Математический журнал. *Алматы. 2007. Том 7. № 1 (23) . С. 31 – 35*

УДК 510.67

О-МИНИМАЛЬНЫЕ ОБОГАЩЕНИЯ И ОДНОМЕСТНЫЕ ФУНКЦИИ

Б. С. Байжанов

Институт проблем информатики и управления МОН РК
050010 Алматы ул. Пушкина, 125 baizhanov@ipic.kz, baizhanov@hotmail.com

Получен критерий существенности о-минимального обогащения моделей о-минимальных теорий с плотным линейным порядком, допускающих сокращение воображаемых элементов, в терминах частичных одноместных функций (Теорема 1).

Определение 1 ([1])**.** *Модель M сигнатуры Σ упорядочено минимальная (о-минимальная), если некоторая формула сигнатуры Σ задает линейный порядок и ее любое формульное множество, определимое с параметрами из M, есть объединение конечного числа открытых интервалов и элементов.*

Всюду в статье предполагается, что формульный линейный порядок плотный. Модель с формульным плотным линейным порядком будем называть плотной, а ее теорию — плотной. Формульно определимые множества, отношения, функции модели $M = \langle M, \Sigma \rangle$ будем называть M-определимыми или определимыми в M. Теория о-минимальная, если хотя бы одна из ее моделей о-минимальная. Теория сильно о-минимальная, если все ее модели о-минимальные. Доказано [2], [3], что классы о-минимальных и сильно о-минимальных теорий совпадают.

Определение 2. *(i) Говорят, $M^+ = \langle M, \Sigma^+ \rangle$ есть обогащение M, если $M = \langle M, \Sigma \rangle$ и $\Sigma \subset \Sigma^+$. В этом случае теорию $T^+ = Th(M^+)$ назовем обогащением теории $T = Th(M)$.*
(ii) Обогащение M^+ модели M существенно, если существует $P^n \in \Sigma^+ \setminus \Sigma$, что для любой формулы $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$, $l(\bar{x}) = n$ сигнатуры Σ, для любого кортежа элементов $\bar{a} \in M$ верно $P((M^+)^n) \neq \Phi(M^n, \bar{a})$.

Определение 3 ([4])**.** *Говорят, что теория T сигнатуры Σ допускает сокращение воображаемых элементов, если для всех $M \in Mod(T)$, для любой формулы $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ сигнатуры Σ, для любого $\bar{a} \in M^{l(\bar{y})}$ существует $\bar{b} = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle \in M^n$, такой что для любого элементарного расширения $M' \succ M$ и любого автоморфизма $f \in Aut(M')$ верно, что*

$$\forall \bar{c} \in M' [\phi(\bar{c}, \bar{a}) \Leftrightarrow \phi(f(\bar{c}), \bar{a})] \Longleftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} f(b_i) = b_i.$$

Keywords: *o-minimal, expansion, unary function, elimination of imaginaries*
2000 Mathematics Subject Classification: 03C64

Теорема 1. *Пусть T — о-минимальная плотная теория, допускающая сокращение воображаемых элементов, $M \in Mod(T)$, M^+ — о-минимальное обогащение модели M. M^+ является существенным обогащением модели M тогда и только тогда, когда существует элементарное расширение D^+ модели M^+, что класс всех D^+-определимых частичных одноместных функций не совпадает с классом всех D-определимых частичных одноместных функций.*

Доказательство. Достаточность следует из определения.

Необходимость.

Лемма 1. *Пусть D^+ — ω-насыщенное элементарное расширение модели M^+. Если каждая одноместная D^+-определимая функция определима в D, то каждое D^+ – определимое множество определимо в D.*

Доказательство. Покажем индукцией по n:
$(1)_n$ Каждое определимое множество в $(D^+)^n$ определимо в D.
$(2)_n$ Каждая частичная D^+-определимая функция $f : (D^+)^n \to D$ определима в D.

Для $n = 1$, $(2)_1$ условие Леммы, $(1)_1$ следует из $(2)_1$ и о-минимальности D^+.

