_\beta(x,a') \neq_{RK} \varphi_\beta(x,a) \Longrightarrow (\exists d' \in C_{\gamma_1})$

$(\psi_\beta(x,a') =_{RK} \varphi_\beta(x,d')))]$.

в) $(\forall\gamma_1,\forall\gamma_2 < \omega_\alpha)\ (\exists\gamma_3,\gamma_4 < \omega_\alpha)\,[\,(\forall d \in C_{\gamma_1,\gamma_2})\,(\exists a \in B_{\gamma_3,\gamma_4})$
$((\varphi_\beta(x,a) =_{RK} \varphi_\beta(x,d))\ \&\ (\forall d' \in C_{\gamma_1,\gamma_2})\,((\varphi_\beta(x,d') \neq_{RK} \varphi_\beta(x,d))$
$\Rightarrow (\exists a' \in B_{\gamma_3,\gamma_4})\,(\varphi_\beta(x,a') =_{RK} \varphi_\beta(x,d'))))]$.

г) $(\forall\gamma_1,\gamma_2 < \omega_\alpha)\,(\exists\gamma_3,\gamma_4 < \omega_\alpha)\,[\,(\forall a \in B_{\gamma_1,\gamma_2})\,(\exists d \in C_{\gamma_3,\gamma_4})$
$((\varphi_\beta(x,a) =_{RK} \varphi_\beta(x,d))\ \&\ (\forall d' \in C_{\gamma_1,\gamma_2})\,((\varphi_\beta(x,d') \neq_{RK} \varphi_\beta(x,d))$
$\Rightarrow (\exists a' \in B_{\gamma_3,\gamma_4})\,(\varphi_\beta(x,a') =_{RK} \varphi_\beta(x,d'))))]$.

<u>Доказательство</u>. а) Пусть $c \in C^{(1)}_{\gamma_0}$, тогда по предложению 2.3. выполняется:

1) $(\exists\gamma_1,\gamma_2 < \omega_\alpha)\,(\exists a \in B_{\gamma_1,\gamma_2})\,(\varphi_\beta(x,a) =_{RK} \varphi_\beta(x,c))$.

2) $(\exists\gamma_3 < \omega_\alpha)(\exists a \in B^{(2)}_{\gamma_3})\,(\varphi_\beta(x,a) =_{RK} \varphi_\beta(x,c))$.

3) $(\exists\gamma_4 < \omega_\alpha)(\exists a \in B^{(1)}_{\gamma_4})\,(\varphi_\beta(x,a) =_{RK} \varphi_\beta(x,c))$.

Пусть $\mathcal{D}_{\gamma_0} = \{\langle\mu_1,\mu_2\rangle / (\mu_i < \omega_\alpha)\,(\exists c' \in C^{(1)}_{\gamma_0})(\exists a' \in B_{\mu_1,\mu_2})$
$(\varphi_\beta(x,c') =_{RK} \varphi_\beta(x,a'))\}$.

$G_{\gamma_0} = \{\mu < \omega_\alpha \,/\, \exists c' \in C^{(1)}_{\gamma_0},\ \exists a' \in B^{(2)}_\mu\,(\varphi_\beta(x,c') =_{RK} \varphi_\beta(x,a'))\}$.

$K_{\gamma_0} = \{\mu < \omega_\alpha \,/\, \exists c' \in C^{(1)}_{\gamma_0},\ \exists a' \in B^{(1)}_\mu\,(\varphi_\beta(x,c') =_{RK} \varphi_\beta(x,a'))\}$.

