Казахский национальный университет имени аль-Фараби

УДК 510.6

На правах рукописи

БАЙЖАНОВ БЕКТУР СЕМБИУЛЫ

Обогащение моделей слабо о-минимальных и стабильных теорий

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
доктор физико-математических наук,
профессор, Палютин Е.А.

Республика Казахстан
Алматы, 2008

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ

В настоящей диссертации термины и определения приводятся по мере изложения материала. Это связано с тем, что специфика области исследования диссертации не позволяет дать все определения в одном пункте диссертации — термины и определения являются элементом рассуждений и доказательств утверждений.

На протяжении всей диссертации используются стандартные теоретико-множественные и теоретико-модельные обозначения:

1 ω — множество всех натуральных чисел,
2 $\Rightarrow$ означает „если …, то …",
3 $\Leftrightarrow$ означает „…тогда и только тогда, когда …",
4 M, N, M' — означают модели,
4 A, B, C, D — означают множества,
6 $\bar{a}$ — означает кортеж элементов $\langle a_0, ..., a_n \rangle$,
7 $ln(\bar{a})$ — означает длину кортежа элементов, то есть число n,
8 f, g, h, ϕ, φ, ψ — означают отображения, формулы и различные морфизмы,
9 $\forall$, $\exists$ — означают кванторы всеобщности и существования,
10 $M \models \phi$ — означает, что формула ϕ истинна в модели M,
11 $\ldots \cong \ldots$ — означает, что „…изоморфна …",
12 $\ldots \subseteq \ldots$ — означает, что „…подмножество …",
13 $\ldots \in \ldots$ — означает, что „…принадлежит …",
14 $\cap, \cup$ — означают теоретико-множественные операции,
15 $\vee, \wedge, \rightarrow, \neg$ — означают логические операции,
16 $S_n(A)$ — означает множество n–типов над множеством A,
17 $\phi(M, \bar{b}) = \{a \in M | M \models \phi(a, \bar{b})\}$,
18 $C < D$ — означает $c < d$ для всех $c \in C,\ d \in D$,
19 Для $D \subset M,\ D^- := \{\beta \in M : \beta < D\},\ D^+ := \{\beta \in M : \beta > D\}$,
20 $x > F(M, \bar{y}) \Leftrightarrow \forall z[F(z, \bar{y}) \rightarrow z < x]$
21 $\Psi(M, \bar{x}) > F(M, \bar{y}) \Leftrightarrow \forall z \forall t[(F(z, \bar{y}) \wedge \Psi(t, \bar{x})) \rightarrow z < t]$.
22 $M \prec N$ — означает, что M есть элементарная подмодель модели N.
23 $Card$ — означает множество всех бесконечных кардинальных чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Разбиение (A, B) линейно упорядоченной структуры M называется *сечением*, если $A < B$. Сечение называется *рациональным*, если A имеет максимальный элемент или B — минимальный, или одно из них пусто. Мы говорим, что сечение *квазирационально*, если A и, следовательно, B определимы (с параметрами). Неквазирациональное сечение называется *иррациональным*. Модель M называется *дедекиндово полной*, если любое ее сечение рационально. Мы говорим, что M *квази дедекиндово полная*, если любое ее сечение квазирационально. Пусть $M \prec N$. Скажем, что сечение (A, B) в M реализуется в N, если существует $\alpha \in N \setminus M$, такой что $A < \alpha < B$.

Линейно упорядоченная структура M называется *о-минимальной*, если любое определимое (с параметрами) подмножество для M есть конечное объединение точек в M и интервалов (a, b), где $a \in M \cup \{-\infty\}$ и $b \in M \cup \{\infty\}$.

Заметим, что в о-минимальной модели M любое квазирациональное сечение является рациональным.

Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если любой элемент из M, лежащий между двумя элементами из A, лежит в A. В частности, любое пустое или одноэлементное множество выпукло. Мы говорим, что формула $\phi(x)$ *выпуклая*, если множество реализации формулы $\phi(M) := \{\alpha \in M \mid M \models \phi(\alpha)\}$ выпукло. Формула $\phi(x, \bar{y})$ *выпукла по x*, если для для любого $\bar{b} \in M$ формула $\phi(x, \bar{b})$ выпукла. Пусть B — произвольное выпуклое множество (не обязательно определимое). Мы говорим, что формула $U(x)$ *расщепляет* B, если $U(N)$ и $\neg U(N)$ суть выпуклые множества и $U(N) \cap B \neq \emptyset$, $\neg U(N) \cap B \neq \emptyset$.

Будем говорить, что формула $\phi(\bar{x}, \bar{b})$, где $\bar{b} \in N$, *делит* $C \subset N^l$ (l — длина кортежа $\bar{x}$, C необязательно формульное), если и $\phi(N^l, \bar{b}) \cap C \neq \emptyset$, и $\neg\phi(N^l, \bar{b}) \cap C \neq \emptyset$.

Линейно упорядоченная структура M называется *слабо о-минимальной*, если любое определимое (с параметрами) подмножество для M есть конечное объединение выпуклых подмножеств. Теория T *слабо о-минимальна*, если любая ее модель слабо о-минимальна.

Ясно, что любая о-минимальная модель является слабо о-минимальной.

Пусть $A \subseteq M \models T$, $n < \omega$, $p \in S_n(A)$. Скажем, что тип p является *$\phi(\bar{x}_n, \bar{v})$-определимым* для $\phi(\bar{x}_n, \bar{v}) \in L(\bar{x}_n)$, если существует формула $R_\phi(\bar{v}) \in L(A)$ (A–формула), такая что для любого $\bar{a} \in A$ верно, что $\phi(\bar{x}_n, \bar{a}) \in p$, если и только если $M \models R_\phi(\bar{a})$. В этом случае формула $R_\phi(\bar{v})$ называется *$\phi(\bar{x}_n, \bar{v})$-определением* типа p.

Скажем, что тип p *определим*, если p является $\phi(\bar{x}_n, \bar{v})$-определимым для любой формулы $\phi(\bar{x}_n, \bar{v}) \in L(\bar{x}_n)$, где $n < \omega$.

Кортеж $\bar{\gamma} \in M$ называется *ht-определимым над* A, если его тип над A определим. Пусть $p \in S_1(A)$, где $A \subseteq M \models T$. Мы говорим, что тип p *квазирациональный вправо*, если существует такая выпуклая A–формула $U_p(x) \in p$, что для любой достаточно насыщенной модели $N \succ M$ имеем $U_p(N)^+ = p(N)^+$. Мы говорим, что p *квазирациональный влево*, если существует такая выпуклая A–формула $U_p(x) \in p$, что для любой достаточно насыщенной модели $N \succ M$ выполняется $U_p(N)^- = p(N)^-$. Квазирациональный и вправо, и влево тип — *изолированный*. Неизолированный 1-тип называется *квазирациональным*, если он квазирациональный либо вправо, либо влево. Неквазирациональный и неизолированный 1-тип называется *иррациональным*.

Пусть p — n-тип над A, а $F \subset p$. Мы говорим, что тип p *определяется* множеством F (или F *определяет* p), если для любой формулы $\phi(\bar{x}) \in p$ существует $\theta(\bar{x}) \in F$, такая что $N \models \forall \bar{x}(\theta(\bar{x}) \to \phi(\bar{x}))$.

Мы говорим, что 1-тип $p \in S_1(A \cup B)$ *определяется квазирациональным сечением* (A, B), если p определяется следующим множеством формул: $\{a < x \wedge U(x) | a \in A\}$ или $\{x < b \wedge \neg U(x) | b \in B\}$. Здесь, $U(x)$ есть $(A \cup B)$-формула, такая что $A \subset U(N)$ и $U(N) \cap B = \emptyset$.

ВВЕДЕНИЕ

Общая характеристика работы. Данная диссертационная работа связана с одним из основных направлений математической логики — теорией моделей, в ней исследуются вопросы обогащения моделей новыми, неформульными отношениями в классах слабо о-минимальных и стабильных теорий.

Актуальность исследования. Развитие любой области математики определяется основными проблемами в этой области и этапами их решения. Эволюцию в теории моделей можно проследить через этапы (главные направления исследований на данный период) развития теории моделей. Модель M логики предикатов первого порядка языка L определяет элементарную (полную) теорию этой модели, $T = Th(M)$, а именно множество предложений языка L, истинных в этой модели. Две модели M_1 и M_2 одного языка называются элементарно эквивалентными, если $Th(M_1) = Th(M_2)$ (т. е. если их элементарные теории совпадают). Исследование элементарной теории T обусловливалось, на мой взгляд, с момента возникновения этого понятия четырьмя основными проблемами, которые определяют четыре направления исследований:

1. Разрешимость элементарной теории;

2. Аксиоматизируемость классов моделей (алгебраических систем);

3. Число неизоморфных моделей полной теории;

4. Обогащения моделей новыми отношениями.

Каждое из этих направлений в силу внутреннего развития, появления новых подходов и методов решения этапных проблем можно разделить на естественные поднаправления, которые представлены с упоминанием авторов наиболее значительных результатов в этом поднаправлении (список авторов неполный). Отметим условность такого разделения — эти направления и поднаправления взаимосвязаны так, как речь идет об одних и тех же объектах исследования (модели и элементарные теории) и для решения задач одного направления используются уже установленные факты для конкретной теории (модели), полученные при решении задач другого поднаправления. Тем не менее, для решения разных проблем используются различные методы и подходы, причем, для решения аналогичных задач для разных классов теорий применяются различные принципы работы с формулами и центрированными семействами формульных подмножеств (типами).

1. Разрешимость. Если пронумеровать все формулы счетного языка L стандартной нумерацией (называемой гёделевской), то теории T языка L можно поставить в соответствие множество номеров этой нумерации. Теория T *разрешима*, если множество ее номеров рекурсивно, то есть если существует алгоритм, позволяющий определить для любого натурального числа, является ли оно номером формулы из T или нет.

Проблема 1. *Будет ли для заданной структуры M разрешима ее элементарная теория $Th(M)$?*

Это направление условно можно разделить на следующие поднаправления, обусловленные развитием методов решения Проблемы 1:

а) Разрешимость элементарных теорий конкретных моделей (алгебраических систем) (К. Гёдель, А. Тарский, А.И. Мальцев, А. Робинсон, Ю.Л. Ершов, Дж. Акс — С. Кочин, М. Робин, А. Фройлих, Д. Шепердсон и др.). Две проблемы А. Тарского открыты до сих пор:

— Разрешима ли $Th(R, +, \cdot, <, \exp)$? (Л. ван ден Дриес, М. Дикманн, А. Уилки и др.).

— Разрешима ли $Th(F_n)$, для $n \geq 2$? (А. Эренфойхт, А.Д. Тайманов, Корольков, В.Н. Ремесленников, Зела, Е. Харлампович, А. Мясников и др.).

б) Элементарная классификация (В. Шмелева, Ю.Л. Ершов, Р. Фраиссе, А.Д. Тайманов, А. Эренфойхт и др.).

в) Модельная полнота, элиминация кванторов (А. Тарский, А. Робинсон, Р. Воот, Ю.Л. Ершов–И.А Лавров – А.Д. Тайманов – М.А. Тайцлин и др.).

г) Конструктивные и сильно конструктивные модели, вычислимые нумерации (А.И. Мальцев, Ю.Л. Ершов, С.С. Гончаров, М.Г. Перетятькин, А.Т. Нуртазин , Н.Г. Хисамиев, К.Ж. Кудайбергенов, Морозов, Пальчунов, С.А. Бадаев М. Морли, А. Нероуд, Б. Хусаинов, С. Лемп и др.).

2. Аксиоматизируемость классов моделей (алгебраических систем). Пусть K — класс моделей фиксированного языка, а $Th(K)$ — множество всех предложении данного языка, истинных на всех моделях класса K. Для данной теории T обозначим через $Mod(T)$ множество всех моделей теории T.

Проблема 2. *Верно ли, что для заданного класса K алгебраических систем выполняется равенство $K = Mod(Th(K))$? В случае утвердительного ответа, описать вид формул $Th(K)$.*

Данное направление условно можно подразделить на:

а) Фильтрованные произведения и ультрапроизведения (Кейслер, Шелах, Ю.Л. Ершов, Е.А. Палютин, А.И. Омаров и др.).

б) Многообразия и квазимногообразия (Е.А. Палютин, С. Гивант, МакКензи, С. Старченко, Горбунов и др.).

в) Конечная аксиоматизируемость (Ханф, Р. Воот, М.Г. Перетятькин, Б.И. Зильбер, Г. Черлин- Л. Харрингтон - А. Лахлан, Е. Хрушовский и др.).

3. Число неизоморфных моделей. Две модели фиксированного языка называются изоморфными, если существует биективное отображение из одной модели на другую, сохраняющее основные отношения. Очевидно, что если две модели изоморфны, то их основные множества имеют одинаковую мощность. Для полной теории T функцией спектра назовем отображение $I(T) : Card \to Card$, что $I(T, \lambda)$ число неизморфных моделей теории T, имеющих мощность λ.

Проблема 3. 1) *Является ли неубывающей функция спектра полной теории?*

2) *Число счетных моделей (Гипотеза Воота).*

Это направление можно подразделить на:

а) Счетно-категоричные теории (Рыль – Нардзевский, Е.А. Палютин, А. Лахлан, Е. Хрушовский и др.).

б) Несчетно-категоричные теории (М. Морли, Т.Г. Мустафин – А.Д. Тайманов, Дж. Болдуин – А. Лахлан, Е.А. Палютин, Н.Г. Хисамиев, Л. Харингтон и др.).

в) Спектральные и ранговые функции. Морли выделил класс тотально трансцендентных (ω– стабильных) теорий, Шелах выделил классы суперстабильных и стабильных теорий.

I Тотально-трансцендентные теории (М. Морли, С. Шелах, А. Лахлан, Е.А. Палютин, Б.С. Байжанов, Е. Бускарен и др.).

II Суперстабильные (С. Шелах, А. Лахлан, Д. Ласкар, Е.А. Палютин, Т.Г. Мустафин, М.И. Бекенов, К.Ж. Кудайбергенов, Е. Хрушовский, К. Ласковский, Б. Харт и др.).

III Стабильные (С. Шелах, А. Лахлан, Е.А. Палютин, М.М. Еримбетов, Т.Г. Мустафин, К.Ж. Кудайбергенов, и др.).

IV Нестабильные (С. Шелах)

д) Число счетных моделей. Проблемы Воота, Лахлана – Эренфойхта (Р. Воот, М. Морли, Розенштейн, А. Лахлан, Т.Г. Мустафин, Е. Бускарен, Д. Ласкар, С. Шелах, Е.А. Палютин, Дж. Сакс, А. Пилай, С. Биклер, В. Невельский, С. В. Судоплатов, Л. Майер, Найт и др.).

4. Обогащения моделей. Будем говорить, что модель (M, L^*) является *существенным обогащением* модели (M, L), если L^* содержит L и существует n-местная формула $H(x)$ сигнатуры L^* такая, что множество $H(M^*)$ не определимо с параметрами в модели (M, L).

Проблема 4. *Найти условия на новые отношения, при которых сохраняются требуемые свойства первоначальной модели.*

Такими свойствами могут быть разрешимость элементарной теории обогащенной модели (например, работа Ершова о разрешимости теории булевой алгебры с выделенным идеалом), модельная полнота, стабильность, суперстабильность, ω-стабильность, сильная минимальность, о-минимальность и слабая о-минимальность и др. В результате исследований, проведенных по направлениям 1–3, в 1960–2000 годах были выработаны методы и подходы, позволяющие выделить различные классы полных теорий:

I_1 — класс сильно минимальных теорий;

I_2 — класс ω-стабильных теорий;

I_3 — класс суперстабильных теорий;

I_4 — класс стабильных теорий;

I_5 — класс о-минимальных теорий;

I_6 — класс слабо о-минимальных теорий;

I_7 — класс квази о-минимальных теорий;

I_8 — класс зависимых теорий;

I_9 — класс простых теорий;

I_{10} — класс E*-стабильных теорий.

Заметим, что $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset I_4 \subset I_8$, $I_5 \subset I_6 \subset I_8, I_5 \subset I_7 \subset I_8$, $I_1 \subset I_4 \subset I_{10}, I_5 \subset I_{10}, I_9 \subset I_{10}$.

Принимая во внимание разбиение всех полных теорий на различные классы теорий, можно рассматривать специальную форму Проблемы 4, прямо не связанную с Проблемами 1–3:

Если (M, L) из I_j, то какие условия необходимо и/или достаточно наложить на вновь введенные отношения, чтобы (M, L^*) была в I_k, где $I_j \subseteq I_k$.

В последние десятилетия проблемы обогащения стали актуальными для каждого класса теорий. Ведущими специалистам в теории моделей был получен ряд глубоких результатов по различным вопросам обогащения (обогащения элементарными подмоделями, автоморфизмами, неэлементарными подструктурами, неразличимыми множествами и др.). В частности,

I_1 — сильно минимальные теории (Б. И. Зильбер, Е. Хрушовский, А. Баудиш, Б. Пуаза, Е.А. Палютин, Дж. Болдуин – К. Холланд, В.В. Вербовский, С. Биклер, А.Т. Нуртазин, А. Пиллай, М. Макинтайер, З. Шадзидакис, Б. Байжанов – Дж. Болдуин и др.).

I_2 — омега-стабильные (А. Несин, А. Боровик, Б. Пуаза, Г. Черлин, Б. Зильбер, Дж. Болдуин – К. Холланд, А. Баудиш и др.).

I_3 — суперстабильные (Е. Бускарен, Т.Г. Мустафин, Б. Пуаза, Б. Байжанов – Б. Болдуин – С. Шелах, Е. А. Палютин, Степанова и др.).

I_4 — стабильные (Б. Пуаза, Е. Бускарен, Дж. Болдуин – М. Бенедикт, Казанова – Циглер, Б. Байжанов – Дж. Болдуин, К. Кудайбергенов и др.).

I_5 — о-минимальные (Л. Ван ден Дрис, А. Уилки, Ч. Стейнхорн, А. Пилай, Д. Маркер, Д. Макферсон, Е.А. Палютин, С. Старченко, Петерзил, Б. Байжанов, Е. Байсалов – Б. Пуаза и др.).

I_6 — слабо о-минимальные (Д. Макферсон – Д. Маркер – Ч. Стейнхорн, Е.А. Палютин, Б. Байжанов, В. Вербовский, Б. Кулпешов, Р. Арефьев, Р. Венцель и др.).

I_7 — квази о-минимальные (О. Белеградек – А. Столбоушкин – М. Тайцлин, Дж. Болдуин – М. Бенедикт и др.).

I_8 — зависимые (С. Шелах, Д. Макферсон – Д. Маркер – Ч. Стейнхорн, Дж. Болдуин, М. Бенедикт, А. Пиллай, Ф. Вагнер, В. Вербовский и др.).

I_9 — простые (С. Шелах, Е. Хрушовский, Е.А. Палютин, Б. Пуаза, Н. Ким, А. Пиллай, М. Макинтайер, Ф.Вагнер, В. Колесников, Васильев – Итай, Пиллай – Полатковская и др.).

I_{10} — E^*-стабильные (Е.А. Палютин, Т.Г. Мустафин, Б. Пуаза, Т. Нурмагамбетов, А. Степанова и др.).

Таким образом, вопросы обогащения моделей стабильных и слабо о-минимальных теорий являются актуальными в теории моделей, а применение разработанных методов, полученных при решении чисто теоретико-модельных проблем является актуальным для информационных систем.

Пусть M и N модели полной теории T, $A \subset M$, $B \subset N$ два неформульных множества в M и N. Предположим, существуют $c \in M \setminus A$ и A-формулы $\phi(x, \bar{y})$, $\Theta(\bar{y})$, что c реализует

$$\{\phi(x, \bar{a}) | M \models \Theta(\bar{a}),\ \bar{a} \in A\}.$$

Тогда для модели $M^* = (M, L^*) = (M, A)$, $L^* = L \cup \{P\}$, $P(M^*) = A$ верно:

$$M^* \models \exists x (\neg P(x) \wedge \forall \bar{y}[(\wedge_i P(y_i) \wedge \Theta(\bar{y})) \Longleftrightarrow \phi(x, \bar{y})]).$$

Условие истинности на $N^* = (N, B)$ формулы

$$\exists x (\neg P(x) \wedge \forall \bar{y}[(\wedge_i P(y_i) \wedge \Theta(\bar{y})) \Longleftrightarrow \phi(x, \bar{y})])$$

эквивалентно выполнению двух условий:

а) $\{\phi(x, \bar{b}) | N \models \Theta(\bar{b}),\ \bar{b} \in B\}$ — совместное множество формул.

б) $\{\phi(x, \bar{b}) | N \models \Theta(\bar{b}),\ \bar{b} \in B\}$ реализуется в N.

Это означает, что для решения вопроса об элементарной эквивалентности M^* и N^* ($M^* \equiv^{L^*} N^*$) необходимо, как минимум, решить вопрос об одновременной реализуемости или нереализуемости двух определимых ϕ-типов над множеством A и B в M и N, соответственно. Неопределимые ϕ-типы не образуют формулы в L^* подобным образом.

Следовательно, для понимания природы формул обогащенной теории $T^* = Th(M^*)$ необходимо выделить:

1) Условие *совместности* множества ϕ-формул над объединением A с конечным множеством элементов из $M \setminus A$.

2) Условия *определимости* ϕ–типа в нестабильной теории.

3) Условие *реализуемости* в M ϕ-типа над объединением A с конечным множеством элементов из $M \setminus A$.

4) Установить структуру взаимосвязи типов.

Рассмотрим условие *совместности типов*. Для формулы $\phi(x, \bar{y})$ рассмотрим следующее условие:

$C(\phi)$ *Существует $m_\phi < \omega$, что совместность множества ϕ-формул следует из m_ϕ-совместности этого множества.*

Отметим, что для стабильных теорий верно следующее:

Факт 0.0.1. [1] *Пусть теория T стабильна. Формула $\phi(x, \bar{y})$ удовлетворяет $C(\phi)$ тогда и только тогда, когда она не обладает свойством конечной покрываемости.*

Для любой выпуклой формулы $\phi(x, \bar{y})$, любой слабо о-минимальной теории следует выполнимость $C(\phi)$ и $m_\phi = 2$.

Изучение полной теории $T^* = Th(M^*),\ M^* = (M, A)$ во многих случаях сводится к изучению *консервативных* расширений A, то есть таких расширений в которых произвольный кортеж элементов из $M \setminus A$ имеет определимый тип над A.

Пусть $M = N$, $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in M \setminus A$, $A\bar{\alpha}$-формула $\Theta_1(\bar{y}) = \Theta(\bar{y}, \bar{d_1})$, $A\bar{\beta}$-формула $\Theta_2(\bar{y}) = \Theta(\bar{y}, \bar{d_2})$ такие, что $tp(\bar{\alpha}|A) = tp(\bar{\beta}|A)$,

$$\{\phi(x, \bar{a})|\bar{a} \in A\bar{\alpha},\ M \models \Theta_1(\bar{a})\} \cup \{\neg\phi(x, \bar{a})|\bar{a} \in A\bar{\alpha},\ M \models \neg\Theta_1(\bar{a})\}$$

реализуется в M,

$$\{\phi(x, \bar{a})|\bar{a} \in A\bar{\beta},\ M \models \Theta_2(\bar{a})\} \cup \{\neg\phi(x, \bar{a})|\bar{a} \in A\bar{\beta},\ M \models \neg\Theta_2(\bar{a})\}$$

не реализуется в M. Это означает, $(M^*, \bar{\alpha}) \not\equiv (N^*, \bar{\beta})$. Отсюда, естественным образом возникает понятие приемлемости множества $A \subset M$. Множество A *приемлемое*, если совпадение типов двух кортежей элементов над A в исходном языке влечет совпадение типов этих кортежей элементов в обогащенном языке.

Таким образом, для исследования теории обогащенной модели необходимо:

1) провести классификацию типов над множествами в исходной теории;

2) установить свойства неортогональности двух типов;

3) найти необходимые и достаточные условия определимости типов;

4) найти условия существования ω–насыщенных консервативных расширений моделей и множеств;

5) установить условия приемлемости множеств для исходной модели.

Цель исследования. Определить свойства формул в теориях первого порядка, полученных обогащением моделей в слабо о-минимальных и стабильных теориях.

Задачи исследования. 1) *Разработать* структуру и взаимосвязь 1-типов в слабо о-минимальных теориях;

2) *Установить* несовпадение 1-консервативных и консервативных расширений моделей слабо о-минимальных теорий;

2) *Разработать* методы построения консервативных расширений моделей слабо о-минимальных теорий;

3) *Доказать* существование консервативных расширений множеств моделями слабо о-минимальных теорий, опускающее заданное множество определимых 1-типов;

4) *Установить* слабую о-минимальность обогащения модели слабо о-минимальной теории выпуклым одноместным предикатам;

6) *Установить* условия обогащения моделей о-минимальных теорий одноместными функциями;

7) *Установить* класс сильно минимальных моделей, сохраняющее стабильность при любом обогащении одноместным предикатом;

8) *Установить* условия полноты теории пар стабильных теорий без свойства конечной покрываемости;

9) *Установить* связь свойства приемлемости неформульного множества с сохранением стабильности при обогащении стабильной модели этим множеством;

Объект исследования — модели и типы над множеством в стабильных и слабо о-минимальных теориях.

Предмет исследования. Свойства формул полученные при обогащении моделей неформульными предикатами; свойства типов такие, как определимость и неортогональность; свойство выразимости поведения информационной системы в языке логики предикатов первого порядка.

Метод исследования. В работе используется аппарат теории типов, разработанный для стабильных (М. Морли, А.Лахлан, Дж. Болдуин, С. Шелах, Д. Ласкар, Т.Г. Мустафин, М.М. Еримбетов) и о-минимальных (Д. Маркер, Ч. Стейнхорн, А. Пиллай, Л. Майер, Л. ван ден Дриес) теорий, аппарат теории 1-типов для слабо о-минимальных теорий, разработанный в данной диссертационной работе.

Научная новизна исследования. Получены новые научные результаты при исследовании — обогащений моделей слабо о-минимальных, о-минимальных, сильно минимальных, суперстабильных и стабильных теорий; консервативных расширений моделей слабо о-минимальных теорий; аксиоматизируемости теории пар моделей стабильных теорий без свойства конечной покрываемости и консервативных пар моделей конечно почти о-минимальных MS-теорий.

Положения выносимые на защиту:

— Множество всех 1-типов над произвольным множеством слабо о-минимальной теории разбивается на шесть видов — иррациональные (одиночные и социальные), квазирациональные (одиночные и социальные) , изолированные (одиночные и социальные); существуют два вида неортогональности двух 1-типов (слабая и почти неортогональность), которые являются отношениями эквивалентности на множестве 1-типов; по любому виду неортогональности, каждый класс эквивалентности содержит 1-типы только одного вида; неортогональность (слабая и почти) 1-типов сохраняет определимость 1-типов;

— 1-тип над множеством A в слабо о-минимальной теории неопределим тогда и только тогда, когда существует A-формула $H(x, \bar{y})$ такая, что для любого A-формульного множества $B \subset M^{ln(\bar{y})}$, формула H двусторонне сходится к 1-типу на $B \cup A^{ln(\bar{y})}$ или на $(M \setminus B) \cup A^{ln(\bar{y})}$;

— класс 1-консервативных расширений не совпадает с классом консервативных расширений моделей слабо о-минимальных теорий;

— любое обогащение одноместным предикатом сильно минимальной модели имеет (супер)стабильную теорию тогда и только тогда, когда сильно минимальная модель имеет тривиальную теорию;

— каждая модель M слабо о-минимальной теории T имеет D–ω-насыщенное консервативное расширение тогда и только тогда, когда T обладает свойством совместного расширения для строго определимых 1-типов (AP для SD-1-типов);

— любое множество слабо о-минимальной теории имеет консервативное расширение, опускающее иррациональные 1-типы и любое заданное семейства определимых 1-типов (теорема об опускании типов);

— теория консервативных $CD - \omega$–насыщенных пар моделей конечно почти о-минимальных MS-теорий аксиоматизируема;

— обогащение модели слабо о-минимальной теории выпуклым одноместным предикатом имеет слабо о-минимальную теорию;

— для любой линейно упорядоченной группы существует о-минимальная модель, в которой группа формульно действует на множестве реализации 1-типа и наоборот, группа формульных автоморфизмов действующая на множестве реализаций 1-типа о-минимальной модели является линейно упорядоченной;

— теория пар моделей стабильной теории без свойства конечной покрываемости является полной тогда и только, когда все формулы в T^{eq} являются неалгебраически ограниченными над моделями (NBAM);

— множество стабильной теории без свойства конечной покрываемости приемлемо тогда и тогда, когда не существует семейства формульно равномерно определимых отношений эквивалентности константами, классы эквивалентностей одного отношения пересекаются с множеством, существует одно отношение у которого существует класс не пересекающийся с множеством и оба отношения совпадают на множестве.

— обогащение модели стабильной теории неформульным слабо приемлемым множеством имеет стабильную теорию тогда и только тогда, когда её имеет ограничение обогащенной модели на это множество (аналогичное верно и для класса ω–стабильных и суперстабильных теорий).

Теоретическая и практическая значимость исследования. Работа носит теоретический и прикладной характер. Полученные результаты могут быть использованы в теории моделей, в различных приложениях для языков спецификаций, моделирующих поведение сложных информационных систем и работы с реляционыим базами данных.

Источники исследования. Д. Маркер, Д. Макферсон и Ч. Стейнхорн [2] доказали слабую о-минимальность теории обогащения архимедовой группы выпуклым одноместным предикатом и сформулировали вопрос Г. Черлина о слабой о-минимальности обогащения произвольной о-минимальной модели выпуклым предикатом для. Д. Маркер [3] разработал теорию 1-типов над о-минимальными моделями для доказательства теоремы об опускании произвольного типа. Л. Майер [4] развила теорию неортогональности 1-типов для решения гипотезы Воота в о-минимальных теориях. Л. Ван ден Дриес [5] доказал, что любой тип над полем всех вещественных чисел определим. Д. Маркер – Ч. Стейнхорн [6] доказали, что 1-консервативная пара моделей о-минимальной теории является консервативной. А. Пиллай [7] сформулировал систему аксиом для теории консервативных пар с ω–насыщенной (фактически с $CD-\omega$–насыщенной) консервативным расширением над малой моделью. Е. Байсалов – Б. Пуаза [8] доказали ее непротиворечивость. Б. Пуаза [9] и Е. Бускарен [10] изучали теорию пар моделей стабильных теорий. В частности, Б. Пуаза доказал стабильность теории красивых пар для теорий без свойства конечной покрываемости, Е. Бускарен доказала, что для суперстабильной теории каждая модель является приемлемой в любом элементарном расширении и теория любой пары моделей (супер)стабильна тогда и только тогда, когда исходная теория не имеет свойство размерности для типов (NDOP). Для стабильных теорий теорема Е. Бускарен не продолжается, Е. Бускарен – Б. Пуаза доказали, что теория Мальцева стабильна, имеет свойство размерности для типов (DOP) и имеет единственную стабильную теорию пар. Дж. Болдуин – М. Бенедикт [11] доказали стабильность теории обогащения стабильной модели малым неразличимым множеством. Е. Казанова - М. Циглер [12] обобщили Теорему Болдуина–Бенедикта на произвольное малое множество без свойства конечной покрываемости.

Основой для изучения обогащений моделей слабо о-минимальных и стабильных теорий, определимости и неортогональности типов, консервативных расширений в слабо о-минимальных теориях является исследование авторов — Д. Маркера, ч. Стейнхорна, Д. Макфердсона, С. Шелаха, Л. ван ден Дриеса, Б. Пуаза, Д. Ласкара, Е. Бускарен и других, а для изучения моделирования поведения информационных систем исследования является исследования авторов — А. Хоара, А. Пнуели, С. Манн, Л. Лампорта и других.

Апробация работы. Результаты диссертации были представлены на IX Всесоюзной конференции по математической логике (Ленинград, 1988), на Международной конференции по алгебре (Новосибирск, 1989), на Советско-Французском коллоквиуме по теории моделей (Караганда, 1990), X Всесоюзной конференции по математической логике (Алма-Ата, 1990), на 3-м Международном коллоквиуме по Теории моделей (Тренто, Италия, 1991), на Казахско-Французском коллоквиуме по теории моделей (Алма-Ата, 1994), на Международной конференции „Логика и приложения", посвященной 60-летию со дня рождения академика Ю.Л. Ершова (Новосибирск, 2000), на Международной конференции „Мальцевские чтения" (Новосибирск, 2005), на Летней школе по теории моделей и универсальной алгебре (Новосибирск-Эрлагол, 1997, 1999, 2003), на Европейском Логическом коллоквиуме (1998, 2000), на Международной конференции „Vaught's Conjecture Workshop" (Notre Dame, США, 2005), на научно-практических конференциях „Таймановские чтения" (Уральск, 2002, 2007), на Французско-Казахстанской конференции „Теория моделей и алгебра" (Астана, 2005), на IX Азиатской логической конференции (Новосибирск, 2005), Международной Летней Школы по теории моделей — ЮНЕСКО (Алматы, 2006), на Международной Летней Школе „Formal Methods and Informational Technologies" Международного института программных технологий Университета ООН (Алматы. 2002, 2004)

Автор выступал с докладами о результатах диссертации на заседаниях следующих семинаров в Новосибирске: семинар „Теория моделей" Института Математики СО РАН (1988–2006); объединенный семинар Новосибирского Государственного университета и Института Математики СО РАН „Алгебра и логика" (2003), на заседаниях семинаров по теории моделей в Университете Париж-7 (1989–1997), в Университете Лион-1(1996), в Университете Лидс (2000), в Университете Оксфорд (2000), в Университете Иллионойс-Чикаго (2001, 2005), в Казахском Национальном Университете имени аль-Фараби

(1987–1994, 2007), в Международном Институте программных технологий Университета ООН (Макао, 2002).

Публикации. Основные результаты опубликованы в работах [74]–[107].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка использованных источников. Объем работы — 170 страниц. Библиография включает 107 наименований.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту Палютину Евгению Андреевичу за внимание и полезные советы при работе над диссертацией.

1 ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1 Общие сведения об обогащении моделей и определимости типов

Пусть M и N модели полной теории T. Пусть $A \subset M$, $B \subset N$ два неформульных множества в M и N. Предположим, существуют $M \setminus A$ и формулы $\phi(x, \bar{y})$, $\Theta(\bar{y})$ сигнатуры модели M, что c реализует

$$\{\phi(x, \bar{a}) | M \models \Theta(\bar{a}),\ \bar{a} \in A\}.$$

Тогда для модели $M^* = (M, L^*) = (M, A)$, ($L^* = L \cup \{P\}$, $P(M^*) = A$) верно:

$$M^* \models \exists x(\neg P(x) \wedge \forall \bar{y}[(\wedge_i P(x_i) \wedge \Theta(\bar{y})) \Longleftrightarrow \phi(x, \bar{y})]).$$

Условие истинности на $N^* = (N, B)$ формулы

$$\exists x(\neg P(x) \wedge \forall \bar{y}[(\wedge_i P(x_i) \wedge \Theta(\bar{y})) \Longleftrightarrow \phi(x, \bar{y})])$$

эквивалентно выполнению двух условий:

1) $\{\phi(x, \bar{b}) | M \models \Theta(\bar{b}),\ \bar{b} \in B\}$ — совместное множество формул.

2) $\{\phi(x, \bar{b}) | N \models \Theta(\bar{b}),\ \bar{b} \in B\}$ реализуется в N.

Это означает, что для решения вопроса об элементарной эквивалентности M^* и N^* ($M^* \equiv^{L^*} N^*$) необходимо, как минимум, решить вопрос об одновременной реализуемости или нереализуемости двух определимых ϕ-типов над множеством A и B в M и N, соответственно. Неопределимые ϕ-типы не образуют формулы в L^* подобным образом.

Следовательно, для понимания природы формул обогащенной теории $T^* = Th(M^*)$ необходимо выделить:

1) Условие *совместности* множества ϕ-формул над объединением A с конечным множеством элементов из $M \setminus A$.

2) Условия *определимости* ϕ–типа в нестабильной теории.

3) Условие *реализуемости* в M ϕ-типа над объединением A с конечным множеством элементов из $M \setminus A$.

4) Установить структуру взаимосвязи типов.

Для формулы $\phi(x, \bar{y})$ рассмотрим следующее условие:

$C(\phi)$ *Существует $m_\phi < \omega$, что совместность множества ϕ-формул следует из m_ϕ-совместности этого множества.*

Для любой выпуклой формулы $\phi(x, \bar{y})$, любой слабо о-минимальной теории следует выполнимость $C(\phi)$ и $m_\phi = 2$.

Естественным образом возникает понятие приемлемости подмножества A модели M. Множество A *приемлемое*, если совпадение типов двух кортежей элементов над A в исходном языке влечет совпадение типов этих кортежей элементов в обогащенном языке.

Изучение полной теории $T^* = Th(M^*)$, $M^* = (M, A)$ во многих случаях сводится к изучению *консервативных* расширений A, то есть таких расширений в которых произвольный кортеж элементов из $M \setminus A$ имеет определимый тип над A.

Таким образом, для исследования теории обогащенной модели необходимо:

1) провести классификацию типов над множествами в исходной теории;

2) установить свойства неортогональности двух типов;

3) найти необходимые и достаточные условия определимости типов;

4) найти условия существования ω–насыщенных консервативных расширений;

5) установить условия приемлемости множеств для исходной модели.

Центральным понятием в вопросах определимости типов является понятие сходимости формулы к типу.

Определение 1.1.2. *Пусть* Γ *— неизолированное совместное множество* A*–формул. Скажем, что* Γ *квазимодельное, если для любой формулы* $\Theta \in \Gamma$ *существует* $\bar{a} \in A$*, что* $N \models \Theta(\bar{a})$.

Факт 1.1.3. *Для любого неизолированного квазимодельного множества* A*–формул* Γ*, замкнутого относительно конечных конъюнкций, существует квазимодельный тип над* A*, расширяющий* Γ.

Доказательство. Для любой A-определимой формулы $Q(\bar{y})$ по крайней мере одно из следующих множеств формул $\Gamma(\bar{y}) \cup \{Q(\bar{y})\}$, $\Gamma(\bar{y}) \cup \{\neg Q(\bar{y})\}$ квазимодельно. $\diamondsuit$

Мы говорим, что A-формула $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ *слабо сходится к типу* $q(\bar{x}) \in S(A)$ и обозначаем $WEC(\phi(\bar{x}, \bar{y}), q(\bar{x}))$, если для любой формулы $\Theta \in q$ существует $\bar{a} \in A$, что $\phi(\bar{x}, \bar{a})$ делит $\Theta(N)$.

Мы говорим, что A–формула $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ *сильно сходится к типу* $q(\bar{x})$ и обозначаем $STC(\phi(\bar{x}, \bar{y}), q(\bar{x}))$, если любой формулы $\Theta \in q$ существует $\bar{a} \in A$, что $\phi(N, \bar{a}) \subset \Theta(N)$. Почти всегда мы будем опускать $\bar{x}$ при написании $q(\bar{x})$.

Факт 1.1.4. *Пусть* $q \in S(A)$*. Если для любой формулы* $\phi(\bar{y}, \bar{u})$ *языка* L *выполняется* $\neg WEC(\phi(\bar{y}, \bar{u}), q)$*, то тип* q *является определимым.*

Мы говорим, что кортеж $\bar{\alpha}$ *слабо ортогонален типу* q, если для любой A-формулы $\phi(\bar{x}, \bar{y})$, формула $\phi(\bar{x}, \bar{\alpha})$ не делит $q(N) = \bigcap_{\Theta \in q} \Theta(N)$ (обозначаем это $\bar{\alpha} \perp^w q$), и говорим, что $\bar{\alpha}$ *не слабо ортогонален* типу q, если существует A-формула $\phi(\bar{x}, \bar{y})$, такая что $\phi(\bar{x}, \bar{\alpha})$ делит $q(N)$ ($\bar{\alpha} \not\perp^w q$).

