ness in Logic of Programs, Proc.9th Ann. ACM Symp.on Theory of Computing, Boulder, 1977, 261-268.
6. Pratt V.R., Applications of Modal Logics to Programming, MIT Lab.Comput.Sci.Techn pt., TM-116 1978, 2-25.

7. Banachowski L., Kreczmar A., An Introduction to Algorithmic Logic. Metamathematical investigations in the theory of programs, Banach Center Publications, 2, 1977.

УДК 519.49 Б.С.БАЙЖАНОВ

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ТОТАЛЬНО ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ТЕОРИЙ

Пусть T – полная теория языка $\mathcal{L}$. Функцией спектра теории назовем следующую функцию $I(T): Or \longrightarrow Card$

$$\forall\alpha \in Or,\ I(T,\alpha) = |\{[M] / M \models T,\ |M| = \omega_\alpha\}|,$$

где Or, $Card$ – классы ординалов и кардиналов, $|M|$ –мощность системы M, $[M]$ –класс всех систем, изоморфных системе M. А.Лахлан [1] исследовал тотально трансцендентные теории. Им была доказана следующая теорема A:

Пусть T тотально трансцендентная теория счетного языка $\mathcal{L}$. Тогда для функции спектра истинна одна из следующих возможностей:

(1) $I(T,0) \in \{1,\omega\}$; $\forall\alpha \geq 1$, $I(T,\alpha) = 1$;

(2) $\forall\alpha \geq 0$, $I(T,\alpha) \leq max(|\alpha|,\omega)$, $\forall\alpha \geq \omega$, $I(T,\alpha) = |\alpha|$;

(3) $\forall\alpha \geq 1$, $I(T,\alpha) = |\alpha+1|^{\omega}$;

(4) $\forall\alpha \geq 1$, $I(T,\alpha) \geq \omega^{|\alpha|}$.

В обсуждении случая (4) Лахлан высказал гипотезу

Существуют тотально трансцендентные теории только со следующими функциями спектра:

a) $I(T,\alpha) = \omega^{|\alpha|}$,

б) $I(T,\alpha) = 2^{\omega_1}$,

в) $I(T,\alpha) = max(2^{\omega}, \omega^{|\alpha|})$.

Т.Мустафиным на У Всесоюзной конференции по математической логике была сформулирована следующая гипотеза:

Пусть T полная счетная не ω_1 – категоричная теория. Если любая формула теории T 1-кардинальна, то существует такой λ – несчетный кардинал, что

$$\forall\alpha \geq 1,\ I(T,\alpha) \leq \lambda.$$

Через $T_\forall$ обозначим совокупность всех универсальных предложений, выводимых з T. Назовем $T_\forall$ универсалом теории T.

Локально совместное с T множество бескванторных формул с одной свободной переменной x называется L_A – типом. Теория T называется $L_A-(\omega)$ – стабильной, если при обогащении языка счетным множеством предметных констант, мощность множества L_A -типов не увеличивается. Спрашивается, существуют ли $L_A-(\omega)$ – стабильные, не тотально трансцендентные теории? (Форрест [2], p.II).

Теоремы I–3 отвечают на вопросы Лахлана, Мустафина, Форреста.

Для каждых $\lambda \in Card, \beta \in Or$ функция $\delta(\lambda,\beta)$ определяется следующим образом: $\delta(\lambda,0) = \lambda$; если β –предельный, то $\delta(\lambda,\beta) = \bigvee_{\gamma<\beta} \delta(\lambda,\gamma)$; если $\beta = \gamma+1$, то $\delta(\lambda,\beta)=2^{\delta(\lambda,\gamma)}$.

<u>Теорема I.</u> Для любого счетного ординала $\beta < \omega_1$ существуют тотально трансцендентные теории T со следующими функциями спектра:

а) $I(T,\alpha) = min(2^{\omega_1}, \delta(|\alpha+1|,\beta))$,

б) $I(T,\alpha) = min(2^{\omega_1}, \delta(|\alpha+1|^{\omega},\beta))$.

<u>Доказательство</u>. Нам понадобятся две леммы.

