УДК 510.67

Б.С.Байжанов

НЕПРЕРЫВНО ЕСТЕСТВЕННЫЕ ВЛОЖЕНИЯ ГРУПП АВТОМОРФИЗМОВ И НЕКООРДИНАТИЗИРУЕМОСТЬ

В работе [1] была оформулирована следующая ГИПОТЕЗА /У.Ходжес/. Если T относительно категоричная теория и все модели теории T непрерывно естественны над одноместным предикатом, то теория T координатизируема над P.

Заметим, что для отдельно взятых моделей относительно категоричных теорий понятия координатизируемости и непрерывной естественности не совпадают [2], [3]. Кроме того, Д.Эвансом, Р.Хевитом, Ю.Хрушовским было показано, что для относительно категоричных теорий из того, что все модели естественны над одноместным предикатом P, не следует координатизируемость.

Во время беседы автора с У.Ходжесом на Международной Мальцевской Конференции /август 1989 г., г.Новосибирск/, У.Ходжес был уверен в существовании контрпримера к своей гипотезе. Цель заметки привести пример такой теории.

Чтобы сделать изложение автономным, дадим необходимые определения.

Пусть B модель сигнатуры Σ. Обозначим через $A = \langle P(B), \Sigma_0 \rangle$, где $\Sigma_0 \subsetneq \Sigma$, $P \in \Sigma \setminus \Sigma_0$.

Говорят, B координатизируема над P, если существует расширение сигнатуры Σ, $\Sigma^+ \supset \Sigma$ и доопределение для сигнатурных символов из $\Sigma^+ \setminus \Sigma$ на B, которое обозначим через B^+, что верно:

1. Для любой формулы $\varphi(\bar{x})$ сигнатуры Σ^+ существует формула $\varphi^*(\bar{x})$ сигнатуры Σ_0, что для любого кортежа $\bar{a} \in A$

$$\left(B^+ \models \varphi(\bar{a}) \Longrightarrow A \models \varphi^*(\bar{a}) \right)$$

2. B^T есть определимое замыкание A в B^T, то есть для каждого $b \in B$ существует формула $\varphi(x, \bar{y})$ сигнатуры Σ_1^T и кортеж $\bar{a} \in A$, что

$$B^T \models \varphi(b, \bar{a}) \wedge \exists! x \varphi(x, \bar{a}).$$

Условие 1/ называется условием р е д у ц и р о в а н н о с т и .

Полная теория T сигнатуры Σ называется о т н о с и т е л ь н о к а т е г о р и ч н о й над P и Σ_0, если для любых моделей B_1 и B_2 теории T, из $A_1 = A_2$ следует существование изоморфизма между B_1 и B_2 тождественного на A.

Говорят, B н е п р е р ы в н о е с т е с т в е н н а над A, если существует вложение $\varphi : Aut(A) \to Aut(B)$, что

1/ φ - е с т е с т в е н н о , т.е.

$$\forall g \in Aut(A),\ \varphi(g) \upharpoonright A = g$$

2/ φ - непрерывно в топологии с базой

$$X_{\bar{a}, \bar{b}} = \{ \alpha \in Aut(B) / \alpha(\bar{a}) = \bar{b} \}.$$

Опишем минимальную модель относительно категоричной теории, у которой каждая модель непрерывно естественна над одноместным предикатом P, но все модели кроме простой не координатизируемы над P и Σ_0.

Сигнатура $\Sigma = \langle =, P^1, \varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, f_1^1, f_2^1, g^1 \rangle$,
$\Sigma_0 = \langle =, \varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, g^1 \rangle$. Универсум $M = Z^2 \times 2$, где $2 = \{0, 1\}$.

Модель $B = \langle M, \Sigma \rangle$, где сигнатурные символы Σ, определены на B следующим образом:

$$\forall \langle m, n, i \rangle, \langle m', n', j \rangle \in M;\ m, n, m', n' \in Z;\ i, j \in 2.$$

$$B \models \varepsilon_1(\langle m, n, i \rangle, \langle m', n', j \rangle) \Leftrightarrow n = n'$$

$$B \models \varepsilon_2(\langle m, n, i \rangle, \langle m', n', j \rangle) \Leftrightarrow m = m'$$

$$B \models f_1(\langle m, n, i \rangle) = \langle [illegible], n, i \rangle$$

$$B \models f_0(\langle m,n,i\rangle) = \langle m, n+1, i\rangle$$

$$m \neq n \Longrightarrow g(\langle m,n,i\rangle) = \langle n,m,i\rangle$$

$$m = n \Longrightarrow g(\langle m,m,i\rangle) = \langle m+1,m+1,i\rangle$$

$$B \models P(\langle m,n,i\rangle) \Longleftrightarrow m = n$$

Пусть $A = \langle P(B), \Sigma_0 \rangle$.