Заметим, что $\phi(\bar{x}, \bar{\alpha})$ делит $q(N)$ тогда и только тогда, когда для любой формулы $\Theta \in q$ формула $\phi(\bar{x}, \bar{\alpha})$ делит множество $\Theta(N)$. Тогда для любых кортежей $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, таких что $tp(\bar{\alpha}/A) = tp(\bar{\beta}/A)$, мы имеем: $\bar{\alpha} \not\perp^w q \Longleftrightarrow \bar{\beta} \not\perp^w q$. Таким образом, $p \in S(A)$ слабо ортогонален типу $q \in S(A)$ ($p \perp^w q$), если $\exists \bar{\alpha}(\equiv \forall \bar{\alpha}) \in p(N)$, такой что $\bar{\alpha} \perp^w q$ или , что эквивалентно ([1], Definition V.1.1.(i)), $p(\bar{x}) \cup q(\bar{y})$ определяет полный $(l(\bar{x}) + l(\bar{y}))$-тип. Заметим, что если $p \not\perp^w q$, то $q \not\perp^w p$ и если p алгебраический, то для любого $q \in S(A)$, $p \perp^w q$.

Факт 1.1.5. *Пусть $q \in S(A)$. Следующие условия эквивалентны:*
(i) существует A–формула $\phi(\bar{y}, \bar{u})$, что $WEC(\phi(\bar{y}, \bar{u}), q)$.
(ii) существует квазимодельный $r \in S(A)$, $r \not\perp^w q$.

Доказательство. 1. Рассмотрим следующее множество A-формул:

$$\Gamma := \{K(\Theta)(\bar{y}) \mid \Theta \in q, K(\Theta)(\bar{y}) := \exists x[\phi(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \Theta(\bar{x})] \wedge \exists x[\neg\phi(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \Theta(\bar{x})]\}$$

Ясно, что Γ квазимодельное и замкнутое относительно конечных конъюнкций. Тогда по Факту 1.1.3 существует квазимодельный тип $r \in S(A)$, расширяющий Γ. Поэтому $\forall \bar{\gamma} \in r(N) \subseteq \Gamma(N)$, формула $\phi(x, \bar{\alpha})$ делит $q(N)$. Это значит, что $\bar{\gamma} \not\perp^w q$ и, следовательно, $r \not\perp^w q$.

2. Пусть $\bar{\alpha} \in r(N)$ и $\bar{\alpha} \not\perp^w q$. Тогда для некоторой формулы $\phi(\bar{x}, \bar{y})$, $\phi(\bar{x}, \bar{\alpha})$ делит $q(N)$. Отсюда, для любой $\Theta(\bar{x}) \in q$, имеем, что $\phi(\bar{x}, \bar{\alpha})$ делит $\Theta(N)$. Последнее означает, что $N \models K(\Theta)(\bar{\alpha})$. Таким образом, $K(\Theta)(\bar{y}) \in r$ и, в силу квазимодельности r, существует $\bar{a} \in A$, такой что $N \models K(\Theta)(\bar{a})$. Тогда имеет место $WEC(\phi(\bar{x}, \bar{y}), q)$. $\diamondsuit$

Определение 1.1.6. *Пусть $q \in S(A)$. Тогда мы говорим, что тип q строго определим, если для любой A-формулы $H(\bar{y}, \bar{u})$ имеем $\neg WEC(H(\bar{y}, \bar{u}), q)$.*

Определение 1.1.7. *Пусть $q \in S(A)$, а $\phi(\bar{y}, \bar{u})$ — A-формула. Будем говорить, что тип q является слабо $\phi(\bar{y}, \bar{u})$-изолированным, если существует A-формула $\Theta^{\phi}(\bar{y})$ из типа q, такая что для любого $\bar{a} \in A^{l(\bar{u})}$ верно:*

$$[M' \models \exists \bar{y}(\Theta^{\phi}(\bar{y}) \wedge \phi(\bar{y}, \bar{a})) \rightarrow \forall \bar{y}(\Theta^{\phi}(\bar{y}) \rightarrow \phi(\bar{y}, \bar{a}))]$$

Мы говорим, что q является слабо изолированным, если q является слабо $\phi(\bar{y}, \bar{u})$-изолированным для любой A-определимой формулы $\phi(\bar{y}, \bar{u})$.

Утверждение 1.1.8. *Пусть $q \in S(A)$. Следующее истинно:*
(i) Если q изолированный, то q слабо изолированный.
(ii) q слабо изолированный тогда и только тогда, когда q строго определимый.

Доказательство Утверждения 1.1.8 (i) следует из определения изолированного типа.

(ii) Предположим, что для некоторой A-формулы $\phi(\bar{y},\bar{u})$ тип $q \in S(A)$ не-слабо $\phi(\bar{y},\bar{u})$-изолированный. Тогда для любой A-формулы $\Theta(\bar{y}) \in q$ существует $\bar{a} \in A^{l(\bar{u})}$ такой, что

$$M' \models \exists \bar{y}_1(\phi(\bar{y}_1,\bar{a}) \wedge \Theta(\bar{y}_1)) \wedge \exists \bar{y}(\neg\phi(\bar{y},\bar{a}) \wedge \Theta(\bar{y})).$$

Это означает, что $WEC(\phi(\bar{y},\bar{u}),q)$. Доказательство обратного утверждение похожее. $\diamondsuit$

Факт 1.1.9. *Пусть r, $q \in S(A)$, r квазимодельный, $H(\bar{x},\bar{y})$ — A-определимая формула. Если $\exists\bar{\gamma}(\equiv \forall\bar{\gamma}) \in r(N), H(N,\bar{\gamma}) \subset q(N)$, то $STC(H(\bar{x},\bar{y}),q)$.*

Доказательство. Имеем, что $H(N,\bar{\gamma}) \subset q(N)$ тогда и только тогда, когда для любой формулы $\Theta \in q$, множество $H(N,\bar{\gamma}) \subset \Theta(N)$, если и только если для любой формулы $\Theta \in q$, $N \models \forall \bar{x}(H(\bar{x},\bar{\gamma}) \rightarrow \Theta(\bar{x}))$. Так, в силу того, что $\forall \bar{x}(H(\bar{x},\bar{y}) \rightarrow \Theta(\bar{x})) \in r$ и r квазимодельный, получаем $STC(H(\bar{x},\bar{y}),q)$. $\diamondsuit$

Для слабо о-минимальной теории понятие слабой сходимости формулы к 1-типу конкретизируется (трансформируется) в понятия левой, правой и двусторонней сходимости (Определение 2.1.22). В этих терминах и сформулирован критерий определимости 1-типа над произвольным множеством (Теорема 2.3.4) и его следствие, критерий определимости 1-типа над объединением модели и ht-определимой над ней конечной последовательностью (Предложение 2.2.7).

Замечание. Понятие сходимости формулы к не изолированному типу неявно использовалось в доказательствах теорем по упорядоченным моделям ([6], [7], [85], [83]) и моделям стабильных теорий ([1], [15], [16], [17], [84]). Чтобы закончить мотивацию введения этих понятий, мы приведем один простой факт, который поможет объяснить природу понятия сходимости формулы к типу с помощью хорошо известных понятий.

Факт 1.1.10. *Пусть T — стабильная теория, N — большая насыщеная модель теории T, $A \subset N$, $q \in S(A)$ и $\phi(\bar{x},\bar{y})$ — A-определимая формула. Тогда выполняется следующее:*

1. Если q квазимодельный, то q стационарный.

2. Если имеет место $WEC(\phi(\bar{x},\bar{y}),q)$, то существует квазимодельный (стационарный) тип $r \in S(A)$, такой что $r \not\perp^a q$.

3. Пусть $M \prec N$, $p \in S(N)$, p не ответвляется над M. Тогда для любого $\bar{\alpha} \in N \setminus M$ тип $p_1 := \{\theta(\bar{x}) \in p | \theta(\bar{x})$ — $(M \cup \bar{\alpha})$-определимая формула$\}$ квазимодельный.

4. Пусть $\bar{\alpha} \in N \setminus A$, $q = tp(\bar{\alpha}|A)$ $\phi(\bar{x},\bar{\alpha})$ делиться над A ([1], Definition V.1.3.). Тогда для любого типа $p \in S(A)$, такого что $p(N) \cap \phi(N,\bar{\alpha}) \neq \emptyset$ выполняется следующее: $p(N) \cap \neg\phi(N,\bar{\alpha}) \neq \emptyset$, то есть $\bar{\alpha} \not\perp^w p$ и, следовательно, $q \not\perp^w p$.

Доказательство. 1. Вспомним ([1], Definition III.1.7., Definition III.4.1., Lemma III.4.18., Corollary III.2.9.(ii)), что если для любой A-определимой эквивалентности $E(\bar{x}, \bar{z})$ с конечным числом E-классов существует $\bar{a} \in A$, такой что $E(\bar{x}, \bar{a}) \in q$, то q стационарный.

Пусть $E(\bar{x}, \bar{y})$ — A-определимое отношение эквивалентности с конечным числом E-классов. Тогда пусть $\phi_0(\bar{x}) := (\exists \bar{z}) E(\bar{x}, \bar{z}) \in q$. Так как q квазимодельный, существует $\bar{a}_0 \in A$, такой что $N \models (\exists \bar{z}) E(\bar{z}, \bar{a}_0)$. Если $E(\bar{x}, \bar{a}_0) \notin q$, то $\phi_1(\bar{x}) := \exists \bar{z}[E(\bar{x}, \bar{z}) \wedge \neg E(\bar{x}, \bar{a}_0)]$ — A-определимая формула и $\phi_1 \in q$. Пусть $\bar{a}_1 \in A$, такой что $N \models \phi_1(\bar{a}_1)$. Далее, пусть $\phi_i(\bar{x}) := \exists \bar{z}[E(\bar{x}, \bar{z}) \wedge \bigwedge_{j<i} \neg E(\bar{x}, \bar{a}_j)]$. Это — A-формула, и $\phi_i \in q$. Тогда $N \models \bigwedge_{j \neq n < i} \neg E(\bar{a}_j, \bar{a}_n)$. Таким образом, если для каждого $i < \omega$, $\phi_i(\bar{x}) \notin q$, то мы получим противоречие с тем, что E имеет только конечное число E-классов.

Так, для любого A-определимого отношения эквивалентности $E(\bar{x}, \bar{z})$ мы имеем, что $q(N)$ — подмножество одного из A-определимых E-классов.

2. Вспомним ([17], стр. 143), что два типа $p, q \in S(A)$ почти ортогональны ($p \perp^a q$), если $\forall \bar{\alpha} \in p(N), \forall \bar{\beta} \in q(N)$ имеем, что $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ — A-независимы и, если $p \perp^a r$ и один из них стационарный, то $p \perp^w r$. По Факту 1.1.5 существует квазимодельный тип $r \in S(A)$, такой что $p \not\perp^w r$ и, следовательно, в силу стационарности r по Факту 1.1.10.1, $p \not\perp^a r$.

3. Вспомним ([1], Theorem III.0.1.(4), Corollary III.4.10.), что $p \in S(N)$, $M \prec N$, не ответвляется над M, если и только если p конечное реализуемый в M (p конечно реализуемый в модели (!) M, если для любой формулы $\phi \in p$ существует $\bar{a} \in M$, такой что $N \models \phi(\bar{a})$). Рассмотрим произвольную $(M \cup \bar{\alpha})$-определимую формулу $\theta(\bar{x}, \bar{\alpha}) \in p$. В виду того, что p конечно реализуемый в M, существует $\bar{a} \in M$, такой что $N \models \theta(\bar{a}, \bar{\alpha})$. Это значит, что p_1 квазимодельный.

4. Пусть $\bar{\gamma} \in p(N) \cap \phi(N, \bar{\alpha})$. Из определения деления над A следует существование $n < \omega$ $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n \in q(N)$, такого что $N \models \neg \exists \bar{x}(\phi(\bar{x}, \bar{\alpha}) \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \phi(\bar{x}, \bar{\alpha}_i))$. Тогда для некоторого $\bar{\alpha}_i, \bar{\gamma} \notin \phi(N, \bar{\alpha}_i)$. Далее, в силу того, что $tp(\bar{\alpha}|A) = tp(\bar{\alpha}_i|A) = q$ и $\bar{\gamma} \in p(N)$, $p \in S(A)$, имеем, что существует $\bar{\gamma}_i \in p(N)$, такой что $\bar{\gamma}_i \notin \phi(N, \bar{\alpha})$. Последнее доказывает Факт 1.1.10.4. $\diamondsuit$

Замечание 1.1.11. *Пусть M модель произвольной полной теории первого порядка, M' достаточно большое элементарное расширение M, $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in M' \setminus M$, $\phi(x, \bar{y}, \bar{z})$ – M-формула такая, что $l(\bar{y}) = k$, $tp(\bar{\alpha}|M) = tp(\bar{\beta}|M)$. Тогда для любого $\bar{a} \in M^k$ верно:*

(i) $[\phi(M', \bar{a}, \bar{\alpha}) \cap M = \emptyset \iff \phi(M', \bar{a}, \bar{\beta}) \cap M = \emptyset]$;

(ii) $\forall r \in S_1(M)[\phi(M', \bar{a}, \bar{\alpha}) \cap r(M') \neq \emptyset \iff \phi(M', \bar{a}, \bar{\beta}) \cap r(M') \neq \emptyset]$

(iii) $(\forall r \in S_1(M))[\phi(M', \bar{a}, \bar{\alpha}) \subset r(M') \iff \phi(M', \bar{a}, \bar{\beta}) \subset r(M')]$

Рассмотрим координатизируемость через обогащение.

В работе [18] была сформулирована

Гипотеза (В. Ходжес) *Если T — относительно категоричная теория и все модели теории T непрерывно естественны над одноместным предикатом P, то теория T координатизируема над P.*

Заметим, что для отдельно взятых моделей относительно категоричных теорий понятия координатизируемости и непрерывной естественности не совпадают [79], [80]. Кроме того, Д. Эвансом, Р. Хевитом и Е. Хрушовским было показано, что для относительно категоричных теорий из того, что все модели естественны над одноместным предикатом P, не следует координатизируемость.

Пусть $(N;\Sigma)$ модель сигнатуры Σ. Обозначим через $M = (P(N), \Sigma_0)$, здесь $\Sigma_0 \subset \Sigma$, $P^1 \in \Sigma \setminus \Sigma_0$. Говорят [19], *$N$ координатизируема над P*, если существует обогащение $N^+ = (N^+, \Sigma^+)$ модели $N = (N, \Sigma)$ расширением сигнатуры $\Sigma \subset \Sigma^+$ и доопределением сигнатурных символов из Σ^+ на N так, что верно:

(i) Для любой формулы $\phi(\bar{x})$ сигнатуры Σ^+ существует формула $\phi^*(\bar{x})$ сигнатуры Σ_0, что для любого кортежа $\bar{a} \in M$ выполняется

$$[N^+ \models \phi(\bar{a}) \Longleftrightarrow M \models \phi^*(\bar{a})].$$

(ii) N^+ есть определимое замыкание M в N^+,
то есть для каждого $b \in N$ существует формула $\phi(x, \bar{y})$ сигнатуры Σ^+ и кортеж элементов $\bar{a} \in M$, что

$$N^+ \models \phi(b, \bar{a}) \wedge \exists! x \phi(x, \bar{a}).$$

Условие (i) называется условием *редуцированности.*

Полная теория T сигнатуры Σ называется *относительно категоричной над* P и Σ_0, если для любых моделей N_1 и N_2 теории T, из $M_1 = M_2$ следует существование изоморфизма между N_1 и N_2, тождественного на M.

Говорят [19], *N непрерывно естественна над M*, если существует вложение $h : Aut(M) \to Aut(N)$, что

1) h – *естественно*, то есть

$$\forall g \in Aut(M),\ h(g) \restriction M = g.$$

2) h – непрерывно в топологии с базой

$$X_{\bar{a},\bar{b}} = \{\alpha \in Aut(N) | \alpha(\bar{a}) = \bar{b}\}.$$

Приведем пример теории, опровергающей Гипотезу В. Ходжеса.

Теорема 1.1.12. *Существует полная теория T, такая что T — относительно категоричная теория над одноместным предикатом P, все модели теории T непрерывно естественны над P, все модели T кроме простой некоординатизируемы над P и Σ_0.*

Доказательство. Опишем минимальную модель нашей теории.

Пусть сигнатуры — $\Sigma = \langle =, P^1, \epsilon_1^2, \epsilon_2^2, f_1^1, f_2^1, g^1 \rangle$, $\Sigma_0 = \langle =, \epsilon_1^2, \epsilon_2^2 \rangle$, универсум — $Z^2 \times 2$, где $2 = \{0, 1\}$, модель $N = (Z^2 \times 2; \Sigma)$, где сигнатурные символы из Σ определены на N следующим образом:

$$\forall \langle m, n, i \rangle, \langle m', n', j \rangle \in Z^2 \times 2,\ m, nm', n' \in Z,\ i, j \in 2,$$

$$N \models \epsilon_1(\langle m, n, i \rangle, \langle m', n', j \rangle) \Longleftrightarrow n = n',$$

$$N \models \epsilon_2(\langle m, n, i \rangle, \langle m', n', j \rangle) \Longleftrightarrow m = m',$$

$$N \models f_1(\langle m, n, i \rangle) = \langle m+1, n, i \rangle \wedge f_2(\langle m, n, i \rangle) = \langle m, n+1, i \rangle,$$

$$m \neq n \Longrightarrow g(\langle m, n, i \rangle) = \langle m, n, i = \rangle,$$

$$m = n \Longrightarrow g(\langle m, n, i \rangle) = \langle m+1, n+1, i \rangle,$$

$$N \models P(\langle m, n, i \rangle) \Longleftrightarrow m = n.$$

Пусть $M = (P(N), \Sigma_0)$. В дальнейшем мы не будем отличать модели N, M от их универсумов $Z^2 \times 2$ и $P(N)$, соответственно.

Легко понять, что N – минимальная модель ω_1–категоричной теории T. Это следует из того, что любые два ϵ_1 и ϵ_2–класса пересекаются по 2-элементному множеству из предиката.

Ограничение теории T на предикат P есть сильно минимальная теория двойного следования g.

Для простоты рассуждений, при этом не теряя общности, ограничимся рассмотрением модели N_1 теории T такой, что существуют два элемента $a_1, c_1 \in P(N_1)$ и $\{a_1, c_1\}$ –максимальное независимое множество в $P(N_1)$. Тогда, очевидно, любой элемент из N_1 алгебраичен над $P(N_1)$.

Лемма 1.1.13. *N_1 не координатизируема над P и Σ_0.*

Доказательство Леммы 1.1.13. Предположим противное. N_1 – координатизируема над P и Σ_0. Пусть N_1^+ – его координатизация. тогда для элемента $b_1 \in N_1$ такого, что

$$N_1 \models \epsilon_1(b_1, a_1) \wedge \epsilon_2(b_1, c_1),$$

существует формула $Q(x, y, z)$ сигнатуры Σ^+, что

$$N_1^+ \models Q(b_1, a_1, c_1) \wedge \exists! x Q(x, a_1, c_1) \wedge \forall x (Q(x, a_1, c_1) \to (\epsilon_1(b_1, a_1) \wedge \epsilon_2(b_1, c_1))).$$

Заметим. что в формуле Q можно ограничиться константами a_1, c_1 так, как все элементы из $P(B_1)$ лежат в $dcl(\{a_1, c_1\})$. обозначим через a_2 и c_2 элементы из $P(B_1)$ лежащие в тех же ϵ_1 и ϵ_2–классах, что a_1 и c_1.

Рассмотрим реализации следующих четырех формул $Q(x, a_1, c_1)$, $Q(x, a_2, c_1)$, $Q(x, a_1, c_2)$, $Q(x, a_2, c_2)$. Из определения формулы и из того, что $tp(a_i, c_j) = tp(a_1, c_1)$ следует, что реализации этих формул одноэлементные и содержатся в множестве $\{b_1, b_2\}$. Есть восемь возможностей. Среди них, в силу симметричности b_1, b_2 выделяются четыре основных случая.

1. $N_1^+ \models Q(b_1, a_1, c_1) \wedge Q(b_2, a_2, c_1) \wedge Q(b_1, a_1, c_2) \wedge Q(b_2, a_2, c_2)$.
2. $N_1^+ \models Q(b_1, a_1, c_1) \wedge Q(b_2, a_2, c_1) \wedge Q(b_2, a_1, c_2) \wedge Q(b_1, a_2, c_2)$.
3. $N_1^+ \models Q(b_1, a_1, c_1) \wedge Q(b_1, a_2, c_1) \wedge Q(b_2, a_1, c_2) \wedge Q(b_1, a_2, c_2)$.
4. $N_1^+ \models Q(b_1, a_1, c_1) \wedge Q(b_1, a_2, c_1) \wedge Q(b_1, a_1, c_2) \wedge Q(b_1, a_1, c_1)$.

Докажем, что в каждом из этих случаев приходим к противоречию.

1. Таким образом, $N_1^+ \models \forall x(Q(x, a_1, c_1) \longleftrightarrow Q(x, a_1, c_2))$. Следовательно этим свойством обладают любые пары $< c_1', c_2' >$. Тогда формула $\epsilon_1(x, a_1)$ делится на две бесконечные части и из-за функции g формула $\epsilon_2(x, a_2)$ тоже делится на две бесконечные части. Отсюда формула

$$\Phi(y, a_1) = \exists t \exists x(Q(x, a_1, y) \wedge P(y) \wedge g(x) = t \wedge Q(t, y, a_1))$$

делит формулу $P(y)$ на две бесконечные части в модели N_1^+ и тогда в силу редуцированности, существует формула $\Phi^*(y, a_1)$ сигнатуры Σ_0, которая должна делить $P(y)$ на две бесконечные части, что противоречит ее сильно минимальности.

2. Рассмотрим теорию $T_1 = Th(< B_1^+; c_1, c_2, a_1, a_2 >)$. Из T_1 выводима формула $(*)$,

$$T \vdash \exists! x \exists! y(Q(x, a_1, c_1) \wedge Q(x, a_2, c_1) \wedge Q(y, a_2, c_2) \wedge Q(x, a_1, c_2) \wedge x \neq y)(*).$$

Заметим, $T_1 = Th(N_1^+) \cup R(c_1, c_2, a_1, a_2)$, здесь $R(c_1, c_2, a_1, a_2)$ – полный 4-тип теории $T_1 = Th(N_1^+)$.

Из свойства выводимости следует существование конечного $R_0(c_1, c_2, a_1, a_2) \subset R(c_1, c_2, a_1, a_2)$, что

$$Th(N_1^+) \cup R_0(c_1, c_2, a_1, a_2) \vdash (*).$$

Из сильной минимальности P и редуцированности N_1^+ над P следует существование натурального n_0, что

$$Th(N_1^+) \vdash \forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 (R_0(x_1, x_2, y_1, y_2) \leftrightarrow \neg(\vee_{k=1}^{n_0} g^k(x_i) = y_j)).$$

Отсюда следует, что формула

$$\exists u(Q(u,x,g^{n_0+1}(x)) \wedge f_1^n(x) = u)(**)$$

делит P на две бесконечные части, что противоречит редуцированности N_1^+ над P и сильной минимальности P.

3-4. Рассуждая в 2. и используя формулу $(**)$ приходим к противоречию. $\diamondsuit$

Лемма 1.1.14. *N_1 непрерывно естественна над P.*

Доказательство Леммы 1.1.14. Блоком в N_1^+ назовем определимое (без использования g) замыкание одного элемента. Следовательно имеем 4 блока. Назовем *неглавным* блок не содержащий элементов P. Слоем в блоке назовем назовем множество элементов блока, любые два из которых связаны при помощи функций $f_1, f_2, f_1^{-1}, f_2^{-1}$. Рассмотрим следующее обогащение $N_1^* =< N_1; S^1 >$ модели N_1 полученное следующим образом. В каждом неглавном блоке одноместному предикату S удовлетворяет ровно один слой из двух. Очевидно, $Aut(N_1^*) = Aut(M_1)$ и $Aut(N_1^*) < Aut(N_1)$. Следовательно существует естественное вложение $h : Aut(M_1) \mapsto Aut(N_1)$, что $\alpha \in Aut(M_1), (\alpha) \upharpoonright M_1 = \alpha$.

Непрерывность h следует из существования для каждого $\bar{b} \in N_1 \setminus M_1$ элементов из M_1 и $h(O_{\bar{a}}) \subset O_{\bar{b}}$, где $O_{\bar{a}} = \{s \in Aut(M_1) | s(\bar{a}) = \bar{a}\}$. $\diamondsuit$

Таким образом, из Лемм 1.1.13, 1.1.14 и из того, что теория T почти сильно минимальна [20] и, следовательно, относительно категоричная над P следует справедливость Теоремы 1.1.12. $\diamondsuit$

1.2 Предварительные факты

В данном подразделе мы будем рассматривать множества и модели некоторой слабо о-минимальной теории. Мы говорим, что два выпуклых множества C и D *отделимы элементом a (a-отделимы)*, если $C < a < D$ или $D < a < C$. Мы говорим, что семейство выпуклых множеств *E-отделимо*, если эти множества попарно отделимы элементами из E.

Факт 1.2.1. *Теория T слабо о-минимальна тогда и только тогда, когда для любой формулы $\phi(x, \bar{y})$ существует натуральное число $n_\phi < \omega$, такое что для любой модели $M \models T$, для любого $\bar{a} \in M$ множество $\phi(M, \bar{a})$ — это объединение $< n_\phi$ $\bar{a}$–определимых выпуклых $\neg\phi(M, \bar{a})$–отделимых подмножеств.*

Доказательство Факта 1.2.1. Пусть $\phi(x,\bar{y})$ произвольная формула,

$$\begin{aligned} E_\phi(x_1,x_2,\bar{y}) &:= \phi(x_1,\bar{y})\wedge\phi(x_2,\bar{y})\wedge \\ &\quad \wedge\forall t((x_1<t<x_2\vee x_2<t<x_1)\to\phi(t,\bar{y})), \\ \Psi_\phi^n(\bar{y}) &:= \exists x_1\ldots\exists x_n\left(\bigwedge_{1\le i<j\le n}\neg E_\phi(x_i,x_j,\bar{y})\wedge\phi(x_i,\bar{y})\wedge\phi(x_j,\bar{y})\right). \end{aligned}$$

Заметим, что $E_\phi(x_1,x_2,\bar{y})$ — отношение эквивалентности для любого $\bar{y}$. Если $T\cup\{\Psi_\phi^n(\bar{c})\}_{n<\omega}$ непротиворечиво, тогда то теореме существования модели для любых непротиворечивых множеств из формул без свободных переменных существует модель для $T\cup\{\Psi_\phi^n(\bar{c})\}_{n<\omega}$ [14], что противоречит слабой о-минимальности T. Таким образом, существует такое число $n<\omega$, что $T\vdash\forall\bar{y}\neg\Psi_\phi^n(\bar{y})$. Пусть $\phi_0(x,\bar{y}):=\phi(x,\bar{y})\wedge\forall t((\phi(t,\bar{y})\wedge t<x)\to E_\phi(x,t,\bar{y}))$, $\phi_i(x,\bar{y}):=\phi(x,\bar{y})\wedge\forall t((\phi(t,x)\wedge\bigwedge_{j=0}^{i-1}\neg\phi_j(t,\bar{y})\wedge t<x)\to E_\phi(t,x,\bar{y})), i<n+1$.

Тогда $T\vdash\forall x\forall\bar{y}(\phi(x,\bar{y})\leftrightarrow\bigvee_{i=0}^{n}\phi_i(x,\bar{y}))$. $\Diamond$

Пусть $p\in S_1(A)$, $A\subseteq M$, где M — модель слабо о-минимальной теории, и формула $\phi(x,\bar{a})\in p$. Тогда для некоторого i из доказательства факта 1.2.1 $\phi_i(x,\bar{a})\in p$ и $\phi_i(x,\bar{a})$ выпуклая формула. Отсюда следуют несколько полезных утверждений.

Замечание 1.2.2. *Множество всех реализаций любого 1-типа над множеством модели слабо о-минимальной теории в любой модели этой теории является выпуклым множеством, потому что каждый тип определяется семейством его выпуклых формул.*

Факт 1.2.3. *Пусть $p\in S_1(A)$, $A\subseteq M\models T$. Тип p определим тогда и только тогда, когда он $\phi(x,\bar{y})$–определим для каждой выпуклой по x формулы $\phi(x,\bar{y})$.*

Замечание 1.2.4. *Если существует $\bar{a}$–формула, которая делит выпуклое B, то существует $\bar{a}$–формула, которая расщепляет B.*

Факт 1.2.5. *Пусть $p\in S_1(A)$ квазирациональный. Тогда p определим.*

Доказательство. Положим для определенности, что p квазирациональный вправо. Случай, когда p квазирациональный влево рассматривается аналогично. Пусть $U_p(x)$ — A-формула, такая что $U_p(x)\in p$, $U_p(N)^+=p(N)^+$. Пусть $\varphi(x,\bar{y})$ — произвольная $(l(\bar{y})+1)$-A-формула. Рассматрим следующую $l(\bar{y})$-A-формулу:

$$\Theta_\varphi(\bar{y}):=\exists x((\varphi(x,\bar{y})\wedge U_p(x))\wedge\forall z(x<z<U_p(N)^+\to\varphi(z,\bar{y}))).$$

Ясно, что для всякого $\bar{a}\in A^{l(\bar{y})}$ имеем: $[N\models\Theta_\varphi(\bar{a})\iff\varphi(x,\bar{a})\in p]$. $\Diamond$

Замечание 1.2.6. *Пусть $p \in S_1(A)$. Тогда следующее справедливо:*

(i) Если p квазирациональный или изолированный, то p является определимым.

(ii) Если $A = M$, то тип p определим тогда и только тогда, когда p квазирационален.

Лемма 1.2.7. *Пусть p — иррациональный тип из $S_1(A)$. Тогда мы имеем (i) $\Rightarrow$ (ii).*

(i) p является неопределимым.

(ii) Существует выпуклая по переменной x формула $G(x, \bar{y})$, такая что следующее справедливо:

(a) для любой формулы $D(x, \bar{d}) \in p$ существуют γ_1, $\gamma_2 \in D(M', \bar{d})$ и $\bar{g} \in A^{l(\bar{y})}$, такие что

$$[G(x, \bar{g}) \in p \wedge \gamma_1 < G(M', \bar{g}) < \gamma_2]$$

(b) для любых формул $C(x, \bar{c})$ и $S(x, \bar{s})$, где $\bar{c}, \bar{s} \in A$, таких что

$$C(M', \bar{c}) < p(M') < S(M', \bar{s})$$

существуют $\bar{g}_1, \bar{g}_2 \in A^{l(\bar{y})}$, такие что

$$C(M', \bar{c}) < G(M', \bar{g}_1) < p(M') < G(M', \bar{g}_2) < S(M', \bar{s}).$$

Доказательство. Пусть $\phi(x, \bar{y})$ — выпуклая формула по x такая, что p не является $\phi(x, \bar{y})$–определимым. Предположим (ii) не выполняется. Тогда существует формула $D(x, \bar{d}) \in p$, где $\bar{d} \in A$, такая что для любых кортежей $\bar{g} \in A^{l(\bar{y})}$ и элементов $\gamma_1, \gamma_2 \in D(M', \bar{d})$ справедливо следующее:

$$[\gamma_1 < \phi(M', \bar{g}) < \gamma_2 \Rightarrow \phi(x, \bar{g}) \notin p]$$

Рассмотрим

$$\phi_1(x, \bar{y}, \bar{d}) := \neg \exists z (\phi(M', \bar{y}) < z \wedge D(z, \bar{d})) \wedge \phi(x, \bar{y}) \wedge x < D(M', \bar{d})^+$$

Если верно (b), то для любых формул $C(x, \bar{c})$ и $S(x, \bar{s})$, где $\bar{c}, \bar{s} \in A$ верно, что

$$D(M', \bar{d})^- < C(M', \bar{c}) < p(M') < S(M', \bar{s}) < D(M', \bar{d})^+$$

и существуют $\bar{b}_1, \bar{b}_2 \in A^{l(\bar{y})}$, такие что

— $p(M') \subset \phi_1(M', \bar{b}_1, \bar{d}) (\equiv \phi_1(x, \bar{b}_1, \bar{d}) \in p)$

— $C(M', \bar{c}) < \phi_1(M', \bar{b}_2, \bar{d})$

— $S(M', \bar{s}) \subset \phi_1(M', \bar{b}_2, \bar{d})$

— $p(M') < \phi_1(M', \bar{b}_2, \bar{d})$

тогда формула

$$G(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{d}) := \phi(x, \bar{y}_1, \bar{d}) \wedge \neg\phi(x, \bar{y}_2, \bar{d})$$

удовлетворяет условиям a) и b) и следовательно (ii) выполняется.

Предположим (b) не выполняется. Тогда $(*)$ существует $C_1(x, \bar{c}_1)$, $\bar{c}_1 \in A$:

$$D(M', \bar{d})^- < C_1(M', \bar{c}_1) < p(M')$$

такая, что

$$\forall \bar{b} \in A^{l(\bar{y})}[C_1(M', \bar{c}_1) < \phi_1(M', \bar{b}, \bar{d}) \Rightarrow p(M') < \phi_1(M', \bar{b}, \bar{d})]$$

или (и) существует $S_1(x, \bar{s}_1)$, где $\bar{s}_1 \in A$, такая что $[p(M') < S_1(M', \bar{s}_1) < D(M', \bar{d})^+]$ и

$$\forall \bar{b} \in A^{l(\bar{y})}[S_1(M', \bar{s}_1) \subset \phi_1(M', \bar{b}, \bar{d}) \Rightarrow p(M') \subset \phi_1(M', \bar{b}, \bar{d})]$$

Такие же рассуждения для формулы

$$\phi_2(x, \bar{y}, \bar{d}) := \neg\exists z(D(z, \bar{d})) \wedge z < \phi(M', \bar{y}) \wedge \phi(x, \bar{y}) \wedge D(M', \bar{d}) < x$$

позволяют сформулировать в предположении не выполнимости (b) следующее:

$(**)$ существует формула $C_2(x, \bar{c}_2)$, где $\bar{c}_2 \in A$, такая что выполняются условия $D(M', \bar{d}) < C_2(M', \bar{c}_2) < p(M')$ и

$$\forall \bar{b} \in A^{l(\bar{y})}[C_2(M', \bar{c}_2) \subset \phi_2(M', \bar{b}, \bar{d}) \Rightarrow \phi_2(M', \bar{b}, \bar{d}) \in p]$$

или (и) существует формула $S_2(x, \bar{s}_2)$, где $\bar{s}_2 \in A$, такая что выполняются условия $p(M') < S_2(M', \bar{s}_2) < D(M', \bar{d})^+$ и

$$\forall \bar{b} \in A^{l(\bar{y})}[\phi_2(M', \bar{s}_2) < S_2(M', \bar{s}_2) \Rightarrow \phi_2(M', \bar{b}, \bar{d}) < p(M')]$$

Из $(*)$ и $(**)$ следует существование, по крайне мере, одной пары формул из (C_1, S_2), (C_1, C_2), (S_1, C_2), (S_1, S_2).

Предположим, что существуют такие $C_1(x, \bar{c}_1), S_2(x, \bar{s}_2)$, тогда формула

$$\begin{aligned} \theta_\phi(\bar{y}, \bar{d}, \bar{c}_1, \bar{s}_2) \;\; := \;\; & [\exists x(\phi_1(x, \bar{y}, \bar{d}) \rightarrow \exists x(C_1(x, \bar{c}_1) \wedge \phi(x, \bar{y})) \\ & \wedge\exists x(\phi_2(x, \bar{y}, \bar{d}) \rightarrow \exists x(S_2(x, \bar{s}_2) \wedge \phi(x, \bar{y})) \\ & \wedge\exists x\phi_1(x, \bar{y}, \bar{d}) \vee \exists x\phi_2(x, \bar{y}, \bar{d})) \end{aligned}$$

имеет следующее свойство:

$$\forall \bar{a} \in A^{l(\bar{y})}[M' \models \theta_\phi(\bar{a}, \bar{d}, \bar{c}_1, \bar{c}_2) \Leftrightarrow \phi(x, \bar{a}) \in p]$$

Тогда p является $\phi(x, \bar{y})$–определимым. Противоречие.

Аналогичные рассуждения случаев существования (C_1, C_2), (S_1, C_2), (S_1, S_2) дают нам $\phi(x, \bar{y})$–определимость p. Противоречие.

Таким образом, $\phi(x, \bar{y})$ удовлетворяет условию a).

Если для любой формулы $S(x, \bar{s})$, где $\bar{s} \in A$, удовлетворяющей условию $p(M') < S(M', \bar{s})$, существует такой кортеж $\bar{g} \in A$, что

$$p(M') < \phi(M', \bar{g}) < S(M', \bar{s}).$$

Тогда формула

$$H(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2) := x < \phi(M', \bar{y}_2) \wedge \phi(x, \bar{y}_1)$$

является требуемой для справедливости ii).

Если для любой формулы $C(x, \bar{c})$, где $\bar{c} \in A$, удовлетворяющей условию $C(M', \bar{c}) < p(M')$, существует такой кортеж $\bar{g} \in A$, что

$$C(M', \bar{c}) < \phi(M', \bar{g}) < p(M'),$$

тогда формула

$$H(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2) := x > \phi(M', \bar{y}_2) \wedge \phi(x, \bar{y}_1)$$

является требуемой для справедливости (ii).

Если же существуют $C_3(x, \bar{c}_3)$ и $S_3(x, \bar{s}_3)$, где $\bar{c}_3, \bar{s}_3 \in A$, такие что выполняются условия $C_3(M', \bar{c}_3) < p(M') < S_3(M', \bar{s}_3)$ и

$$\forall \bar{g} \in A[C_3(M', \bar{c}_3) < \phi(M', \bar{g}) < S_3(M', \bar{s}_3) \Rightarrow \phi(x, \bar{g}) \in p],$$

тогда p является $\phi(x, \bar{y})$–определимым. Противоречие. ii) доказано. $\diamondsuit$

Определим

$$\begin{aligned} L(q) &:= \{G(x) \mid G(M') < q(M'), \text{ где } G(x) - A - \text{формула}\}, \\ R(q) &:= \{D(x) \mid q(M') < D(M'), \text{ где } D(x) - A - \text{формула}\}. \end{aligned}$$

Заметим, что $q(M')^+ = \bigcup\limits_{D \in R(q)} D(M')$, $q(M')^- = \bigcup\limits_{G \in L(q)} G(M')$.

Факт 1.2.8. *Пусть $p \in S_1(A)$, $A \subseteq M \models T$. Тогда следующее верно:*

Пусть $F := \{G(M') < x < D(M') \mid G \in L(p), D \in R(p)\}$, тогда p определяется по F.

Доказательство Факта 1.2.8. Следует из Факта 1.2.2, что p определяется по множеству всех выпуклых формул которые содержатся в p. Пусть $\phi(x) \in p$ и $\phi(x)$ выпуклая. Тогда $G_\phi(x) := \forall y(\phi(y) \to x < y)$, $D_\phi(x) := \forall y(\phi(y) \to y < x)$. $\diamondsuit$

Замечание 1.2.9. *Пусть* $p \in S_1(A), \bar{\alpha} \in M' \setminus A, \bar{\alpha} \perp^w p, \delta \in p(M')$. *Тогда для любого 1-типа* $p' = tp(\delta|A \cup \bar{\alpha}) \in S_1(A \cup \bar{\alpha})$ *следующее верно:*

(i) $p(M') = p'(M')$,

(ii) p' *иррациональный тогда и только тогда, когда* p *иррациональный.*

(iii) p' *квазирациональный вправо (влево) тогда и только тогда, когда* p *квазирациональный вправо (влево).*

Утверждение 1.2.10. *Пусть* $p \in S_1(A)$ *неалгебраический. Тогда следующее верно:*

(i) Если p *не квазирациональный влево тогда для любого* $G \in L(p)$ *существует* $G' \in L(p)$ *такая, что* $M' \models \exists x(G(M') < x < G'(M')^+)$.

(ii) Если p *не квазирациональный вправо тогда для любого* $D \in R(p)$ *существует* $D' \in R(p)$ *такая, что* $M' \models \exists x(D'(M')^- < x < D(M'))$.