<u>Лемма I.</u> Существует полная тотально трансцендентная теория со следующими функциями спектра, которые для каждого ординала $\alpha > 1$ определяются равенствами:

а) $I(T,\alpha) = |\alpha+1|$,

б) $I(T,\alpha) = |\alpha+1|^{\omega}$.

<u>Доказательство.</u> Язык $\mathcal{L}$ содержит один предикатный символ $E(x,y)$. Аксиомы утверждают, что I) $E(x,y)$ –эквивалентность, 2) $E(x,y)$ имеет ровно два бесконечных класса.

5–931

Очевидно, что эта теория полна и удовлетворяет а).

б). Язык $\mathcal{L}$ содержит счетное число одноместных предикатных символов $\langle P_1, P_2, \dots, P_n, \dots \rangle_{n<\omega}$. Аксиомы теории имеют вид:

$$1)_{m,n<\omega} \quad \exists^{\geq n} x \quad P_m(x),$$

$$2)_{n\neq m<\omega} \quad \forall x \ \neg[P_n(x) \wedge P_m(x)].$$

Очевидно, что эта теория полна и удовлетворяет б).

Лемма 2. а). Пусть T полная теория языка $\mathcal{L}, \bar{I}(T,\alpha)$ – функция спектра. Тогда существует полная теория T^{ε} языка $\mathcal{L}_{\varepsilon}$, что $I(T^{\varepsilon}, \alpha) = \min(2^{\omega_\alpha}; |\alpha+\omega|^{\vartheta})$, где $\vartheta = \bigcup_{\beta\leq\alpha} I(T,\beta)$.

б). Если существуют теории $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ со следующими функциями спектра:

$$\forall n<\omega \quad \bar{I}(T_n, \alpha) = \min(2^{\omega_\alpha}, \delta(\lambda, \beta_n)), \beta_n < \beta_{n+1}, \bigcup_{n<\omega} \beta_n = \beta,$$

то существует полная теория T^{β}, что

$$\bar{I}(T^{\beta}, \alpha) = \min(2^{\omega_\alpha}, \delta(\lambda, \beta)).$$

в). Если $T, T_n (n<\omega)$ λ-стабильны, то $T^{\beta}, T^{\varepsilon}$ тоже λ-стабильны.

Доказательство. а). Определим M^{ε} и теорию $T^{\varepsilon} = Th(M^{\varepsilon})$.

Рассмотрим счетное семейство M_n, $n<\omega$, что

$$(1)_{n<\omega} \quad M_n \models T,$$

$$(2)_{m\neq n} \quad M_n \cap M_m = \emptyset, \quad M_n \cong M.$$

Основное множество модели M^{ε} пусть совпадает с объединением основных множеств M_n, $n \in \omega$, а $\mathcal{L}_{\varepsilon} = \mathcal{L}' \cup \{\varepsilon(x,y)\} \cup \{g_c(x) \mid c$ – константа языка $\mathcal{L}\}$, где $\mathcal{L}'$ – множество всех предикатных и функциональных символов языка $\mathcal{L}$. Определим на модели M^{ε} истинность атомных формул языка $\mathcal{L}_{\varepsilon}$ следующим образом:

$$1) \quad \forall a, b \in M^{\varepsilon} [M^{\varepsilon} \models \varepsilon(a,b) \Longleftrightarrow \exists n<\omega,\ a, b \in M_n].$$

2) для любого предикатного символа $R(x_1, \dots, x_m)$ (функционального символа $f(x_1, \dots, x_{m-1})$), для любых $a_1, a_2, \dots, a_m \in M^{\varepsilon}$

$$[M^{\varepsilon} \models R(a_1, \dots, a_m) \Longleftrightarrow \exists n<\omega\ (a_1, \dots, a_m \in M_n \wedge M_n \models R(a_1, \dots, a_m))].$$

$$([M^{\varepsilon} \models f(a_1, \dots, a_{m-1}) = a_m \Longleftrightarrow \exists n<\omega\ (a_1, \dots, a_m \in M_n \wedge M_n \models f(a_1, \dots, a_{m-1}) = a_m]),$$