Из предложения 2.3. следует, что одно из множеств $\mathcal{D}_{\gamma_0}$, G_{γ_0}, K_{γ_0} непусто, $|\mathcal{D}_{\gamma_0}| \leq \omega$, $|G_{\gamma_0}| \leq \omega$, $|K_{\gamma_0}| \leq \omega$ так как $|C^{(1)}_{\gamma_0}| \leq \omega$. Если $|K_{\gamma_0}| = \omega$, то при выделении в язык констант $A \cup \{d_{\gamma_0}\}$, бесконечное неразличимое множество $\{a_\mu / \mu \in K_{\gamma_0}\}$ разбивается на бесконечное число конечных формульных множеств, что противоречит теореме Шелаха ([7]). Аналогично можно показать конечность $\mathcal{D}_{\gamma_0}$, G_{γ_0}.

Пусть $|K_{\gamma_0}| \geq 2$. Тогда существуют $c, c' \in C^{(1)}_{\gamma_0}$,
$(\exists\mu_0,\mu_1 < \omega_\alpha)\,(\exists a \in B^{(1)}_{\mu_0})\,(\exists a' \in B^{(1)}_{\mu_1})\,(\varphi_\beta(x,a) =_{RK} \varphi_\beta(x,c)$,
$\varphi_\beta(x,a') =_{RK} \varphi_\beta(x,c'))$.

$[c,c' \in C^{(1)}_{\gamma_0} \Leftrightarrow$ существует формула $\psi_1(x,y,\bar c,b_1)$ и $n_1,n_2 < \omega$, что $\models \forall x\,\exists^{\leq n_1} y\,\psi_1(x,y,\bar c,b_1) \wedge \forall y\,\exists^{\leq n_2} x\,\psi_1(x,y,\bar c,b_1)]$.

$[a \in B_{\mu_0} \Leftrightarrow$ существует формула $\psi_2(x,a_{\mu_0},\bar c,b_1)$, что
$\models \exists^{\leq n_3} x\ \psi_2(x,\bar c,b_1,a_{\mu_0}) \wedge \psi_2(a,c_{\mu_0},\bar c,b_1)]$.

$[a' \in B_{\mu_1} \Leftrightarrow$ существует формула $\psi_3(x,a_{\mu_1},\bar c,b_1)$, что
$\models \exists^{\leq n_4} x\ \psi_3(x,a_{\mu_1},\bar c,b_1) \wedge \psi_3(a',a_{\mu_1},\bar c,b_1)]$.

$[\varphi_\beta(x,a) =_{RK} \varphi_\beta(x,c) \Leftrightarrow$ существует $\Phi_1(x,y) \in \rho_0(x,y), \models \neg\Phi_1(a,c)]$.
$[\varphi_\beta(x,a') =_{RK} \varphi_\beta(x,c') \Leftrightarrow$ существует $\Phi_2(x,y) \in \rho_0(x,y), \models \neg\Phi_2(a',c')]$.

Рассмотрим следующую формулу: $\theta_1(x,a_{\mu_0},\bar c,b_1) = \exists u, v, z, y$
$[\psi_3(y,a_{\mu_1},x,\bar c) \wedge \neg\Phi_2(y,z) \wedge \psi_1(u,z,\bar c,b_1) \wedge \neg\Phi_1(u,v) \wedge \psi_2(v,a_{\mu_0},\bar c,b_1)]$.

Ясно, что $M_R \models \theta_1(\quad ,a_{\mu_0},\bar c,b_1)$. Среди элементов бесконечного множества $\langle a_\gamma / \gamma < \omega_\alpha \rangle$ только конечное число элементов удовлетворяет этой формуле, это следует из того, что $r(x,\theta_2(x,a_{\mu_0},\bar c,b_1)) < r(\rho(x))$. Но это противоречит определению $A \cup \{a_\gamma / \gamma < \omega_\alpha\}$.
Таким образом, если $K_{\gamma_0} \neq \emptyset$, то $|K_\gamma| = 1$.
Докажем, что