Доказательство Утверждение 1.2.10. (i) Предположим $G_0(x) \in L(p)$ такой что для любого $G \in L(p)$ следующее верно: (*) $G(M') < G_0(M')^+$. Тогда формула $U(x) = G_0(x)^+ := \forall y(G_0(y) \to y < x)$ удовлетворяет условию квазирациональности влево p, что противоречит предположению. Действительно, во первых $p(M') \subseteq U(M')(\equiv U(x) \in p)$ так как, $G_0(M') < p(M')$. Во вторых, для любой выпуклой A-определимой формулы $\phi(x) \in p$ рассмотрим A-определимую формулу $G_\phi(x) := x < \phi(M')$. Ясно что $G_\phi(M') < \phi(M')$ и так как $p(M') \subset \phi(M')$ мы имеем $G_\phi \in L(p)$. Тогда по (*) $G_\phi(M') < G_0(M')^+$. Это означает что $(\phi(M') \cap U(M'))^- = U(M')^-$ и следовательно, p является квазирациональным влево. Противоречие.

(ii) Доказывается аналогично (i). $\Diamond$

Утверждение 1.2.11. *Пусть* $p \in S_1(A)$. *Тогда следующее верно:*

(i) Если p *не квазирациональный влево тогда для любого* $C \subset M'$, *для любого* C*-определимого* $X \subset M'$ *следующее верно:*

$$[p(M')^- < X \Rightarrow \exists \alpha \in p(M')\ (p(M')^- < \alpha < X)]$$

(ii) Если p *не квазирациональный вправо тогда для любого* $C \subset M'$, *для любого* C*-определимого* $X \subset M'$ *следующее верно:*

$$[X < p(M')^+ \Rightarrow \exists \alpha \in p(M')\ (X < \alpha < p(M')^+)]$$

Доказательство Утверждения 1.2.11 (i) Допустим, что $X = \Theta(M')$, где $\Theta(x)$ — C-определимая формула. Предположим также, что $p(M')^- < X$, то есть для любой формулы $G \in L(p)$ выполняется неравенство $G(M') < X$. Заметим, что для любых $G_1, \ldots, G_n \in L(p)$ формула $G'(x) := \bigvee_i G_i(x)$ лежит в $L(p)$. Так как p не квазирациональный влево, для любых $G_1, \ldots, G_n \in L(p)$

в силу Утверждения 1.2.10 (i) существует $G" \in L(p)$, где $\alpha \in G"(M')$, такая что $G'(M') < \alpha < G"(M')^+$. Рассмотрим

$$\Gamma(x) := \{G(M') < x < D(M') \mid G \in L(p),\ D \in R(p)\} \cup \{x < \Theta(M')\}.$$

Это множество совместно и по теореме компактности существует $\alpha \in M'$, такой что $\models \Gamma(\alpha)$.

(ii) Доказывается аналогично (i). $\diamondsuit$

Определение 1.2.12. *Разбиение $A \subset M$ на два выпуклых подмножества C и D ($C < D$, $C \cup D = A$) называется (C, D)-сечением в A. Если C имеет максимальный или D минимальный элемент в $A \cup \{-\infty, \infty\}$, тогда (C, D)-сечение называется рациональным. В остальных случаях (C, D)-сечение является не рациональным. Мы говорим что сечение (C, D) в модели M квазирациональное, если оно M-определимое, т.е. существует M-формула $H(x)$ такая, что $C = H(M), D = \neg H(M)$. Не квазирациональное сечение является иррациональным.*

Иногда, под (C, D)-сечением понимаем следующее множество формул: $(C, D)(x) := \{c \leq x \leq d : c \in C, d \in D\}$

Утверждение 1.2.13. *Пусть $\bar{\alpha} \in M' \setminus M, \phi(x, \bar{\alpha})$ $(M \cup \bar{\alpha})$-формула такая, что $\phi(M', \bar{\alpha})$ выпуклая, $\phi(M', \bar{\alpha}) \cap M = \emptyset$. Тогда существует сечение (C, D) в M, такое что $C < \phi(M, \bar{\alpha}) < D$.*

Доказательство Утверждения 1.2.13 Обозначим

$$C := \{c \in M \mid M' \models c < \phi(M', \bar{\alpha})\},\ D := \{d \in M \mid M' \models \phi(M', \bar{\alpha}) < d\}.$$

Сечение (C, D) удовлетворяет условию утверждения. $\diamondsuit$

Пусть B произвольное выпуклое множество (не обязательно определимое), $H(x)$ выпуклая формула. Мы говорим что формула $H(x)$ делит B если $H(M') \cap B \neq \emptyset$, $\neg H(M') \cap B \neq \emptyset$, $B \cap H(M') < B \cap \neg H(M')$. Пусть M упорядоченная структура, $p \in S_1(M)$, $a, b \in M$ такая что $M \models a < b$ и p не изолированный. Тогда одна из трех формул содержится в p: $x < a, a < x < b, b < x$. Таким образом, существует сечение (C, D) в M такое что $(C, D)(x) \subset p$ и $p(M') \subset (C, D)(M') := \{\gamma \in M' | C < \gamma < D\}$. Обозначим это сечение для $p \in S_1(M)$ через (C_p, D_p).

Утверждение 1.2.14. *Пусть (C, D) не рациональное сечение в M. Тогда следующее верно:*

(i) Для любой выпуклой M-формулы $H(x)$ если $H(M') \cap (C, D)(M') \neq \emptyset$ и $\neg((C, D)(M') \subset H(M'))$ тогда, или $H(x)$ делит $(C, D)(M')$, или $\neg H(x)$ делит $(C, D)(M')$.

(ii)Для любой M-определимой формулы $H_1(x), H_2(x)$, если $H_1(x), H_2(x)$ делит $(C, D)(M')$ тогда $H_1(M')^+ = H_2(M')^+$.

(iii) Если (C, D) квазирациональное сечение тогда существуют квазирациональные один-типы $p, q \in S_1(M)$ такие, что один из них квазирациональный в лево и другой квазирациональный в право; $(C, D) = (C_p, D_p) = (C_q, D_q)$, $U_p(x) = \neg Uq(x)$, $p(M') \cup q(M') = (C, D)(M')$.

Доказательство Утверждения 1.2.14 (i) Предположим $\exists \alpha, \beta \in (C, D)(M')$, $\alpha < H(M') < \beta$. Тогда $M' \models \exists x H(x)$ и следовательно, $M \models \exists x H(x)$. Это означает для некоторого a из M, $M \models H(a)$. Тогда последнее противоречит определению сечения в модели M. Такие же рассуждения для $\neg H(x)$ завершают доказательство (i).

(ii) Предположим $\exists \alpha \in (C, D)(M') \cap H_2(M')$ такой что $H_1(M' < \alpha < H_2(M')^+$. Тогда формула $H(x) := H_1(M') < x < H_2(M')^+$ является выпуклой и как в(i) это противоречит определению сечения в модели M.

(iii) Если (C, D) квазирациональное сечение, тогда существует M-формула $H(x)$, такая что $H(M) = C$. По (ii) $(C, D)(x) \cup \{H(x)\}$ определяет квазирациональный вправо 1-тип $p \in S_1(M)$, а $(C, D)(x) \cup \{\neg H(x)\}$ определяет квазирациональный влево 1-тип $q \in S_1(M)$, такие что $(C_p, D_p) = (C_q, D_q) = (C, D)$. Таким образом, $p(M') \cup q(M') = (C, D)(M')$. $\diamondsuit$

Определение 1.2.15. *Мы говорим что 1-тип p над $(A \cup B)$ определяется квазирациональным сечением (A, B) если p определяется по следующему множеству формул: $\{a < x \wedge U(x) | a \in A\}$ или $\{x < b \wedge \neg U(x) | b \in B\}$. Здесь, $U(x)$ есть $(A \cup B)$-определимая формула такая что $A \subset U(M'), U(M') \cap B = \emptyset$.*

Заметим, что если $p \in S_1(A \cup B)$ определяется по квазирациональному сечению (A, B) и A имеет максимальный элемент $a_0 \in A$ тогда $U(x) := x \leq a_0$ и p рациональный в лево. Когда B имеет минимальный элемент $b_0 \in B$, p рациональный вправо и $U(x) := x < b_0$. Прямое обобщение этого наблюдения является следующий

Факт 1.2.16. *Пусть $p \in S_1(M), M \models T$. Следующее верно:*

(i) p не определимый тогда и только тогда, когда p иррациональный и тогда и только тогда, когда p определяется по иррациональному сечению в M.

(ii) p определим тогда и только тогда, когда p квазирациональный тогда и только тогда, когда p определяется квазирациональным сечением в M.

Доказательство Факта 1.2.16. Пусть $p \in S_1(M)$. Если p квазирациональное (в право) тогдаn p определим так как для любой $\emptyset$-определимой формулы

$\phi(x, \bar{y})$ для любого $\bar{a} \in M^{l(\bar{y})}$ следующее верно:

$$[\phi(x, \bar{a}) \in p \iff M \models \exists y(\phi(y, \bar{a}) \wedge U_p(y) \wedge \forall x(y < x < U_p(M)^+ \to \phi(x, \bar{a})))].$$

Для $p \in S_1(M)$ рассмотрим (C_p, D_p). Предположим (C_p, D_p) рациональное вправо (т.е. существует $b_0 \in D_p, b_0 < (D_p \setminus \{b_0\})$). Пусть $U_p(x) := x < b_0$. Тогда по определению D_p мы имеем $x < b_0 \in p$. Let $\phi(x) \in p$ такое что $\phi(x)$ выпуклая формула. Тогда $\phi(x) \wedge U_p(x) \in p$. Так как pодин-тип над моделью M существует $c \in \phi(M) \cap U_p(M)$. Тогда $c \in C_p$ так как $c < b_0$ and b_0 есть минимальный элемент в D_p. Так как $\phi(x)$ выпуклая формула

$$M \models \forall x(c < x < b_0 \to \phi(x)).$$

Это означает что p определяется по (C_p, D_p) и $(C_p, D_p)(M') = p(M')$. Когда (C_p, D_p) рациональнае влево, обозначим как $(C_p, D_p)(M') = p(M')$.

Таким образом, предположим, что сечение (C_p, D_p) нерациональное. Если существует M-определимая формула $U(x)$, которая делит $(C_p, D_p)(M')$ (то есть сечение (C_p, D_p) квазирацианальное), тогда p квазирациональный по Замечанию 1.2.14(iii) и, или $p(M') = U(M') \cap (C_p, D_p)(M')$, или $p(M') = (C_p, D_p)(M') \cap \neg U(M')$.

Если (C_p, D_p) иррациональное, то для любой формулы $\phi(x, \bar{a}) \in p, \bar{a} \in M$ существует $b, c \in M$ такие, что $b < x < c \in p$ и $M \models \forall x(b < x < c \to \phi(x, \bar{a}))$. Это означает, что для формулы $\phi(x, y) := x < y$ тип p не $\psi(x, \bar{y})$-определим. $\diamondsuit$

Заметим, что Факт 1.2.16 — обобщение аналогичного факта для о-минимальных теорий, доказанный Д. Маркером и Ч. Стейнхорном в [6] (Лемма 2.3) и для о-минимальных теорий определимые 1-типы над моделями определяются рациональными сечениями.

Из Замечания 1.2.14 и из доказательства Факта 1.2.16 следует

Замечание 1.2.17. *Пусть $p \in S_1(M), M \models T$. Then $(C_p, D_p)(M') = p(M')$ тогда и только тогда, когда p или рациональный или иррациональный тогда и только тогда, когда (C_p, D_p) или рациональный или иррациональный.*

Определение 1.2.18. Пусть $p \in S_1(A)$ является иррациональным. Мы говорим, что p *1-квазимодельный*, если p определяется через сечение в A, то есть для любых формул $G(x, \bar{c})$ и $D(x, \bar{d})$, а также для любых кортежей $\bar{c}$ и $\bar{d} \in A$, таких что

$$G(M', \bar{c}) < p(M') < D(M', \bar{d})$$

существуют $g, d \in A$, такие что следующее истинно:

$$G(M', \bar{c}) < g < p(M') < d < D(M', \bar{d}).$$

Замечание 1.2.19. *Пусть $p, q \in S_1(A)$, p 1-квазимодельный и $p \not\perp^w q$. Тогда q неопределимый.*

Обозначение 1.2.20. Пусть $B, C \subseteq M'$. Мы обозначаем $B \leq C \Leftrightarrow B < C$ или $B < C$, $(B, C) = \emptyset$.

Определение 1.2.21. (i) Пусть $p \in S_1(A)$. Мы говорим, что p является *строго определимым* над A если для любой формулы $\Psi(x, \bar{z})$ существуют такие формулы $G^1_\Psi(x, \bar{b})$ и $G^2_\Psi(x, \bar{b})$, $\bar{b} \in A$, что

$$G^1_\Psi(M', \bar{b}) \leq p(M') \leq G^2_\Psi(M', \bar{b})$$

и для любого кортежа $\bar{a} \in A^{l(\bar{z})}$ справедливо следующее:

$$M' \models \exists x(G^1_\Psi(M', \bar{b}) < x < G^2_\Psi(M', \bar{b}) \wedge \Psi(x, \bar{a})) \rightarrow$$

$$\forall x(G^1_\Psi(M', \bar{b}) < x < G^2_\Psi(M', \bar{b}) \rightarrow \Psi(x, \bar{a})).$$

или $M' \models \exists x(G^1_\Psi(M', \bar{b}) < x < G^2_\Psi(M', \bar{b}) \wedge \Psi(x, \bar{a})) \Leftrightarrow \Psi(x, \bar{a}) \in p$.

(ii) Пусть $\bar{\gamma} \in M'$. Мы говорим, что p является *строго определимым* над $A \cup \bar{\gamma}$, если для любой формулы $\Psi(x, \bar{z})$ существуют такие формулы $G^1_\Psi(x, \bar{b}, \bar{\gamma})$ и $G^2_\Psi(x, \bar{b}, \bar{\gamma})$, $\bar{b} \in A$, что

$$G^1_\Psi(M', \bar{b}, \bar{\gamma})^+ \cap p(M') \cap G^2_\Psi(M', \bar{b}, \bar{\gamma})^- \neq \emptyset$$

и для любого $\bar{a} \in A^{l(\bar{z})}$ истинно следующее:

$$M' \models \exists x(G^1_\Psi(M', \bar{b}, \bar{\gamma}) < x < G^2_\Psi(M', \bar{b}, \bar{\gamma}) \wedge \Psi(x, \bar{a})) \rightarrow$$

$$\forall x(G^1_\Psi(M', \bar{b}, \bar{\gamma}) < x < G^2_\Psi(M', \bar{b}, \bar{\gamma}) \rightarrow \Psi(x, \bar{a})).$$

Замечание 1.2.22. *Пусть $p \in S_1(A)$. Тогда следующее истинно:*

(i) Если p является изолированным, тогда p является строго определимой.

(ii) Если p является квазирациональным, не-строго определимым над A тогда для любой $\gamma \in p(M')$, p является строго определимой над $A \cup \gamma$.

(iii) Если p является иррациональным, не-определимым, тогда для любого $\gamma_1 \neq \gamma_2 \in p(M')$, p является строго определимым над $A \cup \{\gamma_1, \gamma_2\}$.

(iv) Если $A = M$, то любой неалгебраический тип является не-строго определимым.

Лемма 1.2.23. *Пусть $p \in S_1(A)$. Тогда следующее истинно:*

(i) Пусть p квазирациональный вправо (влево), тогда p является не строго определимым над A тогда и только тогда, когда существует такая формула $G_p(x, \bar{b}_p, \bar{a})$, где $\bar{b}_p \in A$, что для любой формулы $D(M', \bar{d}) < p(M')$, где $\bar{d} \in A$ существует $\bar{a}_D \in A$, такой что

$$D(M', \bar{d}) < G_p(M', \bar{b}_p, \bar{a}_D) < p(M')$$

(для любой формулы $D(M', \bar{d}) > p(M')$, где $\bar{d} \in A$, существует $\bar{a}_D \in A$, такой что

$$p(M') < G_p(M', \bar{b}_p, \bar{a}_D) < D(M', \bar{d}))$$

(ii) Пусть p иррациональный. Тогда p не строго определимый над A если $\exists G_{p,1}(x, \bar{b}_{p,1}, \bar{u}_1)$, где $\bar{b}_{p,1} \in A$, такая что

$$\forall D(M', \bar{d}) < p(M'),\ \exists \bar{a}_D \in A^{l(\bar{u}_1)} D(M', \bar{d}) < G_{p,1}(M', \bar{b}_{p,1}, \bar{a}_D) < p(M')$$

или (и) $\exists G_{p,2}(x, \bar{b}_{p,2}, \bar{u}_2)$, $\bar{b}_{p,2} \in A$ такое что

$$\forall D(M', \bar{d}) > p(M'),\ \exists \bar{a}_D \in A^{l(\bar{u}_1)}[p(M') < G_{p,2}(M', \bar{b}_{p,2}, \bar{a}_D) < D(M', \bar{d})].$$

(iii) Пусть p иррациональный, не строго определимый, тогда существует $\bar{\gamma} \in M' \backslash A$ который определяется через $G_{p,1}$, $G_{p,2}$ или только через $G_{p,1}$, или только через $G_{p,2}$, такой что тип p является строго определимым над $A \cup \bar{\gamma}$.

Доказательство. (i),(ii) являются истинными согласно Определению 1.2.21. (iii) истинно по Теореме о компактности. $\diamondsuit$

Мы предполагаем, что читатель знаком с базисными свойствами насыщенных моделей и имеет некоторый опыт работы с определимостью типов.

Факт 1.2.24. *Пусть M такая модель, что для некоторого $A \subset M$, M — $|A|^+$–насыщенна. Тогда верно: если $p \in S_m(A)(m < \omega)$ неизолированный тип, то для любого $\bar{\gamma} \in M$, $p(M^m)$ не $\bar{\gamma}$–формулен.*

Мы будем использовать следствие Факта 1.2.24 и определения ортогональности множества типу.

Факт 1.2.25. *Пусть $A, B \subset N$, $p \in S_1(A)$, $\beta \in p(N)$, $p' := tp(\beta|A \cup B)$, N есть $|A \cup B|^+$-насыщенная модель произвольной слабо о-минимальной теории T. Тогда верно:*

(i) $p(N) = p'(N)$ тогда и только тогда когда $B \perp^w p$.

(ii) Если $B \perp^w p$, то p и p' либо одновременно изолированные, либо квазирациональные, либо иррациональные.

1.3 Приемлемые множества, стабильные и сильно минимальные модели

Пусть M — стабильная структура в языке L и образуем $L(P) = L^*$-структуру (M, A), интерпретируя новый предикат P как множество A. Когда новая структура является стабильной? Ясно что структура, индуцированная на A, (назовем ее A_{ind}) должна быть стабильной и поэтому естественно предположить что A_{ind} является стабильной. Но стабильность A_{ind} не является достаточным условием [9]. Пуаза [9] и Бускарен [10] ограничили вопрос, предполагая что множество A является универсумом подмодели. Болдуин и Бенедикт [11] ограничили вопрос, полагая что множество A является множеством L-неразличимостей. Казанова и Циглер [12] обобщают понятия „модель"" и „неразличимый" до „nfcp над A" (nfcp есть сокращение для „не имеет свойства конечной покрываемости"; мы приводим технические определения ниже). Все эти ранние работы также делают предположение 'малости' или 'красивых пар' на (M, A). В духе [11], мы говорим что (M, A) *псевдомалая*, если (M, A) является элементарно эквивалентной структуре (N, B), которая является *малой*: каждый L-тип над $B\mathbf{m}$ (для конечного $\mathbf{m}$) реализуется в N.

Определение 1.3.1. *Основными формулами, индуцированными на A могут быть:*

*(i) следы на A L-формул без параметров (*индуцированная структура*);*

(ii) следы на A L-формул с параметрами;

*(iii) следы на A $L(P)$-формул без параметров (#-*индуцированная структура*, $A^{\#}$);*

(iv) следы на A $L(P)$-формул с параметрами.

Если окружающая теория является стабильной, то первые две являются одинаковыми, поэтому мы именуем только одну. Хотя 3) и 4) определяют различные классы, мы используем только 3). Следующий пример Бенедикта использует идею третьего примера в примере 1.3.2, чтобы показать необходимость рассмотрения 3) вместо 1).

Пример 1.3.2. *(i) Пусть T — стандартная ω-стабильная теория с fcp. (Т.е., теория которой 'стандартная' модель является отношением эквивалентности с одним классом размера n для каждого конечного n и нет бесконечных классов.) Пусть (N, M) — пара моделей T с $M \prec N$ такая, что M содержит целый бесконечный класс эквивалентности из N. Тогда (N, M) не является малой, поскольку тип элемента в этом классе, но не в M, опускается в N. Но в силу Бускарен [10](или в* *силу наблюдения) (N, M) равномерно приемлемая. Здесь, N имеет fcp над M.*

(ii) *Бенедикт предлагает модифицировать предыдущий пример рассмотрением $(N,\ A)$, где A — один целый бесконечный класс эквивалентности некоторой нестандартной модели N теории T. Теперь, (N, A) не является малой, но (по наблюдению) (N, A) равномерно приемлемая и N не имеет fcp над A.*

(iii) *Пусть M — структура с двумя бесконечными классами эквивалентности и пусть A опускает одну точку из одного класса и две из другого. Тогда (M, A) равномерно приемлемая, но не ограниченная. И ее теория не могла быть лучше в поведении.*

Пример 1.3.3. *Образуем структуру M с двухсортным универсумом; один сорт содержит комплексное поле, бинарное отношение E связывает два с каждым элементом поля, индексирующим один член разбиения второго сорта на бесконечные множества. Теперь пусть N расширяет M посредством введением одной новой точки в множество, индексированное a если и только если a является действительным числом. Теперь M и N являются изоморфными и являются ω- стабильными nfcp. Но структура (N, M) является нестабильной. Индуцированная структура на M является стабильной, поскольку на самом деле нет новых определимых множеств. В #-индуцированной структуре формула $(\exists x)E(x, y) \wedge x \notin P$ определяет вещественные числа, поэтому #-индуцированная структура является нестабильной.*

Возможно, не так уж и легко проверить, что либо A_{ind}, либо $A^{\#}$ является стабильной. В A_{ind} всякий раз, когда бескванторные формулы являются просто индуцированными из L, для того чтобы проверить стабильность, нужно делать индукцию по кванторам, которая является нетривиальной. Например, Болдуин и Холланд [13] построили двухцветное поле с помощью варианта конструкции Хрушовского, которое не является ω-стабильным, но класс стабильности которого является неизвестным. Довольно легко проверить, что структура, навязанная на черные точки, является минимальной (каждое определимое множество является конечным или коконечным) на R_{ϕ}-уровне, но вопрос стабильности даже A_{ind} остается открытым.

Ремарка 1.3.4. Несмотря на то, что мы имеем дело в этом разделе исключительно с обогащениям одноместными предикатами, это не является важным ограничением; случай произвольных n-местных отношений сводится к одноместному случаю. Пусть M — стабильная L-структура и для некоторого

$1 \leq n < \omega$, пусть R −= n-местный предикат на M, который чтобы быть интересным, не является L-определимым. Пусть $\epsilon_m(\bar{x}, \bar{y})$ — отношение эквивалентности на M^m, определяемое посредством

$$[M \models \epsilon_m(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightarrow \wedge_i x_i = y_i].$$

Пусть M_{ϵ_m} — структура с универсумом $M^m \cup M^m/\epsilon_m$. Для любого $0 < m < \omega$, обозначим через $Def^m_{\emptyset}(M)$ множество всех $\emptyset$-определимых подмножеств структуры M^m в L и через $Def_{\emptyset}(M) := \bigcup_m Def^m_{\emptyset}(M)$. Определим модель M' с универсумом $\bigcup_{m<\omega} M_{\epsilon_m}$ в языке $\{L\} \cup \{P_X | X \in Def_{\emptyset}(M_{\epsilon_m})\} \cup \{f_m : m < \omega\}$, где f_m является проекцией M^m на M^m/ϵ_m, так что $\forall m < \omega, \forall X \in Def_{\emptyset}(M_{\epsilon_m}), \forall a_, \ldots, a_m \in M_{\epsilon_m}$ и

$$[M' \models P_X(f_m(a_1, \ldots, a_m)) \leftrightarrow (a_1, \ldots, a_m) \in X].$$

Поэтому, $M' = (\bigcup_m M_{\epsilon_m}, P_X)_{X \in Def_{\emptyset}(M_{\epsilon_m})}$. Мы построили M' чтобы быть двухинтерпретируемым с M так что мы можем применить результаты этой статьи к M'.

Обозначим через R' множество "имен" n-кортежей из M^m, удовлетворяющих R. Тогда, (M, R) и (M', R') являются взаимно интерпретируемыми, так что (M, R) стабильна тогда и только тогда когда (M', R') стабильна. Но (M', R') является обогащением M' одноместным предикатом.

Следующие несколько результатов иллюстрируют различие между нынешней ситуацией, где предикату P разрешается именовать произвольное подмножество универсума, и ранним ограничением, что именуются только подмодели. Когда подлежащая структура является сильно минимальной, именование подмодели всегда сохраняет ω-стабильность. В самом деле, [16], ранг теории пар может быть использован для классификации геометрии сильно минимального множества. Теория пар имеет конечный ранг тогда и только тогда, когда сильно минимальное множество является локально модулярным. Если же мы не ограничиваемся только подмоделями, то можно расширить эту классификацию с тем, чтобы различать тривиальные геометрии. (При чтении предварительной версии данной статьи Евгений Васильев заметил, что вариант доказательства Биклера позволяет охарактеризовать тривиальные сильно минимальные множества: теория пар имеет ранг 1 тогда и только тогда, когда сильно минимальное множество является тривиальным.)

Для любого множества A, содержащегося в сильно минимальной модели M, если α, β лежат в $\mathrm{acl}(A)$ и $\mathrm{tp}_L(\alpha/A) = \mathrm{tp}_L(\beta/A)$, то существует элементарная перестановка $\mathrm{acl}(A)$, переводящая α в β. Если $A \subseteq M$ *и* M является сильно минимальной, то данная перестановка расширяется до автоморфизма модели M. Снова, когда M является сильно минимальной, то любые две точки, не лежащие в алгебраическом замыкании множества A являются автоморфными над A. Это устанавливает следующий хорошо известный факт:

Факт 1.3.5. *Если M сильно минимальна, то каждое подмножество модели M является приемлемым.*

Мы включили это доказательство для предыдущего результата что подчеркнуть то, что сильная минимальность использовалась дважды в доказательстве. На самом деле существуют множества, которые не являются приемлемыми из-за алгебраических типов. Теперь мы поймем роль геометрии.

Факт 1.3.6. *Пусть M — тривиальная сильно минимальная модель в счетном языке L и $A \subset M$. Тогда пара (M, A) является суперстабильной.*

Доказательство. Пусть (N, B) — $|M|^+$-насыщенное элементарное расширение структуры (M, A) в языке $L(P)$. Достаточно показать что группа G автоморфизмов модели N, которые фиксируют M поточечно и B как множество, имеет только $2^{\aleph_0}$ орбит на $N - (M \cup B)$. Если не существует $\langle a_i : i < (2^{\aleph_0})^+\rangle \subset N - (M \cup B)$ таких, что нет $g \in G$, отображающего a_i to a_j, если $i \neq j$. В силу сильной минимальности для каждого i существует L-элементарный мономорфизм $f_i : M \cup \mathrm{acl}(a_0) \to M \cup \mathrm{acl}(a_i)$ и является тождеством на M . Если для каждого $i \neq j$, $f_i^{-1}(\mathrm{acl}(a_i) \cap B) \neq f_j^{-1}(\mathrm{acl}(a_j) \cap B)$, существуют более чем континуум подмножеств множества $\mathrm{acl}(a_0)$. Поэтому для некоторых i, j, $h_{ij} = f_j \cdot f_i^{-1} : \mathrm{acl}(a_i) \to \mathrm{acl}(a_j)$ является L-элементарным отображением, которое сохраняет B. Более того, $h = h_{ij} \cup h_{ji}$ является элементарной перестановкой $M \cup \mathrm{acl}(a_i) \cup \mathrm{acl}(a_j)$. В силу тривиальности h расширяется до L-автоморфизма $\hat{h}$ модели N, который фиксирует $N \backslash (\mathrm{acl}(a_1) \cup \mathrm{acl}(a_2))$ поточечно. Поскольку h также сохраняет B на $(\mathrm{acl}(a_i) \cup \mathrm{acl}(a_j))$, $\hat{h} \in G$. Это противоречие дает результат. $\square_{1.3.6}$

Заметим что ограничение на счетный язык здесь чисто для удобства. На самом деле тривиальность является необходимым для этого результата. Мы покажем:

Факт 1.3.7. *Если G — группа, которая не является конечно порожденной, то существует обогащение группы G унарным предикатом, которое не является стабильным.*

Доказательство. Выберем индуктивно $\langle a_i, b_i\rangle$ так что нет a_i (или b_i) являющихся подгруппой, порожденной множеством $a_j, b_j, j < i$ $(a_j : j \leq i, b_j, j < i)$. Пусть $c_{ij} = a_i \cdot b_j$. Теперь мы определим свойство порядка формулой $P(x \cdot y)$ позволяя P именовать $\{c_{ij} : i < j\}$. $\square_{1.3.7}$

Это показывает что не существует локально модулярного сильно минимального множества, остающегося стабильным относительно всех унарных обогащений. Для того чтобы включить сильно минимальные множества, которые не имеют групповой структуры, мы имеем следующий вариант.

Факт 1.3.8. *Пусть M — сильно минимальное множество такое, что алгебраическое замыкание не является тривиальным. Существует обогащение модели M унарным предикатом, которое не является стабильным.*

Доказательство. Сперва рассмотрим $\langle a_i, b_i : i < \omega\rangle$ семейство алгебраически независимых элементов из насыщенного элементарного расширения модели M. Выберем $c_{00} \in \mathrm{acl}(a_0, b_0) \setminus (\mathrm{acl}(a_0) \cup \mathrm{acl}(b_0))$ гарантированные формулой $\phi(x, y, v)$. Поскольку все пары элементов из $\langle a_i, b_i\rangle$ реализуют один и тот же тип, существует $c_{ij} \in \mathrm{acl}(a_i, b_j) \setminus (\mathrm{acl}(a_i) \cup \mathrm{acl}(b_j))$, удовлетворяющий $\phi(a_i, b_j, c_{ij})$. Более того, пока $k = i$ и $\ell = j$, мы имеем $\neg\phi(a_k, b_\ell, c_{ij})$. Теперь для каждого $n < \omega$, выберем в M с помощью элементарной подмодели множество $\langle a^n_i, b^n_i : i < n\rangle \cup \langle c^n_{i,j} : i, j < n\rangle$, которое удовлетворяет $\phi(x, y, v)$-типу $\langle a_i, b_i : i < n\rangle \cup \langle c_{i,j} : i, j < n\rangle$. Сделаем эти множества непересекающимися. Теперь пусть P обозначает множество $\langle c^n_{i,j} : i < j < n\rangle$. Формула

$$(\exists v)(P(v) \wedge \phi(x, y, v))$$

определяет свойство порядка для произвольно длинных последовательностей, поэтому (M, P) является нестабильной. $\square_{1.3.8}$

Таким образом, переходя от пар моделей к произвольным подмножествам, мы способны описывать тривиальность. В итоге:

Теорема 1.3.9. *Пусть M — сильно минимальная модель и $A \subset M$. Тогда геометрия на M является тривиальной тогда и только тогда когда для каждого подмножества A модели M пара (M, A) является суперстабильной.*

2 КЛАССИФИКАЦИЯ 1-ТИПОВ И ОПРЕДЕЛИМОСТЬ В СЛАБО О-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЯХ

В подразделах 1–3 изучаются свойства 1-типов над множествами в слабо о-минимальных теорий. В частности, в подразделе 2.1 выделяется шесть основных видов один-типов над множествами. В подразделе 2.2 вводятся понятия окрестности множества в 1-типе, слабая и почти ортогональность 1-типов. Доказывается, что слабая (почти) не-ортогональность – это отношение эквивалентности, а каждый $\not\perp^w$–класс ($\not\perp^a$–класс) эквивалентности содержит 1-типы только одного вида. В подразделе 2.2 доказывается, что все 1-типы любого $\not\perp^w$–класса ($\not\perp^a$–класса), которые содержат по крайней мере один определимый 1-тип, являются определимыми.

2.1 Основные виды 1-типов над множествами моделей слабо о-минимальных теорий

В данном подразделе зафиксируем слабо о-минимальную теорию T. Рассматриваемые множество A и модель M теории T будут подмножеством и элементарной подмоделью достаточно большой насыщенной модели M'.

Определение 2.1.1. Пусть $p \in S_1(A)$. Мы говорим, что A-формула $\Phi(x,y)$ является *p-устойчивой*, если для каждого $\alpha \models p$ существует такие γ_1 и γ_2, реализующие тип p, что $\gamma_1 < \Phi(M',\alpha,\bar{a}) < \gamma_2$.

Замечание 2.1.2. *Пусть $F_1(x,y,), F_2(x,y)$ две 2-A-формулы, $p \in S_1(A)$. Тогда, если $\exists \alpha \in p(M')$ такая, что $F_1(M',\alpha) \subset F_2(M',\alpha)$ имеем:*

$$\forall \beta \models p\, [F_1(M',\beta) \subset F_2(M',\beta)].$$

Определение 2.1.3. Пусть $p \in S_1(A)$, а $F_1(x,y)$ и $F_2(x,y)$ — две p-устойчивые выпуклые вправо (влево) 2-A-формулы. Мы говорим, что формула $F_2(x,y)$ *больше, чем* $F_1(x,y)$, если существует $\alpha \in p(M')$ (или, что эквивалентно, для всех $\alpha \in p(M')$), такой что $F_1(M',\alpha) \subset F_2(M',\alpha)$.

Замечание 2.1.4. *Пусть $p \in S_1(A)$. Множество всех неэквивалентных p-устойчивых выпуклых вправо (влево) 2-A-формул упорядоченно.*

Определение 2.1.5. Пусть $p \in S_1(A)$ неалгебраический тип. Мы говорим, что p является *полуквазиодиночным вправо*, если существует наибольшая p-устойчивая выпуклая вправо 2-A-формула $F(x,y)$.

Аналогично определяется тип *полуквазиодиночный влево.*

Замечание 2.1.6. *(i) Пусть $p \in S_1(A)$ полуквазиодиночный вправо. Если $\beta > \alpha$ и $tp(\beta/A) = tp(\alpha/A) = p$, $M' \models \neg F(\beta,\alpha)$, то для любой $(A\alpha)$–формулы $\Phi(x,\alpha)$ следующее истинно:*

$$[M' \models \Phi(\beta,\alpha) \Rightarrow \forall \beta_1 \in F(M',\alpha)^+ \cap p(M'),\ M' \models \Phi(\beta_1,\alpha)].$$

(ii) Пусть $p \in S_1(A)$ — полуквазиодиночный влево тип. Если $\alpha > \beta$, $tp(\beta/A) = tp(\alpha/A) = p$ и $M' \models \neg G(\beta,\alpha)$, то для любой $(A\alpha)$–формулы $\Phi(x,\alpha)$ следующее истинно:

$$\forall \beta_1 \in G(M',\alpha)^- \cap p(M'), M' \models \Phi(\beta_1,\alpha)].$$

Определение 2.1.7. Пусть $p \in S_1(A)$. Мы говорим, что p является *квазиодиночным*, если он одновременно полуквазиодиночен и вправо и влево.

Определение 2.1.8. Пусть $p \in S_1(A)$. Мы говорим, что p-устойчивая выпуклая вправо (влево) 2-А-формула $F(x,y,\bar{a})$ является *локально p-убывающей (p-возрастающей)*, если существуют $\alpha_1,\alpha_2 \in p(M')$ такие, что

$$M' \models \exists x(F(x,\alpha_2,\bar{a}) \wedge \neg F(x,\alpha_1,\bar{a}) \wedge F(\alpha_1,\alpha_2,\bar{a}) \wedge x > \alpha_1).$$

$$(M' \models \exists x(F(x,\alpha_2) \wedge \neg F(x,\alpha_1,\bar{a}) \wedge F(\alpha_1,\alpha_2,\bar{a}) \wedge x < \alpha_1)).$$

Лемма 2.1.9. *Пусть $p \in S_1(A)$ — неалгебраический тип. Тогда*

(i) Если $F(x,y)$ наибольшая p-устойчивая выпуклая вправо (влево) 2-А-формула, тогда $F(x,y)$ является не локально p-убывающим (p-возрастающим).

(ii) Если p полуквазиодиночный, тогда p квазиодиночный.

Доказательство. Предположим, что $F(x,y)$ локально p-убывающая. Тогда существуют $\alpha,\beta,\gamma \in p(M')$, такие что

$$M' \models \alpha < \beta < \gamma \wedge F(\gamma,\alpha) \wedge \neg F(\gamma,\beta)$$

Пусть $K(y,\alpha) := \exists x(F(x,\alpha) \wedge F(y,x))$. Так как $F(x,y)$ является p-устойчивой, имеем $F(y,\alpha) \equiv K(y,\alpha)$.

Следовательно, $F(M',\gamma) \subset F(M',\alpha)$ и $F(M',\alpha) \backslash F(M',\gamma) \neq \emptyset$.
Пусть

$$\theta(\alpha,\beta,\gamma) := \alpha < \beta < \gamma \wedge F(\gamma,\alpha) \wedge \neg F(\gamma,\beta) \wedge \forall x(F(x,\gamma) \rightarrow F(x,\alpha)).$$

Тогда $M' \models \theta(\alpha,\beta,\gamma)$.

Пусть $f \in \mathrm{Aut}_A(M')$ такое что $f(\gamma) = \alpha$. Тогда для любой $n < \omega$
$M' \models \theta(f^n(\alpha), f^n(\beta), f^n(\gamma))$. Следовательно, $M' \models \theta(f^n(\alpha), f^n(\beta),\ f^{n-1}(\alpha))$,

$F(M', f^n(\alpha)) \supset F(M', f^{n-1}(\alpha))$, $f^{n-1}(\alpha) \notin F(M', f^n(\beta)), f^n(\alpha) < f^n(\beta) < f^{n-1}(\alpha)$. Поэтому, $\forall n < \omega[f^n(\alpha) \in F(\gamma, M')$ и $f^{n-1}(\beta) \notin F(\gamma, M')]$. Это противоречит слабой o-минимальности M'.

Таким образом, $F(x, y)$ является не локально p-убывающей.

ii) Пусть $F(x, y)$ из Определения 2.1.5.

Через (i) $\forall \alpha, \beta \in p(M'), \alpha < \beta$ the following holds:
Если $\beta \in F(M', y) \Rightarrow M' \models \forall x(x \geq \beta \rightarrow (F(x, \alpha) \leftrightarrow F(x, \beta)))$

Рассмотрим $G(y, \alpha) := y \leq \alpha \wedge F(\alpha, y) \wedge \forall x(x \geq \alpha \rightarrow (F(x, \alpha) \leftrightarrow F(x, y)))$. Пусть $G_0(M', \alpha) := p(M') \cap G(M', \alpha)$. Мы заметим, что $G_0(y, x)$ наибольшая выпуклая влево p-устойчивая формула. Если не существует наибольшей выпуклой влево p-устойчивая формула, тогда существует $\Phi(x, y)$, p-стабильная A–формула, такая что $\exists \gamma_1, \gamma_2 \in p(M')$,

$$\gamma_1 < \Phi(M', \alpha) < G_0(M', \alpha,), \gamma_2 \in \Phi(M', \alpha).$$

Итак, имеем $\alpha \notin F(M', \gamma_1)$, $\alpha \notin F(M', \gamma_2)$. По Замечанию 2.1.6
$\alpha \notin F(M', \gamma_2) \Rightarrow \forall \alpha_1 \in [F(M', \gamma_2)^+ \cap p(M')], \gamma_2 \in \Phi(M', \alpha_1)$.
$\alpha \notin F(M', \gamma_1, \bar{a}) \Rightarrow \forall \alpha_1 \in [F(M', \gamma_1)^+ \cap p(M')], \gamma_1 \notin \Phi(M', \alpha_1)$.

Пусть $\alpha_0 \in [(F(M', \gamma_2) \cup F(M', \gamma_1, \bar{a}))^+ \cap p(M')]$, $f \in Aut_A(M')$ такое что $f(\gamma_1) = \gamma_2$. Тогда $f(\alpha_0) \in [(F(M', \gamma_2) \cup F(M', \gamma_1))^+ \cap p(M')]$

Мы имеем $M' \models \neg\Phi(\gamma_1, \alpha_0) \Rightarrow M' \models \neg\Phi(\gamma_2, f(\alpha_0))$. Противоречие.