3) $M^{\varepsilon} \models \forall x \forall y [\varepsilon (x, y) \Longleftrightarrow g_c(x) = g_c(y)]$;

4) $n < \omega$ пусть конс[illegible]нта c языка $\mathcal{L}$ инт[illegible]рпретируется в модели M_n [illegible]лементом $d \in M_n$, тогда $M^{\varepsilon} \models \forall x$

$$[\varepsilon (x, d) \longleftrightarrow g_c(x) = d].$$

Непосредственно из определения следует, что для лю[illegible]го языка $\mathcal{L}$, для любых моделей M, $\mathcal{N}$

$$[M \equiv_{\mathcal{L}} \mathcal{N} \Longleftrightarrow M^{\varepsilon} \equiv_{\mathcal{L}_{\varepsilon}} \mathcal{N}^{\varepsilon}].$$

Любая модель $\mathcal{N}$ мощности ω_{α} теории T^{ε} состоит из бесконечного числа классов эквивалентнос[illegible] $\varepsilon (x, y)$. [illegible]ассмотрим один класс эквивалентности и ограничимся языком $\mathcal{L}'$. Примем $c = g_c(x)$ в языке $\mathcal{L}$. Класс э[illegible]вивалентности $[c]$ с о[illegible]ределенными на нем предикатами и операциями элементарно эквивалентен модели M. Для α [illegible]усть $\{B_{\gamma} / \gamma \leq \alpha\}$ – такое семейство вполне упорядоченных [illegible]ножеств, что $B_{\gamma_1} \cap B_{\gamma_2} = \emptyset$, $|B_{\gamma}| = I(T, \gamma)$ для различных γ_1 и γ_2, меньших α. Пронумеруем все модели теории T мощности ω_{γ}, $\gamma \leq \alpha$ индексами из B_{γ}. Тогда можно поставить в соответствие каждой модели $\mathcal{N}$ теории T^{ε} следующую функцию:

$$g_{\mathcal{N}} : \bigcup_{\gamma \leq \alpha} B_{\gamma} \longrightarrow \omega \cup \{\omega_i : i \leq \alpha\}.$$

Для любого $j \in \bigcup_{\gamma \leq \alpha} B_{\gamma}$ пусть $g(j)$ – число таких классо[illegible] эквивалентности по $\varepsilon(x, y)$, которые изоморфны модели T с индексом j. Ясно, что изоморфизм [illegible]оделей теории T^{ε} согласован с изоморфизмом классов эквивалентности. Из то[illegible]о, что число разл[illegible]ных функций $g_{\mathcal{N}}$ равно

$$|\alpha + \omega|^{\lambda}, \text{ где } \lambda = \bigcup_{\gamma \leq \alpha} I(T, \gamma), \text{ следует}$$

$$\forall \alpha \geq 1, \quad I(T^{\varepsilon(x,y)}, \alpha) = \min(2^{\omega_{\alpha}}, |\alpha + \omega|^{\lambda}).$$

б). Определим язык $\mathcal{L}^{P}$ следующим образом:

$$\mathcal{L}^{P} = \bigcup_{n < \omega} \mathcal{L}_n \cup \{P_n / n < \omega\} \quad \text{где } \mathcal{L}_n \cap \mathcal{L}_m = \emptyset, \text{ для } m \neq n$$

Пусть $\{M_n / n < \omega\}$ – семейство моделей, что M_n языка $\mathcal{L}_n$,

$$M_n \models T_n, \quad M_n \cap M_m = \emptyset, \quad m \neq n < \omega.$$

За уни[illegible]ерсум модели M^{P} возьмем $M^{P} = \bigcup_{\omega} M_n$. Определим на модели M^{P} истинность атомных формул языка $\mathcal{L}^{P}$:

1, $n < \omega$ $\forall a \in M^{P} [M^{P} \models P_n(a) \Leftrightarrow a \in M_n]$