В дальнейшем мы не будем отличать модели B и A от их универсумов M и $P(B)$.

Легко понять, что B минимальная модель ω_1 - категоричной теории T. Это следует из того, что любые два $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ - класса пересекаются по 2-элементному множеству из предиката

Ограничение теории T на предикат P есть сильно минимальная теория двойного следования g.

Пусть B_1 модель теории T такая, что существует ровно два элемента $a_1, c_1 \in P(B_1)$, что $\{a_1, c_1\}$ - максимальное независимое множество в $P(B_1)$. Тогда, очевидно, любой элемент B_1 алгебраичен над $P(B_1)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. B_1 не координатизируема над P и Σ_0.

<u>Доказательство.</u> Предположим противное. B_1 координатизируема над P и Σ_0. Пусть B_1^+ его координатизация. Тогда для элемента $b_1 \in B_1$ такого, что

$$B_1 \models \mathcal{E}_1(b_1,a_1) \wedge \mathcal{E}_2(b_1,c_1)$$

существует формула $Q(x,y,z)$ сигнатуры $\Sigma' \supset \Sigma$, что

$$B_1^+ \models Q(b_1,a_1,c_1) \wedge \exists! x\, Q(x,a_1,c_1) \wedge$$
$$\wedge \forall x\, (Q(x,a_1,c_1) \to \mathcal{E}_1(x,a_1) \wedge \mathcal{E}_2(x,c_1))$$

Заметим, что в формуле Q можно ограничиться константами a_1, c_1 так, как все элементы из $P(B_1)$ лежат в $dcl(\{a_1,c_1\})$.

Обозначим через a_2 и c_2 элементы из $F(B_1)$ лежащие в тех же $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ классах, что a_1 и c_1.

Рассмотрим реализации следующих четырех формул $Q(x, a_1, c_1)$, $Q(x, a_2, c_1)$, $Q(x, a_1, c_2)$, $Q(x, a_2, c_2)$. Из определения формулы и из того, что $tp(a_i, c_j) = tp(a_1, c_1)$ следует, что реализации этих формул одноэлементны и содержатся в множестве $\{b_1, b_2\}$. Есть восемь возможностей. Среди них в силу симметричности b_1, b_2 выделяются 4 основных случая:

1. $B_1^+ \models Q(b_1, a_1, c_1) \wedge Q(b_2, a_2, c_1) \wedge Q(b_1, a_1, c_2) \wedge Q(b_2, a_2, c_2)$
2. $B_1^+ \models Q(b_1, a_1, c_1) \wedge Q(b_2, a_2, c_1) \wedge Q(b_2, a_1, c_2) \wedge Q(b_1, a_2, c_2)$
3. $B_1^+ \models Q(b_1, a_1, c_1) \wedge Q(b_1, a_2, c_1) \wedge Q(b_2, a_1, c_2) \wedge Q(b_1, a_2, c_2)$
4. $B_1^+ \models Q(b_1, a_1, c_1) \wedge Q(b_1, a_2, c_1) \wedge Q(b_1, a_1, c_2) \wedge Q(b_1, a_2, c_2)$

Докажем, что в каждом из этих случаев приходим к противоречию.

1. Таким ооразом: $B_1^+ \models \forall x (Q(x, a_1, c_1) \leftrightarrow Q(x, a_1, c_2))$
Следовательно, этим свойством обладают любые пары $\langle c_i', c_j' \rangle$.
Тогда формула $\mathcal{E}_1(x, a_1)$ делится на две бесконечные части и из-за функции g формула $\mathcal{E}_2(x, a_2)$ тоже делится на две бесконечные части. Отсюда формула

$$\Phi(y, a_1) = \exists t\, \exists x\, (Q(x, a_1, y) \wedge P(y) \wedge g(x) = t \wedge Q(t, y, c_1))$$

делит формулу $P(y)$ на две бесконечные части в модели B_1^+ и тогда, в силу редуцированности, существует формула $\Phi^*(y, a_1)$ сигнатуры Σ_0, которая должна делить $P(y)$ на две бесконечные части, что противоречит его сильно минимальности.