Таким образом, $G_0(y, x)$ наибольшая выпуклая влево p-стабильная A–формула, и формула $E(x, y) := F(x, y, \bar{a}) \vee G_0(x, y, \bar{a})$ является отношением эквивалентности.

Следовательно, тип p является квазиодиночным. $\diamondsuit$

Далее, эту эквивалентность $E(x, y)$ мы обозначим через $E_p(x, y)$.

Замечание 2.1.10. *(i) Пусть $p \in S_1(A)$, тогда для любой выпуклой вправо (влево) p-устойчивой 2-A-формулой $F(x, y)$ существует $F_1(x, y)$ выпуклая вправо (влево) p-устойчивая формула,такая что $\alpha \in p(M')$, $F(M', \alpha) \subset F_1(M', \alpha)$ и $F_1(x, y, \bar{a})$ не локально убывающая (p-возрастающая).*

(ii) В. Вербовский построил пример слабо o-минимальной. теории с 1-типом p и формулой $F(x, y)$, которая p-стабильно выпуклая вправо, локально p-убывающая A–формула.

(iii) Пусть $p \in S_1(A)$ квазиодиночен. Множество всех $E_p(x, y)$-классов эквивалентности в M' является плотно упорядоченным. Множество представителей $E_p(x, y)$-классов в M' является упорядоченно 2-неразличимыми.

(iv) *Пусть $p \in S_1(A)$ является квазиодиночным. Множество всех классов эквивалентности $E_p(x, y)$ в M' является плотно упорядоченным. Множество представителей $E_p(x, y)$-классов в M' является упорядоченно 2-неразличимым.*

(v) *Пусть $p \in S_1(A)$, A–формула $\psi(x, y)$ является p-устойчивой, а формула $\phi(x, \bar{\alpha})$, где $\bar{\alpha} \in M'$, такая, что существуют $\mu_1, \mu_2 \in p(M')$, удовлетворяющие условию $\mu_1 < \phi(M', \bar{\alpha}) < \mu_2$. Тогда существуют $\mu_1', \mu_2' \in p(M')$, такие что для формулы*

$$H_{\phi,\psi}(x, \bar{\alpha}) := \exists y \ (\phi(y, \bar{\alpha}) \wedge \psi(x, y))$$

следующее является истинным:

$$\mu_1' < H_{\phi,\psi}(M', \bar{\alpha}) < \mu_2'$$

Определение 2.1.11. (i) Пусть $p \in S_1(A)$ является квазиодиночным. Мы говорим, что p *одиночный*, если $E(x, y) \equiv (x = y)$.

(ii) Любой неалгебраический, неквазиодиночный тип $p \in S_1(A)$ назовем *социальным.*

Следствие 2.1.12. *Пусть $p \in S_1(A)$ является неалгебраическим. Тогда p является квазиодиночным тогда и только тогда, когда семейство всех выпуклых вправо p-устойчивых $2-A$-формул имеет супремум тогда и только тогда, когда семейство всех выпуклых влево p-устойчивых формул имеют супремум.*

Теорема 2.1.13. *(i) Если T о-минимальна, тогда каждый квазиодиночный тип является одиночным (одиночно реализуемым [69]).*

(ii) Существуют следующие шесть основных видов не-алгебраических 1-типов над множеством моделей со слабо о-минимальной теорией:

1–2) изолированный (квазиодиночный, социальный);

3–4) квазирациональный (квазиодиночный, социальный);

5–6) иррациональность (квазиодиночный, социальный).

Лемма 2.1.14. *Пусть типы p и $q \in S_1(A)$ — неалгебраические, элемент $\alpha \in p(M')$, а A-формула $\Phi(x, y)$ — такая, что $\Phi(M', \alpha) \subset q(M')$ и существует $\gamma \in q(M') \setminus \Phi(M', \alpha)$ (т.е. p изолирует q). Тогда следующее верно:*

(i) p изолированный тогда и только тогда, когда q изолированный.

(ii) p квазирациональный тогда и только тогда, когда q квазирациональный

(iii) p иррациональный тогда и только тогда, когда q иррациональный

(iv) p социальный тогда и только тогда, когда q социальный.

Замечание 2.1.15. *(i) $\forall\beta \models p,\ \Phi(M', \beta) \subset q(M')$.*

(ii) Если q иррациональный влево (вправо), то есть не существует такой A–формулы $C(x)$, что $C(M')^- \cup C(M') = q(M')^-$, то для любой формулы $\Phi(x, \bar{\beta}), \bar{\beta} \in M'$, если $\Phi(M', \bar{\beta}) \subseteq q(M')$, то существует $\gamma \in q(M')$, что $\gamma < \Phi(M', \bar{\beta})(\Phi(M', \bar{\beta}) < \gamma)$.

Доказательство леммы 2.1.14. (i) Если p изолирован, то q изолирован.Это справедливо для любых типов произвольной теории. Если q изолирован, то $q(M') = U(M')$, где $U(M')$ полная формула изолирующая q. Пусть $\gamma, \beta \in U(M')$ такие, что $\gamma \notin \Phi(M', \alpha), \beta \in \Phi(M', \alpha)$. Пусть $f \in Aut_A(M')$ такое что $f(\gamma) = \beta$. Тогда $\beta \notin \Phi(M', f(\alpha))$. Таким образом, $\alpha \in \Phi(\beta, M') \cap p(M')$ и $f(\alpha) \in \neg\Phi(\beta, M') \cap p(M')$.

Так как T слабо о-минимальная, существует $A\beta$–формула $H(x, \beta)$ такая, что $H(M', \beta) < \neg H(M', \beta)$ или $\neg H(M', \beta) < H(M', \beta)$, где $\alpha \in H(M', \beta)$, а $f(\alpha) \in \neg H(M', \beta)$. Тогда следующая A–формула $K(x)$ является полной для p:

$$K(x) := \exists y_1,\ \exists y_2\ [U(y_1) \wedge U(y_2) \wedge H(x) \wedge \neg H(x, y_2].$$

Следовательно, p изолированный.

(ii) ($\Rightarrow$) Предположим, что p — квазирациональный вправо. Тогда в соответствие с определением существует выпуклая A–формулой $U(x)$, что $U(x) \in p$ и $U(M')^+ = p(M')^+$. Пусть

$$L_q(t) := \exists z[U(z) \wedge \forall y((y > z \wedge U(y)) \rightarrow \forall x(\Phi(x, y) \rightarrow t < x))].$$

Тогда для любой A–формулы с одной свободной переменной $D(x)$ следующее справедливо:

$$[D(M') < q(M') \Rightarrow D(M') \subset L_q(M')] \wedge$$

$$\wedge [q(M') < D(M') \Rightarrow D(M') \cap L_q(M') = \emptyset].$$

Таким образом, если $L_q(t) \in q$, то q квазирационален вправо и

$$q(M')^+ = L_q(M')^+ \text{ и если } \neg L_q(t) \in q,$$

тогда q квазирационален влево и

$$q(M')^- = L_q(M')^-,\ q(M') \subset \neg L_q(M').$$

Так как q полный тип, следовательно или $L_q(t) \in q$, или $\neg L_q(t) \in q$.

($\Leftarrow$) Предположим, что q — квазирациональный вправо тип и A–формула $U(x)$, определяющая квазирациональность вправо, $U(M')^+ = q(M')^+$. Мы покажем существование 2-A-формулы $\Phi_0(x, y)$ такой, что для любого $\gamma \in q(M')$ множество $\Phi_0(\gamma, M') \subset p(M')$. Тогда тип p квазирационален в силу рассуждений, аналогичных вышеприведенным.

Рассмотрим два случая:
a) Существуют $\gamma_1, \gamma_2 \in q(M')$ такие, что $\gamma_1 < \Phi(M', \alpha) < \gamma_2$.
b) $\Phi(M', \alpha)^+ = q(M')^+$.

a) Пусть $f \in \mathrm{Aut}_A(M')$ такая, что $f(\gamma_1) = \gamma_2$.
Если $\alpha_1, \alpha_2 \in p(M')$ такие, что $f(\alpha_1) = \alpha, f(\alpha) = \alpha_2$, то имеем

$$\Phi(M', \alpha_1) < \gamma_1 < \Phi(M', \alpha) < \gamma_2 < \Phi(M', \alpha_2).$$

Пусть $\gamma \in \Phi(M', \alpha)$ тогда $\alpha \in \Phi(\gamma, M')$ and ($\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$ or $\alpha \in (\alpha_2, \alpha_1)$).

Пусть $\Phi_0(\gamma, y)$ есть максимальная выпуклая $A\gamma$-формула из разложения $\Phi(\gamma, y)$ доказательства Факта1.2.1 такая, что $\alpha \in \Phi_0(\gamma, M', \bar{a})$. Ясно, что $\Phi_0(\gamma, M') \subset p(M')$.

b) Согласно Замечания 2.1.15(ii) существует $\gamma \in q(M')$ такая что $\gamma < \Phi(M', \alpha)$.

Рассмотрим следующую A–формулу

$$\Phi_0(\gamma, y) := \forall z(\Phi(z, y) \to \gamma < z \land U(z)) \land \exists z \Phi(z, y)).$$

Следовательно, $\alpha \in \Phi_0(\gamma, M')$. Если $\Phi_0(\gamma, M') \not\subset p(M')$, то существует A–формула $D(x)$ такая, что $D(M') \cap p(M') = \emptyset$ и $D(M') \subset \Phi_0(\gamma, M')$. Тогда для формулы $H(x) := \exists y(D(y) \land \Phi(x, y))$ мы имеем $\gamma < H(M') \subset q(M')$. Противоречие потому, что $\gamma \in q(M')$, $\forall \gamma_1 \in H(M'), tp(\gamma|A) \neq tp(\gamma_1|A)$. Таким образом, $\Phi_0(\gamma, M') \subset p(M')$.

(iii) следует из (i) и (ii).

(iv) Так как квазиодиночным 1-тип не социальный и наоборот, социальный 1-тип не является квазиодиночным, будем доказывать (iv) для квазиодиночных 1-типов.

Утверждение 2.1.16. *Если тип p изолирует тип q посредством такой 2-A–формулы $\Phi(x, y)$, что существует $\alpha \in p(M')$ и существуют $\gamma_1, \gamma_2 \in q(M')$ такие, что $\gamma_1 < \Phi(M', \alpha) < \gamma_2$ и $\Phi(M', \alpha) \neq \emptyset$, тогда существует 2-$A$–формула $\Phi_0(x, y)$ такая, что для всякого $\beta \in q(M')$ существуют $\mu_1, \mu_2 \in p(M')$ такие, что $\Phi_0(\beta, M') \neq \emptyset$, $\mu_1 < \Phi_0(\beta, M') < \mu_2$; и p является квазиодиночным тогда и только тогда, когда q квазиодиночный.*

Доказательство Утверждения 2.1.16 Пусть $f \in \mathrm{Aut}_A(M')$ такая что $f(\gamma_1) = \gamma_2$. Пусть $\alpha_1 := f^{-1}(\alpha), \alpha_2 = f(\alpha)$. Мы имеем

$$f^{-1}(\gamma_1) < \Phi(M', \alpha_1, \bar{a}) < \gamma_1 < \Phi(M', \alpha, \bar{a}) < \gamma_2 < \Phi(M', \alpha_2, \bar{a}) < f(\gamma_2).$$

Если $\alpha < f(\alpha)$ then $f^{-1}(\alpha) < \alpha$. Мы имеем $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ or $\alpha_2 < \alpha < \alpha_1$. Пусть $\beta \in \Phi(M', \alpha)$. Рассмотрим формулу $\Phi(\beta, y)$. Пусть $\Phi_0(\beta, y)$ есть выпуклая подформула $\Phi(\beta, y, \bar{a})$ такая что $\alpha \in \Phi_0(\beta, M')$. Имеем $\alpha_1 < \Phi_0(\beta, M', \bar{a}) < \alpha_2$ или $\alpha_2 < \Phi_0(\beta, M') < \alpha_1$.

Предположим, p является квазиодиночным. Пусть $E_p(x, y)$ есть 2-A–формула из доказательства Леммы 2.1.9(ii) которая определяет квазиодиночность p. Пусть

$$E(z, t) := \exists y \exists x(\Phi_0(t, y) \wedge E_p(x, y) \wedge \Phi(z, x)),\ \gamma \in \Phi(M', \alpha).$$

Мы заметим, что для любой A–формулы $H(x, y)$ следующее справедливо: Если $H(x, y)$ является q-устойчивой, то $H(M', \gamma) \subset E_q(M', \gamma)$.

В противном случае мы можем выбрать q-устойчивую A–формулу $H(x, y)$ такую, что $H(M', \gamma) \cap E(M', \gamma) = \emptyset$.

Рассмотрим следующую $A\alpha$–формулу:

$$K(x, \alpha) := \exists y \exists z(\Phi(y, \alpha) \wedge H(z, y) \wedge \Phi_0(z, x)).$$

Согласно Замечания 2.1.10(iv), A–формула $K(x, y)$ является p-устойчивой потому, что

- $\gamma_1 < \Phi(M', \alpha, \bar{a}) < \gamma_2$,
- формула $H(z, y)$ является q-устойчивой,
- для любого $\beta \in q(M')$ существуют $\delta_1, \delta_2 \in p(M')$ такие, что $\delta_1 < \Phi_0(\beta, M') < \delta_2$.

Пусть $\gamma_0 \in H(M', \gamma)$. Тогда $\gamma_0 \notin E(M', \gamma)$ и следующее пересечение пусто: $\Phi_0(\gamma_0, M') \cap E_p(M', \alpha) = \emptyset$. Пусть $\mu \in \Phi_0(\gamma_0, M') \subset K(M', \alpha)$. Тогда $\mu \notin E_p(M', \alpha)$. Противоречие. Таким образом, q является квазиодиночным. Из тех же самых соображений из квазиодиночности q следует квазиодиночность p. Следовательно,Утверждение 2.1.16 доказано. $\diamondsuit$

Согласно Утверждению 2.1.16, Замечанию 2.1.15 (ii), Лемме 2.1.14 (i-iii) мы должны рассмотреть случай, когда одновременно выполнено $(*)$:

- p, q являются квазирациональными или изолированными.
- Существует 2-A–формула $\Phi(x, y)$ такая, что $\forall \alpha \in p(M'), \Phi(M', \alpha) \subset q(M')$, $\Phi(M', \alpha, \bar{a})^+ = q(M')^+$ или $\Phi(M', \alpha, \bar{a})^- = q(M')^-$.

- Для любой 2-A–формулы $\theta(x, y, \bar{b})$, для любого $\alpha \in p(M')$ верно:

$$\theta(M', \alpha, \bar{b}) \subset q(M') \Rightarrow [\theta(M', \alpha, \bar{b}) = \Phi(M', \alpha, \bar{a}) \vee$$

$$\vee \theta(M', \alpha, \bar{b}) \cup \Phi(M', \alpha, \bar{a} = q(M')].$$

Мы заметим, что этом случае p, q являются квазиодиночными. Без потери общности мы предположим $\Phi(M', \alpha) = q(M')^+$ и p является квазирациональным вправо.

Заметим что,

$$\forall \beta, \alpha \in p(M')[\beta > \alpha \Rightarrow \Phi(M', \beta) \subseteq \Phi(M', \alpha)].$$

Пусть $K(z, y) := \forall t\ (z \leq t \leq y \rightarrow \Phi(M', z) \subseteq \Phi(M', \alpha))$. Заметим, что $K(z, y)$ является максимально выпуклой влево p-стабильной A–формулой. Если не существует p-устойчивой 2-A–формулы $G(x, y)$ такой, что

- $G(M', \alpha) < K(M', \alpha)$
- $\exists \mu \in G(M', \alpha), \Phi(M', \alpha) \subset \Phi(M', \mu)$

Пусть $\Phi_1(x, \alpha) := \exists y(G(y, \alpha) \wedge \Phi(x, y)) \wedge \neg\Phi(x, \alpha)$, которая является $A\alpha$–формулой. Согласно Замечания 2.1.10 (iv) $\Phi_1(M', \alpha) \subset q(M')$, и в соответствие с построением $\Phi_1(M', \alpha, \bar{a}, \bar{c}) \neq \Phi(M', \alpha, \bar{a})$. Противоречие. Следовательно, p является квазиодиночным. Из тех же самых соображений, $\Phi_0(x, y)$ из Леммы 2.1.14(ii), ($\Leftarrow$)(b) дает нам квазиодиночность q. $\Diamond$

Следствие 2.1.17. *Пусть $p, q \in S_1(A)$. Тогда q изолирует p тогда и только тогда, когда p изолирует q.*

2.2 Ортогональность 1-типов над множествами, окрестности множеств в 1-типах

Определение 2.2.1. Пусть $p \in S_1(A)$, а $B \subset M'$, такое что M' является $|B \cup A|^+$-насыщенным. Тогда окрестностью множества B в типе p является следующее множество:

$$V_p(B) := \{\gamma \in M' | \exists \gamma_1, \gamma_2 \in p(M'), \exists H(x, \bar{b}, \bar{c}), \bar{b} \in B, \bar{c} \in A,$$

$$\gamma_1 < H(M', \bar{b}, \bar{c}) < \gamma_2,\ \gamma \in H(M', \bar{b}, \bar{c})\}$$

Пусть $\bar{\alpha} =< \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k >$ тогда $V_p(\bar{\alpha}) := V_p(\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\})$.

Замечание 2.2.2. *Пусть $p \in S_1(A)$.*

(i) Пусть $\beta \in p(M')$. Тогда $|V_p(\beta)| = 1$ тогда и только тогда, когда p является одиночным.

(ii) p является квазиодиночным тогда и только тогда, когда существует такой $\beta \in p(M')$, что $V_p(\beta)$ является $(A \cup \beta)$-определимым множеством. (В самом деле, $E_p(M', \beta) = V_p(\beta)$).

Лемма 2.2.3. *Пусть $p \in S_1(A)$, а $B \subset M'$, такое что M' — $|A \cup B|^+$-насыщенная. Тогда следующее справедливо:*

(i) $V_p(B)$ является выпуклым или пустым.

(ii) Пусть тип p является иррациональным. Тогда для любого кортежа $\bar{\alpha} \in M' \setminus M$ и любой формулы $H(x, \bar{\alpha}, \bar{a})$, где $\bar{a} \in A$, если $H(M', \bar{\alpha}, \bar{a}) \neq \emptyset$ и $H(M', \bar{\alpha}, \bar{a}) \subseteq p(M')$, то $H(M', \bar{\alpha}, \bar{a}) \subseteq V_p(\bar{\alpha})$.

(iii) $V_p(B) \neq \emptyset \Rightarrow \exists \gamma_1, \gamma_2 \in p(M'),\ \gamma_1 < V_p(B) < \gamma_2$.

(iv) $\forall \beta \in p(M')\ [V_p(B) \neq \emptyset,\ \beta \notin V_p(B) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall q \in S_1(A),\ V_q(\beta) \cap V_q(B) = \emptyset].$$

(v) $\forall \alpha \in p(M') :\ V_p(B) < \alpha\ \exists \alpha_0 \in p(M')[V_p(B) < \alpha_0 < V_p(\alpha)]$.

Доказательство. (i) следует непосредственно из Определения 2.2.1. Утверждение (ii) — из Определения 2.2.1 и Замечания 2.1.15(ii), а (iii) — из Определения 2.2.1 и Теоремы компактности.

(iv) Предположим, что существует тип $q \in S_1(A)$, такой что пересечение $V_q(\beta) \cap V_q(B) \neq \emptyset$. Тогда существуют формулы $\Phi(x, \beta, \bar{b})$, где $\bar{b} \in A$, и $H(x, \bar{\alpha}, \bar{c})$, где $\bar{\alpha} \in B$ и $\bar{c} \in A$, такие что существует $\gamma \in \Phi(M', \beta, \bar{b}) \cap H(M', \bar{\alpha}, \bar{c})$, $\Phi(M', \beta, \bar{b}) \subset V_p(\beta)$, $H(M', \bar{\alpha}, \bar{c}) \subset V_p(B)$. По Определению 2.2.1 существуют $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in q(M')$, такие что

$\gamma_1 < \Phi(M', \beta, \bar{b}) < \gamma_2,\ \gamma_3 < H(M', \bar{\alpha}, \bar{c}) < \gamma_4$.

Пусть $\mu_1 = \min\{\gamma_1, \gamma_3\}$, $\mu_2 = \max\{\gamma_2, \gamma_4\}$, $f \in \mathrm{Aut}_A(M')$ такое что $f(\mu_2) = \mu_1$. Пусть $\beta_1 := f(\beta)$, $\beta_2 := f^{-1}(\beta)$. Следовательно, мы имеем

$$\Phi(M', \beta_1, \bar{b}) < \mu_1 < H(M', \bar{\alpha}, \bar{c}) < \mu_2 < \Phi(M', \beta_2, \bar{b})$$

и ($\beta_1 < \beta < \beta_2$ или $\beta_2 < \beta < \beta_1$). Пусть $K(y, \bar{\alpha}, \bar{b}, \bar{c}) := \exists x (H(x, \bar{\alpha}, \bar{c}) \wedge \Phi(x, y, \bar{b}))$. Тогда $\beta \in K(M', \bar{\alpha}, \bar{b}, \bar{c})$ и $\beta_1, \beta_2 \notin K(M', \bar{\alpha}, \bar{b}, \bar{c})$.

Пусть $K_1(x, \bar{\alpha}, \bar{b}, \bar{c})$ есть выпуклая подформула $K(x, \bar{\alpha}, \bar{b}, \bar{c})$ такая что $\beta \in K_1(M', \bar{\alpha}, \bar{b}, \bar{c})$. Таким образом

$$\beta_1 < K_1(M', \bar{\alpha}, \bar{b}, \bar{c}) < \bar{\beta}_2 \mathrm{or} \bar{\beta}_2 < K_1(M', \bar{\alpha}, \bar{b}, \bar{c}) < \beta_1.$$

Таким образом, $\beta \in V_p(\bar{\alpha})$ и $\beta \in V_p(B)$. Противоречие.

(v) Рассмотрим два случая:

a) $\exists U(M',\bar\beta,\bar a), \bar\beta\in B, \bar a\in A, U(M',\bar\beta,\bar a)^+ = V_p(B)^+$. b) $\equiv \neg a)$.

a) Если p является социальным, тогда это справедливо по Теореме компактности. Пусть p является квазиодиночным. Рассмотрим следующую формулу

$$K(x,\bar\beta,\bar a,\bar c_p) := U(M',\bar\beta,\bar a) < x \wedge \ \forall y\ (U(M',\bar\beta,\bar a) < y < x \to E_p(x,y,\bar c_p).$$

Если не существует такой α_0, тогда $K(M',\bar\beta,\bar a,\bar c_p) = E_p(M',\alpha,\bar c_p)$. Следовательно $E_p(M',\alpha,\bar c_p)\subseteq V_p(B)$ и $\alpha\in V_p(B)$. Противоречие.

b) Это следует из теоремы о компактности. $\diamondsuit$

Замечание 2.2.4. *Пусть $p,q\in S_1(A)$.*

(i) Если $\alpha\in p(M'), \beta\in q(M')$ тогда $\alpha\in V_p(\beta)$ тогда и только тогда, когда $\beta\in V_q(\alpha)$ тогда и только тогда, когда

$$V_p(\alpha)=V_p(\beta)\Longleftrightarrow V_q(\alpha)=V_q(\beta).$$

(ii) Если $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in p(M')$ такая,что $\alpha_1 < V_p(\alpha_2) < \alpha_3, V_q(\alpha_1)\neq\emptyset$ тогда $V_q(\alpha_1) < V_q(\alpha_2) < V_q(\alpha_3)$ или $V_q(\alpha_3) < V_q(\alpha_2) < V_q(\alpha_1)$.

Доказательство. (i) является непосредственным следствием доказательства Леммы 2.2.3(iv).

(ii) Согласно Лемме 2.2.3(iv) следующее справедливо:

$$\forall q\in S_1(A), V_q(\alpha_i)\cap V_q(\alpha_j)=\emptyset, i\neq j\in 1,2,3 \text{ and } V_p(\alpha_1) < V_p(\alpha_2) < V_p(\alpha_3).$$

Тогда

$$tp(\alpha_1/A\cup\alpha_3)=tp(\alpha_2/A\cup\alpha_3),\ tp(\alpha_2/A\cup\alpha_1)=tp(\alpha_3/A\cup\alpha_1).$$

Предположим, существует $q\in S_1(A)$ такое что $V_q(\alpha_1) < V_q(\alpha_3) < V_q(\alpha_2)$. Пусть $H(x,y,\bar a), \bar a\in A$ есть формула, такая, что $H(M',\alpha_1,\bar a)\subset V_q(\alpha_1)$. Рассмотрим следующую формулу:

$$G(y,\alpha_3,\bar a) :=\ y<\alpha_3\wedge\ \forall x\,\forall z\ ((H(x,y,\bar a)\wedge H(z,\alpha_3,\bar a))\to z<x).$$

Then $\alpha_1\notin G(M',\alpha_3,\bar a), \alpha_2\in G(M',\alpha_3,\bar a)$. Тогда $\alpha_2\in V_p(\alpha_3)$. Противоречие. Рассмотрение других случаев аналогично. $\diamondsuit$

Для обозначений наших понятий мы будем использовать их аналоги из Теории стабильности ([1], [17]).

Определение 2.2.5. *Пусть $p,q\in S_1(A)$. Мы говорим, что p почти ортогонален q ($p\perp^a q$), если $\exists\alpha\in p(M')$ ($\equiv\forall\alpha\in p(M')$), $V_q(\alpha)=\emptyset$. Если p не почти ортогонален q, тогда мы обозначаем этот факт через $p\not\perp^a q$.*

Замечание 2.2.6. *Пусть $p, q \in S_1(A)$. Тогда следующее верно:*

(i) $p \perp^w q \Rightarrow p \perp^a q$.

(ii) Существует T — слабо о-минимальная теория, такая что $p \not\perp^w q$, $p \perp^a q$.

(iii) Пусть T о-минимальная. Тогда $(p \perp^a q \Leftrightarrow p \perp^w q)$.

Лемма 2.2.7. *Пусть $p, q \in S_1(A)$. Тогда следующее верно:*

(i) Пусть $p \not\perp^w q$. Если p социальный, то q социальный и $p \not\perp^a q$.

(ii) $p \not\perp^a q \Rightarrow q \not\perp^a p$.

(iii) $\not\perp^a$ отношение эквивалентности на $S_1(A)$.

(iv) $\not\perp^w$ отношение эквивалентности на $S_1(A)$.

Доказательство. (i) Рассмотрим два случая:
a) $p \not\perp^a q$,
b) $p \not\perp^w q,\ p \perp^a q$.

В первом случае согласно Замечанию 2.1.16, если p социальный, тогда q социальный.

Рассмотрим случай когда $p \not\perp^w q$, но при этом $p \perp^a q$. Мы можем построить $2 - A$-формулу $H(x, y, \bar{a})$, где $\bar{a} \in A$, такую что для любого $\alpha \in p(M')$ множество $H(M', \alpha, \bar{a})$ выпукло так же, как и его дополнение.

$$H(M', \alpha, \bar{a}) \cup \neg H(M', \alpha, \bar{a}) = M',\ \exists \beta_1 \in H(M', \alpha, \bar{a}) \cap q(M'),$$

$$\exists \beta_2 \in \neg H(M', \alpha, \bar{a}) \cap q(M'),\ H(M', \alpha, \bar{a}) < \neg H(M', \alpha, \bar{a}).$$

Замечание 2.2.8. $\forall \alpha, \beta \in p(M')$

$$[\exists \gamma \in H(M', \alpha, \bar{a}) \setminus H(M', \beta, \bar{a}) \Rightarrow H(M', \beta, \bar{a}) \subset H(M', \alpha, \bar{a})].$$

Пусть $\alpha \in p(M')$. Рассмотрим $f \in \mathrm{Aut}_A(M')$, такую что $f(\beta_1) = \beta_2$. Тогда

$$H(M', \alpha, \bar{a}) \subset H(M', f(\alpha), \bar{a})$$

Утверждение 2.2.9. *Если $f(\alpha) > \alpha$ ($f(\alpha) < \alpha$) тогда для любого $\beta < \alpha$ ($\beta > \alpha$), $\beta \in p(M')$ $H(M', \beta, \bar{a}) \subseteq H(M', \alpha, \bar{a})$ и существуют $U(x, \alpha, \bar{c})$, $\bar{c} \in A$, $U(M', \alpha, \bar{c}) < \alpha$ ($U(M', \alpha, \bar{c}) > \alpha$), такие что*

$$\forall \beta < \alpha, \beta \in p(M')[H(M', \beta, \bar{a}) \subset H(M', \alpha, \bar{a}) \Rightarrow \beta \in U(M', \alpha, \bar{c})].$$

Доказательство Утверждения 2.2.9. Мы предполагаем, что $f(\alpha) > \alpha$, обсуждение случая $f(\alpha) < \alpha$ является аналогичным. Пусть $\alpha_0 = f^{-1}(\alpha)$, тогда

$$H(M', \alpha_0, \bar{a}) \subset H(M', \alpha, \bar{a}).$$

Предположим, что существуют $\beta \in p(M')$, $\beta < \alpha$, $H(M', \alpha, \bar{a}) \subset H(M', \beta, \bar{a})$. Рассмотрим три $\langle \alpha, \bar{a} \rangle$-определимые множества:

$$\begin{aligned} K_1(M', \alpha, \bar{a}) &:= \{\gamma \in M' : \gamma < \alpha, H(M', \alpha, \bar{a}) = H(M', \gamma, \bar{a})\}, \\ K_2(M', \alpha, \bar{a}) &:= \{\gamma \in M' : \gamma < \alpha, H(M', \alpha, \bar{a}) \subset H(M', \gamma, \bar{a})\}, \\ K_3(M', \alpha, \bar{a}) &:= \{\gamma \in M' : \gamma < \alpha, H(M', \gamma, \bar{a}) \subset H(M', \alpha, \bar{a})\}. \end{aligned}$$

$$\alpha_0 \in K_3(M', \alpha, \bar{a}) \cap p(M'),\ \beta \in K_2(M', \alpha, \bar{a}) \cap p(M').$$

Так как T слабо о-минимальна, $K_i(M', \alpha, \bar{a})$, $i = 1, 2, 3$ объединение выпуклых $\neg K_i(M', \alpha, \bar{a})$-отделимых подмножеств, существуют $i \in \{1, 2, 3\}$, $K_i^j(M', \alpha, \bar{a})$ максимально выпуклое $< \alpha, \bar{a} >$-определимое подмножество такое что

$$\exists \gamma \in K_i^j(M', \alpha, \bar{a}) \cap p(M') \Rightarrow \forall \mu [p(M')^- < \mu < \gamma \Rightarrow \mu \in K_i^j(M', \alpha, \bar{a})].$$

Рассмотрим три случая:
$i = 1$. Мы имеем две возможности для p.
a) p является иррациональным влево. Следовательно, $\exists C(x, \bar{c})$, $\bar{c} \in A$

$$C(M', \bar{c}) \subset K_i^j(M', \alpha, \bar{a}),\ C(M', \bar{c}) < p(M').$$

b) p является квазирациональным влево, тогда $\exists C(x, \bar{c})$, $\bar{c} \in A$

$$C(M', \bar{c})^- \cup C(M', \bar{c}) = p(M')^-.$$

Таким образом мы имеем

$$\begin{aligned} M' \models\ & \exists z (C(M', \bar{c}) < z < \alpha \wedge \\ & \forall x (C(M', \bar{c}) < x < z \rightarrow H(M', \alpha, \bar{a}) \leftrightarrow H(M', x, \bar{a}))) \end{aligned}$$

Рассмотрим следующую формулу:

$$\Phi(y, \bar{c}, \bar{a}) := \exists z [C(M', \bar{c}) < z \wedge \forall x (C(M', \bar{c}) < x < z \rightarrow \neg H(y, x, \bar{a})].$$

Тогда $\beta_2 \in \Phi(M', \bar{c}, \bar{a})$ and $\beta_1 \notin \Phi(M', \bar{c}, \bar{a})$. Противоречие.

$i = 2$. Тогда $\exists K_3^m(M', \alpha, \bar{a})$ — максимально $< \alpha, \bar{a} >$-определимое подмножество $K_3(M', \alpha, \bar{a})$ такое что $K_3^m(M', \alpha, \bar{a}) \subset p(M')$, $K_2^j(M', \alpha, \bar{a}) < K_3^m$ $(M',\ \alpha,\ \bar{a})$. Пусть $L(x, \alpha, \bar{a}) := \exists y\ (K_3^m(y, \alpha, \bar{a}) \wedge \neg H(x, y, \bar{a}) \wedge H(x, \alpha, \bar{a}))$. Следовательно, $L(M', \alpha, \bar{a}) \subset q(M')$. Если существует $\mu \in q(M')$, такой что $\mu < L(M', \alpha, \bar{a})$, тогда $\mu < L(M', \alpha, \bar{a}) < \beta_2$. Противоречие с $p \perp^a q$.

Таким образом, $L(M', \alpha, \bar{a})^- = q(M')^-$. Это возможно согласно Примечанию 2.1.15(ii) если q квазирационально влево или изолированно. Тогда существует $1-A-$formula $G(x, \bar{g})$, $\bar{g} \in A$ такая что $G(M', \bar{g})^- \cup G(M', \bar{g}) = q(M')^-$. Пусть

$$\begin{aligned}\Theta_1(\alpha, \bar{a}, \bar{g}) \ := \ & \exists z(G(M', \bar{g}) < z \wedge H(z, \alpha, \bar{a}) \wedge \\ & \forall x(G(M', \bar{g}) < x < z \to\to \exists y(K_3^m(y, \alpha, \bar{a}) \wedge \neg H(x, y, \bar{a}))))\end{aligned}$$

Ясно, что $M' \models \Theta_1(\alpha, \bar{a}, \bar{g})$. Заметим, что $\forall \delta \in p(M')\ M' \models \Theta_1(\delta, \bar{a}, \bar{g})$.

Рассмотрим произвольный элемент $\delta \in K_2^j(M', \alpha, \bar{a}) \cap p(M')$. Тогда $H(M', \alpha, \bar{a}) \subset H(M', \delta, \bar{a})$ и $K_3^m(M', \delta, \bar{a}) \subset K_2^j(M', \alpha, \bar{a})$. Следовательно, $\forall \alpha_1 \in K_3^m(M', \delta, \bar{a})\ H(M', \alpha, \bar{a}) \subset H(M', \alpha_1, \bar{a})$. Это противоречит тому, что $M' \models \Theta_1(\delta, \bar{a}, \bar{g})$.

$i = 3$. Тогда $\exists K_2^m(M', \alpha, \bar{a})$ — максимальное $< \alpha, \bar{a} >$-определимое подмножество $K_2(M', \alpha, \bar{a})$ такое что $K_2^m(M', \alpha, \bar{a}) \subset p(M')$, $K_3^j(M', \alpha, \bar{a}) < K_2^m(M', \alpha, \bar{a})$. Пусть $R(x, \alpha, \bar{a}) := \exists y\ (K_2^m(y, \alpha, \bar{a}) \wedge H(x, y, \bar{a}) \wedge \neg H(x, \alpha, \bar{a}))$. Следовательно, $R(M', \alpha, \bar{a}) \subset q(M')$. Если $\exists \mu \in q(M')\ R(M', \alpha, \bar{a}) < \mu$, тогда $\beta_1 < R(M', \alpha, \bar{a}) < \mu$. Противоречие с $p \perp^a q$.

Таким образом, $R(M', \alpha, \bar{a})^+ = q(M')^+$. Это возможно согласно Примечанию 2.1.15(ii) если q квазирационально влево или изолированно. Тогда существует $1 - A-$формула $D(x, \bar{d})$, $\bar{d} \in A$, такая что $D(M', \bar{d})^+ = q(M')^+$. Пусть

$$\Theta_2(\alpha, \bar{a}, \bar{d}) := \forall x(D(x, \bar{d}) \wedge \neg H(x, \alpha, \bar{a}) \to \exists y(K_2^m(y, \alpha, \bar{a}) \wedge \neg H(x, y, \bar{a}))))$$

Рассмотрим произвольный $\delta \in K_3^j(M', \alpha, \bar{a}) \cap p(M')$ then $M' \models \Theta_2(\delta, \bar{a}, \bar{d})$, $K_2^m(M', \delta, \bar{a}) \subset K_3^j(M', \alpha, \bar{a}) \cap p(M')$. Следовательно, для β_2 существует $\alpha_1 \in K_2^m(M', \delta, \bar{a})$, такой что $\beta_2 \in H(M', \alpha_1, \bar{a})$. Тогда согласно Примечанию 2.2.8 $H(M', \alpha, \bar{a}) \subset H(M', \alpha_1, \bar{a})$. Противоречие, потому что $\alpha_1 \in K_3^j(M', \alpha, \bar{a})$. Следовательно, $p(M') \cap K_2(M', \alpha, \bar{a}) = \emptyset$ и $K_1(M', \alpha, \bar{a}) \cap p(M') > K_3(M', \alpha, \bar{a})$. Таким образом $U(M', \alpha, \bar{a})$ является максимальным $< \alpha, \bar{a} >$-определимым подмножеством $K_3(M', \alpha, \bar{a})$. Ясно, что $U(x, \alpha, \bar{a})$ является требуемой формулой. Следовательно, Замечание 2.2.9 доказано.$\Diamond$

Пусть $G(x, \alpha, \bar{a}) := U(M', \alpha, \bar{a}) < x \leq \alpha$. Тогда $G(x, y, \bar{a})$ максимально выпуклая влево p-устойчивая $2 - A$-формула. Это означает, что p является квазиодиночным. Следовательно, если p является социальным и $p \not\perp^w q$, тогда $p \not\perp^a q$ и согласно Замечанию 2.1.16 q является социальным.

Замечание 2.2.10. *Пусть $p, q \in S_1(A)$, $p \not\perp^w q$. Тогда следующее справедливо:*

(i) Если $\alpha \in p(M')$ тогда $[p \perp^a q \Leftrightarrow V_q(\alpha) = \emptyset]$.

(ii) Если $p \perp^a q, \alpha, \beta \in p(M')$ тогда

$$[H(M', \alpha, \bar{a}) = H(M', \beta, \bar{a}) \Leftrightarrow \models E_p(\alpha, \beta, \bar{c}_p)].$$

(iii) Если $p \perp^a q,\ B \subset M'$ такое что $V_p(B) \neq \emptyset$ тогда

$$[V_q(B) = \emptyset \Leftrightarrow \exists \alpha \in p(M'),\ V_p(B) = E_p(M', \alpha, \bar{c}_p)].$$

Доказательство (ii) следует из Замечания 2.1.16.

(iii) $p \not\perp^a p$ для любой $p \in S_1(A)$ согласно Определению 2.2.5. Если $p \not\perp^a q$ тогда $q \not\perp^a p$ согласно Лемме 2.2.7(ii). Предположим $r \not\perp^a p,\ p \not\perp^a q$.