2) $n<\omega$ для любого предикатного символа $R(x_1,\dots,x_m)$ (функционального символа $f(x_1,\dots,x_{m-1})$ языка $\mathcal{L}_n$ и для любых $a_1,\dots,a_m\in M^P$

$$[M^P\models R(a_1,\dots,a_m)\iff a_1,\dots,a_m\in M_n,\ M_n\models R(a_1,\dots,a_m)]$$

$$([M^P\models f(a_1,\dots a_{m-1})=a_m\iff a_1,\dots,a_m\in M_n,\ M_n\models f(a_1,\dots,a_{m-1})=a_m]).$$

Как и в случае а) можно заметить, что если ограничиться элементами, удовлетворяющие предикату P_n и языком $\mathcal{L}_n$, то получится модель теории T_n. Тогда любая модель $\mathcal{N}$ теории T мощности ω_α характеризуется функцией

$$g_{\mathcal{N}}:\omega+1\longrightarrow\bigcup_{n<\omega}B_n\cup\omega\ \omega\{\omega_i:i\leq\alpha\}$$

такой, что для любого $n<\omega$, $g_{\mathcal{N}}(n)\in B_n$, $g_{\mathcal{N}}(\omega)\in\omega\cup\{\omega_i:i\leq\alpha\}$. Здесь $B_n\ (n<\omega)$ –множество индексов при фиксированной нумерации различных моделей теории T_n, мощности меньшей или равной ω_α, $g_{\mathcal{N}}(\omega)$ – мощность множества элементов $a\in\mathcal{N}$, что $\forall n<\omega\ \mathcal{N}\models\neg P_n(a)$. Таких различных функций $\delta(\lambda,\beta)$. Следовательно, $I(T,\alpha)=\min(2^{\omega_\alpha},\delta(\lambda,\beta))$.

в). Предположим, что T^{ε} не λ – стабильна. Тогда существует $A\subseteq\mathcal{N}\models T^{\varepsilon}$, что $|A|=\lambda$, $S_1(T(A))>\lambda$. Выберем максимальное подмножество $A\ \{a_1,\dots,a_\gamma,\dots\}_{\gamma<\lambda_0}\leq\lambda$, что $\forall\gamma\neq\beta<\lambda_0$, $\mathcal{N}\models\neg\varepsilon(a_\gamma,a_\beta)$. Пусть для любого

$$a\in A,\ U_{\varepsilon(x,a)}=\{p\in S_1(T(A))\ /\ \varepsilon(x,a)\in p\}.$$

Ясно, что $\forall\beta\neq\gamma<\lambda_0$, $U_{\varepsilon(x,a_\beta)}\cap U_{\varepsilon(x,a_\gamma)}=\emptyset$. Если для любого $\gamma<\lambda_0$, $|U_{\varepsilon(x,a_\gamma)}|\leq\lambda$, то $|S_1(T(A))|<\lambda$. Следовательно, существует

$$\gamma_0<\lambda_0,\quad\text{что}\quad|U_{\varepsilon(x,a_{\gamma_0})}|>\lambda.$$

Отсюда и из определения теории T^{ε} следует не λ – стабильность теории T. Аналогично показывается λ –стабильность T^P, при условии λ –стабильности T_n для любого $n<\omega$.

Приступим к доказательству теоремы.

Стартуя с функции леммы I, применяя лемму 2.а) для непредельных ординалов и 2 б) для предельных, получим искомые функции. Тотальная трансцендентность искомых теорий следует из леммы 2.в).

<u>Теорема 2.</u> Существует полная теория T счетного языка $\mathcal{L}$, что любая формула теории T 1–кардинальна, T –не ω_1 –категорична и имеет следующую функцию спектра: $\forall\alpha\geq 0$,

$$I(T,\alpha)=\min(2^{\omega_\alpha},|\alpha+\omega|^{2^\omega}).$$

Доказательство. Язык $\mathcal{L}$ теории T содержит два одноместных функциональных символа $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Аксиомы теории T:

1) $\forall x [f_1(x) \neq f_2(x)]$,

2) $\forall x \exists ! y [f_1(y) = x \vee f_2(y) = x]$,

3) $\forall x [\exists y [f_1(y) = x] \to \forall y [f_2(y) \neq x]]$,

4) $n < \omega$ пусть K_n – множество упорядоченных последовательностей из 0 и 1 длины n, тогда для любого

$\tau \in K_n [\forall x [f_{\tau(n)}(\dots f_{\tau(1)}(x))\dots) \neq x]$.