$(1)_{n+1}$ Пусть $R \subset (D^+)^{n+1}$ — определимое множество. Пусть S — проекция R на $(D^+)^n$.

$$\begin{aligned} S &:= \{\bar a \in (D^+)^n : D^+ \models \exists y(R(\bar a, y))\},\\ S_\infty &:= \{\bar a \in S : D^+ \models \exists^\infty y(R(\bar a, y))\},\\ S_m &:= \{\bar a \in (D^+)^n : D^+ \models \exists^{!m} y(R(\bar a, y))\}.\end{aligned}$$

S_∞ определимо в D^+ потому, что для плотной о-минимальной теории верна формульная определимость свойства бесконечности формульного множества, то есть для любой формулы $\phi(x, \bar y)$ существует $n_\phi < \omega$, что если $\forall \bar y \exists^{>n_\phi} x \phi(x, \bar y)$, то $\exists^\infty x \phi(x, \bar y)$. В противном случае по теореме компактности А.И. Мальцева [5] приходим к существованию бесконечного, дискретно упорядоченного, определимого множества в о-минимальной модели с плотным линейным порядком. Противоречие с о-минимальностью. Положим $l = n_R$.

По индукционному предположению $(1)_n$ $S, S_1, ..., S_l, S_\infty$ определимы в D. Определим для m $(1 \le m \le l)$

$$\begin{aligned} R_{i,m} \;:=\; &\{(\bar a, b) \in R : \bar a \in S_m, 1 \le i \le m, b - i\text{-ый элемент},\\ &\text{принадлежащий } R(\bar a, D^+)\}.\end{aligned}$$

Так как $R_{i,m}$ есть график определимой в D^+ функции, по индукционному предположению $(2)_n$, $R_{i,m}$ определим в D.

Рассмотрим $R' = S_\infty \times M - R$. R' определим в D^+. Пусть

$$\begin{aligned} P_m &:= \{\bar a \in (D^+)^n : D^+ \models \exists^{!m} y(R'(\bar a, y))\},\\ P_\infty &= \{\bar a \in (D^+)^n : D^+ \models \exists^\infty y(R'(\bar a, y))\},\\ P_{i,m} &= \{(\bar a, b) : \bar a \in P_m, 1 \le i \le m, b - i\text{-ый элемент}\\ &\qquad \text{принадлежащий } R'(\bar a, D^+)\}.\end{aligned}$$

Пусть $N = n_{R'}$. Так как $P_{i,m}$ есть график определимой в D^+ функции, по индукционному предположению $(2)_n$, $P_{i,m}$ определим в D. Очевидно, $S_\infty = P_1 \dot\cup P_2 \dot\cup \ldots \dot\cup P_N \dot\cup P_\infty$.

Рассмотрим P_∞. Определяем формулу $\phi(\bar x, y)$ следующим образом: для любых $\bar a, b \in D^+$,

$$\models \phi(\bar a, b) \;\Leftrightarrow \models P_\infty(\bar a) \text{ и } b \text{ является граничной точкой } R(\bar a, D^+).$$

Число граничных точек для любого $\bar{a}$ не превышает $2k$, где $k = k_\phi < \omega$ — максимальное число $\neg\phi(\bar{a}, D^+)$-отделимых интервалов и изолированных точек, лежащих в множестве реализации $\phi(\bar{a}, D^+)$. Для любой формулы $\phi(\bar{y}, x)$ о-минимальной теории существование $k_\phi < \omega$ следует из теоремы компактности.

Рассмотрим функции $\phi_i,\ \psi_i,\ 0 \le i \le k-1$,

$$\begin{aligned}
\phi_i(\bar{a}) = b \quad &\Leftrightarrow \quad \bar{a} \in P_\infty \text{и } b \text{ есть начальная точка } i\text{-ого интервала или}\\
&\qquad i\text{-ая изолированная точка в } R(\bar{a}, D^+);\\
\psi_i(\bar{a}) = b \quad &\Leftrightarrow \quad \bar{a} \in P_\infty \text{ и } b \text{ есть концевая точка } i\text{-ого интервала или}\\
&\qquad i\text{-ая изолированная точка в } R(\bar{a}, D^+).
\end{aligned}$$