Утверждение 2.2.11. *Пусть $p \in S_1(A),\ \alpha_1, \alpha_2 \in p(M'),\ \Phi(x, \bar{\beta}), \bar{\beta} \in M'$ такая что $V_p(\alpha_1) < \Phi(M', \bar{\beta}) < V_p(\alpha_2)$. Тогда для любой $q \in S_1(A)(p \not\perp^a q)$, для любой $\Psi(x, y, \bar{a}),\ \bar{a} \in A$ такой что $\Psi(M', \alpha_1, \bar{a}) \subset V_q(\alpha_1)$ для формулы $K_{\Phi,\Psi}(y, \bar{\beta}, \bar{a}) := \exists x(\Phi(x, \bar{\beta}) \wedge \Psi(y, x, \bar{a}))$ следующее справедливо:*

$$V_q(\alpha_1) < K_{\Phi,\Psi}(M', \bar{\beta}, \bar{a}) < V_q(\alpha_2) \quad or \quad V_q(\alpha_2) < K_{\Phi,\Psi}(M', \bar{\beta}, \bar{a}) < V_q(\alpha_1).$$

Доказательство Утверждения 2.2.11. Согласно Примечанию 2.2.4(ii) для любых $\alpha_0, \alpha_0' \in \Phi(M', \bar{\beta})$ верно, что

$$V_q(\alpha_1) < V_q(\alpha_0) < V_q(\alpha_2) \Leftrightarrow V_q(\alpha_1) < V_q(\alpha_0') < V_q(\alpha_2).$$

Тогда предположим, что для любого $\alpha_0 \in \Phi(M', \bar{\beta})$

$$V_q(\alpha_1) < \Psi(M', \alpha_0, \bar{a}) < V_q(\alpha_2).$$

Таким образом, $V_q(\alpha_1) < \bigcup\limits_{\alpha_0 \in \Phi(M', \bar{\beta})} \Psi(M', \alpha_0, \bar{a}) < V_q(\alpha_2)$. Тогда

$$V_q(\alpha_1) < K_{\Phi,\Psi}(M', \bar{\beta}, \bar{a}) < V_q(\alpha_2).$$

Следовательно, Замечание 2.2.11 доказано.$\diamondsuit$

Замечание 2.2.12. *Пусть $p \in S_1(A),\ B \subset M',\ V_p(B) \neq \emptyset$ такое что M' является $|A \cup B|^+$-насыщенным.*

(i) Если $\alpha_1 < V_p(B) < \alpha_2,\ \alpha_1, \alpha_2 \in p(M')$ Тогда для $q \in S_1(A)$ такого что $q \not\perp^a p$ следующее справедливо:

$$V_q(B) \neq \emptyset \ and \ V_q(\alpha_1) < V_q(B) < V_q(\alpha_2) \ or \ V_q(\alpha_2) < V_q(B) < V_q(\alpha_1).$$

(ii) $\forall \alpha_0 \in V_p(B) \forall q \in S_1(A),\ q \not\perp^a p$ следующее справедливо:

$$V_q(\alpha_0) \subset V_q(B).$$

Рассмотрим $\beta \in r(M')$, тогда $V_p(\beta) \neq \emptyset$ потому что $r \not\perp^a p$. Согласно Примечанию 2.2.12(i) и Лемме 2.2.3(iii) $V_q(\beta) \neq \emptyset$. Следовательно, $r \not\perp^a q$.

(iv) Из определения следует для любого $p \in S_1(A)$, $p \not\perp^w p$. Если $p \not\perp^w q$, тогда $q \not\perp^w p$ согласно Замечания 2.2.6(i). Предположим, что $r \not\perp^w p$, $p \not\perp^w q$ и $p \perp^a q$. Тогда p и q являются квазиодиночными согласно Лемме 2.2.7(i). Пусть $H(x, y, \bar{a})$ есть формула из Замечания 2.2.9. Тогда из Примечания 2.2.10(ii), следует, что для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in p(M')$, если $\models \neg E_p(\alpha_1, \alpha_2, \bar{c}_p)$, то $H(M', \alpha_1, \bar{a}) \subset H(M', \alpha_2, \bar{a})$ или $H(M', \alpha_2, \bar{a}) \subset H(M', \alpha_1, \bar{a})$.

Пусть $\alpha \in p(M')$. Если $\exists \alpha_1 \in p(M')$, такая что $\alpha_1 < \alpha$, $M' \models \neg E_p(\alpha_1, \alpha, \bar{c}_p)$, $H(M', \alpha_1, \bar{a}) \subset H(M', \alpha, \bar{a})$, тогда для любой $\alpha_2, \alpha_3 \in p(M')$.

$M' \models \neg E_p(\alpha_2, \alpha_3, \bar{c}_p) \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \Rightarrow H(M', \alpha_2, \bar{a}) \subset H(M', \alpha_3, \bar{a})$.

Без потери общности предположим, что $H(x, y, \bar{a})$ возрастающая на классах эквивалентности $E_p(x, y, \bar{c}_p)$ элементов из $p(M')$.

Рассмотрим следующую формулу:

$$\begin{aligned} K(x, \alpha, \bar{c}_p, \bar{a}) \;&:=\; \forall y[x < y < \alpha \wedge \neg E_p(x, y, \bar{c}_p) \wedge \neg E_p(y, \alpha, \bar{c}_p) \rightarrow \\ &\rightarrow H(M', x, \bar{a}) \subset H(M', y, \bar{a}) \subset H(M', \alpha, \bar{a})]. \end{aligned}$$

Если p квазирационально влево, тогда существует $U_p(x, \bar{b})$ такое что $U_p(M', \bar{b})^- = p(M')^-$,

$$M' \models \forall x[U_p(M', \bar{b}) < x < \alpha \rightarrow K(x, \alpha, \bar{c}_p, \bar{a})].$$

Если p не-квазирационально влево, тогда существует $C(M', \bar{e})$, такое что $C(M', \bar{e}) \subset K(M', \alpha, \bar{c}_p, \bar{a})$, $C(M', \bar{e}) < p(M')$. Следовательно, мы имеем:

$$M' \models \forall x[C(M', \bar{e}) < x < \alpha \rightarrow K(x, \alpha, \bar{c}_p, \bar{a})].$$

Аналогично обсуждение формулы

$$\begin{aligned} K_1(x, \alpha, \bar{c}_p, \bar{a}) \;&:=\; \forall y[(\alpha < y < x \wedge \neg E_p(x, y, \bar{c}_p) \wedge \neg E_p(y, \alpha, \bar{c}_p)) \rightarrow \\ &\rightarrow H(M', \alpha, \bar{a}) \subset H(M', y, \bar{a}) \subset H(M', x, \bar{a})]. \end{aligned}$$

дает формулу $D(x, \bar{d})$ такую что $C(M', \bar{e}) < p(M') < D(M', \bar{d})$ и

$$\begin{aligned} M' \;&\models\; \forall x \forall y[C(M', \bar{e}) < x < y < D(M', \bar{d}) \wedge \neg E_p(x, y, \bar{c}_p) \rightarrow \\ &\rightarrow H(M', x, \bar{a}) \subset H(M', y, \bar{a})]. \end{aligned}$$

Пусть элемент $\beta \in r(M')$, тогда существует формула $\Phi(x, y, \bar{b})$, такая что $\Phi(M', \beta, \bar{b}) \cap p(M') \neq \emptyset$ и $\neg\Phi(M', \beta, \bar{b}) \cap p(M') \neq \emptyset$. Предположим, что $\gamma_1 \in \Phi(M', \beta, \bar{b}) \cap p(M')$ и $\gamma_2 \in \neg\Phi(M', \beta, \bar{b}) \cap p(M')$ и $\gamma_1 < \gamma_2$. Пусть $H_1(x, \beta, \bar{b})$ есть максимально выпуклая подформула $\Phi(x, \beta, \bar{b})$ такая что $\gamma_1 \in H_1(M', \beta, \bar{b})$. Следовательно, $\gamma_2 > H_1(M', \beta, \bar{b})$. For $\gamma_2 \in p(M')$ существует $\mu \in q(M')$ такое что $\mu > H(M', \gamma_2, \bar{a})$. Тогда $\forall \alpha \in H(M', \beta, \bar{a}) \cap C(M', \bar{e})^+ \cap D(M', \bar{d})^-$ мы имеем $H(M', \alpha, \bar{a}) < \mu$.

Рассмотрим формулу

$$H_2(x, \beta, \bar{a}, \bar{e}, \bar{b}) := \exists y(H_1(y, \beta, \bar{b}) \wedge C(M', \bar{e}) < y \wedge H(x, y, \bar{a})).$$

Тогда $H_2(M', \beta, \bar{b}, \bar{d}, \bar{e}, \bar{a}) \cap q(M') \neq \emptyset$, потому что $H(M', \gamma_1, \bar{a}) \cap q(M') \neq \emptyset$, $\neg H_2(M', \beta, \bar{b}, \bar{d}, \bar{e}, \bar{a}) \cap q(M') \neq \emptyset$, потому что $\mu > H_2(M', \beta, \bar{b}, \bar{d}, \bar{e}, \bar{a})$. Таким образом, $r \not\perp^w q$.$\diamondsuit$

Теорема 2.2.13. *Отношения эквивалентности $\not\perp^a$ и $\not\perp^w$ определяют разбиения множества неалгебраических типов из $S_1(A)$ на классы эквивалентности следующим образом:*

(i) Каждый $\not\perp^w$-класс содержит $\not\perp^a$-классы или совпадает с $\not\perp^a$-классом.

(ii) Каждый $\not\perp^w$-класс содержит типы только одного вида из шести основных видов Теоремы 2.1.13.

(iii) Каждый $\not\perp^w$-класс, который содержит социальные типы, является $\not\perp^a$-классом.

Лемма 2.2.14. *Пусть $A, B, C \subset M'$ такие, что M' is $|A \bigcup B \bigcup C|^+$-насыщенное, $p, q \in S_1(A), p \not\perp^w q$. Тогда следующее справедливо:*

(i) Если $p \not\perp^a q$, тогда $V_p(B) \bigcap V_p(C) = \emptyset$ iff $V_q(B) \bigcap V_q(C) = \emptyset$

(ii) Если $p \perp^a q$, $V_p(B) \bigcap V_p(C) = \emptyset$, $V_q(B) \bigcap V_q(C) \neq \emptyset$, тогда $\exists \delta \in q(M')$ такой, что $V_q(B) \bigcap V_q(C) = V_q(\delta) = E_q(M', \delta, \bar{c}_q)$, $(V_p(B), V_p(C)) = \emptyset$ или $(V_p(C), V_p(B)) = \emptyset$.

(iii) Если $p \perp^a q, \exists \alpha \in p(M')$ такой, что $V_p(B) < V_p(\alpha) < V_p(C)$, тогда $V_q(B) \bigcap V_q(C) = \emptyset$.

Доказательство. (i) это следует из Замечания 2.2 и Замечания 2.7

(ii) Пусть $H(x, y, \bar{b})$ есть формула из Замечания 2.1, которая была получена из факта $q \not\perp^w p, q \perp^a p$ такая что $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in q(M')$ следующее справедливо:

- $H(M', \alpha_1, \bar{b}) < \neg H(M', \alpha_1, \bar{b})$
- $\exists \beta_1, \beta_2 \in p(M'), \beta_1 \in H(M', \alpha_1, \bar{b}), \beta_2 \in \neg H(M', \alpha_2, \bar{b})$
- $H(M', \alpha_1, \bar{b}) \subset H(M', \alpha_2, \bar{b}) \Rightarrow \neg E_q(\alpha_1, \alpha_2, \bar{c}_q)$

Без потери общности как в доказательстве Замечания 2.1 мы предположим:

$$H(M', \alpha_1, \bar{b}) \subset H(M', \alpha_2, \bar{b}) \Leftrightarrow \models \alpha_1 < \alpha_2 \& \neg E_q(\alpha_1, \alpha_2, \bar{c}_q)$$

Предположим $\emptyset \neq V_q(B) \bigcap V_q(C) \neq E_q(M', \delta, \bar{c}_q)\ \forall \delta \in q(M')$

Пусть $\delta \in V_q(B) \bigcap V_q(C)$. Тогда существуют две формулы $\phi(x, \bar{\beta})$ и $\psi(x, \bar{\gamma})$, где $\bar{\beta} \in B \bigcup A$, $\bar{\gamma} \in C \bigcup A$, такие что $\delta \in \phi(M', \bar{\beta}) \bigcap \psi(M', \bar{\gamma})$, и существуют μ_1, μ_2, μ_3, $\mu_4 \in q(M')$, такие что

$$\mu_1 < \phi(M', \bar{\beta}) < \mu_2, \mu_3 < \psi(M', \bar{\gamma}) < \mu_4.$$

Рассмотрим формулу $\phi_1(x, \bar{\beta}, \bar{c}_q) := \exists y(\phi(y, \bar{\beta}) \& E_q(x, y, \bar{c}_q))$.

Так как $E_q(x, y, \bar{c}_q)$ является p-стабильной, следовательно согласно Замечанию 2.1.10 (iv) существует μ_1', μ_2' такие что $\mu_1' < \phi_1(M', \bar{\beta}, \bar{c}_q) < \mu_2'$ и для любого $\delta \in \phi_1(M', \bar{\beta}, \bar{c}_q)$ верно, что $E_q(M', \delta, \bar{b}) \subseteq \phi_1(M', \bar{\beta}, \bar{c}_q)$. Пусть $\psi_1(x, \bar{\gamma}, \bar{c}_q) := \exists y(\psi(y, \bar{\gamma}) \& E_q(x, y, \bar{c}_q))$. Тогда для любого элемента δ из пересечения $\phi_1(M', \bar{\beta}, \bar{c}_q) \bigcap \psi_1(M', \bar{\gamma}, \bar{c}_q)$ выполняется следующее включение: $E_q(M', \delta, \bar{c}_q) \subseteq \phi_1(M', \bar{\beta}, \bar{c}_q) \bigcap \psi(M', \bar{\gamma}, \bar{c}_q)$.

Следовательно, существуют такие $\alpha_1, \alpha_2 \in q(M')$, которые лежат в пересечении $\phi_1(M', \bar{\beta}, \bar{c}_q) \bigcap \psi_1(M', \bar{\gamma}, \bar{c}_q)$, что $\models \neg \varepsilon_q(\alpha_1, \alpha_2, \bar{c}_q)$. Предположим $\alpha_1 < \alpha_2$. Пусть

$$\begin{aligned} K_\phi(\bar{y}, \bar{\beta}, \bar{b}, \bar{c}_q) \ &:= \ \exists x_1\ \exists x_2\ (\phi_1(x_1, \bar{\beta}, \bar{c}_q) \wedge \phi_1(x_2, \bar{\beta}, \bar{c}_q) \wedge \neg E_q(x_1, x_2, \bar{c}_q) \wedge \\ &\quad \wedge x_1 < x_2 \wedge \neg H(y, x_1, \bar{b}) \wedge \neg H(y, x_2, \bar{b})). \end{aligned}$$

Тогда существуют $\beta_1, \beta_2 \in p(M')$, такие что

$$p(M')^- < \beta_1 < K_\phi(M', \bar{\beta}, \bar{b}, \bar{c}_q) < \beta_2 < p(M')^+,$$

потому что существуют $\alpha_3, \alpha_4 \in q(M')$, такие что

$$\alpha_3 < V_p(B) < \alpha_4 \text{ and } \models \neg E_q(\alpha_3, \alpha_1, \bar{c}_q) \wedge \neg E_q(\alpha_2, \alpha_4, \bar{c}_q).$$

$K_\phi(M', \beta, \bar{b}, \bar{c}_q) \neq \emptyset$, потому что $\exists \mu_0 \in H(M', \alpha_2, \bar{b}) \setminus H(M', \alpha_1, \bar{b})$. Таким образом, $\mu_0 \in K_\phi(M', \bar{\beta}, \bar{b}, \bar{c}_q)$.

Рассмотрим

$$\begin{aligned} K_\psi(y, \bar{\gamma}, \bar{b}, \bar{c}_q) \ &:= \ \exists x_1\ \exists x_2\ (\psi_1(x_1, \bar{\gamma}, \bar{c}_q) \wedge \psi_1(x_2, \bar{\gamma}, \bar{c}_q) \wedge \\ &\quad \wedge \neg E_q(x_1, x_2, \bar{c}_q) \wedge x_1 < x_2 \wedge \neg H(y, x_1, \bar{b}) \wedge \neg H(y, x_2, \bar{b})). \end{aligned}$$

Тогда $\mu_0 \in K_\psi(M', \bar{\gamma}, \bar{b}, \bar{c}_q)$ с помощью такого же рассуждения как для $K_\phi(M', \bar{\beta}, \bar{b}, \bar{c}_q)$. Следовательно, $\mu_0 \in V_p(B) \cap V_p(C)$. Противоречие.

Таким образом, $\exists \delta \in q(M')$ такое что $V_q(B) \cap V_q(C) = E_q(M', \delta, \bar{c}_q)$. Для квазиодиночного типа q, $E_q(M', \delta, \bar{c}_q) = V_q(B)$. Следовательно, (ii) доказано.

(iii) Согласно Лемме 2.2.3(v) мы имеем $V_p(B) < V_p(\alpha) < V_p(c)$. такие что $\phi(M', \bar{\beta}) \subseteq V_q(B),\ \psi(M', \bar{\gamma}) \subseteq (C), \phi(M', \bar{\beta}) \cap \psi(M', \bar{\gamma} = E_q(M', \delta, \bar{c}_q)$. Существование этих ϕ, ψ, δ следует из доказательства (ii). Пусть $\theta(M', \bar{\beta}_1), \bar{\beta}_1 \in B$ такие что $\Theta(M', \beta_1) \subset V_p(B)$ и $V_p(B) \subset H(M', \delta, \bar{b})$. Предположим $V_p(B) \subset H(M', \delta, \bar{b})$. Тогда $V_p(B)^+ = H(M', \delta, \bar{\beta})^+$. Если $V_p(B)^+ \neq H(M', \delta, \bar{\beta})^+$, тогда существует $\theta(x, \bar{\beta}_1), \bar{\beta}_1 \in B,\ \exists \in H(M', \delta, \bar{b})$ such that $\theta(M', \bar{\beta}_1) < \mu$.

Рассмотрим следующую формулу

$$R(x, \bar{\beta}, \bar{\beta}_1, \bar{b}) := \exists y\ (\phi(y, \bar{\beta}) \wedge H(x, y, \bar{b}) \wedge \theta(M', \bar{\beta}_1) < x).$$

Следовательно, $R(M', \bar{\beta}, \bar{\beta}_1, \bar{b}) \subset V_p(B), R(M', \bar{\beta}, \bar{\beta}_1, \bar{b})^+ = H(M', \delta, \bar{b})^+$.

Предположим $V_p(C) \subset \neg H(M', \delta, \bar{b})$. Тогда $V_p(C)^- = \neg H(M', \delta, \bar{b})^-$. Если $V_p(C)^- \neq \neg H(M', \delta, \bar{b})^-$, тогда существует $\theta_1(x, \bar{\gamma}_1), \bar{\gamma}_1 \in C, \exists \mu_1 \in \neg H(M', \delta, \bar{b})$ такая что $\theta_1(M', \gamma_1) < \mu_1$.

Рассмотрим следующую формулу

$$L(x, \bar{\gamma}, \bar{\gamma}_1, \bar{b}) := \exists y\ (\psi(y, \bar{\gamma}) \wedge \neg H(x, y, \bar{b}) \wedge x < \theta(M', \bar{\gamma}_1)).$$

$L(M', \bar{\gamma}, \bar{\gamma}_1, \bar{b}) \subset V_p(C), L(M', \bar{\gamma}, \bar{\gamma}_1, \bar{b}) = \neg H(M', \delta, \bar{b})^-$.

Таким образом, если $V_p(B)^+ \cap \neg H(M', \delta, \bar{b}) \neq \emptyset$, тогда

$$V_p(C) \subseteq \neg H(M', \delta, \bar{b}), \quad V_p(C)^- = \neg H(M', \delta, \bar{b})^-, \quad V_p(B) \cap V_p(C) \neq \emptyset.$$

Противоречие. Следовательно, $V_p(B)^+ = \neg H(M', \delta, \bar{b})$ и $V_p(C)^- = H(M', \delta, \bar{b})$. Противоречие с существованием α. Таким образом, $V_q(B) \cap V_q(C) = \emptyset$. $\diamondsuit$

Замечание 2.2.15. *Пусть $A, B, C \subset M'$ такие, что M' is $|A \cup B \cup C|^+$-насыщенное, $p, q \in S_1(A)$, $p \not\perp^w q, p \perp^a q$. Тогда следующее справедливо:*

(i) $\exists \alpha \in p(M'), [V_p(B) < V_p(\alpha) < V_p(C)$ or $V_p(C) < V_p(\alpha) < V_p(B)]$ тогда и только тогда, когда

$$\exists \beta \in q(M')[V_q(B) < V_p(\beta) < V_q(C) \quad or \quad V_q(C) < V_q(\beta) < V_q(B)].$$

(ii) Пусть p квазирационально вправо. Тогда следующее справедливо:

$$\exists \alpha \in p(M'), [V_p(B) < V_p(\alpha) < V_p(C) < U_p(M')^+ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \beta \in q(M')\ V_q(B) < V_q(\beta) < V_q(C) < q(M')^+,$$

если q квазирационально вправо или

$$q(M')^- < V_q(C) < V_q(\beta) < V_q(B),$$

если q квазирационально влево. Здесь, $U_p(x)$ is A-определимая формула такая что $U_p(M')^+ = p(M')^+$.

(iii) Пусть p квазирационально вправо.

$$\exists \alpha \in p(M'), [V_p(B) < V_p(\alpha) < V_p(C) < U_p(M')^+].$$

Тогда

$$\forall \Phi(M', \bar{\beta}) \subset q(M'),\ \bar{\beta} \in B, \forall \theta(M', \bar{\gamma}) \subset q(M'),\ \bar{\gamma} \in C$$

следующее справедливо:

$$[\Phi(M', \bar{\beta})^+ = q(M')^+ \Rightarrow \theta(M', \bar{\gamma}) \subset \Phi(M', \bar{\beta})].$$

Лемма 2.2.16. *Пусть $p, q \in S_1(A)$, $p \not\perp^w q$. Тогда тип p является определимым тогда и только тогда, когда тип q является определимым.*

Доказательство. Согласно Замечанию 1.2.6 мы можем допустить, что типы p и q являются иррациональными. Предположим p является неопределимым, а q — определимым.

Пусть формулы $H(x, y, \bar{n})$, $C_1(y, \bar{c}_1)$, $D_1(y, \bar{d}_1)$, $C_2(x, \bar{c}_2)$, $D_2(x, \bar{d}_2)$, где кортежи $\bar{n}$, $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$, $\bar{d}_1$, $\bar{d}_2 \in A$, будут такими, что

a) $H(x, y, \bar{c})$ из Утверждения 2.2.11.

b) $C_1(M', \bar{c}_1) < p(M') < D_1(M', \bar{d}_1)$

c) $C_2(M', \bar{c}_2) < q(M') < D_2(M', \bar{d}_2)$

d)

$$\forall \gamma_1, \gamma_2 \in M'[C_1(M', \bar{c}_1) < \gamma_1 < \gamma_2 < D_1(M', \bar{d}_1) \Rightarrow$$

$$C_2(M', \bar{c}_2) \subset H(M', \gamma_1, \bar{n}) \subseteq H(M', \gamma_2, \bar{n}) < D_2(M', \bar{d}_2)$$

$$(C_2(M', \bar{c}_2) < H(M', \gamma_1, \bar{n}) \supseteq H(M', \gamma_2, \bar{n}) \supset D_2(M', \bar{d}_2))$$

Без потери общности мы можем допустить, что $H(x, y, \bar{n})$ является возрастающей на $(C_1(M', \bar{c}_1), D_1(M', \bar{d}_1))$. Пусть

$$\phi(y, \bar{z}_1, \bar{z}_2) := G(M', \bar{z}_1) < y < G(M', \bar{z}_2),$$

где $G(y, \bar{z})$ является формулой из Леммы 1.2.7(ii). Тогда тип p не является $\phi(y, \bar{z}_1, \bar{z}_2)$–определимым.

Рассмотрим формулу

$$\psi(x, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{n}, \bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{d}_1, \bar{d}_2) := \exists y(H_0(x, y, \bar{n}) \wedge C_1(M', \bar{c}_1) < y < D_1(M', \bar{d}_1) \wedge$$

$$C_2(M\ \bar{c}_2) < x < D_2(M', \bar{d}_2) \wedge \phi(y, \bar{z}_1, \bar{z}_2))$$

Здесь $H_0(x, y, \bar{n})$ есть формула из доказательства Утверждения 2.2.11.

Утверждение 2.2.17. $\forall \bar{a}_1, \bar{a}_2 \in A^{l(\bar{z})}$ *следующее справедливо:*

$$[\phi(y, \bar{a}_1, \bar{a}_2) \in p \Leftrightarrow \psi(x, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{d}_1, \bar{d}_2) \in q]$$

Доказательство Утверждения 2.2.17. Предположим $\phi(y, \bar{a}_1, \bar{a}_2) \in p$. Пусть $\gamma \in p(M') \bigcap \phi(M', \bar{a}_1, \bar{a}_2)$, тогда

$$\forall \mu \in M'[C_2(M', \bar{c}_2) < \mu < q(M') \Rightarrow \mu \in H(M', \gamma, \bar{n})]$$

Так как q является иррациональным, и $C_1(M\,\bar{c}_1) < \gamma < D_1(M', \bar{d}_1)$, мы имеем $\psi(x, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots) \in q$.

Предположим $\psi(x, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots) \in q$. Пусть $\mu \in q(M') \bigcap \psi(M', \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots)$, тогда существует такой элемент $\gamma \in p(M')$, что $\mu \in H(M', \gamma, \bar{n})$ и $\gamma \in \phi(M', \bar{a}_1, \bar{a}_2)$. Следовательно, в силу иррациональности типа p и соотношения $C_2(M', \bar{c}_2) < \mu < D_2(M', \bar{d}_2)$, мы имеем $\phi(y, \bar{a}_1, \bar{a}_2) \in p$. Таким образом, замечание 2.2.17 доказано.$\diamondsuit$

Так как тип q определим, существует формула $\theta_\psi(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{c}), \bar{c} \in M$ такая, что для любых $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in A$ следующее справедливо:

$$M' \models \Theta_\Phi(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{c}) \Leftrightarrow \Psi(x, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots) \in q.$$

Таким образом, $[\phi(y, \bar{a}_1, \bar{a}_2) \in p \Leftrightarrow M' \models \Theta_\Phi(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{c})]$. Противоречие. $\diamondsuit$

Рассмотрим сходимость формулы к типу и строго определимые типы.

Факт 2.1.18. *[85] Пусть p, $r \in S_1(A)$, $A \subset N \models T$, $\bar{\gamma} \in N \setminus A$. Тогда верно следующее:*

1. Если $p \not\perp^w r$, то $r \not\perp^w p$.

2. Если $\bar{\gamma}$ ht-определимый над A и $\bar{\gamma} \not\perp^w p$, то p определимый.

3. Если $p \not\perp^w r$, то p определим, если и только если r определим.

Определение 2.1.19. *Формула $K(x, y)$ монотонно возрастает по y на выпуклом множестве B, если*
$\forall b_1$, $\forall b_2$ $[(b_1 \in B \wedge b_2 \in B \wedge b_1 < b_2) \to K(N, b_1) < K(N, b_2)^+]$. *Аналогично можно определить монотонное убывание.*

Факт 2.1.20. *[85], [83], [86] Если $p(y) \not\perp^w q(x)$, тогда существует A-определимая формула $K(x, y)$, такая что $K(x, y)$ монотонна по y на некотором $\Theta(N)$, $\Theta(y) \in p$, и монотонна по x на некотором $\mu(N)$, $\mu(x) \in q$, и для любого $\alpha \in p(N)$, любого $\beta \in q(N)$ имеем, что $K(x, \alpha)$ расщепляет $q(N)$ и $K(\beta, y)$ расщепляет $p(N)$.*

Заметим, что в о-минимальном случае $K(x, y)$ из Факта 3.3.15 — график некоторой монотонной функции ([3], [4], [86]).

Факт 2.1.21. *[85], [83], [86] Пусть p, $q \in s_1(A)$, $p \not\perp^w q$. Тогда верно:*

1. p строго определим $\Longleftrightarrow$ q строго определим.

2. p иррациональный $\Longleftrightarrow$ q иррациональный.

3. p квазирациональный $\Longleftrightarrow$ q квазирациональный.

4. $\not\perp^w$ — отношение эквивалентности на $S_1(A)$.

Заметим, что Факт 2.1.21 является обобщением аналогичного факта для 1-типов над o-минимальной моделью, доказанный Д. Маркером в [3].

Определение 2.1.22. Пусть $q \in S_1(A)$, $A \subset M'$, $H(y, \bar{u})$ — A-формула.

Мы говорим, что условие *левой сходимости* $H(y, \bar{u})$ к q является истинным и обозначим через $LC(H(y, \bar{u}), q)$, если следующее истинно: для любой $G \in L(q)$, $\exists \bar{a} \in A$, такой что

$$G(M') < H(M', \bar{a})^+ \text{ and } H(M', \bar{a}) < q(M').$$

Мы говорим, что условие *правой сходимости* $H(y, \bar{u})$ к q является истинным и обозначим через $RC(H(y, \bar{u}), q)$, если следующее верно: для любой $D \in R(q)$, $\exists \bar{a} \in A$ such that

$$H(M', \bar{a}) < D(M') \text{ and } q(M') < H(M', \bar{a})^+.$$

Заметим, что определение левой и правой сходимости не симметрично.

Утверждение 2.1.23. *Пусть $q \in S_1(A)$. тогда следующее верно:*

(i) Пусть $H(y, \bar{u})$ есть A-формула такая, что для любого $\bar{b} \in M'$, $H(M', \bar{b})$ выпуклая. Тогда $WEC(H(y, \bar{u}), q)$ тогда и только тогда, когда или $RC(H(y, \bar{u}), q)$ или $LC(H'(y, \bar{u}_1, \bar{u}_2), q)$. (Где, $H'(y, \bar{u}_1, \bar{u}_2) := H(y, \bar{u}_1) \wedge \neg H(y, \bar{u}_2) \wedge \forall y'(H(y', \bar{u}_2) \to y < y')$.)

(ii) q не строго определимое тогда и только тогда, когда существует A-определимая формула $H(y, \bar{u})$ такая что или верно $LC(H(y, \bar{u}), q)$, или верно $RC(H(y, \bar{u}), q)$.

Определение 2.1.24. *Пусть $\bar{\alpha}', \bar{\beta}, \bar{\gamma}' \in M' \setminus A$, $A \subset M'$, $q \in S_1(A \cup \bar{\alpha}')$, m = длина $\bar{\alpha}'$. Мы говорим что q есть строго определимо над $(A \cup \bar{\alpha}' \cup \bar{\gamma}', \bar{\alpha}')$ for $\bar{\beta}$ если следующее верно:*

(i) q не строго определимое.

(ii) Для любой $(A \cup \bar{\alpha}')$–определимой $(k+1)$–формулы $\phi(y, \bar{u})$ существует $(A \cup \bar{\alpha}' \cup \bar{\gamma}')$–формула $F(y)$ такая, что $F(y)$ есть строго $(\phi, \bar{\gamma})$-определимая из q, т.е. $\exists \delta \in q(M'), M' \models F(\delta)$ и

$$\forall \bar{c} \in A^k [M' \models \exists y(F(y) \wedge \phi(y, \bar{c})) \to \forall y(F(y) \to \phi(y, \bar{c})))]$$

(iii) (a) Если q иррациональное, то $\exists \delta_1, \delta_2 \in q(M'), \delta_1 < V_q(\bar{\beta}) < \delta_2$ такие, что

$$tp(\delta_1|A\cup\bar{\alpha}'\cup\bar{\gamma}')=tp(\delta_2|A\cup\bar{\alpha}'\cup\bar{\gamma}').$$

(b) если q квазирациональное, то $\exists\delta_1\in q(M')\setminus QV_q(\bar{\beta}), \forall\delta_2\in QV_q(\bar{\beta})$

$$tp(\delta_1|A\cup\bar{\alpha}'\cup\bar{\gamma}')=tp(\delta_2|A\cup\bar{\alpha}'\cup\bar{\gamma}').$$

(iv) Пусть i $(1\le i\le m)$ тогда обозначим $q_i:=tp(\alpha'_i|A\cup\bar{\alpha}'_{i-1})$. Тогда для любого i $(1\le i\le m)$ следующее верно:

(a) Если q_i изолированный по $(A\cup\bar{\alpha}'_{i-1})$-определимой полной формуле $F_i(x)$, тогда
$F_i(x)$ также изолированный $tp(\alpha'_i|A\cup\bar{\alpha}'_{i-1}\cup\bar{\gamma}')$.

(b) Если q_i иррациональный, тогда $\exists\eta_i,\eta'_i\in q_i(M')$, $\eta_i<V_{q_i}((\bar{\alpha}')^i,\bar{\beta})<\eta'_i$ такое что

$$tp(\eta_i|A\cup\bar{\alpha}'_{i-1}\cup\bar{\gamma}')=tp(\eta'_i|A\cup\bar{\alpha}'_{i-1}\cup\bar{\gamma}').$$

(c) Если q_i квазирациональный, тогда $\exists\eta_i\in q_i(M')\setminus QV_{q_i}((\bar{\alpha}')^i,\bar{\beta}), \forall\eta\in QV_{q_i}((\bar{\alpha}')^i,\bar{\beta})$

$$tp(\eta_i|A\cup\bar{\alpha}'_{i-1}\cup\bar{\gamma}')=tp(\eta|A\cup\bar{\alpha}'_{i-1}\cup\bar{\gamma}').$$

Это следует из Определения 2.1.24

Замечание 2.1.25. *Пусть $A\subset M', \bar{\alpha}', \bar{\beta}, \bar{\gamma}'\in M'\setminus A, q\in S_1(A\cup\bar{\alpha}')$ строго определимо над $(A\cup\bar{\alpha}'\cup\bar{\gamma}',\bar{\alpha}')$ для $\bar{\beta}, \delta$ есть произвольный элемент из $QV_q(\bar{\beta})$. Обозначим $q':=tp(\delta|A\cup\bar{\alpha}'\cup\bar{\gamma}'), q'_i:=tp(\alpha'_i|A\cup\bar{\alpha}'_{i-1}\cup\bar{\gamma}'), (1\le i\le l(\bar{\alpha}'))$. Тогда следующее верно:*

(i) $QV_q(\bar{\beta})\subset q'(M')$. Если тип q квазирациональный вправо, тогда $q'(M')^+=QV_q(\bar{\beta})^+=q(M')^+$ и следовательно, q' или квазирациональный вправо или изолированный. Если же тип q квазирациональный влево, то $q'(M')^-=QV_q(\bar{\beta})^-=q(M')^-$ и, следовательно, q' или квазирациональный влево, или изолированный.

(ii) $(1\le i\le l(\bar{\alpha}'))$ Если q_i не изолированный, то $QV_{q_i}(\bar{\beta})\subset q'_i(M')$. Если q_i квазирациональный вправо, то $q'_i(M')^+=QV_{q_i}(\bar{\beta})^+=q_i(M')^+$ и следовательно q'_i или квазирациональный вправо или изолированный. Если q_i квазирациональный влево, то $q'_i(M')^-=QV_{q_i}(\bar{\beta})^-=q_i(M')^-$ и следовательно, q'_i или квазирациональный влево или изолированный.

(iii) Если q' $(q'_i(1\le i\le l(\bar{\alpha}')))$ иррациональный, то q (q_i) иррациональный.

Теорема 2.1.26. *Пусть $q\in S(A\cup\bar{\alpha}')$ не строго определим. Тогда для любого $\bar{\beta}\in M'$ существует $\bar{\gamma}'\in M'$ такой, что q строго определим над $(A\cup\bar{\alpha}'\cup\bar{\gamma}',\bar{\alpha}')$ для $\bar{\beta}$.*

Доказательство Теоремы 2.1.26. Фиксируем $\bar{\beta} \in M'$. Если тип q не строго определим, тогда в силу Утверждения 2.1.23 существует $(A \cup \bar{\alpha}')$–формула $H(y, \bar{u})$ такая, что выполняется $LC(H(y, \bar{u}), q)$ или $RC(H(y, \bar{u}), q)$. В каждом из этих случаев мы определим бесконечное множество формул, в упорядоченном построении $\bar{\gamma}'$.

Если $LC(H(y, \bar{u}), q)$, то

$$\Gamma_{lc}(\bar{u}) := \{H(M', \bar{u}) > G(M') | G \in L(q)\} \bigcup \{\exists y (H(M', \bar{u}) < y < \psi(M')|$$

$$\psi(M') \subseteq QV_q(\bar{\beta}), \psi(y) \text{ есть } (A\bar{\alpha}'\bar{\beta}) - \text{формула } \}$$

квазимодельное и замкнутое относительно конечной коньюнкции. Заметим что по Теореме компактности для любой реализации $\bar{\gamma}$ of $\Gamma_{lc}(\bar{u})$ существует $\delta_1, \delta_2 \in q(M')$ такой, что

$$\delta_1 \in H(M', \bar{\gamma}) \text{ и } H(M', \bar{\gamma}) < \delta_2 < QV_q(\bar{\beta}).$$

Если $RC(H(y, \bar{u}), q)$, то

$$\Gamma_{rc}(\bar{u}) := \{H(M', \bar{u}) < D(M') | D \in R(q)\} \bigcup \{\exists y (\psi(M') < y < H(M', \bar{u})^+|$$

$$\psi(y) \text{ есть } (A\bar{\alpha}'\bar{\beta}) - \text{формула такая, что } \psi(M') \subseteq QV_q(\bar{\beta})\}$$

квазимодельное и замкнуто относительно конечных коньюнкций. Заметим что по Теореме компактности для любой реализации $\bar{\gamma}$ of $\Gamma_{rc}(\bar{u})$ существует $\delta_1, \delta_2 \in q(M')$ such that

$$QV_q(\bar{\beta}) < \delta_1 \text{ and } \delta_1 \in H(M', \bar{\gamma}) < \delta_2.$$

Пусть p — произвольный 1-тип над $A \cup \bar{\alpha}''$, где $\bar{\alpha}'' \subseteq \bar{\alpha}'$. Определим три вида множеств $l(\bar{u})$-формул.

Если тип p изолированный по полной $(A \cup \bar{\alpha}'')$-формуле $\psi(y)$, тогда

$$\Gamma_p(\bar{u}) := \{\exists y(\psi(y) \wedge \Theta(y, \bar{u})) \to \forall y(\psi(y) \to \Theta(y, \bar{u}) | \Theta(y, \bar{u})$$

$$\text{есть } (A \cup \bar{\alpha}'') - \text{формула}\}.$$

Если p квазирациональный вправо, то

$$\Gamma_p(\bar{u}) := \{\exists y(\psi(y) \wedge \Theta(y, \bar{u})) \to \exists t(t < \psi(M') \wedge$$

$$\forall y(t < y < \psi(M')^+ \to \Theta(y, \bar{u}))| \psi \text{ есть}$$

$$(A\bar{\alpha}'\bar{\beta}) - \text{формула такая, что}$$

$$\psi(M') \subseteq QV_p(\bar{\alpha}', \bar{\beta}),\ \Theta(y, \bar{u}) \text{ есть } (A\bar{\alpha}'') - \text{формула } \}.$$

В случае, если p квазирациональный влево, $\Gamma_p(\bar{u})$ определяется так же, как $\Gamma_p(\bar{u})$ для p квазирационального вправо.

Если p иррациональный, тогда

$$\Gamma_p(\bar{u}) := \{\exists y(\psi(y) \wedge \Theta(y, \bar{u})) \to \exists t_1 \exists t_2 (t_1 < \psi(M') < t_2 \wedge$$

$$\forall y(t_1 < y < t_2 \to \Theta(y, \bar{u}))|\psi(M') \text{ есть } (A\bar{\alpha}'\bar{\beta}) - \text{формула}$$

такая, что $\psi(M') \subseteq V_p(\bar{\alpha}', \bar{\beta}), \Theta(y, \bar{u})$ есть $(A\bar{\alpha}'')$ – формула $\}$.

Утверждение 2.1.27. *(i)* $\forall p \in S_1(A \cup \bar{\alpha}''), \bar{\alpha}'' \subseteq \bar{\alpha}', \forall \bar{c} \in A^{l(\bar{u})}, \models \Gamma_p(\bar{c})$. *(ii) Для любого* $S(\bar{u})$*– квазимодельного непротиворечивого множества* $l(\bar{u})$*-*$(A \cup \bar{\alpha}' \cup \bar{\beta})$*-формул, замкнутого относительно конечных конъюнкций, для любого* $p \in S_1(A \cup \bar{\alpha}'')$, $\Gamma_p(\bar{u}) \cup S(\bar{u})$ *непротиворечиво.*

Доказательство Утверждения 2.1.27 (i) следует из определения множеств реализаций типов $QV_p(\bar{\alpha}', \bar{\beta})$, так как $(A \cup \bar{\alpha}'')$-формулы не различают две реализации типа над $A \cup \bar{\alpha}''$.
(ii) следует из (i). $\diamondsuit$

Заметим, что любая реализация $\bar{\gamma}'$ of $\Gamma_q(\bar{u}) \cup \bigcup_{1 \le i \le m} \Gamma_{q_i}(\bar{u})$ удовлетворяет условию Отределения 2.1.24(iii),(iv). Таким образом, мы можем найти $\bar{\gamma}'$ реализацию некоторого расширения $\Gamma_q(\bar{u}) \cup \bigcup_{1 \le i \le m} \Gamma_{q_i}(\bar{u})$.
По нашему предположению, q не строго определимо и, следовательно, по Утверждение 1.1.8 для q существуют две возможности:

Случай 1. q иррациональный.