Непротиворечивость теории очевидна. Прежде, чем доказывать полноту, определим функцию $\tau_n(x)$, множества $A_n(x)$, $B_n(x)$. Пусть M произвольная модель теории T, тогда

$\tau_n : M \to K_n$, $\forall a \in M [\tau_n(a) = \tau \in K_n \Longleftrightarrow$

$M \models \exists x [f_{\tau(n)}(\dots(f_{\tau(1)}(x))\dots) = a]]$,

$A_n(a) = \{ b \in M / \exists m < n [f_{\tau(n)}(\dots(f_{\tau(n-m)}(b))\dots) = a]\}$,

$B_n(a) = \{ c \in M / \exists k < \omega \ \exists b \in A_n(a), b \in A_k(c)\}$.

Ясно, что $|A_n(a)| = n$, $|B_n(a)| = \omega$,

$[A_k(a) \subset A_n(a) \Longleftrightarrow k < n]$,

$C_n(a) = \{ c \in M / \exists k \leq n, \exists b \in A_k(a), b \in A_m(c)\}$.

Пусть M $\mathcal{N}$ модели теории T. Нам понадобится критерий элементарной эквивалентности двух моделей, доказанный впервые А.Д.Таймановым, в формулировке, данной Ершовым и Палютиным [3]. Индукцией по m, $m \leq n$, построим множества $G_m(\mathcal{L}, n)$ конечных изоморфизмов из M в $\mathcal{N}$.

Шаг 1.1. $G_1(\mathcal{L}, 1) = \{ g / g : \{a\} \to \{b\}, a \in M, b \in \mathcal{N}$,

$\tau_{2^n-1}(a) = \tau_{2^n-1}(b)\}$.

Шаг n.m. Пусть $G_{m-1}(\mathcal{L}, n)$ – определено. Тогда для любого $g \in G_{m-1}(\mathcal{L}, n)$, $\forall a \in M \setminus \mathrm{dom}\, g$ определим g_a, $g \subset g_a$, $g : \{a_1, \dots, a_{m-1}, a\} \to \mathcal{N}$, и для любого $b \in \mathcal{N} \setminus \mathrm{rang}\, g$ определим $g_b : M \to \{b_1, b_2, \dots, b_{m-1}, b\}$ – частичный изоморфизм, что $g \subset g_b$. Построенные g_a, g_b отнесем в $G_m(\mathcal{L}, n)$.

Рассмотрим два случая:

1) $\forall k (1 \leq k < m), \forall l < \omega, a \notin A_l(a_k)$.

2) $\exists k (1 \leq k < m) \ \exists l < \omega, a \in A_l(a_k)$.

В случае I) для значения функции g_a можно выбрать любой элемент из следующего множества:

$$\{c \in \omega \,/\, \tau_{2^{n-m+1}-1}(c) = \tau_{2^{n-m+1}-1}(a),\ \forall k < m$$
$$c \notin \mathcal{D}_{2^{n-m+1}}(a_k)\}.$$

где $\mathcal{D}_k(a) = \{\ \} \,/\, \exists\, l \leq k,\ a \in A_l(b)\} \cup L_n(a)$.

2). Распадается на два подслучая.

а) $\exists\, k_0 \ m,\ a \in \mathcal{D}_{2n-m}(a_{k_0})$.

б) $\forall k < m \quad a \notin \mathcal{D}_{2n-m}(a_{k_0})$.

2).а). Находим элемент, лежащий в $\mathcal{D}_{2n-m}(b_{k_0})$ и соответствующий a в $\mathcal{D}_{2n-m}(a_{k_0})$. Этот элемент и будет образом элемента a при частичном изоморфизме g.