2. Рассмотрим теорию $T_1 = Th(\langle B, c_1, c_2, a_1, a_2 \rangle)$.
Из $T_1 \vdash \exists! x ((Q(x, c_1, a_1) \wedge Q(x, c_1, a_2)) \wedge \exists! y (Q(y, c_1, a_2) \wedge Q(y, c_2, a_1) \wedge x \neq y))$ (1)

$T_1 = Th(B_1^+) \cup R(c_1, c_2, a_1, a_2)$, где $R(x_1, x_2, y_1, y_2)$ полный тип теории $Th(B_1^+)$.

Из свойств выводимости следует существование конечного $R_0(x_1, x_2, y_1, y_2) \subset R(x_1, x_2, y_1, y_2)$, что

$$Th(B_1^+) \cup R_0(c_1, c_2, a_1, a_2) \vdash (1)$$

А из сильной минимальности P и редуцированности B_1^+ над P следует существование натурального n_0, что

$$Th(B_1^+) \vdash \forall x_1 x_2 y_1 y_2 (R_0(x_1, x_2, y_1, y_2) \leftrightarrow \neg (\bigvee_{k=1}^{n_0} g^k(x_i) = y_j)$$

Отсюда следует, что формула

$$\exists u (Q(u, x, g^{n_0+1}(x) \wedge f_1^n(x) = u) \quad (2)$$

делит P на две бесконечные части, что противоречит редуцированности B_1^+ над P и сильной минимальности P.

3.-4. Рассуждая как в 2. и используя формулу (2) приходим к противоречию.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. B_1 непрерывно естественные над P

Доказательство. Блоком в B_1 назовем определимое /без использования g / замыкание одного элемента. Следовательно, имеем 4 блока. Назовем неглавным блок не содержащий элементов P. Слоем в блоке назовем множество элементов блока, любые две из которых связаны при помощи функции $f_1, f_2, f_1^{-1}, f_2^{-1}$. Определим на модели B_1 одноместный предикат Q следующим образом. В каждом неглавном блоке предикату Q удовлетворяет равно один слой из двух. Причем, эти слои на которых определен Q связаны при помощи g. Полученную модель обозначим B_1'. Очевидно, $Aut(B_1') = Aut(A_1)$ и $Aut(B_1') < Aut(B_1)$ Следовательно, существует естественное вложение φ

$\varphi : Aut(A) \rightarrow Aut(B)$, что $\forall \alpha \in Aut(A)$

$\varphi(\alpha) \upharpoonright A = \alpha$.

Непрерывность φ следует из существования для каждого $\bar{b} \in B \setminus A$ элементов из A, что $\bar{a} \in A$ и $\varphi(O_{\bar{a}}) \subset O_{\bar{b}}$, где $O_{\bar{a}} = \{g \in Aut(A) / g(\bar{a}) = \bar{a}\}$.

В ходе реферирования в 1988 году на семинаре "Теория моделей" Казахского госуниверситета и Института Математики и механики АН КазССР статьи [4], у автора возникло несколько вопросов о связи координатизируемости и конечной аксиоматизируемости.

ВОПРОС 1. Существует ли конечно аксиоматизируемая ω_1 категоричная теория, неестественная над своей сильно минимальной формулой?

Е.Р.Байсалов в июле 1989 года, модифицируя пример М.Г.Перетятькина [5], построил пример отвечающий на вопрос 1.

В связи с гипотезой У.Ходжеса возникает аналогичный вопрос для конечно аксиоматизируемых теорий.

ВОПРОС 2. Существует ли конечно аксиоматизируемая теория относительно категоричная и непрерывно естественная над одноместным предикатом P, но не координатизируемая над этим предикатом?

ЗАМЕЧАНИЕ. В заметке [3] использовалась минимальная 6 элементная модель неестественная над 2-х элементным предикатом. Впервые такая модель была построена У.Ходжесом.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Hodges Extending Beth's theorem, Proc. 6th Easter Conf. on Model theory Berlin, 1988, p. 57-64
2. Б.С.Байжанов, О двух гипотезах Ходжеса. Международная конференция по алгебре, Тезисы докладов по теории моделей и алгебраических систем, Новосибирск, 1989, с.8

3. Б.С.Байжанов. Относительно категоричные,естественные и некоординатизируемые модели. Сб. Теоретико-модельная алгебра, КазГУ, Алма-Ата, 1989, с.9-15

4. W. Hodges, I.M. Hodkinson, H. D Macpherson, Omega categoricity, relative categoricity and coordinatisation, preprint, 24, Septemb. 1887, p. 1-36

5. М.Г.Перетятькин. Две теоремы о конечно аксиоматизируемых теориях. Международная конференция по алгебре. Тезисы докладов по теории моделей и алгебраических ситем. Новосибирск 1989, с.99.