Случай 2. q квазирациональный.

Случай 1.1 Существуют $H_1(y, \bar{u}_1), H_2(y, \bar{u}_2)$ – $(A \cup \bar{\alpha}')$-формулы такие, что $LC(H_1, q), RC(H_2, q)$. Положим

$$\Gamma(\bar{u}_1, \bar{u}_2) := \Gamma_{lc}(H_1, \bar{u}_1) \cup \Gamma_{rc}(H_2, \bar{u}_2) \cup \Gamma_q(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \cup \bigcup_{1 \le i \le m} \Gamma_{q_i}(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$$

По Утверждению 2.1.27 $\Gamma(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ непротиворечиво и пусть $\bar{\gamma}' := \bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2$ есть реализация $\Gamma(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$. $\bar{\gamma}'$ удовлетворяет условию Определения 2.1.24(iii),(iv). Тогда $F(y, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2) := H_1(M', \bar{\gamma}_1) < y < H_2(M', \bar{\gamma}_2)^+$ удовлетворяет Определению 2.1.24(ii) так, как $F(M', \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2) \subset q(M')$.

Случай 1.2 Для некоторой $(A \cup \bar{\alpha}')$-формулы $H(y, \bar{u})$ выполняется $LC(H(y, \bar{u}), q)$, и для любой $(A \cup \bar{\alpha}')$-формулы $K(y, \bar{u})$ верно $\neg RC(K(y, \bar{v}), q)$. Рассмотрим

$$\Gamma(\bar{u}) := \Gamma_{lc}(H, \bar{u}) \cup \Gamma_q(\bar{u}) \cup \bigcup_{1 \le i \le m} \Gamma_{q_i}(\bar{u}).$$

$\Gamma(\bar{u})$ непротиворечивое множество формул, а ее реализация $\bar{\gamma}'$ удовлетворяет условию Определений 2.1.22(iii),(iv). Рассмотрим $\phi(y, \bar{u})$. Из $\neg RC(\phi(y, \bar{u}), q)$ следует, что $\exists D \in R(q)$ такой, что $\forall \bar{a} \in A^{l(\bar{u})}$

$$M' \models \exists y(\phi(M',\bar{a}) < y < D(M')) \Rightarrow \phi(M',\bar{a}) < q(M').$$

Таким образом $(A \cup \bar{\alpha}' \cup \bar{\gamma}')$-формула $F(y,\bar{\gamma}') := H(M,\bar{\gamma}') < y < D(M')$ удовлетворяет условию Определения 2.1.24(ii).

Случай 1.3 $RC(H(y,\bar{u}),q)$ для некоторой $(A \cup \bar{\alpha}')$-формулы $H(y,\bar{u})$ и $\neg LC(K(y,\bar{v}),q)$, для любой $(A\cup\bar{\alpha}')$-формулы $K(y,\bar{v})$. Таким образом, Случай 1.3 рассматривается подобно Случаю 1.2.

Случай 2 Предположим, что q квазирациональный вправо (случай когда q квазирациональный влево рассматривается аналогично). Пусть $U_q(y)$ — выпуклая $(A \cup \bar{\alpha}')$-формула такая, что $U_q(M')^+ = q(M')^+$. Пусть $\bar{\gamma}'$ есть реализация

$$\Gamma(\bar{u}) := \Gamma_{lc}(H,\bar{u}) \cup \Gamma_q(\bar{u}) \cup \bigcup_{1\le i\le m} \Gamma_{q_i}(\bar{u}),$$

тогда как и в Случае 1 остается проверить условие из Определение 2.1.24(ii). ясно что формула $F(y,\bar{\gamma}') := H(M',\bar{\gamma}') < y < U_q(M')$ удовлетворяет Определению 2.1.24(ii), так как $F(M',\bar{\gamma}') \subset q(M')$. $\diamondsuit$

2.3 Критерий определимости 1-типов

Цель данного подраздела — дать критерий неопределимости 1-типов (Теорема 2.3.4) и одну из его форм (Предложение 2.2.7).

Пусть $q \in S_1(A)$, $A \subset N$. Обозначим

$$\begin{aligned} L(q) &:= \{G(x) \mid G(x) \text{ — } A\text{-формула, такая что } G(N) < q(N)\}, \\ R(q) &:= \{D(x) \mid D(x) \text{ — } A\text{-формула, такая что } q(N) < D(N)\}. \end{aligned}$$

Определение 2.3.1. Пусть $q \in S_1(A)$, $A \subset N$, $\theta(\bar{y}), H(x,\bar{y})$ — A-определимая формула, $X := \theta(N^{l(\bar{y})}) \cap A^{l(\bar{y})}$. Мы говорим, что выполняется *условие левой сходимости* формулы $H(x,\bar{y})$ на множестве X или $\theta(\bar{y})$ к типу q, и обозначаем это $LC(H(x,\bar{y}),X,q)$ или $LC(H(x,\bar{y}),\theta(\bar{y}),q)$, если следующее верно: $\forall G(x) \in L(q), \exists \bar{a} \in X$, такой что

$$N \models \exists x(G(N) < x < H(N,\bar{a})^+),\ H(N,\bar{a}) < q(N).$$

Мы говорим, что выполняется *условие правой сходимости* $H(x,\bar{y})$ на X к q, и обозначаем это $RC(H(x,\bar{y}),X,q)$, если следующее верно: $\forall D(x) \in L(q), \exists \bar{a} \in X$, такой что

$$N \models \exists x(H(N,\bar{a}) < x < D(N)),\ q(N) < H(N,\bar{a})^+.$$

Также мы говорим, что выполняется условие *двусторонней сходимости* формулы $H(x,\bar{y})$ на множествах X или $\theta(\bar{y})$ к типу q, и обозначаем это $C(H(x,\bar{y}),X,q)$ или $C(H(x,\bar{y}),\theta(\bar{y}),q)$, если $LC(H,X,q)$ и $RC(H,X,q)$ имеют место одновременно.

Отметим, что в определениях как левой, так и правой сходимости формулы $H(x,\bar{y})$ мы использовали правую границу формулы $H(x,\bar{a})$, $\bar{a}\in A$. Можно было бы определить сходимость и по левой границы формулы, но мы этого в данной статье делать не будем.

Заметим, что, фактически, в [6] и [7] была рассмотрена (левая) сходимость значений функции к типу q.

Замечание 2.3.2. *Пусть $q\in S_1(A)$. Тогда если тип q квазирациональный вправо, то для любых A-определимых формул $H(x,\bar{y})$, $\theta(\bar{y})$ имеет место $\neg LC(H,\theta,q)$, и если q квазирациональный влево, то для любых A-определимых формул $H(x,\bar{y})$, $\theta(\bar{y})$, имеет место $\neg RC(H,\theta,q)$.*

Замечание 2.3.3. *Пусть $H(x,\bar{y})$, $\theta(\bar{y})$ — A-определимые формулы, такие что имеет место $C(H(x,\bar{y}),\theta(\bar{y}),q)$ для некоторого $q\in S_1(A)$. Тогда для любой A-определимой формулы $\theta_1(\bar{y})$ верно следующее:*

(i) Если $LC(H(x,\bar{y}),\theta_1(\bar{y}),q)$ и $\neg RC(H(x,\bar{y}),\theta_1(\bar{y}),q)$, то $RC(H(x,\bar{y}),\theta(\bar{y})\wedge\neg\theta_1(\bar{y}),q)$.

(ii) Если $\models\forall\bar{y}(\theta(\bar{y})\rightarrow\theta_1(\bar{y}))$, то $C(H(x,\bar{y}),\theta_1(\bar{y}),q)$.

Теорема 2.3.4. *Пусть $A\subset M\models T$, T — слабо о-минимальная теория, $q\in S_1(A)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) q неопределим.

(ii) Существует A-формула $H(x,\bar{y})$ такая, что для любой A-формулы $\theta(\bar{y})$ выполняется:

$$[C(H(x,\bar{y}),\theta(\bar{y}),q)\bigvee C(H(x,\bar{y}),\neg\theta(\bar{y}),q)].$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varphi(x,\bar{y})$ — A-формула, такая что q не является $\varphi(x,\bar{y})$-определимым. По Факту 1.2.3 мы можем допустить, что для любого $\bar{b}$ из M множество $\varphi(x,\bar{b})$ выпукло. Пусть $H_1(x,\bar{y}):=x<\varphi(N,\bar{y})$, $H_2(x,\bar{y}):=\varphi(x,\bar{y})$. Тогда $H_i(x,\bar{y})$, $i=1,2,$ — A-формулы.

Пусть $\theta(\bar{y})$ произвольная A-формула.

Замечание 2.3.5. $(j=1,2)$ *Если $\neg RC(H_j,\theta,q)$, то $\exists D_j(x)\in R(q)$ такая, что верно:*

$$\forall\bar{a}\in\theta(N^{l(\bar{y})})\cap A^{l(\bar{y})}\ [N\models\exists x(H_j(N,\bar{a})<x<D_j(N))\Longleftrightarrow H_j(N,\bar{a})<q(N)].$$

Замечание 2.3.6. $(j = 1, 2)$ *Если выполняется условие* $\neg LC(H_j, \theta, q)$, *то существует* $G_j(x) \in L(q)$, *такая что для всех* $\bar{a} \in \theta(N^{l(\bar{y})}) \cap A^{l(\bar{y})}$

$$N \models \exists x(G_j(N) < x < H_j(N, \bar{a})^+) \iff q(N) < H_j(N, \bar{a})^+$$

Мы утверждаем, что по крайне мере одна из двух формул H_1, H_2 удовлетворяет условию (ii). Предположим противное то есть, существуют две A-формулы $\theta_1(\bar{y}), \theta_2(\bar{y})$ такие, что верно:

$$\neg C(H_1, \theta_1, q),\ \neg C(H_1, \neg\theta_1, q),\ \neg C(H_2, \theta_2, q),\ \neg C(H_2, \neg\theta_2, q).$$

Тогда из определения двусторонней сходимости получаем:

$$(\neg LC(H_1, \theta_1, q) \vee \neg RC(H_1, \theta_1, q)) \bigwedge (\neg LC(H_1, \neg\theta_1, q) \vee \neg RC(H_2, \neg\theta_1, q)) \bigwedge$$

$$(\neg LC(H_2, \theta_2, q) \vee \neg RC(H_2, \theta_2, q)) \bigwedge (\neg LC(H_2, \neg\theta_2, q) \vee \neg RC(H_2, \neg\theta_2, q)).$$

Для условий $\neg RC(H_i, \theta_i, q), \neg RC(H_i, \neg\theta_i, q),\ (i = 1, 2)$ обозначим, соответственно, $D_{i,1}(x)$ и $D_{i,2}(x)$ A-формулы полученные по Замечанию 2.3.5.

Для условий $\neg LC(H_i, \theta_i, q), \neg LC(H_i, \neg\theta_i, q),\ (i = 1, 2)$ обозначим, соответственно, $G_{i,1}(x)$ и $G_{i,2}(x)$ A-формулы полученные по Замечанию 2.3.6.

Введем следующие обозначения:

$$\mu_{1,1}(\bar{y}) := \begin{cases} \exists x(H_1(N, \bar{y}) < x < D_{1,1}(N)), & \text{если } \neg RC(H_1, \theta_1, q), \\ H(N, \bar{y}) < G_{1,1}(N)^+, & \text{если } \begin{array}{c} RC(H_1, \theta_1, q) \text{ и} \\ \neg LC(H_1, \theta_1, q). \end{array} \end{cases}$$

$$\mu_{1,2}(\bar{y}) := \begin{cases} \exists x(H_1(N, \bar{y}) < x < D_{1,2}(N)), & \text{если } \neg RC(H_1, \neg\theta_1, q), \\ H(N, \bar{y}) < G_{1,2}(N)^+, & \text{если } \begin{array}{c} RC(H_1, \neg\theta_1, q) \text{ и} \\ \neg LC(H_1, \neg\theta_1, q). \end{array} \end{cases}$$

$$\mu_{2,1}(\bar{y}) := \begin{cases} D_{2,1}(N)^- < H_2(N, \bar{y})^+, & \text{если } RC(H_2, \theta_2, q), \\ \exists x(G_{2,1}(N) < x < H(N, \bar{y})^+), & \text{если } \begin{array}{c} RC(H_2, \theta_2, q) \text{ и} \\ \neg LC(H_2, \theta_2, q). \end{array} \end{cases}$$

$$\mu_{2,2}(\bar{y}) := \begin{cases} D_{2,2}(N)^- < H_2(N, \bar{y})^+, & \text{если } \neg RC(H_2, \neg\theta_2, q), \\ \exists x(G_{2,2}(N) < x < H(N, \bar{y})^+), & \text{если } \begin{array}{c} RC(H_2, \neg\theta_2, q) \text{ и} \\ \neg LC(H_2, \neg\theta_2, q). \end{array} \end{cases}$$

Очевидно, $\mu_{1,1}, \mu_{1,2}, \mu_{2,1}, \mu_{2,2}$ являются A-формулами.
Рассмотрим A-формулу

$$\mu(\bar{y}) := \exists x \varphi(x, \bar{y}) \wedge [\theta_1(\bar{y}) \to \mu_{1,1}(\bar{y})] \wedge [\neg\theta_1(\bar{y}) \to \mu_{1,2}(\bar{y})] \wedge$$

$$[\theta_2 \to \mu_{2,1}(\bar{y})] \wedge [\neg\theta_2(\bar{y}) \to \mu_{2,2}(\bar{y})].$$

По Замечаниям 2.3.5 и 2.3.6 верно:

$$\forall \bar{a} \in A^{l(\bar{y})}\ [N \models \mu(\bar{a}) \Longleftrightarrow H_1(N, \bar{a}) < q(N) < H_2(N, \bar{a})^+].$$

Вспомним, что $\varphi(x, \bar{a}) \in q$, если и только если $q(N) \subset \varphi(N, \bar{a})$, если и только если $\varphi(N, \bar{a})^- < q(N) < \varphi(N, \bar{a})$, если и только если $H_1(N, \bar{a}) < q(N) < H_2(N, \bar{a})^+$.

Тогда для каждого $\bar{a}$ выполняется $N \models \mu(\bar{a}) \Longleftrightarrow \varphi(x, \bar{a}) \in q$. Следовательно, тип q является $\varphi(x, \bar{y})$-определимым. Противоречие.

Достаточность. Пусть $H(x, \bar{y})$ — A-формула, удовлетворяющая условию (ii). Пусть $D(x)$ — произвольная A-формула, такая что $q(N) < D(N)$.

Пусть $\varphi(x, \bar{y}) := H(N, \bar{y}) < x < D(N)$. Покажем, что q не-$\varphi(x, \bar{y})$-определим.

Допустим, что выполняется условие:

существует A-формула $\mu(\bar{y})$, что $\forall \bar{a} \in A^{l(\bar{y})}$:

$$[N \models \mu(\bar{a}) \Longleftrightarrow \varphi(x, \bar{a}) \in q]. \qquad (*)$$

Но для любого $\bar{a} \in A^{l(\bar{y})}$ мы имеем: $[\varphi(x, \bar{a}) \in q \Longleftrightarrow H(N, \bar{a}) < q(N)]$. Отсюда, получаем:

1) $LC(H, \mu, q), \neg RC(H, \mu, q)$. 2) $RC(H, \neg\mu, q), \neg LC(H, \neg\mu, q)$ в силу $(*)$.

Последнее означает:

$$\neg C(H, \mu, q) \wedge \neg C(H, \neg\mu, q).$$

Противоречие с выбором $H(x, \bar{y})$. Таким образом, $(*)$ не выполняется, и q не-$\varphi(x, \bar{y})$-определим. $\diamondsuit$

Предложение 2.3.7. *Пусть $\bar{\alpha} \in N \backslash M$, $tp(\bar{\alpha}/M)$ определим, $\beta \in N \backslash (M \cup \bar{\alpha})$, $q := tp(\beta/M \cup \bar{\alpha})$ иррациональный и не строго определимый.*
Тогда следующие условия эквивалентны:

(i) Существуют $(M \cup \bar{\alpha})$- определимые формулы $H(x, \bar{y})$, $\Theta(\bar{y})$ такие, что имеет место:

$$LC(H, \Theta, q),\ \neg RC(H, \Theta, q) \text{ или } \neg LC(H, \Theta, q),\ RC(H, \Theta, q)$$

(ii) q определим.

Факт 2.3.8. [1] *Пусть выполняется условие $LC(H(x, \bar{y}, \bar{\alpha}), \Theta(\bar{y}, \bar{\alpha}), q)$. Тогда существует M-определимая формула $\mu(\bar{y})$, такая что выполняется условие $LC(H(x, \bar{y}, \bar{\alpha}),\ \mu(\bar{y}), q)$.*

[1](Для о-минимального случая этот факт доказан в [6]).

Доказательство Факта 3.1.6. По определению $tp(\bar{\alpha}/M)$ существует M-формула $\mu_\Theta(\bar{y})$, такая что $\forall \bar{a} \in M$ $[N \models \Theta(\bar{a}, \bar{\alpha}) \iff M \models \mu_\Theta(\bar{a})]$. Тогда для проверки сходимости достаточно рассмотреть только кортежи элементов M. $\diamondsuit$

Доказательство Предложения 2.3.7. (i)$\Rightarrow$(ii). Предположим, что выполняются условия $LC(H, \Theta, q)$ и $\neg RC(H, \Theta, q)$. Случай, когда выполняются условия $\neg LC(H, \Theta, q)$ и $RC(H, \Theta, q)$ рассматривается аналогично.

Предположим, по Факту 3.1.6, что $\Theta(\bar{y})$ M-формула. Обозначим $X := \Theta(M^k), Z := \Theta(N^k)$. Таким образом, $\forall \bar{a} \in X, H(N, \bar{a}, \bar{\alpha}) < q(N)$. Пусть $\varphi(x, \bar{y}, \bar{\alpha})$ — произвольная $(M \cup \bar{\alpha})$-формула, такая что $\forall \bar{\gamma} \in N$ множество $\phi(N, \bar{\gamma}, \bar{\alpha})$ выпукло. Тогда

$$S_1(\bar{z}, \bar{y}_1, \bar{\alpha}) := \varphi(N, \bar{z}, \bar{\alpha})^- < H(N, \bar{y}_1, \bar{\alpha})^+ \wedge \theta_1(\bar{y}_1),$$

$$S_2(\bar{z}, \bar{y}_2, \bar{\alpha}) := \varphi(N, \bar{z}, \bar{\alpha}) < H(N, \bar{y}_2, \bar{\alpha})^+ \wedge \theta_1(\bar{y}_2).$$

В силу определимости $tp(\bar{\alpha}/M)$ существуют такие M-формулы $Q_1(\bar{z}, \bar{y}_1)$ и $Q_2(\bar{z}, \bar{y}_2)$, что $\forall \bar{a}, \bar{b}_1, \bar{b}_2 \in M$ верно:
$N \models S_1(\bar{a}, \bar{b}_1, \bar{\alpha}) \iff M \models Q_1(\bar{a}, \bar{b}_1)$ и $N \models S_2(\bar{a}, \bar{b}_2, \bar{\alpha}) \iff M \models Q_2(\bar{a}, \bar{b}_2)$.
Тогда для $Q(\bar{z}) := \exists \bar{y}_1 Q_1(\bar{z}, \bar{y}_1) \wedge \neg \exists \bar{y}_2 Q_2(\bar{z}, \bar{y}_2)$ выполняется:
$\forall \bar{a} \in M^{l(\bar{z})}$ $[M \models Q(\bar{a}) \iff \varphi(x, \bar{a}, \bar{\alpha}) \in q]$. Действительно, $M \models Q(\bar{a}) \Rightarrow \exists \bar{b}_1 \in M,\ M \models Q_1(\bar{a}, \bar{b}_1)$ и $M \models \forall \bar{y}_2 \neg Q_2(\bar{a}, \bar{y}_2)$. Но $[M \models Q_1(\bar{a}, \bar{b}_1) \iff \varphi(N, \bar{a}, \bar{\alpha})^- < q(N)]$ и $[M \models \forall \bar{y}_2 \neg Q_2(\bar{a}, \bar{y}_2) \iff q(N) < \varphi(N, \bar{a}, \bar{\alpha})^+]$. Таким образом, (i)$\Rightarrow$(ii).

(ii)$\Rightarrow$(i) Следует непосредственно из Теоремы 2.3.4.

2.4 Пара моделей слабо о-минимальной теории с определимыми 1-типами и неопределимыми 2-типами над малой моделью

Пусть $M \prec N$. Мы говорим, что пара моделей (M, N) является D-1-парой, если для любого элемента $\alpha \in N$ тип α над M ($\mathrm{tp}(\alpha/M)$) определим, и (M, N) является D-парой, если для любой конечной последовательности элементов $\bar{\alpha}$ из N тип $\mathrm{tp}(\bar{\alpha}/M)$ определим. Аналогично, M есть D-1-модель, если любой 1-тип над M определим, и M — D-модель, если любой тип над M определим. Л. ван ден Дриес доказал [5], что D-1-модель теории вещественно замкнутого поля является D-моделью. Д. Маркер и Ч. Стейнхорн показали [6], что для любой о-минимальной теории любая D-1-пара есть D-пара и, следовательно, любая D-1-модель есть D-модель.

Теорема 2.4.1. [5] *Любой тип над $(R, +, \cdot, 0, 1)$ определим, здесь R — множество всех вещественных чисел.*

Д. Маркер и Ч. Стейнхорн расширили этот результат на о-минимальные теории:

Теорема 2.4.2. [6] *Пусть T — о-минимальная теория, $M \models T$. Тогда выполняется следующее:*

1. M дедекиндово полна $\Longleftrightarrow$ каждый тип из $S(M) := \bigcup_{n<\omega} S_n(M)$ определим.

2. Пусть $M \prec N$. Тогда $(\forall \bar{\alpha} \in N \setminus M)$ $tp(\bar{\alpha}/M)$ определим $\Longleftrightarrow$ M дедекиндово полна в N.

Из Факта 2.2.6 следует, что для слабо о-минимальной теории T любая пара моделей (M, N) является D-1-парой тогда и только тогда, когда M квази дедекиндово полна в N, и произвольная модель M теории T является D-1-моделью, если и только если M квази дедекиндово полна.

Из Факта 1.2.16 следует, что для слабо о-минимальной теории T любая пара моделей (M, N) является D-1-парой тогда и только тогда, когда M квази дедекиндово полна в N, и произвольная модель M теории T является D-1-моделью, если и только если M квази дедекиндово полна.

В заключительной главе части II мы строим D-1-пару моделей счетно категоричной слабо о-минимальной теории, которая не является D-парой (Теорема 2.4.3).

Теорема 2.4.3. *Существует слабо о-минимальная теория T с двумя моделями $M_b \prec M$, такими что существует $\bar{\alpha} \in M$, такой что $tp(\bar{\alpha}/M_b)$ не определим и M_b — квази Дедекиндово полная в M.*

Доказательство. Мы строим модель (M, L_0) одновременно с доказательством слабой о-минимальности элементарной теории модели (M, L_0). Мы представим элементарную теорию модели (M, L_0) $(Th((M, L_0)))$ конечным множеством аксиом T_0. Доказательство непротиворечивости, полноты и слабой о-минимальности теории T_0 мы разделим на следующие этапы доказательств и построений:

I. Аксиомы T_0. Если T_0 непротиворечивая, то T_0 ω_0-категоричная.

II. Построение модели (M, L), $L \supset L_0$, такой что $T_0 \vdash_L T := Th(M, L)$.

III. Доказательство того, что T допускает сокращение кванторов и слабо о-минимальна.

IV. Пример $(M_b, L) \prec (M, L)$, (M_b, M) есть D-1-пара не D-пара.

2.4.1 I. Аксиомы T_0. Если T_0 непротеворечива, то T_0 ω_0-категорична

Пусть дан язык $L_0 := \{=, P^1, <^2, E^3\}$. Дадим список аксиом из T_0:

Ак(I) $<$ есть отношение плотного линейного порядка без концевых точек.

Ак(II) $\forall x \forall y(((P(x) \wedge \neg P(y)) \to y < x) \wedge \forall z \forall x \forall y(P(z) \to \neg E(x, y, z)))$.
Ак(III) $\forall z(\neg P(z) \to E(x, y, z)$ есть отношение эквивалентности по x, y на P, каждый E_z-класс — не пустое выпуклое множество без концевых точек, порядок, приведенный на множестве E_z-классов, является плотным, существует минимальный E_z-класс и нет максимального).

Ак(IV) $\forall z \forall t \forall x((P(x) \wedge \neg P(z) \wedge \neg P(t) \wedge z < t) \to$ каждый E_z-класс из x находится в E_t-классе из x, каждый E_t-класс (кроме минимального) не содержит ни минимальный E_z-класс, ни максимальный E_z-класс, и минимальный E_t-класс содержит минимальный E_z-класс и не содержит максимальный E_z-класс.

Обозначим

$$\begin{aligned} H^2(x, z) &:= P(x) \wedge \neg P(z) \wedge \forall y((P(y) \wedge y < x) \to E(x, y, z), \\ \epsilon^2(x, y) &:= \exists z(\neg P(z) \wedge E(x, y, z) \wedge \neg H(x, z)). \end{aligned}$$

$H^2(x, z)$ означает, что x находится в минимальном E_z-классе, $\epsilon^2(x, y)$ означает, что x, y не находится в минимальном E_z-классе для некоторого z из $\neg P$. Ак(V) $\forall x \forall y(\epsilon^2(x, y) \leftrightarrow \forall z(H(x, z) \leftrightarrow H(y, z)))$. Заметим, что Ак(V) и Ак(IV) означают, что ϵ^2 — это отношение эквивалентности на P, каждый ϵ-класс есть бесконечное выпуклое множество, и множество ϵ-классов образует плотный линейный порядок без концевых точек, каждое утверждение может быть записано на языке первого порядка и выведено из Ак(I) – Ак(V).

Ак(VI)

(i) $\forall x \forall y((\epsilon^2(x, y) \wedge x \neq y) \to \exists z(\neg P(z) \wedge \neg E(x, y, z)))$.

(ii) $\forall x \forall y \forall z((E(x, y, z) \wedge \neg H(x, z)) \to \exists t(t < z \wedge E(x, y, t)))$.

Пусть $\epsilon^4(x, y; u, v) := x < y \wedge u < v \wedge \epsilon^2(x, y) \wedge \epsilon^2(y, u) \wedge$
$\epsilon^2(u, v) \wedge \forall z(\neg P(z) \to (E(x, y, z) \leftrightarrow E(u, v, z)))$. Отметим, что ϵ^4 — это отношение эквивалентности на упорядоченных парах из ϵ^2-классов, причем каждый ϵ^4-класс определяет разбиение $\neg P$ на два выпуклых множества без концевых точек (расщепляет $\neg P$). Для любой упорядоченной пары элементов a_1, a_2 лежащих в одном ϵ^2-классе выпуклое множество элементов $b \in \neg P$ таких, что a_1, a_2 лежат в одном E_b-классе определяет "степень близости"a_1 и a_2 и можно сказать— чем больше это выпуклое множество тем "ближе"a_1 и a_2. Кроме того, необходимо отметить, для любых $a_1, a_2, a_3 \in P$, формулы

$$\epsilon^4(a_1, a_2, x, a_3), \epsilon^4(a_1, a_2, a_3, x), \epsilon^4(a_1, a_2, x, a_2), \epsilon^4(a_1, a_2, a_1, x)$$

были выпуклы.

Ак(VII)

(i) $\forall u_2 \forall u_4((\epsilon^2(u_2,u_4) \wedge u_2 < u_4) \to \exists u_1 \exists u_3 \exists u_5(\bigwedge_{i<j} u_i < u_j \wedge \epsilon^2(u_1,u_5) \wedge \bigwedge_{1\le i<j<k<r\le 5} E(u_i,u_j,u_k,u_r)))$.

(ii) $\forall u_2 \forall u_3 \forall u_4((\epsilon^2(u_2,u_4) \wedge u_2 < u_3 < u_4) \to \exists u_1 \exists u_5(u_1 < u_3 < u_5 \wedge \epsilon^4(u_2,u_4,u_1,u_3) \wedge \epsilon^4(u_2,u_4,u_3,u_5))$

(iii) $\forall u_2 \forall u_4((\epsilon^2(u_2,u_4) \wedge u_2 < u_4) \to \exists u_1 \exists u_3 \exists u_3' \exists 5(u_1 < u_2 < u_3 < u_{3'} < u_4 < u_5) \wedge \forall u \forall u'((u_1 \le u \le u_3 \wedge u_{3'} < u' < u_5) \to (\epsilon^4(u_2,u_4,u,u_4) \wedge \epsilon^4(u_2,u_4,u_2,u'))))$

Следует отметить, что из аксиомы Ак(VII) следует бесконечность каждого ϵ^4-класса, плотность расположения упорядоченных пар в одном ϵ^4-классе и что для любых элементов $a_1, a_2, a_3 \in P$, лежащих в одном ϵ^2-классе и удовлетворяющих условию $a_1 < a_3 < a_2$, формулы

$$\epsilon^4(a_1,a_2,x,a_2), \epsilon^4(a_1,a_2,a_1,x), \epsilon^4(a_1,a_2,x,a_3), \epsilon^4(a_1,a_2,a_3,x)$$

определяют непустые выпуклые множества без концевых точек.

Ак(VIII) $\forall x \forall y \forall u \forall v((\epsilon^2(x,y) \wedge \epsilon^2(u,v) \wedge x < y \wedge u < v \wedge \neg\epsilon^2(x,u)) \to \exists z(\neg P(z) \wedge (E(x,y,z) \wedge \neg E(u,v,z)) \vee (E(u,v,z) \wedge \neg E(x,y,z))))$.

Заметим,что Ак(VIII) говорит о том, что любые два различных ϵ^2-класса "отделимы"отношением E_z для некоторого z из $\neg P$.

Ак(IX) $\forall x \forall y \forall u(P(x) \wedge P(u) \wedge \epsilon^2(x,y) \wedge \neg\epsilon^2(x,u) \to \exists z\ (H(u,z) \wedge \neg E(x,y,z)) \vee (\neg H(u,z) \wedge E(x,y,z)))$.

Заметим, что Ак(IX) говорит о том, что любой элемент из P не лежащий в данном ϵ^2-классе "отделяется"от ϵ^2-класса отношениями H_z, E_z для некоторого z из $\neg P$.

Предложение 2.4.4. *Если T_0 непротиворечива, то T_0 ω-категорична.*

Доказательство Предложения 2.4.4. Для каждой модели M теории T_0 на объединении множеств всех ϵ^2-классов, ϵ^4-классов и множества всех элементов, удовлетворяющих $\neg P$ можно определить порядок $\triangleleft$. Полученный линейный порядок будем называть моделью языка $L' = \{=, \triangleleft\}$ и его универсум будем обозначать N, а саму модель (N, L'). Для произвольных счетных моделей (M_1, L_0) и (M_2, L_0) теории T_0, построим изоморфизм g с помощью изоморфизма t между (N_1, L') и (N_2, L') и эти два изоморфизма мы будем определять одновременно индукцией по $n < \omega$, как объединения возрастающих последовательностей частичных изоморфизмов.

Пусть (M, L_0) — произвольная модель теории T_0. Обозначим $A := P(M)$, $B := \neg P(M)$. Пусть $C := \{(a,a') : a, a' \in A, M \models \epsilon^2(a,a') \wedge a < a'\}$. Мы введем следующую систему обозначений для элементов из C:
Если $c = (a_1, a_2) \in C$, то $c = c(a_1,a_2)$ и $l(c) = a_1$, $r(c) = a_2$. Заметим, что

$$(\forall c \in C) M \models \epsilon^2(l(c), r(c)) \wedge l(c) < r(c).$$

Пусть $a \in A, c \in C$. Обозначим

$\hat{c} := \epsilon^4(M^2, c) = \{c' \in C : M \models \epsilon^4(c', c)\}, \hat{C} := \{\hat{c} : c \in C\}$,

$\hat{a} := \epsilon^2(M, a) = \{a' \in A : M \models \epsilon^2(a', a)\}, \hat{A} := \{\hat{a} : a \in A\}$.

Из определений ϵ^2, ϵ^4 видно, что $\forall c_1 \in C \forall c_2 \in C[\hat{l}(c_i) = \hat{r}(c_i), i = 1, 2$ и $(\hat{c}_1 = \hat{c}_2 \to \hat{l}(c_1) = \hat{l}(c_2) = \hat{r}(c_1) = \hat{r}(c_2))]$.

Определим модель $(N, L') := (\hat{A} \cup \hat{C} \cup B; =, \lhd)$.

Пусть $a, a_1 \in A$; $b, b_1 \in B$; $c, c_1 \in C$. Тогда

$$
\begin{aligned}
N \models b \lhd b_1 &\Leftrightarrow M \models b < b_1,\\
N \models \hat{a} \lhd \hat{a}_1 &\Leftrightarrow M \models \neg\epsilon^2(a, a_1) \wedge a < a_1,\\
N \models \hat{c} \lhd b &\Leftrightarrow M \models E(l(c), r(c), b),\\
N \models b \lhd \hat{c} &\Leftrightarrow M \models \neg E(l(c), r(c), b),\\
N \models \hat{a} \lhd b &\Leftrightarrow M \models H(a, b),\\
N \models b \lhd \hat{a} &\Leftrightarrow M \models \neg H(a, b),\\
N \models \hat{c} \lhd \hat{a} &\Leftrightarrow M \models \exists x(\neg P(x) \wedge E(l(c), r(c), x) \wedge \neg H(a, x)),\\
N \models \hat{a} \lhd \hat{c} &\Leftrightarrow M \models \exists x(\neg P(x) \wedge \neg E(l(c), r(c), x) \wedge H(a, x)),\\
N \models \hat{c} \lhd \hat{c}_1 &\Leftrightarrow M \models \exists x(\neg P(x) \wedge E(l(c_1), r(c_1), x) \wedge \neg E(l(c_2), r(c_2), x)).
\end{aligned}
$$

Из определения $\epsilon^2, \epsilon^4, H^2$ и Ак(I)- Ак(IX) следует, что понятие $\lhd$ определено корректно.

Заметим, что из определения $\lhd$ непосредственно вытекает:

$$
\begin{aligned}
N \models \hat{c} \lhd \hat{a} &\Leftrightarrow \exists b \in B, N \models \hat{c} \lhd b \wedge b \lhd \hat{a},\\
N \models \hat{a} \lhd \hat{c} &\Leftrightarrow \exists b \in B, N \models \hat{a} \lhd b \wedge b \lhd \hat{c},\\
N \models \hat{c} \lhd \hat{c}_1 &\Leftrightarrow \exists b \in B, N \models \hat{c}_1 \lhd b \wedge b \lhd \hat{c}_2.
\end{aligned}
$$

Обозначим $C_l(a) := \{c \in C : l(c) = a\}, C_r(a) := \{c \in C : r(c) = a\}$.

Утверждение 2.4.5. *(i) (a)* $\forall a \in A, \forall c_1, c_2 \in C_l(a)$

Если $[N \models \hat{c}_1 \lhd \hat{c}_2$, *то* $r(c_1) < r(c_2)$ *и* $\hat{c}(r(c_1), r(c_2)) = \hat{c}_2]$.

(b) $\forall a \in A, \forall c_1, c_2 \in C_r(a)$

Если $[N \models \hat{c}_1 \lhd \hat{c}_2$, *то* $l(c_1) < l(c_2)]$ *и* $\hat{c}(l(c_1), l(c_2)) = \hat{c}_2]$.

(ii) $(\hat{A}, =, \lhd), (B, =, \lhd), (\hat{C}, =, \lhd)$ *— плотные линейные порядки без концевых точек.*

(iii) $\lhd$ *есть отношение плотного линейного порядка на* $\hat{A} \cup \hat{C} \cup B$, *и каждое множество из* $\hat{A}, \hat{C}, B$ *является* $\lhd$*- плотным в* $\hat{A} \cup \hat{C} \cup B$.

(iv) $\forall a \in A$ *имеем: (a)* $\hat{C}_l(a) = \hat{C}_r(a)$, *(b)* $\hat{C}_l(a)$ *плотно в* $(-\infty, \hat{a})_N$.

Доказательство Утверждения 2.4.5. (i) (a) Пусть $N \models \hat{c}_1 \lhd \hat{c}_2$. Тогда для некоторого $b_0 \in B$, $M \models E(a, r(c_1), b) \wedge \neg E(a, r(c_2), b_0)$ и $a < r(c_1), a < r(c_2)$. Из выпуклости $E(a, M, b_0)$ следует, что $r(c_1) < r(c_2)$.

Покажем, что $\hat{c}(r(c_1), r(c_2)) = \hat{c}_2$. Пусть $b \in B$ такой, что $M \models E(a, r(c_2), b)$. Так как любой E_b-класс суть выпуклое множество и $a < r(c_1) < r(c_2)$, имеем $M \models E(r(c_1), r(c_2), b)$.

Предположим существует $b_1 \in B$ такой, что

$$M \models E(r(c_1), r(c_2), b_1) \wedge \neg E(a, r(c_2), b_1).$$

Тогда $E(M, a, b_1) \wedge E(M, r(c_1), b_1) = \emptyset$ и следовательно, $r(c_1) \notin E(M, a, b_1)$. Последнее, в силу Ак(IV), означает $E(M, a, b_1) \subset E(M, a, b_0)$ и $b_1 < b_0$. Так как $r(c_1) \in E(M, a, b_0)$ по Ак(IV) имеем $E(M, r(c_1), b_1) \subset E(M, a, b_0)$. Из нашего предположения $r(c_2) \in E(M, r(c_1), b_1)$ следует $r(c_2) \in E(M, r(c_1), b_0)$, что протеворечит выбору b_0. Следовательно, для любого $b \in B$ имеем:

$$[M \models E(a, r(c_2), b) \Longleftrightarrow M \models E(r(c_1), r(c_2), b)].$$

(b) доказывается аналогично (a).

(ii) Ак(I) и Ак(II) означают, что $(B, =, \lhd)$ — плотный линейный порядок без концевых точек. Ak(I) – Ak(V) означают, что $(\hat{A}, =, \lhd)$ есть плотный линейный порядок без концевых точек. Покажем, что $(\hat{C}, =, \lhd)$ удовлетворяет требуемым свойствам. Антирефлексивность $\lhd$ в $\hat{C}$ следует из определений ϵ^4-класса и $\lhd$. Покажем транзитивность. Пусть $c_1, c_2, c_3 \in C$, такое что $N \models \hat{c}_1 \lhd \hat{c}_2 \wedge \hat{c}_2 \lhd \hat{c}_3$. Тогда существуют b, $b_1 \in B$, такие что

$$M \models E(l(c_1), r(c_1), b) \wedge \neg E(l(c_2), r(c_2), b) \wedge E(l(c_2), r(c_2), b_1) \wedge$$

$$\wedge \neg E(l(c_3), r(c_3), b_1)$$

Из того, что $M \models \neg E(l(c_2), r(c_2), b) \wedge E(l(c_2), r(c_2), b_1)$, и из Ак(IV) следует, что $b < b_1$. Так как $M \models \neg E(l(c_3), r(c_3), b_1) \wedge b < b_1$ в силу Ak(IV) имеем $M \models \neg E(l(c_3), r(c_3), b)$. Тогда $M \models E(l(c_1), r(c_1), b)$ означает, что $N \models \hat{c}_1 \lhd \hat{c}_3$. Несимметричность следует из транзитивности и антирефлексивности.

Плотность. Пусть $N \models \hat{c}_1 \lhd \hat{c}_2$. Тогда найдется $b \in B$, такой что

$$M \models E(l(c_1), r(c_1), b) \wedge \neg E(l(c_2), r(c_2), b).$$

По АкVI(b)) найдется $b_1 < b$, такой что $M \models E(l(c_1), r(c_1), b_1)$.

Тогда по Ак(IV) существует $a \in E(l(c_1), M, b) \setminus E(l(c_1), M, b_1)$, такой что $a > E(l(c_1), M, b_1)$. Пусть $c := (l(c_1), a)$. Тогда $N \models \hat{c}_1 \lhd \hat{c}$, так как $M \models E(l(c_1), a, b) \wedge \neg E(l(c_2), r(c_2), b)$, мы имеем $N \models \hat{c} \lhd \hat{c}_2$.