2).б). В этом случае значение функции можно считать любой элемент из следующего множества

$$\{c \,/\, \tau_{2^{n-m+1}-1}(c) = \tau_{2^{n-m+1}-1}(a),\ \forall k < m,\ c \notin \mathcal{D}_{2^{n-m+1}}(a_k)\}.$$

Выбор образа для a обеспечивают аксиомы теории T. Аналогично определяется частичный конечный конечный изоморфизм g_b.

Пусть M произвольная модель теории T. Определим на M отношение E:

$$\forall a, b \in M\,[E(a,b) \Leftrightarrow \exists n, m < \omega\ \exists y\,[y \in A_n(a) \wedge y \in A_m(b)]]$$

Очевидно, E – отношение эквивалентности. Класс эквивалентности по E назовем блоком. Легко показать, что мощность любого блока счетна. Из аксиом теории следует, что блок есть модель теории. Любая модель теории T состоит из некоторого множества блоков. Отсюда следует модальная полнота теории T и I-кардинальность любой бесконечной формулы теории T.

$\eta \in 2^{\omega}$, ω – последовательность из 0 и I назовем характеристикой элемента $a \in M \models T$, если $\forall m < \omega\,[\tau = \tau_m(a),\ \tau_m = \eta(m)]$.

Для $\eta \in 2^{\omega}$, через $\eta \restriction n$ – обозначим ω – последовательность, полученную из η выкидыванием первых n –членов.

Пусть $\eta_1, \eta_2 \in 2^{\omega}$ $[\eta_1 \sim \eta_2 \Leftrightarrow \exists n, m < \omega,\ \eta_1 \restriction n = \eta_2 \restriction m]$.

Ясно, что характеристики элементов из одного блока изоморфны. Число неизоморфных характеристик определяет число неизоморфных блоков, и, следовательно, число неизоморфных счетных моделей. Таж… образом, число блоков равно 2^{ω}. Пронумеруем множество всех неизоморфных блоков ординалами меньшими, чем 2^{ω}. Тогда любо модели M мощности ω_{α} поставим в соответствие функцию $\psi_M : 2^{\omega} \to \omega \cup \{\omega_{\beta} : \beta \leq \alpha\}$, $g_M(i)$ – мощность множества блоков с номером i, лежащих в модели M. Любая модель $\mathcal{N}$ мощности ω_{α} с такой же функцией изоморфна модели M. Следовательно, число различных функций определяет число неизоморфных моделей мощности ω_{α}.

Следствие. Для любого очетного ординала $\beta < \omega$, существует полная теория T, что $\forall \alpha \geq 1$

$$I(T, \alpha) = \min(2^{\omega_{\alpha}}, \delta(2^{2^{\omega}}, \beta)).$$

Доказательство непосредственно следует из леммы 2 и теоремы 2.

Говорят, класс структур Σ обладает свойством амальгамированного вложения (AP), если $\forall A\, \forall B_1\, \forall B_2 \in \Sigma$ $[\exists f_1, f_2, f_i : A \to B_i,\ i=1,2 \Rightarrow \exists C \in \Sigma, \exists g_i,\ i=1,2\ g_i : B_i \to C$, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} & B_1 \arrow[dr, "g_1"] & \\ A \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] & & C \\ & B_2 \arrow[ur, "g_2"'] & \end{tikzcd}$$

Замечание. Если T_1 – универсал. То

$[T_1$ – не обладае $AP \iff \exists \Gamma(\bar{x}) \in S_{L_A}(T_1), \exists \Phi_1(\bar{x}, \bar{y})$, $\Phi_2(\bar{x}, \bar{z}) \in F$, что

$T_1 \cup \Gamma(\bar{x}) \cup \{\Phi_1(\bar{x}, \bar{y})\}$, $T_1 \cup \Gamma(\bar{x}) \cup \{\Phi_2(\bar{x}, \bar{z})\}$ – выполнимые множества формул, $T \cup \Gamma(\bar{x}) \cup \{\Phi_1(\bar{x}, \bar{y})\} \cup \{\Phi_2(\bar{x}, \bar{z})\}$ противоречиво$]$.

Это следует, очевидным образом из теоремы компактности.