Очевидно, ϕ_i, ψ_i определимы в D^+ и, следовательно, определимы в D.
Обозначим

$$\begin{aligned}
\theta_i(\bar{x}, y) \quad = \quad & P_\infty(\bar{x}) \wedge (\phi_i(\bar{x}) < \psi_i(\bar{x}) \rightarrow \phi_i(\bar{x}) < y < \psi_i(\bar{x})) \wedge\\
& \wedge[(\phi_i(\bar{x}) < \psi_i(\bar{x}) \wedge R(\bar{x}, \phi_i(\bar{x}))) \rightarrow \phi_i(\bar{x}) \le y < \psi_i(\bar{x})] \wedge\\
& \wedge[(\phi_i(\bar{x}) < \psi_i(\bar{x}) \wedge R(\bar{x}, \psi_i(\bar{x}))) \rightarrow \psi_i(\bar{x}) < y \le \psi_i(\bar{x})] \wedge\\
& \wedge[(R(\bar{x}, \phi_i(\bar{x})) \wedge R(\bar{x}, \psi_i(\bar{x}))) \rightarrow \phi_i(\bar{x}) \le y \le \psi_i(\bar{x})].
\end{aligned}$$

Тогда

$$R(\bar{x}, y) = \bigcup_{1 \le m \le l,\ 1 \le i \le m} R_{i,m}(\bar{x}, y) \cup \bigcup_{i<k} \theta_i(\bar{x}, y) \cup \bigcup_{1 \le m \le N,\ 0 \le i \le m+1} Q_{i,m},$$

где

$$Q_{i,m}(\bar{x}, y) = P_m(\bar{x}) \wedge P_{i-1,m}(\bar{x}) < y < P_{i,m}(\bar{x}).$$

В нашем случае $P_{0,m}(\bar{x}) = -\infty,\ P_{m+1,m}(\bar{x}) = \infty$.

Таким образом, множество R представляется в виде конечного объединения попарно не пересекающихся D-определимых множеств и, следовательно, R есть D-определимое множество.

$(2)_{n+1}$ Пусть $f : (D^+)^{n+1} \rightarrow D^+$ — частичная определимая функция в D^+. Обозначим $H(x) = \exists\bar{z}\exists y(f(\bar{z}, x) = y)$. По $(1)_1$ H является D-определимой формулой и по $(2)_n$ для любого $a \in H(D^+)$ функция

$$f_a : (D^+)^n \rightarrow D^+,\ f_a(\bar{x}) = f(\bar{x}, a)$$

является D-определимой при помощи функции $G_a(\bar{c}, \bar{x}),\ \bar{c} \in D^k,\ G_a(\bar{y}, \bar{x})$ без параметров.

Предложение 1. *Существует конечное число функций $G_1(\bar{x}, \bar{y}_1), \ldots, G_m(\bar{x}, \bar{y}_m)$ таких, что $\forall a \in H(D^+)$ существует $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\exists\bar{c}_a \in D^{l(\bar{y}_i)}$, что*
$\forall\bar{x}[[G_i(\bar{x}, \bar{c}_i) = f(\bar{x}, a)] \wedge [G_i(\bar{x}, \bar{c}_i)$ неопределена $\Leftrightarrow f(\bar{x}, a)$ неопределена$]]$.

Доказательство. Предположим противное, то есть существует бесконечное число функций $\{G_i(\bar{x}, \bar{y}_i) : i \in J\}$, что для любого $a \in H(D^+)$ существует $G_j(\bar{x}, \bar{c}_a)$, что $G_i(\bar{x}, \bar{c}_a) = f(\bar{x}, a)$ и $\forall j \in J$ существует подходящая a_j, что $\forall j_1 \ne j,\ j_1 \in J$, верно

$$\models \forall\bar{y}[G_{j_1}(\bar{x}, \bar{y}) \ne f(\bar{x}, a_j)].$$

Тогда следующее множество локально совместно по отношению к $\mathrm{Th}(D^+, \bar{d})$, где $\bar{d} \in D^+$ — кортеж элементов, участвующих в определении $f(\bar{x}, x)$,

$$\{\forall y_j(G_j(\bar{x}, \bar{y}_j) \ne f(\bar{x}, x) : j \in J)\} \cup \{H(x)\}.$$

Так как D^+ является ω-насыщенной моделью, то существует $a \in D^+$, удовлетворяющий этому множеству формул. Последнее противоречит определению множества функций $G_i(\bar{x}, \bar{y}_i)$. Предложение доказано.