(iii) Пусть $b, b_1 \in B$, $M \models b < b_1$. По Ак(IV) $H(M, b_1) \setminus H(M, b) \neq \emptyset$. Пусть $a \in H(M, b_1) \setminus H(M, b)$. Тогда $N \models b \lhd \hat{a} \wedge \hat{a} \lhd b_1$. Для заданного a по

Ак(VI)(i) существуют $a_1 \in \varepsilon^2(M,a)$, $b_2 \in B$, такие что $M \models \neg E(a,a_1,b) \wedge E(a,a_1,b_2)$. Это означает, что

$$N \models b \lhd \hat{c}(a,a_1) \wedge \hat{c}(a,a_1) \lhd b_2$$

$E(M,a,b_2) \subset \varepsilon^2(M,a) \subset H(M,b_1)$, такое что $b_2 \lhd b_1$. Последовательно по транзитивности имеем: $N \models b \lhd \hat{c} \lhd b_1$.

Рассуждая аналогично, можно заметить, что для любых $d, d' \in \hat{A} \cup \hat{C} \cup B$, $d \lhd d'$ фиксируется следующее:

$$(d,d') \bigcap \hat{A} \neq \emptyset, (d,d') \bigcap B \neq \emptyset, (d,d') \bigcap \hat{C} \neq \emptyset$$

(iv) a) Пусть $c \in C_l(a)$. По Ак(VII) существуют $a_1 < a$, такие что $\hat{c} = \hat{c}(a_1,a)$. Таким образом, так как $c(a_1,a) \in C_r(a)$ имеем $\hat{C}_l(a) \subseteq \hat{C}_r(a)$. Аналогично рассуждая получаем $\hat{C}_r(a) \subseteq \hat{C}_l(a)$.

b) Пусть $b_1, b_2 \in (-\infty, \hat{a})$. Тогда $N \models b_1 \lhd \hat{a} \wedge b_2 \lhd \hat{a}$. Следовательно, $M \models \neg H(a,b_1) \wedge \neg H(a,b_2)$. Предположим, что $b_1 < b_2$. Тогда $E(M,a,b_1) \subset E(M,a,b_2)$.

Пусть $a_1, a_2 \in E(M,a,b_2) \setminus E(M,a,b_1)$, такие что $a_2 < E(M,a,b_1) < a_1$. Из этого видно, что для $c_1 = (a,a_1) \in C_l(a), c_2 = (a_2,a) \in C_r(a)$ фиксируется следующее:

$$N \models b_1 \lhd \hat{c}_1 \wedge b_1 \lhd \hat{c}_2 \wedge \hat{c}_1 \lhd b_2 \wedge \hat{c}_2 \lhd b_2$$

Произвольно выбирая $b_1, b_2 \in B$, имеем (iv) b). $\diamondsuit$

Пусть $(M_1, L_0), (M_2, L_0)$ — произвольные счетные структуры T_0. Пусть (N_1, L'), (N_2, L') — структуры, построенные как обьединения соответствующих множеств B_i и множеств классов отношений эквивалентностей ε^2 и ε^4. Индукцией по n определим последовательность частичных изоморфизмов $g_n : (M_1^{(n)}, L_0) \to (M_2^{(n)}, L_0), t_n : (N_1^{(n)}, L_0') \to (N_2^{(n)}, L'), n < \omega$,
таким образом, что фиксируются конечные множества
($M_i^{(n)} \subset M_i, N_i^{(n)} \subset N_i$, выбранные после шага n):

$U_1) g_{n-1} \subset g_n, t_{n-1} \subset t_n; g_n$ есть биекция, сохраняющая $<$ и P^1;
t_n — L'-изоморфизм.

$U_2) \forall a \in A_1^{(n)} \subset A_1, t_n(\hat{a}) = \hat{g}_n(a)$

$U_3) \forall c \in C \bigcap A_1^{(n)} \times A_1^{(n)}, t_n(\hat{c}) = \hat{\gamma}(g(l(c)), g(r(c)))$.

Здесь $\gamma \in \Gamma = \{(\alpha_1,\alpha_2) | \alpha_1, \alpha_2 \in A_2, M \models \alpha_1 < \alpha_2 \wedge \varepsilon^2(\alpha_1,\alpha_2)\}$.

Четный шаг n определяет g_n, а нечетный шаг n определяет g_n^{-1}. Предположим, что модели M_1 и M_2 имеют фиксированные m и μ-нумерации:

$$M_1 = \{\ m_i \mid i < \omega\ \}, \quad M_2 = \{\ \mu_i \mid i < \omega\ \}$$

Шаг n. Пусть n четное. Рассуждение для n нечетного такое же, как и для n четного. Выбираем элемент с наименьшим m-номером из $M_1 \setminus (A_1^{(n)} \cup B_1^{(n)})$. Имеем два случая.

Случай 1. Пусть $a_n \in A_1 \setminus A_1^{(n)}$ с наименьшим m-номером. Строим $\varepsilon^2(M_1, a_n) \bigcap A_1^{(n-1)}$. Таким образом мы имеем:

Случай 1.1 $\varepsilon^2(M_1, a) \bigcap A_1^{(n-1)} = \emptyset$.

Случай 1.2 $|\varepsilon^2(M_1, a) \bigcap A_1^{(n-1)}| = 1$.

Случай 1.3 $|\varepsilon^2(M_1, a) \bigcap A_1^{(n-1)}| \geq 2$.

Случай 1.1 Пусть даны два элемента d и $d' \in N_1^{(n-1)}$, такие что $\hat{a}_n \in (d, d')_\triangleleft$ и $(d, d')_\triangleleft \bigcap N_1^{(n-1)} = \emptyset$. Пусть $t_n(\hat{a}_{2n})$ — произвольный элемент из $(t_{n-1}(d), t_{n-1}(d'))_\triangleleft \bigcap \hat{A}_2$. Заметим, что из того, что t_{n-1} — L'-изоморфизм, вытекает $(t_{n-1}(d), t_{n-1}(d'))_\triangleleft \bigcap N_2^{(n-1)} = \emptyset$.

Пусть $t_n(\hat{a}_n) = \hat{\alpha}$ для некоторого $\alpha \in A_2$. Возьмем произвольный элемент $\alpha_n \in \varepsilon^2(M_2, \alpha)$ и обозначим $g_n(a_n) = \alpha_n$.

Случай 1.2 Пусть $a_i \in A_1^{(n-1)}$, такой что $\varepsilon^2(M, a_n) \bigcap A_1^{(n-1)} = \{a_i\}, i < n$.

Рассмотрим случай: $a_i < a_n$. Пусть $d, d' \in N_1^{(n-1)}$, такие что $\hat{c}(a_i, a_n) \in (d, d')_\triangleleft$ and $(d, d')_\triangleleft \bigcap N_1^{(n-1)} = \emptyset$. Существует по Ак(VIII), Ак(IX) и по Утверждению 2.4.5(iii). Заметим, что $d' \triangleleft \hat{a}_i = \hat{a}_n$ или $d' = \hat{a}_i$, так как $\hat{c}(a_i, a_n) \triangleleft \hat{a}_n = \hat{a}_i$ по Утверждению 2.4.5(iv). По условию U_2 имеем $t_{n-1}(d') \triangleleft t_{n-1}(\hat{a}_i) = \hat{g}_{n-1}(a_i) = \hat{\alpha}_i$ or $t_{n-1}(d') = \hat{a}_i)$. Тогда по Утверждению 2.4.5(iv)(b) $\Gamma_l(\alpha_i)$ является плотным в $(t_{n-1}(d), t_{n-1}(d'))_\triangleleft$. Таким образом, пусть $\gamma \in (t(d), t(d'))_\triangleleft \bigcap \Gamma_l(\alpha_i)$. Ясно, что $l(\gamma) = \alpha_i$. Обозначим $t_n(\hat{a}_n) := \gamma, g_n(a_n) := r(\gamma)$. $\alpha_n := r(\gamma)$.

Случай $a_n < a_i$ строится аналогично.

Случай 1.3 Пусть $\hat{c}_n = min_\triangleleft\{\hat{c} | c = (a_n, a_i)$ или $c = (a_i, a_n), a_i \in A_1^{(n-1)}$, $M \models \varepsilon^2(a_n, a_i)\}$. Имеем два случая:

Случай 1.3a) $\exists a_k, a_j \in A_1^{(n-1)}, \hat{c}(a_k, a_j) = \hat{c}_n$.

Случай 1.3b) $\forall a_k \in A_1^{(n-1)}, \forall a_j \in A_1^{(n-1)}, \hat{c}_n \neq \hat{c}(a_k, a_j)$.

Случай 1.3a) Пусть $a_k < a_j, c_n = (a_n, a_i)$.

Предположим $a_k < a_n < a_j < a_i$. Тогда по Ак(VII) и по минимальности $\hat{c}_n$ имеем

$$\hat{c}(a_k, a_n) = \hat{c}(a_n, a_j) = \hat{c}(a_n, a_i) = \hat{c}(a_k, a_j).$$

Тогда можно предположить, что $a_n \in (a_k, a_j)_\triangleleft$ и $(a_k, a_j) \bigcap A_1^{(n-1)} = \emptyset$.

Рассуждая аналогично и используя Ак(VII) и минимальность $\hat{c}_n$, мы получаем три случая:

1) $\alpha_n \in (a_i, a_j), (a_i, a_j) \bigcap A_1^{(n-1)} = \emptyset$.

2) $a_n < a_i, (a_n, a_i) \bigcap A_1^{(n-1)} = \emptyset$.

3) $a_j < a_n, (a_j, a_n) \bigcap A_1^{(n-1)} = \emptyset$.

1) Пусть $\alpha_i = g_{n-1}(a_i)$, $\alpha_j = g_{n-1}(a_j)$. Находим внешний $\alpha_n \in (\alpha_i, \alpha_j)$, такой что $\hat{\gamma}(\alpha_i, \alpha_n) = \hat{\gamma}(\alpha_n, \alpha_j) = \hat{\gamma}(\alpha_i, \alpha_j)$. Существование такого α_n следует из Ак(VII). Обозначим $g_n(a_n) := \alpha_n$.

2) Находим внешний $\alpha_n < \alpha_i$, такое что $\hat{\gamma}(\alpha_n, \alpha_i) = \hat{\gamma}(\alpha_i, \alpha_j) = \hat{\gamma}(\alpha_n, \alpha_j)$. Существование такого α_n следует из Ак(VII). Обозначим $g_n(a_n) := \alpha_n$.

3) Тоже самое, что и в 2).

Заметим, что в случаях 1)-3) $N_1^{(n-1)} = N_1^{(n)}$, так как $\hat{A}_n = \hat{a}_i$, $\hat{c}(a_n, a_j) = \hat{c}(a_i, a_j)$ и для любых $a_s \in A_1^{(n-1)}$ из минимальности $\hat{c}_n$ следует, что $\hat{c}(a_n, a_s) = \hat{c}(a_i, a_s)$ или $\hat{c}(a_s, a_n) = \hat{c}(a_s, a_j)$ по Утверждению 2.4.5(i).

Случай 1.3b) Рассмотрим случай, когда $a_n < a_i$ и $\hat{c}_n = \hat{c}(a_n, a_i)$, $i < n$, $a_i \in A_1^{(n-1)}$. По Утверждению 2.4.5(i) и из минимальности $\hat{c}_n$ мы имеем $\forall j < n[(\hat{c}(a_j, a_n) = \hat{c}(a_j, a_i)$ или $\hat{c}(a_n, a_j) = \hat{c}(a_n, a_i))$ и $(a_n, a_i) \cap A_1^{(n-1)} = \emptyset]$. Пусть $d, d' \in N_1^{(n-1)}$, такие что $\hat{c}(a_n, a_i) \in (d, d')_{\lhd}$ и $(d, d')_{\lhd} \cap N_1^{(n-1)} = \emptyset$. Существование таких d, d' следует из ограниченности $N_1^{(n-1)}$. Заметим что $d' \lhd \hat{a}_i$. Тогда $t_{n-1}(d') \leq t_{n-1}(\hat{a}_i) = \hat{g}_{n-1}(a_i) = \hat{\alpha}_i$. Таким образом следует, что $\Gamma_r(\alpha_i)$ плотно в $(t(d), t(d'))_{\lhd}$.

Обозначим $\alpha_n := l(\gamma)$. Предположим $t(\hat{c}(a_n, a_j)) = \hat{\gamma} = \hat{\gamma}(\alpha_n, \alpha_i)$, $g(a_n) = \alpha_n$.

Случай 2. $b_n \in B_1 \setminus B_1^{(n-1)}$ — элемент с наименьшим m-номером. Пусть $d, d' \in N_1^{(n-1)}$, такие что $b_n \in (d, d')_{\lhd}$, $(d, d') \cap N_1^{(n-1)} = \emptyset$. Рассмотрим интервал $(t_{n-1}(d), t_{n-1}(d'))_{\lhd}$. Так как t_{n-1} частичный L'-изоморфизм, то $(t_{n-1}(d), t_{n-1}(d'))_{\lhd} \cap N_1^{(n-1)} = \emptyset$. И так, β_n произвольный элемент из $(t(d), t(d'))_{\lhd} \cap B_2$. Предположим $t_n(b_n) = g_n(b_n) = \beta_n$.

Завершение доказательства Предложения 2.4.4. Для любого элемента $d \in N_1^{(n-1)}$, $e \in M_1^{(n-1)}$ определим $t_n(d) = t_{n-1}(d)$, $g_n(e) = g_{n-1}(e)$. Это следует из определения и выбранных элементов $g_n(a_n)$, $g_n(b_n)$, $t_n(\hat{c}(a_n, a_i))$, $t_n(\hat{a}_n)$, $t_n(b_n)$, что g_n, t_n удовлетворяют условиям U_1 – U_3. Таким образом по U_1 имеем

$$g = \bigcup_{n<\omega} g_n : (M_1, =, <, P^1) \to (M_2, =, <, P^1)$$

$$t = \bigcup_{n<\omega} t_n : (N_1, =, \lhd) \to (N_2, =, \lhd)$$

g — L'_0-изоморфизм, t есть L'-изоморфизм, где $L'_0 = \{=, <, P_1\}$.

Докажем, что g — L_0-изоморфизм. Пусть a, $a' \in A_1$, $b \in B_1$. Тогда $M_1 \models E(a, a', b) \wedge a < a' \Longleftrightarrow N_1 \models \hat{c}(a, a') \lhd b \Longleftrightarrow N_2 \models t(\hat{c}(a, a')) \lhd g(b)$
$\Longleftrightarrow$ по условию U_3, $N_2 \models \hat{\gamma}(g(a), g(a')) \lhd g(b)$
$\Longleftrightarrow M_2 \models E(g(a), g(a'), g(b)) \wedge g(a) < g(a')$.

Таким образом, $M_1 \models E(a, a, b) \Longleftrightarrow M_2 \models E(g(a), g(a), g(b))$ $\diamondsuit$

Прямым следствием из доказательства Предложения 2.4.4 является

Утверждение 2.4.6. *Предположим, что T_0 непротиворечивая. Пусть M — модель теории T_0. Тогда любое иррациональное сечение (B_1, B_2)*

в $(B,<)$ *является* M*-определимым в* (M, L_0) *тогда и только тогда, когда* $\exists a \in P(M)(B_1 \lhd \hat{a} \lhd B_2$ *) или* $\exists a_1, a_2 \in P(M)(B_1 \lhd \hat{c}(a_1,a_2) \lhd B_2)$.

2.4.2 II Конструкция $(M,L), L \supset L_0$ такой, что $T_0 \vdash_L T := Th(M,L)$

Пусть дан язык $L := \{=, P^1, <^2, E^3, H^2, \varepsilon^2, \varepsilon^4, S^4, S^3\}$, $M := K \cup Q$, где Q — множество рациональных чисел и K определяется по индукции.

Построение K. Пусть R — множество всех вещественных чисел, $I := \{C \mid C \subset R, C \cap Q = \emptyset, C$ счетное и плотное в $R\}$, $J \subset I$, такое что $\forall C_1 \neq C_2 \in J$ имеем $(C_1 \cap C_2 = \emptyset$ и $|J| > \omega)$. Пусть $S := \{a \mid a = (\ldots, a_b, \ldots)_{b \in Q'}, (\forall b \in Q', a_b \in Q), Q' \subseteq Q$, если $Q' \subset Q$, то $\exists e \in R \setminus Q, \forall b \in Q(b < e \to b \in Q')\}$ — множество всех Q-последовательностей из рациональных номеров и $2^{<\omega} := \{\tau \mid \exists n < \omega, \tau = (\tau(1), \ldots, \tau(n)), \forall i(1 \leq i \leq n), \tau(i) \in \{0,1\}, l(\tau) := n\}$.

Строим K со следующими условиями:

Z_1) $K = \bigcup_{n<\omega} K_n \subset S$, $K_n \cap K_{n+1} = \emptyset$, $|K_n| = \omega$.

Z_2) Функция $g : K_n \to (R \setminus Q)^{n+1}$, такая что для любого $d \in K_n$,
если $g(d) = (g_0(d), ..., g_n(d))$, то $g_0(d) > g_1(d) > \cdots > g_n(d)$.

Z_3) Функция **C**: $K \to J$ (обозначим **C**(d):= C_d), такая что $\forall d_1 \neq d_2 \in K$, $C_{d_1} \neq C_{d_2}$. Фиксируем произвольный элемент $a = (\ldots, a_b, \ldots)_{b \in Q}$ из S.

Шаг 0. Фиксируем произвольный $C_0 \in J$. Для любого $\gamma \in C_0$ пусть $a^\gamma = (\ldots, a_b^\gamma, \ldots)_{b \in Q, b < \gamma} \in S$ такой, что $\forall b \in Q(b < \gamma)$, $a_b^\gamma = a_b$. Положим $K_0 := \{a^\gamma \mid \gamma \in C_0\}$, $g_0(a^\gamma) := \gamma$, $g(a^\gamma) := (\gamma)$.

Шаг $n+1$**.** $\forall d \in K_n$, $\forall \gamma \in C_d$ $(\gamma < g_n(d))$, $\forall \tau \in 2^{<\omega}$ определим $d^{\gamma\tau} := (\ldots, d_{b\ldots}^{\gamma\tau})_{b \in Q, b < g_0(d)}$ следующим образом:

$$\forall b \in Q \left[(\gamma < b < g_0(d) \Rightarrow d_b^{\gamma\tau} = d_b) \wedge \left(b < \gamma \Rightarrow d_b^{\gamma\tau} = d_b + \sum_{i=1}^{l(\tau)} \frac{(-1)^{\tau(i)}}{(n+2)^i} \right) \right].$$

Таким образом, $K_{n+1} := \{d^{\gamma\tau} \mid d \in K_n,\ \gamma \in C_d,\ \gamma < g_n(d),\ \tau \in 2^{<\omega}\}$, $g(d^{\gamma\tau}) := (g(d), \gamma)$. Так как $|K_n| = |\bigcup_{d \in K_n} C_d| = |2^{<\omega}| = \omega$, имеем $|K_{n+1}| = \omega$.

Так как $|J| > \omega$, мы можем определить $C : K_{n+1} \to J$.

Заметим, что $\forall c, d \in K, \forall b \in Q$
$[(b < g_0(d) = g_0(c) \wedge d_b = c_b) \Rightarrow \forall b' \in Q(b < b' < g_0(d) \Rightarrow d_{b'} = c_{b'})]$.

Определение модели (M,L). Пусть $d, c, e, f, b \in M$. Тогда

$[M \models P^1(d) \iff d \in K]$.

$[M \models d <^2 c \iff (\{d,c\} \subset Q \wedge d < c) \vee (d \in Q \wedge c \in K) \vee (\{d,c\} \subset K \wedge (g_0(d) < g_0(c) \vee (g_0(d) = g_0(c) \wedge \exists x \in R \setminus Q \wedge \exists b' \in Q[b' < x < g_0(d) \wedge \forall b \in Q([x < b < g_0(d) \Rightarrow c_b = d_b] \wedge [b' < b < x \Rightarrow d_b < c_b])]))))]$.

$[M \models E^3(c,d,b) \iff \{c,d\} \subset K \wedge b \in Q \wedge (b > \max\{g_0(d), g_0(c)\} \vee$
$(b < g_0(d) = g_0(c) \wedge c_b = d_b))]$.

$[M \models H^2(d,b) \iff d \in K \wedge b \in Q \wedge g_0(d) < b]$. $[M \models \varepsilon^2(c,d) \iff \{c,d\} \subset K \wedge g_0(c) = g_0(d)]$.

$[M \models \varepsilon^4(d,c,e,f) \iff \{d,e,c,f\} \subset K \wedge \exists n < \omega, g_n(d) = g_n(c) = g_n(e) = g_n(f) \wedge\ \ g_{n+1}(d) \neq g_{n+1}(c) \wedge g_{n+1}(e) \neq g_{n+1}(f)$, $\exists x \in R \setminus Q$, $\exists b' \in Q[b' < x < g_n(d) \wedge \forall b \in Q([x < b < g_n(d) \Rightarrow (c_b = d_b \wedge e_b = f_b)]$
$\wedge [b' < b < x \Rightarrow (d_b < c_b \wedge e_b < f_b)])]]$. $[M \models S_1^4(d,c,e,f) \iff \{d,c,e,f\} \subset K \wedge g_0(d) = g_0(c) \wedge g_0(e) = g_0(f) \wedge$
$\exists b \in Q(d_b = c_b \wedge e_b \neq f_b) \wedge \exists x \in R \setminus Q \wedge \exists b' \in Q[b' < x < g_0(d) \wedge$
$\forall b \in Q([x < b < g_0(d) \Rightarrow c_b = d_b] \wedge [b' < b < x \Rightarrow d_b < c_b])]$
$\wedge \exists x \in R \setminus Q \wedge \exists b' \in Q[b' < x < g_0(e) \wedge \forall b \in Q([x < b < g_0(e) \Rightarrow e_b = f_b]$
$\wedge [b < b < x \Rightarrow e_b < f_b])]]$.

$[M \models S_2^3(d,c,f) \iff \{d,c,f\} \subset K \wedge g_0(d) = g_0(c) \wedge (g_0(d) > g_0(f) \rightarrow \exists b \in Q(b < g_0(f) \wedge d_b = c_b)) \wedge \exists x \in R \setminus Q \wedge \exists b' \in Q[b' < x < g_0(d) \wedge$
$\forall b \in Q([x < b < g_0(d) \Rightarrow c_b = d_b] \wedge [b' < b < x \Rightarrow d_b < c_b])]]$.

Заметим, что отношения $\varepsilon^2, \varepsilon^4, S_1^4, S_2^3, H^2$ определены в
$(M, =, P^1, <^2, E^3)$ и $(M, L_0) \models Ak(I) - Ak(IX)$.

Пусть $a, a_1, a_2, a_3 \in P(M)$, N — модель из Предложения 2.4.4. Тогда
F1. $[M \models S^3(a_1, a_2, a) \iff N \models \hat{c}(a_1, a_2) \lhd \hat{a}]$.
F2. $[M \models S^4(a, a_1, a_2, a_3) \iff N \models \hat{c}(a, a_1) \lhd \hat{c}(a_2, a_3)]$.
F3. $[M \models \neg\epsilon^2(a_1, a_2) \wedge a_1 < a_2 \iff N \models \hat{a}_1 < \hat{a}_2]$.

2.4.3 III T допускает сокращение кванторов и слабо о-минимальна

Предложение 2.4.7. *$T = Th((M,L))$ — ω-категорична, конечно аксиоматизируема, допускает сокращение кванторов и слабо о-минимальна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M — счетная модель теории T. Пусть $A_i \subset P(M)$, $B_i \subset \neg P(M)$, $i = 1, 2$, такие что $(A_1 \cup B_1)$ конечное и $(A_1 \cup B_1, L) \cong (A_2 \cup B_2, L)$. Введение $H^2, \epsilon^2, \epsilon^4, S^3, S^4$ позволяет определять конечные L'-структуры $(N(A_i \cup B_i), =, \lhd)$ и L'-изоморфизм
$t : (N(A_1 \cup B_1), =, \lhd) \rightarrow (N(A_2 \cup B_2), =, \lhd)$ так, чтобы t удовлетворяет условию U_2 из Предложения 2.4.4.

Действительно, пусть $a, a_1, a_2, a_3 \in A, b \in B$. Тогда
$\hat{a}$ определено при помощи ϵ^2; $\hat{c}(a, a_1)$ определено при помощи $\epsilon^4, \epsilon^2, <^2$;
$\hat{a}$ и b $\lhd$-сравнимы с помощью H^2; $\hat{a}$ и $\hat{c}(a_1, a_2)$ $\lhd$-сравнимы с помощью $S^3(F1)$; b и $\hat{c}(a_1, a_2)$ $\lhd$-сравнимы с помощью E^3; $\hat{c}(a, a_1)$ и $\hat{c}(a_2, a_3)$ $\lhd$-сравнимы с помощью $S^4(F2)$; $\hat{a}_1$ и $\hat{a}_2$ $\lhd$-сравнимы с помощью $\epsilon^2, <^2$ $(F3)$.

Используя метод доказательства Предложения 2.4.4, можно расширить изоморфизм между $(A_1 \cup B_1, L)$ и $(A_2 \cup B_2, L)$ до автоморфизма (M, L). Это означает, что T допускает сокращение кванторов [14]. В силу того, что T — ω-категорична (Предложение 2.4.4) и допускает сокращение кванторов, слабо о-минимальность T будет следовать из выпуклости атомных 1-формул с параметрами (в данной ситуации, любая 1-формула, определимая конечным множеством параметров из $(A \cup B)$ есть булева комбинация $(A \cup B)$-определимых атомных 1-формул). Выпуклость атомных 1-формул вида

$$x < a(b), a(b) < x, P(x), H(x,b), H(a,y), E(x,a,b), E(a,x,b), E(a_1,a_2,y),$$
$$\epsilon^2(x,a), \epsilon^2(a,x), \epsilon^4(x,a_1,a_2,a_3), \epsilon^4(a_1,x,a_2,a_3), \epsilon^4(a_1,a_2,x,a_3),$$
$$\epsilon^4(a_1,a_2,a_3,x), S^3(x,a_1,a_2), S^3(a_1,x,a_2), S^3(a_1,a_2,x),$$
$$S^4(x,a_1,a_2,a_3), S^4(a_1,x,a_2,a_3), S^4(a_1,a_2,x,a_3), S^4(a_1,a_2,a_3,x)$$

следует из Ак(I)-Ак(IX), свойств линейного порядка $\lhd$ на N. В самом деле, пусть $a_1', a_1, a_1\, a_2, a_3 \in P(M)$ такие, что

$$M \models S^3(a_1', a_2, a_3) \wedge S^3(a_1\, a_2, a_3) \wedge a_1' < a_1 < a_1".$$

Тогда по $(F1)$ $N \models \hat{c}(a_1', a_2, a_3) \lhd \hat{a}_3 \wedge \hat{c}(a_1\, a_2) \lhd \hat{a}_3$. Так как $a_1' < a_1 < a_1"$, из определения ϵ^4 и $\lhd$ следует $N \models (\hat{c}(a_1', a_2) \lhd \hat{c}(a_1, a_2) \vee \hat{c}(a_1', a_2) = \hat{c}(a_1, a_2))$
$\wedge\, (\hat{c}(a_1, a_2) \lhd \hat{c}(a_1\, a_2) \vee \hat{c}(a_1, a_2) = \hat{c}(a_1\, a_2))$.
Отсюда, в силу транзитивности $\lhd$, $N \models \hat{c}(a_1, a_2) \lhd \hat{a}_3$. Тогда по $(F1)$
$M \models S^3(a_1, a_2, a_3)$, что означает выпуклость $S^3(x, a_2, a_3)$. Аналогично проверяется выпуклость всех атомных 1-формул вида S^3, S^4 (выпуклость остальных атомных 1-формул является непосредственным следствием определений и аксиом). $\diamondsuit$

2.4.4 IV Пример $(M_b, L) \prec (M, L)$, (M_b, M) есть D_1-пара и не D-пара

Пусть (M, L) — модель из пункта II. Пусть b произвольный элемент из Q (то есть $\neg P(M)$). Тогда предположим, что $Q_b := \{x \in Q \mid x < b\}$ и $K_b := \bigcup_{b' < b} H(M, b')$. Пусть $M_b := Q_b \cup K_b$. Из этого легко увидеть, что (M_b, L) подмодель модели (M, L). Так как $Th(M)$ допускает сокращение кванторов, имеем $(M_b, L) \prec (M, L)$.

Утверждение 2.4.8. *Пусть $d_1 \neq d_2 \in P(M) \setminus M_b$, такие что $\exists n < \omega$
$(n > 0, g_n(d_1) = g_n(d_2) < b)$. Тогда $tp(d_1 d_2 / M_b)$ неопределим.*

Доказательство Утверждения 2.4.8. По Ак(VII), $E(d_1, d_2, x)$ определяется по некоторому иррациональному сечению (B_1, B_2) в $(Q, <)$ и по условию $g_n(d_1) = g_n(d_2) < b$, $B_1 < b$. Тогда иррациональное сечение $(B_1, (B_2 \cap \{b\}_M^-) \cup P(M_b))$ неопределимо в (M_b, L) по Утверждению 2.4.6 и по условию Z_3 из конструкции K в II. Пусть $p \in S_1(M_b)$ — единственный 1-тип, который расширяет сечение $(B_1, (B_2 \cap \{b\}_M^-) \cup P(M_b))$. Заметим, что по Факту 2.1.21 $p \perp^w tp(d_1/M_b)$, так как p иррациональный и $tp(d_1/M_b)$ квазирациональный.

Пусть $q := tp(d_2/M_b \cup d_1), p' \in S_1(M_b \cup d_1), p \subseteq p'$. Имеем $d_1 d_2 \not\perp^w p$ и следовательно, так как $p(M) = p'(M), q \not\perp^w p'$. Отметим, что p' есть иррациональный тип, который определяется сечением. Следовательно, p' не определим. Тогда из Факта 2.2.8 следует, что $q := tp(d_2/M_b \cup d_1)$ неопределим. Отсюда $tp(d_1 d_2/M_b)$ неопределим. Последнее означает, что (M_b, M) не D-пара. $\diamondsuit$

Заметим, что (M_b, L) квази Дедекиндово полная в (M, L), так как $P(M) \setminus P(M_b) > P(M_b)$, $\neg P(M) \setminus \neg P(M_b) > \neg P(M_b)$. Последнее Утверждение 2.4.8 дает нам утверждение Теоремы 2.4.3. $\diamondsuit$

2.5 Реализация 1-типа в о-минимальной модели и упорядоченные группы

Известно [68], любая группа может быть представлена в сильно минимальной теории, если рассмотреть ее элементы как одноместные функции. Аналогичное верно и для упорядоченных групп и о-минимальных теорий.

Факт 2.5.1. *Если M о-минимальная структура и $p \in S(A)$ неалгебраический тип, тогда существует линейно упорядоченная группа одноместных функций действующая на множестве реализаций типа p.*

Возникает естественный

Вопрос 2.5.2. *Какие группы можно получить таким способом?*

Оказывается,

Теорема 2.5.3. *Если G линейно упорядоченная группа, тогда G может быть ппредставлена, как семейство определимых одноместных функций действующих на реализации полного типа в о-минимальной структуре (модели).*

Доказательство Факта 2.5.1 следует из короткого анализа p-устойчивых формул. A 2-formula, $\phi(x, y)$, над A является $p-$устойчивой, если для некоторой (эквивалентно, для каждой) реализации $\alpha \in p(M)$ существуют $\gamma_1, \gamma_2 \in p(M)$ такие, что $\gamma_1 < \phi(M, \alpha) < \gamma_2$. (В частности, $x = y$ такая 2-формула.)

По о-минимальности, $\phi(M, \alpha) = \cup_j I_j$ есть конечное объединение $L(A\alpha)$-определимых интервалов и точек. Таким образом, каждой p-устойчивой формуле соответствует конечное число одноместных функций: f_i отображает α в iую граничную точку лежащую в реализации типа. Пусть f такая функция. Образ $f(\alpha)$ и про-образ $f^{-1}(\alpha)$ произвольного элемента $\alpha \in p(M)$ принадлежит $p(M)$. Мы можем определить f^{-1}, потому. что модели о-минимальной теории удовлетворяют принципу алгебраической замены [26]. Таким образом, f является биекцией на $p(M)$.

В классической работе по о-минимальным структурам ([26], [6]) показано, что каждая функция в о-минимальной теории имеет конечное имеет только конечное число сингулярных точек, где функция меняет монотонность и все такие точки A-определимые. Следовательно, эти точки не должны лежать в реализации не-алгебраического типа $p \in S_1(A)$. Таким образом, f является строго монотонной на некотором интервале I_f, $p(M) \subseteq I_f$ и она не может быть константой так, как тип $p \in S_1(A)$ не-алгебраический. Более точно, f строго возрастающая. Предположим, $\alpha < f(\alpha)$. Пусть $\beta = f(\alpha)$, $\gamma = f(\beta)$. Имеем $\alpha < \beta < \gamma$, потому, что $\models \forall x(x \in I_f \to x < f(x))$. Таким образом, f строго возрастающая и так, как $\alpha = f^{-1}(\beta) < f^{-1}(\gamma) = \beta$, f^{-1} есть также возрастающая.

Пусть $G_{p,A}$ множество всех $L(A)-$определимых биекций на $p(M)$. $G_{p,A}$ группа действий относительности композиций. Определим порядок ($<^1$) на этой группе: для каждой пары $f, g \in G_{p,A}$, $f <^1 g$, если для некоторого (эквивалентно для всех) $\alpha \in p(M)$, $f(\alpha) < g(\alpha)$. Нетрудно показать, что это понятие определено корректно и группа упорядочена в соответствие с Определением 2.5.4. $\square_{2.5.1}$

Доказательство Теоремы 2.5.3 состоит из двух этапов.

(i) Заметим, что каждая упорядоченная группа может быть представлена как $|G|$ одноместных функций действующих на самой себе.

(ii) Показать, что теория $(G, <, t_g)_{g \in G}$ допускает элиминацию (сокращение) кванторов и следовательно, о-минимальная.

Вспомним:

Определение 2.5.4. $(G, \cdot, <)$ *есть (линейно) упорядоченная группа*

(i) $(G, \cdot)$ *есть группа;*

(ii) $<$ *линейный порядок на* G*;*

(iii) (лево упорядочена), если $g_1 < g_2$*, то* $hg_1 < hg_2$*;*

(iv) (право упорядочена), если $g_1 < g_2$ *то* $g_1 h < g_2 h$*;*

(v) если $g < 1$*, то для всех* x*,* $gx < x$*;*

(vi) если $g > 1$*, то для всех* x*,* $gx > x$*.*

Следующий факт следует из определения.

Факт 2.5.5. *Пусть* $(G, \cdot, <)$ *упорядоченная группа.*

(i) Порядок $(G, <)$ 1*-транзитивный.*

(ii) Следовательно $(G, <)$

(a) дискретна и изоморфна копиям $(Z, <)$ *или*

(b) плотно упорядочена.

Пусть L^* сигнатура с $<$ и одноместными функциональными символами t_g для g в G.

Определение 2.5.6. *Структура* $\langle X, <, t_g \rangle_{g \in G}$ *есть унарное представление* G *на* X*, если:*

(i) $t_g(t_h) = t_{gh}$*;*

(ii) Если для некоторого x*,* $t_g(x) = t_h(x)$*, то* $g = h$*;*

(iii) если $g_1 < g_2$*, то для всех* g*,* $t_{g1}(x) < t_{g2}(x)$*;*

(iv) каждая t_g *возрастающая;*

(v) если $g < 1$*, то для любого* x*,* $t_g(x) < x$*;*

(vi) если $g > 1$*, то для любого* x*,* $t_g(x) > x$*;*

(vii) каждое отображение t_g *отображение на.*

Сравнение Определения 2.5.4 и Определения 2.5.6 дает:

Лемма 2.5.7. *Если* G *есть произвольная линейно упорядоченная группа, то структура* $\langle G, <, t_g \rangle_{g \in G}$ *с условием для любого* $h \in G$*,* $t_g(h) = gh$*, дает унарное представление* G *на самой себе.*

Теорема 2.5.8. *Для любой линейно упорядоченной группы* G *теория* T_G *сигнатуры* $\langle G, <, t_g \rangle_{g \in G}$ *(определенной выше) допускает элиминацию кванторов и является о-минимальной.*

Доказательство. Аксиомами теории T_G являются свойства из Определения 2.5.6 и аксиомы вида $t_{g_0} \circ t_{g_2} \ldots \circ t_{g_k} = t_h$, полученные из соответствующих тождеств $\prod_{i \leq k} g_i = h$ истинных в G, . Из этих аксиом мы выводим следующие Условия. Для всех g_1, g_2, x, y:

(i) $t_{g_1}(x) < t_{g_2}(y) \equiv x < t_{g_1^{-1} g_2}(y)$

(ii) $\neg[t_{g_1}(x) < t_{g_2}(y)] \equiv [t_{g_2}(y) < t_{g_1}(x)] \wedge [t_{g_1}(x) = t_{g_2}(y)]$

(iii) $\neg[t_{g_1}(x) = t_{g_2}(y)] \equiv [t_{g_2}(y) < t_{g_1}(x)] \wedge [t_{g_1}(x) < t_{g_2}(y)]$

Рассмотрим произвольную экзистенциальную формулу

$$\psi(\bar{y}) = (\exists x)\phi(x, \bar{y}) = (\exists x) \bigvee \bigwedge \theta_{ij}(x, y_1, \ldots, y_k),$$

где каждая θ_{ij} атомная формула или отрицание атомной. Используя Условия (ii) 2 и (iii), каждая θ_{ij}, которая есть отрицание атомной формулы может быть заменена дизъюнкцией атомных формул. Так как все функции T_G одноместные, каждый терм представляется в виде t_h. Используя Условие (i), каждая атомная формула $\theta_{ij}(x, y_1, \ldots, y_k)$ имеет вид $x < t_g(y_i)$ или $t_{g_s}(y_i) < t_{g_r}(y_j)$. Пусть $x, y_1, \ldots y_k, t_{g_j}(y_i)$ (для $i < k$ и подходящего j) полный список всех термов содержащихся в $\phi(x, \bar{y})$. Теперь каждая формула $\bigwedge_j \theta_{ij}$ эквивалентна конечной дизъюнкции (из-за замены отрицаний атомных формул) формул вида: $\bigvee_s \bigwedge_t \mu_{st}$, где $\bigwedge_t \mu_{st}$ имеет в свою очередь имеет вид:

$$t_{\sigma(1)}(y_{\tau(1)}) < \ldots t_{\sigma(i)}(y_{\tau(i)}) < x < t_{\sigma(i+1)}(y_{\tau(i+1)}) < \ldots t_{\sigma(k)}(y_{\tau(k)}),$$

где варьируя σ и τ мы получаем все линейные порядки термов содержащихся в θ_{ij}.

Существует два случая, зависящих от того, какой порядок на G, плотный или дискретный.

Если $(G, <)$ имеет плотный порядок, мы опускаем x из формулы и получаем эквивалентную бескванторную формулу в T_G.

Пусть $(G, <)$ имеет дискретный порядок и выражение $t_g(y_1) < x < t_h(y_2)$ содержится в $\bigwedge_t \mu_{st}$. Предположим f есть наименьший элемент G больший 1. Тогда $(\exists x) \bigwedge_t \mu_{st}(x, \bar{y})$ эквивалентна бескванторной формуле, полученной заменой $t_f(t_g(y_1)) < t_h(y_2)$ формулы $t_g(y_1) < x < t_h(y_2)$ в μ_{st}.

Таким образом, теория допускает сокращение кванторов. О-минимальность следует из элиминации кванторов в теории T_G. $\diamondsuit$

Замечание. Виктор Вербовский заметил, что дискретно упорядоченную группу G можно представить, как действующую на плотном линейном порядке применением Теоремы 2.5.8 к $G \times Q$, а затем ограничением сигнатуры $G \times Q$ до функций из G.

Джон Балдвин упростил общее доказательство, предложив конструкцию из Леммы 2.5.7 вместо первоначально сложного доказательства непротиворечивости теории T_G.