Предложение I. Пусть T счетная полная теория. Тогда, если

1) T – модельно полна,
2) $T_{\forall}$ – обладает AP,

то из L_A-(ω)-стабильности T следует тотальная трансцендентность.

Доказательство. Пусть $A \subset B \in \Sigma_T = \{B \subset M \models T / B$-структура$\}$, $\Gamma(\bar{x})$ – полный L_A-(n)-тип над A. Тогда для любой формулы $\Phi(\bar{x}, \bar{y}) \in F_n(A)$ неверно, что $T \cup \Gamma(\bar{x}) \cup \{\exists \bar{y}\, \Phi(\bar{x}, \bar{y})\}$

$T \cup \Gamma(\bar{x}) \cup \{\forall \bar{y} \neg \Phi(\bar{x},\bar{y})\}$ – непротиворечивые множества формул.

Предположим противное. Тогда дополним типы $\Gamma(\bar{x}) \cup \{\exists \bar{y}\, \Phi(\bar{x},\bar{y})\}$, $\Gamma(\bar{x}) \cup \{\forall \bar{y} \neg \Phi(\bar{y},\bar{x})\}$ до полных n –типов над A . Реализуем эти типы, соответственно, в моделях M_1 и M_2 теории T . Пусть $\bar{c}_1, \bar{c}_2$, соответственно, реализации типов p_1 и p_2 . В моделях M_1 и M_2 есть подструктуры B_1 , B_2 , порожденные множествами $A \cup \operatorname{rang} \bar{c}_1$, $A \cup \operatorname{rang} \bar{c}_2$. Отображение $\tau : A \cup \operatorname{rang} \bar{c}_1 \to A \cup \operatorname{rang} \bar{c}_2$ тождественно на A, $\tau(\bar{c}_1)=\bar{c}_2$, τ можно продолжить до изоморфного вложения B_1 в B_2 . Из того, что $T_\forall$ обладает AP , следует существование C , g_1 , g_2 , что $g_1 : M_1 \to C$, $g_2 : M_2 \to C$, $g_1(B_1) = g_2(B_2)$. Для C существует $M_3 \supset C$, $M_3 \models T$. Пусть $g_1(M_1)=M_1'$, $g_2(M_2)=M_2'$. Из модельной полноты теории T следует, что $M_1' < M_3$, $M_2' < M_3$, $M_1' \models \exists \bar{y}\, \Phi(\bar{c},\bar{y})$, $M_2' \models \forall \bar{y} \neg\Phi(\bar{c},\bar{y})$, ввиду $M_1 \models \exists \bar{y}\, \Phi(\bar{c}_1,\bar{y})$, $M_2 \models \forall \bar{y} \neg \Phi(\bar{y}, \bar{c}_2)$, где $\bar{c} = g_1(\bar{c}_1) = g_2(\bar{c}_2)$. Из $M_1' < M_3$, $M_2' < M_3$ следует $M_3 \models \exists \bar{y}\, \Phi(\bar{c},\bar{y})$, $M_3 \models \forall \bar{y} \neg \Phi(\bar{c},\bar{y})$. Противоречие.

Независимо И.В.Львов и У.Уилер [4] заметили, что из результатов Блюм [5] следует

<u>Предложение 2.</u> Пусть T полная, счетная теория. Тогда условия 2) и I) эквивалентны.

I) а) T –модельно полна,

б) $T_\forall$ –обладает AP .

2) T допускает элиминацию кванторов.

<u>Теорема 3.</u> Существуют полные, $L_A-(\omega)$ –стабильные, не тотально трансцендентные теории T , T' , что

I) T –модельно полна,

2) $T'_\forall$ –обладает AP .

<u>Доказательство.</u> Опишем теорию T . Язык T содержит один трехместный предикатный символ $Q(x,y,z)$ и один одноместный предикатный символ $P(x)$.

Аксиомы теории T .