1) если $K_{\gamma_0} \neq \emptyset$, то $\mathcal{D}_{\gamma_0} \neq \emptyset$, $G_{\gamma_0} = \emptyset$, $\mathcal{D}_{\gamma_0} = \emptyset$.
Предположим противное: пусть $K_{\gamma_0} \neq \emptyset$, $G_{\gamma_0} \neq \emptyset$. Тогда существуют $c, c' \in C^{(1)}_{\gamma_0}$, $\mu_0, \mu_1, \mu_2 < \omega_\alpha$, $a \in B^{(1)}_{\mu_0}$, $a' \in B_{\mu_1,\mu_2}$ такие, что $[\varphi_\beta(x,a) =_{RK} \varphi_\beta(x,c)$, $\varphi_\beta(x,a') =_{RK} \varphi_\beta(x,c')]$.
$[a' \in B_{\mu_1,\mu_2} \Leftrightarrow$ существует формула $\psi_4(x,a_{\mu_1},a_{\mu_2},\bar c)$
$\models \exists^{\leq s} x\, \psi_4(x,a_{\mu_1},a_{\mu_2},\bar c)]$.

Рассмотрим следующую формулу: $\theta_2(x,a_{\mu_0},a_{\mu_1},b_1,\bar c) = \exists v, y, z, u$
$[\psi_4(y,a_{\mu_1},x,\bar c) \wedge \neg\Phi_2(y,z) \wedge \psi_1(u,z,\bar c,b_1) \wedge \Phi(u,v) \wedge \psi_2(v,a_{\mu_0},\bar c,b_1)]$.

Ясно, что $M_R \models (\quad \mu_1, a_{\mu_0}, a_{\mu_1}, b_1, \bar c)$. Среди элементов бесконечного неразличимого множества $\langle a_\gamma / \gamma < \omega_\alpha \rangle$ только конечное число элементов удовлетворяет этой формуле. Тогда по лемме Лахлана [1] $r(\theta_2(x,a_{\mu_0},a_{\mu_1},b_1,\bar c)) < r(\rho(x))$, что противоречит определению $A \cup \{a_\gamma / \gamma < \omega_\alpha\}$.
Аналогично можно показать: если $G_{\gamma_0} \neq \emptyset$, то $\mathcal{D}_{\gamma_0} = K_{\gamma_0} = \emptyset$ и если $\mathcal{D}^{(2)}_{\gamma_0} \neq \emptyset$, то $|\mathcal{D}^{(2)}_{\gamma_0}| = 1$, $K^{(1)}_{\gamma_0} = G^{(1)}_{\gamma_0} = \emptyset$.
Покажем, что $\mathcal{D}^{(1)}_{\gamma_0} = \emptyset$.
Предположим противное, т.е. $\mathcal{D}^{(1)}_{\gamma_0} = \{\mu_2, \mu_1\}$, тогда возможен один из трех случаев

I. $\mathcal{D}^{(2)}_{\gamma_0} \neq \emptyset$;

II. $G^{(2)}_{\gamma_0} \neq \emptyset$;

III. $K^{(2)}_{\gamma_0} \neq \emptyset$.

I. $\mathcal{D}^{(1)}_{\gamma_0} = \{\{\mu_1,\mu_2\}\}$, $\mathcal{D}^{(2)}_{\gamma_0} = \{\{\mu_3,\mu_4\}\}$. Пусть $(c \in C^{(1)}_{\gamma_0})(c' \in C^{(2)}_{\gamma_0})$ $(a \in B_{\mu_1,\mu_2})(a' \in B_{\mu_3,\mu_4})$ такой, что $\varphi_\beta(x,c) =_{RK} \varphi_\beta(x,a)$, $\varphi_\beta(x,c') =_{RK} \varphi_\beta(x,a')$.