Без потери общности можно считать, что существует только одна функция $G(\bar{y}, \bar{x})$ (без параметров) сигнатуры модели D, что для любого $a \in H(D^+)$ существует $\bar{c}_a \in D$, что $G(\bar{x}, \bar{c}_a) = f(\bar{x}, a)$. Определим $\bar{c} \sim \bar{c}',\ \bar{c}, \bar{c}' \in D^k \Leftrightarrow \forall \bar{x}(G(\bar{x}, \bar{c}) = G(\bar{x}, \bar{c}'))$.

Существование D-определимой функции $h : D^k \to D^j$ такой, что $\forall \bar{c}, \bar{c}' \in D$

$$[h(\bar{c}) = h(\bar{c}') \Leftrightarrow G'(\bar{x}, \bar{c}) = G(\bar{x}, \bar{c}')],$$

следует из условия Теоремы 1 о сокращении воображаемых элементов.

Пусть $h_1(\bar{y}), \ldots, h_j(\bar{y})$ — функции такие, что $\forall \bar{c} \in D^k,\ h(\bar{c}) = \langle h_1(\bar{y}), \ldots, h_j(\bar{y}) \rangle$. Определим графики D^+-определимых одноместных функций:

$$K_i(x, z) = H(x) \wedge \exists \bar{y}(\forall \bar{x}(G(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x}, x) \wedge h_i(\bar{y}) = z)),\ i \in \{1, \ldots, j\}.$$

$K_i(x, z)$ являются D-определимыми по условию Леммы. Пусть $d_i(x) = z \Leftrightarrow K_i(x, z)$. Тогда следующая формула определяет график D-определимой $(n+1)$-местной функции:

$$H(x) \wedge \exists \bar{y}(h(\bar{y}) = \langle d_1(x), \ldots, d_j(x) \rangle \wedge G(\bar{x}, \bar{y}) = z),$$

которая совпадает с графиком f. Лемма доказана.

Замечание. Аналогичная теорема была доказана Е. Хрушовским для любого сильно минимального обогащения алгебраически замкнутого поля [6]. Можно отметить, что его доказательство проходит и для любой сильно минимальной теории, допускающей сокращение воображаемых элементов. Наше доказательство базируется на схеме его доказательства, только для другого класса теорий. Отметим, В.В. Вербовский доказал [7], что сильно минимальная нелокально модулярная теория, построенная Хрушовским, не допускает сокращение воображаемых элементов, и построил [8] не локально модулярную сильно минимальную теорию бесконечной сигнатуры, в которой не интерпретируется алгебраически замкнутое поле, и которая допускает сокращение воображаемых элементов. Принимая во внимание результаты Б. Пуаза [4], В.В. Вербовского [7]-[8], А. Пиллая [9], Тцубои [10], можно сформулировать

Гипотеза. *Пусть T — сильно минимальная теория конечной сигнатуры. T допускает сокращение воображаемых элементов тогда и только тогда, когда T есть обогащение теории алгебраически замкнутого поля.*

Цитированная литература

1. **Van den Dries L.** // **Logic Colloquim ’82** (G. Lolli, G. Longo, and A. Marcja, editors), North-Holland, Amsterdam, 1984. P. 97-121.

2. **Pillay A., Steinhorn Ch.** // Trans. Amer. Math. Soc. 300. 1988. P.469-476.

3. **Knight J., Pillay A., Steinhorn Ch.** // Trans. Amer. Math. Soc. 295. 1986. P. 593-605.

4. **Poizat B.** // Journal of Symbolic Logic. V. 48. 1983. P. 1151-1171.

5. **Ершов Ю.Л., Палютин Е.А.** Математическая логика, М., Наука, 1979.

6. **Hrushovski E.** // Israel Journal of Mathematics. V.79. ????. P. 129-151.

7. **Вербовский В.В.** // Тезисы докладов 1-ого Съезда математиков Казахстана. Шымкент. 1996. С. 178-179

8. **Вербовский В.В.** // Депонирована в КазгосИНТИ 15 марта 2002. №8909-Ка 02.
9. **Pillay A.** // Journal of Symbolic Logic. V. 56. 1991. P. 1003-1011.
10. **Tsuboi A.** // Journal of Symbolic Logic. V. 58. 1993. P. 232-239.

Поступила в редакцию 14.05.2007г.