(I) $\forall x y z\, (Q(x,y,z) \to P(x) \wedge P(y) \wedge \neg P(z))$,

(2) $\forall x y z_1 z_2\, [Q(x,y,z_1) \wedge z_1 \neq z_2 \to \neg Q(x,y,z_2)]$,

(3) $\forall x y z t\, [Q(x,y,z) \to \neg Q(y,x,t)]$,

(4) $\forall x_1 x_2 x_3 z_1 z_2 z_3\, [Q(x_1,x_2,z_1) \wedge Q(x_2,x_3,z_2) \to Q(x_1,x_3,z_3)]$,

(5) $\forall x_1 x_2 z_1 \exists x_3 z_2 z_3 [Q(x_1, x_2, z_1) \to (Q(x_1, x_3, z_2) \wedge Q(x_2, x_3, z_3))]$.

Из ω -категоричности теории и теоремы Вота [5] следует, что полна T. Из $\forall\exists$ аксиоматизируемости, ω -категоричности и теоремы Линдстрёма [3] следует модельная полнота T. T не является тотально трансцендентной из-за того, что на P формульно определяется порядок и по теореме Шелаха [6] T не стабильна. Из того, что порядок определяется с помощью квантора существования следует, что T $\vdash_A$- (ω) -стабильна.
Опишем теорию T'. Язык $\mathcal{L}'$ теории T' содержит счетное число функциональных символов f_n, $n<\omega$, и счетное число одноместных предикатных символов P_n, $n<\omega$.

Аксиомы T'.

(1)$_{n<\omega}$ $\forall x \neg[P_n(x) \wedge P(x)]$,

(2)$_{n \neq m<\omega}$ $\forall x \neg[P_n(x) \wedge P_m(x)]$,

(3)$_{n \neq m<\omega}$ $\forall x [P_n(x) \to f_m(x) = x]$,

(4)$_{n<\omega}$ $\forall x [P_n(x) \to P(f_n(x))]$,

(5)$_{n<\omega}$ $\forall x [P(x) \to f_n(x) = x]$,

(6)$_{n<\omega}$ $\forall x \forall y \forall z [P(x) \wedge P_n(y) \wedge f_n(y) = x \to [(P_n(z) \wedge f_n(z) = x) \to z = y]]$,

(7)$_{n<\omega}$ Пусть $2^n = \{t / t : n \to \{0,1\}\}$.

$\forall t \in 2^n \exists x_t [P(x_t) \wedge [t(m) = 1 \wedge m \le n \to \exists x_{t(m)} [f_m(x_{t(m)}) = x_t \wedge P_m(x_{t(m)})]] \wedge [t(m) = 0 \to \neg(\exists y (\bigvee_{m \le n} P_m(y) \wedge f_m(y) = x_t))]]$.

Из критерия элементарной эквивалентности [3] и аксиом (7)$_{n<\omega}$ следует полнота T'. Легко понять, что любому элементу $a \in P(M)$ произвольной модели M можно поставить в соответствие ω -последовательность из нулей и единиц. Если на n -места в последовательности стоит единица, то это означает, что для этого элемента существует прообраз по функции f_n. Назовем эту ω -последовательность характеристикой элемента $a \in M$. Если на характеристиках элементов модели M ввести лексикографический порядок, то для любого расширения $M' \supset M$, удовлетворяющей аксиомам 1) – 6), следует, что характеристика элемента $a \in M$ в структуре M' не может уменьшаться. Отсюда следует AP универсала теории. Из аксиом $(7)_{n<\omega}$ следует не тотальная трансцендентность теории. $\mathcal{L}_A-(\omega)$-стабильность теории вытекает из аксиом $(6)_{n<\omega}$.

Литература

1. Lachlan A., Spectra of ω-stable theories, Zeits. Math. Logik Grun.Math.,24, N 5 (1978).
2. Forrest W., Model theory for universal classes with the amalgamation property, Ann.of Math.Logic,11(1977),263-366.
3. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А., Математическая логика, Москва, "Наука" 1979.
4. Wheeler W., Amalgamation and elimination of quantifiers for theories of fields, Proc.Amer.Math.Soc.,77, N 2 (1979).
5. Сакс Дж., Теория насыщенных моделей, Москва, "Мир",1976.
6. Shelah S., Stability,the f.c.p.,and superstability: model-theoretic properties of formulas in first-order theories, Ann.Math.Logic,3(1971),271-362.