Тогда существуют формулы $\Phi_1(x,y), \Phi_2(x,y) \in \varrho_0(x,y)$, $\psi_1(x, d_{\gamma_0}, b_1)$,
$\psi_2(x, a_{\mu_1}, a_{\mu_2})$, $\psi_3(x, d_{\gamma_0}, b_2)$, $\psi_4(x, a_{\mu_3}, a_{\mu_4})$, что

$$\models \neg\Phi_1(c,a) \wedge \neg\Phi_2(c',a') \wedge \psi_1(c, d_{\gamma_0}, b_1) \wedge \psi_2(a, a_{\mu_1}, a_{\mu_2}) \wedge$$
$$\psi_3(c', d_{\gamma_0}, b_2) \wedge \psi_4(a', a_{\mu_3}, a_{\mu_4}), \quad \tau(\psi_1(x, d_{\gamma_0}, b_1)) = 0,$$
$$\tau(\psi_2(x, a_{\mu_1}, a_{\mu_2})) = \tau(\psi_3(x, d_{\gamma_0}, b_2)) = \tau(\psi_4(x, a_{\mu_3}, a_{\mu_4})) = 0.$$

Рассмотрим следующую формулу $\Theta_3(x, b_1, a_{\mu_1}, a_{\mu_2}) = \exists t \exists v$
$[\psi_2(t, a_{\mu_1}, a_{\mu_2}) \wedge \neg\Phi_1(v,t) \wedge \psi_1(v, x, b_1)]$;
из $\tau(\Theta_3(x, b_1, a_{\mu_1}, a_{\mu_2})) < \tau(\varrho(x))$ следует, что существуют
$n, m < \omega$ и $\varphi(x) \in \varrho(x)$, для которых (*) $\models \forall y_1, \ldots, y_{n+1}$
$[(\bigwedge_{i=1}^{n+1}(\Theta_3(y_i, b_1, a_{\mu_1}, a_{\mu_2}) \wedge \varphi(y_i)) \wedge \bigwedge_{1 \le i < j \le n+1} \varphi_m(y_i, y_j)) \to \bigvee_{i=1}^{n} y_{n+1} = y_i]$.
В противном случае в реализации формулы Θ_3 и в реализации типа $\varrho(x)$ можно выбрать бесконечное число элементов a_i, что $\varphi_\beta(x, a_i)$ попарно RK-независимы. Тогда ввиду минимальности ранга $\varrho(x)$, следует

$$\tau(\Theta_3(x)) < \tau(\varrho(x)), \quad \Theta_3(M) \cap \{d_\gamma / \gamma < \omega_\alpha\} = \{d_{\gamma_0}\}$$

и из леммы I.4. (Лахлан [I]), следует $\tau(\Theta_3) < \tau(\varrho(x))$.
Таким образом, истинно (*).

Заметим, что $\tau(c'; \{b_1, b_2, a_{\mu_1}, a_{\mu_2}, a_{\mu_3}\}) = \tau(d_{\gamma_0}; b_1, \ldots, a_{\mu_3})$ ввиду алгебраичности c' и d_{γ_0} относительно $\{b_1, b_2, a_{\mu_1}, a_{\mu_2}\}$.
Тогда $\tau(a'; \{b_1, b_2, a_{\mu_1}, a_{\mu_2}, a_{\mu_3}\}) < \tau(a'; \emptyset)$, это следует из того, что $\tau(d_{\gamma_0}; \{b_1, b_2, a_{\mu_1}, a_{\mu_2}, a_{\mu_3}\}) < \tau(\varrho(x))$. Но ввиду того, что $\tau(a'; \{b_1, b_2, a_{\mu_1}, a_{\mu_2}, a_{\mu_3}\}) = \tau(a_{\mu_4}; \{b_1, \ldots, a_{\mu_3}\})$,
$\tau(a_{\mu_4}; b_1, \ldots, a_{\mu_3}) < \tau(\varrho(x))$. Но это противоречит независимости $\{b_1, b_2, a_{\mu_1}, a_{\mu_2}, a_{\mu_3}, a_{\mu_4}\}$ в типе $\varrho(x)$.

$$\tau(a'; \emptyset) = \tau(a'; \{a_{\mu_3}\}) = \tau(\varrho(x)).$$

Если бы $\tau(a'; \{a_{\mu_3}, b_1, b_2, a_{\mu_1}, a_{\mu_2}\}) = \tau(\varrho(x))$, тогда следовало бы, что $\exists \Theta_3(x) \in t(a'; a_{\mu_3}, b_1, b_2, a_{\mu_1}, a_{\mu_2})$, $\models \Theta_3(a')$, существует бесконечное множество $\{e_i / i < \omega\}$ неразличимых в типе $t(a'; a_{\mu_3}, b_1, b_2, a_{\mu_1}, a_{\mu_2})$, $(\forall i < \omega)(\forall j < \omega)$, $\varphi_\beta(x, e_i) \ne_{RK} \varphi_\beta(x, e_j)$.
Тогда нашлось бы бесконечное число $\{g_i / i < \omega\}$, что

$$\varphi_\beta(x, e_i) =_{RK} \varphi_\beta(x, g_i), \ \models \Theta_3(g_i) \ \& \ \neg\Phi_2(e_i, g_i).$$

Но это означает, что $\tau(c'; b_1, b_2, a_{\mu_1}, a_{\mu_2}, a_{\mu_3}) = \tau(\varrho(x))$.
Ввиду $\tau(c'; b_1, \ldots, a_{\mu_3}) = \tau(d_{\gamma_0}; b_1, b_2, a_{\mu_1}, a_{\mu_2}, a_{\mu_3})$.

Следовательно, если $\mathfrak{D}_{\gamma_0}^{(2)} \ne \emptyset$ то случай I не может быть. Можно показать, что случаи II, III, тоже приводят к противоречию. Следовательно $\mathfrak{D}_{\gamma_0} = \emptyset$. Аналогично можно показать, что $G_{\gamma_0} = \varnothing$. Отсюда следует утверждение а). Аналогично рассуждая, можно доказать б), в), г) предложения 2.4.

Приступим к доказательству теоремы.

Из предложения 2.4. следует, что любая последовательность $A \cup \{d_\gamma | \gamma < \omega_\alpha\}$, удовлетворяющая $I^0 - 5^0$, определяет в M_R симметричный рефлексивный предикат R_1 на ω_α изоморфный R. Так как в M_R можно ω_α различными способами взять A, то для любого R с каждой моделью M_R можно сопоставить $\leq \omega_\alpha$ неизоморфных симметричных рефлексивных предикатов. Введем на неизоморфных симметричных предикатах отношение $\approx$ следующим образом:

$$R_1 \approx R_2 \Longleftrightarrow M_{R_1} \cong M_{R_2}.$$

Так как каждый класс содержит $\leq \omega_\alpha$ элементов, следовательно, классов эквивалентностей по $\approx$, будет столько, сколько неизоморфных предикатов, а их по лемме 2.3 2^{ω_α}. Так как каждому классу можно поставить в соответствие одну модель специального вида, и различным классам разные модели, то число неизоморфных моделей мощности ω_α будет 2^{ω_α}.

Литература

1. Lachlan A., Spectr of ω-stable theories, Z.Math. Log.Grund.Math., 24, N 5(1978).

2. Байжанов Б., Тотально трансцендентные теории ранга 2, имеющие размерность, Тезисы докладов V Всесоюзной конференции по математической логике, Новосибирск, 1979, II.

3. Lachlan A., Dimension and totally transcendenthal theories rank 2, degree 1, Lect.Notes, 1976, N 537, 153-183.

4. Lachlan A., Two conjectures on the stability of ω-categorical theories, Fund.Math., 81(1974), 133-145.

5. Белеградек С., О почти категоричных теориях, Сиб.мат.журнал, т.14, № 2, 1973, 277-288.

6. Байжанов Б., Омаров Б., Об ограничении теории на формулу, В сб."Теория нерегулярных кривых в различных геометрических пространствах", Алма-Ата, 1979, 9-11.

7. Shelah S., Classification theorem and number of nonisomorphic models, North-Holland, 1978.

8. Lascar D., Types definisables et product de types, C.R.Acad.Sci., 276(1973), 1253-1256.