3 КОНСЕРВАТИВНЫЕ РАСШИРЕНИЯ И ОБОГАЩЕНИЯ МОДЕЛЕЙ СЛАБО О-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ

Основным результатом подраздела 3.1 является Теорема 3.1.16, которая говорит о том, что вопрос существования D–ω-насыщенного консервативного расширения для модели слабо о-минимальной теории T эквивалентен тому, что T имеет AP для D-1-типов и, из-за Следствия 3.1.14, тому, что T имеет AP для SD-1-типов. Данное построение консервативного расширения с использованием AP для D-1-типов позволяет выработать метод опускания всех неопределимых типов и некоторых определимых типов.

Раздел содержит доказательство Теоремы 3.1.16 и его следствий. В частности, мы покажем, что для любой слабо о-минимальной теории T, для любого множества $A \subset N$, N есть $|A|^+$-насыщенная модель T, существует консервативное расширение M, $A \subset M \prec N$, которое опускает все иррациональные 1-типы над A (Следствие 3.1.22) и для любой модели T существует как CD–ω-насыщенное, так и NSD–ω-насыщенное консервативные расширения (Следствие 3.1.28).

В подразделе 3.2 мы описываем подкласс слабо о-минимальных теорий (конечно слабо о-минимальные, почти о-минимальные MS-теории) обладающий свойством, что класс CD–ω-насыщенных консервативных пар любой его теории аксиоматизируем естественной системой аксиом (Утверждение 3.2.4). Заметим, что для о-минимальной теории, имеющей плотной линейный порядок, такая система аксиом была представлена в работе [7], а ее совместность была доказана в [8]. В заключительной части подраздела 3.2 мы приводим примеры теорий, различающие эти понятия (Теорема 3.2.5). Эти теории можно получить из произвольных о-минимальных несколькими регулярными способами. В параграфе 5 приведен факт, который отвечает на вопрос Б. Пуаза [8].

В подразделе 3.3 мы доказываем, что для любой модели M слабо о-минимальной теории T, любого расширения M^+ из M по семейству одноместных предикатов имеет слабо о- минимальную теорию тогда и только тогда, когда любое множество реализаций каждого предиката есть обьединение конечного числа выпуклых множеств, (Theorem 3.3.30), что решает проблему Черлина-Макфердсона-Маркера-Стейнхорна [2] для класса слабо о-минимальных теорий.

В подразделе 3.4 получен критерий существенности о-минимального обогащения моделей о-минимальных теорий с плотным линейным порядком, допускающих сокращение воображаемых элементов в терминах частичных одноместных функций (Теорема 3.3.13).

3.1 Критерий существования ω-насыщенного консервативного расширения и его следствия

Пусть $M \prec N$. Говорят, что пара моделей (M, N) есть *консервативная пара*, или N есть *консервативное расширение* M, если для любого кортежа элементов $\bar{\alpha}$ из N, $\mathrm{tp}(\bar{\alpha}|M)$ определим [6]. Мы будем говорить, что элементарное расширение N модели M является *D–ω–насыщенным для* M, если любой определимый тип $q \in S_1(M \cup \bar{\alpha})$, где $\bar{\alpha} \in N$, реализуется в N; и N является *CD–ω–насыщенным для* M, если любой неизолированный тип $q \in S_1(M \cup \bar{\alpha})$, где $\bar{\alpha} \in N$, определяемый формульным подмножеством ϕ-типа (Определение 3.1.5), реализуется в N.

Мы докажем, что любая модель любой слабо о-минимальной теории (за исключением о-минимальных обогащений моделей теории бесконечного дискретного порядка с концевыми точками $Th(\langle \omega + \omega^*; =, < \rangle))$, имеет консервативное расширение (Следствие 3.1.21). Центральным результатом статьи является критерий существования D–ω-насыщенного консервативного расширения модели слабо о-минимального теории (Теорема 3.1.16). Из доказательства этой теоремы следует, что для любой модели любой слабо о-минимальной теории существует CD–ω-насыщенное консервативное расширение (Следствие 3.1.28). Существование консервативного расширения и CD–ω-насыщенного консервативного расширения для о-минимальных моделей было доказано, соответственно, в [3], [8].

Из Теоремы 3.1.16, Вопроса 3.1.15 следует, что ответ на вопрос о существовании D–ω-насыщенного консервативного расширения для произвольной модели слабо о-минимальной теории для нас неизвестен, даже в о-минимальном контексте. Тем не менее, из доказательств Предложения 3.1.7 и Теоремы 3.1.16 (ii)$\Rightarrow$(i) следует существование для любой модели слабо о-минимальной теории консервативного NSD–ω-насыщенного расширения и консервативного CD–ω-насыщенного расширения (Следствие 3.1.28).

Факт 3.1.1. *Пусть T о-минимальная теория, $A \subset N \models T$, N — $|A|^+$-насыщенная модель, $p, q \in S_1(A), q \not\perp^w p, \alpha \in q(N)$. Тогда существует $\beta \in p(N) \cap acl(A, \alpha)$.*

Доказательство Факта 3.1.1. Напомним, что в о-минимальной теории множество реализаций неалгебраического 1-типа в насыщенной модели есть выпуклое множество без концевых элементов, а множество реализаций любой формулы — конечное объединение интервалов и одноэлементных множеств. При этом концы этих интервалов и эти элементы принадлежат алгебраическому замыканию параметров этой формулы [26]. Тогда, так как $\alpha \not\perp^w q$ и, следовательно, некоторая $L(A \cup \{\alpha\})$-формула делит выпуклое множество

$q(N)$, существует $\beta \in p(N) \cap alc(A, \alpha) \neq \emptyset$. $\diamondsuit$

При изучении природы элементарных классов моделей важную роль играют свойства и понятия связанные с „хорошими" элементарными расширениями моделей (множеств) такими как простые, специальные, (сильно) конструктивизирумые, насыщенные, консервативные ([14], [30], [1], [67], [70], [66], [26], [28], [3], [6]) и их модификациями и обобщениями — F-простые модели, красивые пары, пары моделей, псевдо-малые теории, аксиоматизируемые пары моделей ([1], [9], [16], [10], [7],[85], [11], [12], [96], [65]). Часто теоремы существования таких расширений базируются на различных вариантах теорем реализаций и/или опусканий типов (ϕ-типов).

Чтобы построить консервативное расширение множества с заданными свойствами, необходимо ответить на следующий вопрос:

Проблема A(S) *Пусть S — свойство определимых типов и для $A \subset N$, $q(x), p(y) \in S_1(A)$ — определимые типы, обладающие свойством S. Существует ли полный определимый 2-тип $r(x, y) \in S_2(A)$, такой что*

$$q(x) \cup p(y) \subseteq r(x, y)?$$

Имеем два разных случая:

A1 $q(x) \cup p(y)$ не является полным типом, то есть $p \not\perp^w q$;

A2 $q \perp^w p$.

Рассмотрим **Проблему A1** для o-минимальной теории.

Замечание 3.1.2. *Пусть $q, p \in S_1(A)$ — два определимых 1-типа над множеством A в o-минимальной модели N, удовлетворяющие условию $q \not\perp^w p$. Тогда для любого $\alpha \in q(N)$ существует $\beta \in p(N)$, такой что $tp(\beta\alpha|A)$ определим.*

Доказательство Замечания 3.1.2. Пусть $\alpha \in q(N)$. По Факту 3.1.1, существует $\beta \in acl(A \cup \{\alpha\}) \cup p(N)$. Тогда $tp(\beta|A \cup \{\alpha\})$ определим и следовательно, $tp(\beta\alpha|A)$ определим. $\diamondsuit$

Для случая **A2** имеем отрицательный ответ на **Проблему A(S)** даже в o-минимальном контексте, когда S есть свойство строгой определимости типов.

Пример 3.1.3. *Существует o-минимальная теория T такая, что для $A \subset M \models T$, $p, q \in S_1(A)$ верно:*

(i) $q \perp^w p$;

(ii) q, p *строго определимые типы;*

(iii) *единственный 2-тип* $p(x) \cup q(y) \in S_2(A)$ *неопределим.*

Объяснение Примера 3.1.3. Пусть $\langle Q; =, <, +, 0\rangle$ упорядоченная группа рациональных чисел. Известно, что элементарная теория $\langle Q; =, <, +, 0\rangle$ о-минимальна и допускает элиминацию кванторов [26]. Пусть

$$\langle Q; =, <, +, 0\rangle \prec \langle R; =, <, +, 0\rangle \prec \langle M; =, <, +, 0\rangle$$

такие, что R есть множество всех вещественных чисел и $\langle M; =, <, +, 0\rangle$ есть большая насыщенная модель. Пусть $\pi \in R$ неалгебраическое вещественное число. Пусть две бесконечные последовательности $\langle c_n\rangle_{n<\omega}$ и $\langle d_n\rangle_{n<\omega}$ такие, что они имеют один и тот же предел $\sqrt{2}$ и верно

$$[c_1 < c_2 < ... < c_n < \cdots < d_n < \cdots < d_2 < d_1]_{n<\omega}, c_n, d_n \in Q.$$

Обозначим $A := \{c_n | n < \omega, c_n \in Q\} \cup \{d_n | n < \omega, d_n \in Q\}$, $p := tp(\pi|A)$, $q := tp(\sqrt{2} + \pi|A)$, $r := tp(\sqrt{2}|A)$. Так как r определяется двумя сходящими последовательностями, r не $(x < v)$-определим.

(i) Так как $\sqrt{2}+\pi$ и π алгебраически независимы над r A, по Факту 3.1.1, $q \perp^w p$.

(ii) Покажем, что q, p оба строго определимы. Так как теория $\langle \mathbb{Q}; =, <, +, 0\rangle$ допускает элиминацию кванторов, достаточно рассмотреть бескванторные типы над A, то есть типы содержащие только бескванторные формулы. Каждый бескванторный тип над A состоит из формул следующего вида:

1. $nx < u$;
2. $nx > u$;

где u есть терм над A, то есть $u = \sum_i k_i e_i$ для $k_i \in Z$ и $e_i \in A$ (это не полный тип, но определяет полный тип над A).

Рассмотрим формулы вида $nx < c + \sum_{i=1}^{m} k_i y_i$, где c есть терм определимый над A.

Покажем, что π and $\sqrt{2} + \pi$ не являются предельными точками

$$A_{c,k_1,\dots,k_m} = \{e \in Q : \exists c_1, \dots c_m \in A \text{ such that } e = c + \sum_{i=1}^{m} k_i c_i\},$$

так как они не являются предельными точками A, и типы $tp(\pi|A)$, $tp(\sqrt{2} + \pi|A)$ слабо ортогональны любому типу $tp(a|A)$, когда $a \in \bar{A}$ (здесь $\bar{A}$ есть замыкание A в топологическом смысле).

Предположим, $\pi \in \bar{A}_{c,k_1,\dots,k_m}$. Тогда существуют последовательности $\langle a^i_j\rangle_{j<\omega}$ для $i = 1, \dots, m$, такие что $\lim_{j\to\infty}(c + \sum_i k_i a^i_j) = \pi$.

Пусть $\lim_{j\to\infty} a^i_j = a^i \in \bar{A}$, тогда $\pi = c + \sum_i k_i a^i$, но это невозможно из-за выбора A потому, что $\bar{A} = A \cup \{\sqrt{2}\}$ и $A \subset Q$.

Таким образом, так как $Q \subset acl(A)$ и Q плотно в R, для любых $m, n, k_1, \dots, k_m < \omega$, для любого терма c определимого над A, существует

$\Psi_{n,m,\bar{k},c}(x) \in tp(\pi|A)$, такая что для любых $b_1, \ldots, b_m \in A$ верно:

$$[nx < c + \sum_{i=1}^{m} k_i b_i \in p \Longleftrightarrow Q \models \forall x(\Psi_{n,m,\bar{k},c}(x) \to nx < c + \sum_{i=1}^{m} k_i b_i)].$$

Это означает, что p строго определим. Эти же самые рассуждения показывают, что q строго определим.

(iii) Так как π и $\sqrt{2}$ алгебраически независимы над A, то $\pi \perp^w r$ и, следовательно, для типа $r_0 := tp(\gamma|A, \pi)$ имеем, что

$r_0(M) = r(M)$. Тогда тип r_0 неопределим, так как он имеет те же самые сходящиеся последовательности $\langle c_n \rangle_{n<\omega}$, $\langle d_n \rangle_{n<\omega}$, которые обеспечивают неопределимость r. Так как $r_0 \not\perp^w q_0 := tp(\sqrt{2} + \pi|A, \pi)$, q_0 не $(x < \pi + v)$-определим. В противном случае, мы получили бы определимость r. $\diamondsuit$

Таким образом, принимая во внимание Замечание 3.1.2, слабо о-минимальный аналог Замечания 3.1.2 и Пример 3.1.3, мы будем ограничиватся, главным образом, рассмотрением определимости объединения двух слабо ортогональных 1-типов над объединением модели и ht-определимым конечным множеством.

Определение 3.1.4. Будем говорить, что теория T имеет *свойство совместного расширения для определимых 1-типов (AP для D-1-типов)* , если для пары моделей (M, N), $\forall \bar{\alpha}, \beta, \gamma \in N \setminus M,\ M \prec N \models T$ верно:
если 1-типы $q := tp(\beta|M \cup \bar{\alpha}),\ p := tp(\gamma|M \cup \bar{\alpha}), tp(\bar{\alpha}|M)$ определимы и $q \perp^w p$, то $tp(\beta\gamma|M \cup \bar{\alpha})$ определим или эквивалентно, типы $tp(\gamma\beta\bar{\alpha}|M)$, $tp(\beta|M \cup \bar{\alpha}\gamma)$, $tp(\gamma|M \cup \bar{\alpha}\beta)$ определимы.

Будем говорить, что теория T имеет *свойство совместного расширения для строго определимых 1-типов (AP для SD-1-типов)* , если для любых $M \prec N \models T, \forall \bar{\alpha}, \beta, \gamma \in N \setminus M$ таких, что $tp(\bar{\alpha}|M)$ определим, верно:
Если 1-типы $q := tp(\beta|M \cup \bar{\alpha}), p := tp(\gamma|M \cup \bar{\alpha})$ иррациональные, строго определимые 1-типы и $q \perp^w p$, то $tp(\beta\gamma|M \cup \bar{\alpha})$ определим.

Определение 3.1.5. Будем говорить, что пара моделей (M, N) есть *NSD–ω-насыщенная пара*, если $\forall \bar{\alpha} \in N \setminus M, \forall q \in S_1(M \cup \bar{\alpha})$ верно:
если q определим и не строго определим (то есть нестрого определим), то q реализуется в N.

Будем говорить, что неизолированный тип $q \in S(A), A \subset N$ есть *CD*-тип, если существуют $L(A)$-формулы $\Theta(\bar{y}),\ \phi(\bar{x}, \bar{y})$ такие, что частичный 1-тип

$$q_{\phi,\Theta} := \{\phi(\bar{x}, \bar{a}) \in q | \bar{a} \in A, N \models \Theta(\bar{a})\} \subseteq q_\phi^+ := \{\phi(\bar{x}, \bar{a}) \in q | \bar{a} \in A\}$$

определяет q, то есть для любой формулы $\Psi \in q$ существует $\phi(\bar{x}, \bar{a}) \in q_{\phi,\Theta}$ такая, что $N \models \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}, \bar{a}) \to \Psi(x))$.

Скажем, что пара (M, N) есть CD–ω-*насыщенная пара*, если для любого $\bar{\alpha} \in N \setminus M$, любой CD-1-тип $q \in S_1(M \cup \bar{\alpha})$, q реализуется в N.

Заметим, что любой определимый 1-тип над моделью слабо о-минимальной теории является CD-1-типом ([90], Fact 22; о-минимальный вариант этого утверждения есть в [6], Lemma 2.3). Будем называть определимый тип, который не является строго определимым *нестрого определимым.* Ясно, что любой CD–тип нестрого определим. Обратное неверно. Приведем примеры типов различающие эти понятия. Пусть $\langle Q; =, <, +, 0\rangle$ — о-минимальная модель Примера 3.1.3, $Q \prec N$, $\alpha, \beta \in N \setminus Q$ такие, что $Q < \alpha < \beta$, α и β принадлежат разным архимедовым классам. Рассмотрим типы $q_1 := tp(\alpha|Q) = tp(\beta|Q)$, $q_2 := tp(\beta|Q \cup \{\alpha\})$, $q_3 := tp(\alpha|Q \cup \{\beta\})$. Все три 1-типа определимы. Тип q_1 — строго определим, тип q_2 — CD-1-тип, а 1-тип q_3 — нестрого определим и не CD-1-тип. Мы оставляем читателям проверку этого. Приведем пример CD-1-типа над множеством. Обозначим $A' := \{c_n | n < \omega\} \cup \{-d_n | n < \omega\}$, $r' := tp(\sqrt{2}|A')$, $\phi(x, y_1, y_2) := y_1 < x < -y_2$. Тогда r' является ϕ-определимым и CD-1-типом, так как r'_ϕ определяет r'.

В доказательстве Предложения 3.1.7 мы будем использовать

Факт 3.1.6. *[Для о-минимальных теорий этот факт был отмечен в* [6], *страница 192, строка 16.] Пусть $\bar{\alpha} \in N \setminus M$ и $q \in S_1(M \cup \bar{\alpha})$ такие, что $\bar{\alpha}$ является ht-определимым над M и $LC(H(x, \bar{y}, \bar{\alpha}), \Theta(\bar{y}, \bar{\alpha}), q)$ для некоторых $L(M \cup \bar{\alpha})$–формул $H(x, \bar{y}, \bar{\alpha}), \Theta(\bar{y}, \bar{\alpha})$.*

Тогда существуют $M\bar{\alpha}$–формула $H'(x, \bar{y}', \bar{\alpha})$ и M–формула $\mu(\bar{y}')$ такие, что $LC(H'(x, \bar{y}', \bar{\alpha}), \mu(M), q)$.

Доказательство Факта 3.1.6. Пусть $l := l(\bar{y})$ и k $(1 \leq k \leq l)$ наименьшее положительное целое число, что для σ, некоторой перестановки $\{1, \ldots, l\}$, для некоторого $\bar{\beta} := (\beta_1, \ldots, \beta_{l-k})(\beta_i \in \cup\bar{\alpha})$, для $\Theta^\sigma(\bar{y}, \bar{\alpha}) := \Theta(y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(l)}, \bar{\alpha})$,
$H^\sigma(x, \bar{y}, \bar{\alpha}) := H(x, y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(l)}, \bar{\alpha})$, имеем

$$LC(H^\sigma(x, y_1, \ldots, y_k, \bar{\beta}, \bar{\alpha}), \Theta^\sigma(y_1, \ldots, y_k, \bar{\beta}, \bar{\alpha}), q)$$

или эквивалентно, $LC(H^\sigma(x, y_1, \ldots, y_k, \bar{\beta}, \bar{\alpha}), X_0, q)$, где

$$X_0 := \Theta^\sigma(M^k, \bar{\beta}, \bar{\alpha}) \cap (M \cup \bar{\alpha})^k = \Theta^\sigma(M^l, \bar{\alpha}) \cap ((M \cup \bar{\alpha})^k \times \bar{\beta}).$$

Существование такого k следует из $LC(H(x, \bar{y}, \bar{\alpha}), \Theta(\bar{y}, \bar{\alpha}), q)$. Обозначим $\Theta_1(\bar{y}', \bar{\alpha}) := \Theta^\sigma(y_1, \ldots, y_k, \bar{\beta}, \bar{\alpha}) \wedge \bigwedge_{i,j} y_i \neq \alpha_j$, $H'(x, \bar{y}', \bar{\alpha}) := H^\sigma(x, y_1, \ldots, y_k, \bar{\beta}, \bar{\alpha})$. Тогда для $X_1 := \Theta^\sigma(N^k, \bar{\beta}, \bar{\alpha}) \cap M^k = \Theta_1(N^k) \cap (M \cup \bar{\alpha})^k$, в силу минимальности k, имеем

$$LC(H'(x, \bar{y}', \bar{\alpha}), \Theta_1(\bar{y}', \bar{\alpha}), q).$$

Так как $tp(\bar{\alpha}|M)$ определим, для $\Theta_1(\bar{y}', \bar{z})$ существует $L(M)$–формула $\mu(\bar{y}')$ такая, что $\mu(M^k) = X_1$. $\diamondsuit$

Предложение 3.1.7. *Пусть $\bar{\alpha}, \bar{\gamma}, \beta \in N \setminus M$ такие, что*

(i) $\bar{\alpha}$ ht-определим над M;

(ii) $tp(\bar{\gamma}|M \cup \bar{\alpha})$ определим и конечно выполним в M;

(iii) $\bar{\gamma} \perp^w q := tp(\beta/M \cup \bar{\alpha})$.

Тогда q определим если и только, если $r := tp(\beta/M \cup \bar{\alpha} \cup \bar{\gamma})$ определим.

Доказательство Предложения 3.1.7. Заметим, что условие $\bar{\gamma} \perp^w q$ влечет $q(N) = r(N)$. Тогда в силу Факта 1.2.25(ii) q и r одновременно иррациональны или квазирациональны. Если они оба квазирациональны, то по Факту 1.2.5 они оба определимы, что доказывает Предложение 3.1.7 для этого случая. Таким образом, мы будем полагать, что q и r иррациональны.

Предположим, q определим. Для q есть две возможности: либо q строго определим, либо не строго определим. Тогда, принимая во внимание Предложение 2.2.7 для не строго определимого типа, имеем три различных случая (В случаях (a)–(b) предполагается, что тип q нестрого определим):

(a) Существуют $L(M \cup \bar{\alpha})$–формула $H(x, \bar{y}, \bar{\alpha})$ и M–формульное подмножество $X \subset M^{l(\bar{y})}$ (Факт 3.1.6) так, что $LC(H, X, q)$, $\neg RC(H, X, q)$.

(b) Существуют $L(M \cup \bar{\alpha})$–формула $H(x, \bar{y}, \bar{\alpha})$ и M–определимое подмножество $X \subset M^{l(\bar{y})}$ (Факт 3.1.6) так, что $\neg LC(H, X, q)$, $RC(H, X, q)$.

(c) Для любой $L(M \cup \bar{\alpha})$–формулы $H(x, \bar{y}, \bar{\alpha})$ и для любого M–формульного подмножества $X \subset M^{l(\bar{y})}$ имеем

$$\neg LC(H, X, q),\ \neg RC(H, X, q),$$

то есть q строго определим.

Во всех случаях (a) – (c) мы покажем, что $r = tp(\beta/M \cup \bar{\alpha} \cup \bar{\gamma})$ определим.

(a) Пусть $\phi(x, \bar{u}, \bar{\gamma}, \bar{\alpha})$ произвольная $L(\bar{\gamma} \cup \bar{\alpha})$–формула. Тогда существуют $L(M)$–формулы $\Theta(\bar{u}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$, $\mu_\Theta(\bar{u}, \bar{y}, \bar{z}), l(\bar{y}) = l(\bar{z}), l(\bar{t}) = l(\bar{\alpha})$ такие, что для любого $\bar{a} \in M^{l(\bar{u})}$ верно:

(i) $[\phi(x, \bar{a}, \bar{\gamma}, \bar{\alpha}) \in tp(\beta/M \cup \bar{\alpha} \cup \bar{\gamma}) \iff \exists \bar{g} \in X, \forall \bar{d} \in X$
$N \models \forall x(H(N, \bar{g}, \bar{\alpha}) < x < H(N, \bar{d}, \bar{\alpha})^+ \to \phi(x, \bar{a}, \bar{\gamma}, \bar{\alpha}))]$
(так как $\bar{\gamma} \perp^w q, LC(H, X, q), \neg RC(H, X, q)$).

(ii) $(\forall \bar{g} \in X), (\forall \bar{d} \in X)$
$[N \models \forall x(H(N, \bar{g}, \bar{\alpha}) < x < H(N, \bar{d}, \bar{\alpha})^+ \to \phi(x, \bar{a}, \bar{\gamma}, \bar{\alpha}))$
$\iff N \models \Theta(\bar{a}, \bar{g}, \bar{d}, \bar{\alpha})]$ (так как $tp(\bar{\gamma}/M \cup \bar{\alpha})$ определим).

(iii) $(\forall \bar{g} \in X), (\forall \bar{d} \in X)[N \models \Theta(\bar{a}, \bar{g}, \bar{d}, \bar{\alpha}) \iff M \models \mu_\Theta(\bar{a}, \bar{g}, \bar{d})]$
(так как $tp(\bar{\alpha}|M)$ определим).

Таким образом, $M \models \exists \bar{y}[\bar{y} \in X \wedge \forall \bar{z}(\bar{z} \in X \to \mu_\Theta(\bar{a}, \bar{y}, \bar{z}))]$ тогда и только тогда, когда

$$\phi(x, \bar{a}, \bar{\gamma}, \bar{\alpha}) \in tp(\beta/M \cup \bar{\alpha} \cup \bar{\gamma}).$$

(b) Аналогично (a).

(c) Для произвольной $L(M \cup \bar{\alpha})$–формулы $\phi(x, \bar{u}, \bar{y}, \bar{\alpha})$, $l(\bar{y}) = l(\bar{\gamma})$, в силу строгой определимости q, существуют $L(M \cup \bar{\alpha})$–формулы $G \in F(q)$, $D \in R(q)$ такие, что $\forall \bar{b} \in M^{l(\bar{y})}, \forall \bar{a} \in M^{l(\bar{u})}$ верно:

$$[\phi(x, \bar{a}, \bar{b}, \bar{\alpha}) \in q \iff N \models \forall x(G(N) < x < D(N) \to \phi(x, \bar{a}, \bar{b}, \bar{\alpha}))].$$

Пусть $\Theta(\bar{y}, \bar{a}, \bar{\alpha}) := \forall x(G(N) < x < D(N) \to \phi(x, \bar{a}, \bar{y}, \bar{\alpha}))$.

Тогда, так как $tp(\bar{\gamma}/M \cup \bar{\alpha})$ определим, существует $L(M \cup \bar{\alpha})$–формула $\mu_\Theta(\bar{u}, \bar{\alpha})$ такая, что $\forall \bar{a} \in M[\Theta(\bar{y}, \bar{a}, \bar{\alpha}) \in tp(\bar{\gamma}/M \cup \bar{\alpha}) \iff N \models \mu_\Theta(\bar{a}, \bar{\alpha})]$. Таким образом, для любого $\bar{a} \in M$, если $N \models \mu_\Theta(\bar{a}, \bar{\alpha})$, то $\phi(x, \bar{a}, \bar{\gamma}, \bar{\alpha}) \in tp(\beta/M \cup \bar{\alpha} \cup \bar{\gamma})$.
Предположим обратное неверно, то есть для некоторого $\bar{a} \in M$ выполняется:

$$(*)_{\bar{a}}\ N \models \neg\mu_\Theta(\bar{a}, \bar{\alpha}),\ \text{и}\ \phi(x, \bar{a}, \bar{\gamma}, \bar{\alpha}) \in r = tp(\beta/M \cup \bar{\alpha} \cup \bar{\gamma}).$$

$N \models \neg\mu_\Theta(\bar{a}, \bar{\alpha})$ означает по определению, что

$$N \models \exists x[G(N) < x < D(N) \wedge \neg\phi(x, \bar{a}, \bar{\gamma}, \bar{\alpha})].$$

В силу иррациональности r существуют $G_1 \in F(q)$, $D_1 \in R(q)$ такие, что

$$N \models \forall x[G_1(N) < x < D_1(N) \to \phi(x, \bar{a}, \bar{\gamma}, \bar{\alpha})].$$

Таким образом, имеем $N \models \forall x[G_1(N) < x < D_1(N) \to \phi(x, \bar{a}, \bar{\gamma}, \bar{\alpha})]$
$\wedge \exists x[G(N) < x < D(N) \wedge \neg\phi(x, \bar{a}, \bar{\gamma}, \bar{\alpha})]$.
Тогда так, как $tp(\bar{\gamma}/M \cup \bar{\alpha})$ конечно выполним в M, существует $\bar{b} \in M$ такой, что $N \models \forall x[G_1(N) < x < D_1(N) \to \phi(x, \bar{a}, \bar{b}, \bar{\alpha})]$
$\wedge \exists x[G(N) < x < D(N) \wedge \neg\phi(x, \bar{a}, \bar{b}, \bar{\alpha})]$.
Истинность первого члена конъюнкции означает $\phi(x, \bar{a}, \bar{b}, \bar{\alpha}) \in q$ и истинность второго члена этой конъюнкции означает $\neg\phi(x, \bar{a}, \bar{b}, \bar{\alpha}) \in q$. Противоречие, которое вытекает из предположения $(*)_{\bar{a}}$. Следовательно для любого $\bar{a} \in M$ верно:

$$[N \models \mu(\bar{a}, \bar{\alpha}) \iff \phi(x, \bar{a}, \bar{\gamma}, \bar{\alpha}) \in r],$$

что означает определимость r.

Теперь покажем достаточность. Предположим r определим. Пусть $\varphi(x,\bar{y})$ произвольная $L(A)$-формула. Обозначим $\varphi'(x,\bar{y},\bar{\alpha}) := \varphi(x,\bar{y}) \wedge \bigwedge y_i \neq \alpha_j$. Тогда, так как $q \subset r$, для любого $\bar{a} \in M^{l(\bar{y})}$ верно:

$$\varphi(x,\bar{a}) \in q \iff^{(1)} \varphi'(x,\bar{a},\bar{\alpha}) \in r.$$

Тип r определим, поэтому существует $\varphi'(x,\bar{y},\bar{\alpha})$-определение типа r некоторая $L(A \cup \bar{\alpha})$-формула $\Theta(\varphi')(\bar{y},\bar{z},\bar{\alpha},\bar{c}))$, такая что выполняется

$$[\varphi'(x,\bar{a},\bar{\alpha},\bar{\alpha},\bar{c}) \in r \iff^{(2)} N \models \Theta(\varphi')(\bar{a},\bar{\alpha})].$$

Из определения типа следует, что

$$N \models \Theta(\varphi')(\bar{a},\bar{\alpha}) \iff^{(3)} \Theta(\varphi')(\bar{a},\bar{z}) \in tp(\bar{\alpha}|M).$$

Так как тип $tp(\bar{\alpha}|M)$ определим, существует $L(A)$-формула $\Psi_{\Theta(\varphi')}$ такая, что

$$\Theta(\varphi')(\bar{a},\bar{z}) \in tp(\bar{\alpha}|M) \iff^{(4)} M \models \Psi_{\Theta(\varphi')}(\bar{a}).$$

Условия (1)-(4)означают, что q есть определимый тип. $\diamondsuit$

Определение 3.1.8. Скажем, что теория T имеет *свойство совместного расширения для нестрого определимых 1-типов (AP для NSD-1-типов)*, если для любой пары моделей (M,N) теории T, $\forall \bar{\alpha},\beta,\bar{\gamma} \in N \setminus M$ таких, что типы $tp(\bar{\alpha}|M)$, $tp(\bar{\gamma}|M \cup \bar{\alpha})$ определимы, $q := tp(\beta|M \cup \bar{\alpha})$ иррационален и определим, $\bar{\gamma} \perp^w q$, следующее верно:

Если q не строго определим, тогда $tp(\beta|M \cup \bar{\alpha} \cup \bar{\gamma})$ определим.

Из доказательства Предложения 3.1.7 (необходимость, случаи (a)–(b)) вытекают два следующих утверждения.

Следствие 3.1.9. *Каждая слабо о-минимальная теория имеет AP для NSD-1-типов.*

Следствие 3.1.10. *Пусть $p,q \in S_1(M \cup \bar{\alpha}), \bar{\alpha} \in N \setminus M$, $tp(\bar{\alpha}|M)$ определимы, $p \perp^w q$, $\delta \in p(N), \beta \in q(N)$. Предположим, что p и q определимы, иррациональны и по крайне мере один из этих типов не строго определим. Тогда $tp(\beta\delta|M \cup \bar{\alpha})$ определим.*

Принимая во внимание Пример 3.1.3 и Следствие 3.1.14, сформулируем следующий

Вопрос 3.1.11. *Обладает ли (слабо) о-минимальная теория AP для D-1-типов или эквивалентно, AP для SD-1-типов?*

Определение 3.1.12. Скажем, что теория T имеет *свойство совместного расширения для нестрого определимых 1-типов (AP для NSD-1-типов)*, если для любой пары моделей (M, N) теории T, $\forall \bar{\alpha}, \beta, \bar{\gamma} \in N \setminus M$ таких, что типы $tp(\bar{\alpha}|M)$, $tp(\bar{\gamma}|M \cup \bar{\alpha})$ определимы, $q := tp(\beta|M \cup \bar{\alpha})$ иррационален и определим, $\bar{\gamma} \perp^w q$, следующее верно:

Если q не строго определим, тогда $tp(\beta|M \cup \bar{\alpha} \cup \bar{\gamma})$ определим.

Из доказательства Предложения 3.1.7 (необходимость, случаи (a)–(b)) вытекают два следующих утверждения.

Следствие 3.1.13. *Каждая слабо о-минимальная теория имеет AP для NSD-1-типов.*

Следствие 3.1.14. *Пусть $p, q \in S_1(M \cup \bar{\alpha}), \bar{\alpha} \in N \setminus M$, $tp(\bar{\alpha}|M)$ определимы, $p \perp^w q$, $\delta \in p(N), \beta \in q(N)$. Предположим, что p и q определимы, иррациональны и по крайне мере один из этих типов не строго определим. Тогда $tp(\beta\delta|M \cup \bar{\alpha})$ определим.*

Принимая во внимание Пример 3.1.3 и Следствие 3.1.14, сформулируем следующий

Вопрос 3.1.15. *Обладает ли (слабо) о-минимальная теория AP для D-1-типов или эквивалентно, AP для SD-1-типов?*

Теорема 3.1.16. *Пусть T — слабо о-минимальная теория. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) Каждая модель M для T имеет D–ω-насыщенное консервативное расширение.

(ii) T имеет AP для D-1-типов.

(iii) T имеет AP для SD-1-типов.

Доказательство Теоремы 3.1.16 (i) $\Rightarrow$ (ii) следует из определения D–ω-насыщен-ной консервативной пары и AP для D-1-типов.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) следует из Следствия 3.1.14 и определения 3.1.4.

(ii) $\Rightarrow$ (i).

Определение 3.1.17. Пусть $A \subset B \subset N$, где N — большая насыщенная модель. Говорят, что B — *консервативное 1-расширение* A, если для любого $\alpha \in B \setminus A$ верно, что $tp(\alpha|A)$ определим. Говорят, что B — *консервативное расширение* A, если для любого $\bar{\alpha} \in B \setminus A$ $tp(\bar{\alpha}|A)$ определим.

Определение 3.1.18. Пусть $A \subset B \subset N$, где N — большая насыщенная модель. Говорят, что B — *консервативное 1-расширение* A, если для любого $\alpha \in B \setminus A$ верно, что $tp(\alpha|A)$ определим. Говорят, что B — *консервативное расширение* A, если для любого $\bar{\alpha} \in B \setminus A$ $tp(\bar{\alpha}|A)$ определим.

Утверждение 3.1.19. *Пусть $A \subset B \subset C \subset N$. Если B — консервативное расширение A и C — консервативное расширение B, то C — консервативное расширение A.*

Пусть $M \prec N$, где N — большая насыщенная модель. Определим модель M_ω ($M \prec M_\omega \prec N$) как объединение элементарной цепи моделей $M_n, n < \omega$ (**D1**). Построение M_{n+1} ($M_n \prec M_{n+1}$) будем вести в два этапа. На первом этапе мы строим B_n ($M_n \subset B_n \subset M_{n+1}$), предполагая, что все определимые не реализованные в M_n (**D4**) 1-типы над $M \cup \bar{\alpha}$ ($\bar{\alpha} \in M_n$), реализованы в B_n (**D5**). На втором этапе мы замыкаем B_n до модели M_{n+1}, пользуясь критерием Тарского-Вота. Для этого мы строим множество $E(n,m) \subset E(n,m+1), m < \omega$, такое что любая $L(E(n,m))$-1-формула имеет решение в $E(n,m+1)$ (**D6, D7**), а M_{n+1} есть объединение $E(n,m), m < \omega$ (**D3**).

Наша главная задача в этой стандартной схеме построения модели (смотрите, например, [14], Глава 3.1 или [1], Chapter 4) заключается в выборе элементов $\beta_{n,\lambda} \in B_{n+1}$ ($\mathbf{D8}_{n,\lambda}$) и $e_{n,m,\lambda} \in E_{n,m+1}$ ($\mathbf{D9}_{n,m,\lambda}$), таких что и B_n, и $E(n,m)$ являются консервативными расширениями M_n. В итоге, применение Утверждения 4.1.23 будет завершать доказательство теоремы. Таким образом, условия **D1-D7** описывают конструкцию модели M_ω, описание выбора элементов **D8** совместно с **D4**и **D5** обеспечивают D–ω-насыщенность модели M_ω, описание выбора элементов **D9** совместно с **D6** и **D7** обеспечивают условие, что M_{n+1} есть элементарное расширение M_n:

D1 $M_\omega = \bigcup\limits_{n<\omega} M_n,\ M_n \prec M_{n+1} \prec M_\omega, M_n$ — консервативное расширение M.

$\mathbf{D2}_{n<\omega}$ $M_n \subset B_n \subset E(n,m) \subset E(n,m+1) \subset M_{n+1},\ m < \omega.$

$\mathbf{D3}_{n<\omega}$ $M_{n+1} = \bigcup\limits_{m<\omega} E(n,m).$

$\mathbf{D4}_{n<\omega}$ $K_n = \bigcup\limits_{\bar{\alpha} \in M_n \setminus M} S_1^d(M \cup \bar{\alpha})$. Здесь,

$$S_1^d(M \cup \bar{\alpha}) = \{q \in S_1(M \cup \bar{\alpha}) | q \text{ is определимый}, q(N) \cap M_n = \emptyset\}.$$

Зафиксируем произвольное перечисление типов множества

$$K_n = \{q_{n,\lambda} \in S_1^d(M \cup \bar{\alpha}_{n,\lambda}) | \lambda < \mu_n, \bar{\alpha}_{n,\lambda} \in M_n \setminus M\}, \mu_n = |K_n|.$$

$\mathbf{D5}_{n<\omega}$ $B_n = \bigcup\limits_{\lambda<\mu_n} B_{n,\lambda},\ \forall \lambda < \mu_n,$

$B_{n,\lambda} = \bigcup\limits_{\lambda'<\lambda} B_{n,\lambda'} \cup \{\beta_{n,\lambda}\}, \beta_{n,\lambda} \in q_{n,\lambda}(N),$ $B_{n,\lambda}$ — консервативное расширение M.

D6$_{n,m<\omega}$ $F(n,m) = \{\psi(x) | \psi(x) - L(E(n,m))$-формула, такая что $\psi(N) \neq \emptyset$, $\psi(N) \cap E(n,m) = \emptyset\}$. Зафиксируем произвольное перечисление формул множества

$$F(n,m) = \{\psi_{n,m,\lambda}(x) | \lambda < \mu_{n,m}\},\ \mu_{n,m} = |F(n,m)|.$$

D7$_{n,m<\omega}$ $E(n,m+1) = \bigcup\limits_{\lambda<\mu_{n,m}} E(n,m,\lambda),\ \forall \lambda < \mu_{n,m},$

$$E(n,m,\lambda) = \bigcup_{\lambda'<\lambda} E(n,m,\lambda') \cup \{e_{n,m,\lambda}\},\ e_{n,m,\lambda} \in \psi_{n,m,\lambda}(N),$$

$E(n,m,\lambda)$ — консервативное расширение M.

Для завершения описания построения M_ω дадим объяснение выбора $\beta_{n,\lambda}$ и $e_{n,m,\lambda}$ и доказательства того, что $B_{n,\lambda}$ и $E(n,m,\lambda)$ суть консервативные расширения M.

D8$_{n,\lambda}$ **Выбор** $\beta_{n,\lambda}$ **для** $n < \omega, \lambda < \mu_n$.

Обозначим $B'_{n,\lambda} := \bigcup\limits_{\lambda'<\lambda} B_{n,\lambda'}$. Рассмотрим два случая:

D8.1$_{n,\lambda}$ $B'_{n,\lambda} \perp^w q_{n,\lambda}$.

Возьмем произвольный элемент $\beta \in q_{n,\lambda}(N)$ и обозначим его $\beta_{n,\lambda}$. Согласно (ii), то есть потому, что T удовлетворяет AP для D-1-типов, $B_{n,\lambda} = B'_{n,\lambda} \cup \{\beta_{n,\lambda}\}$ является консервативным расширением M, если $B'_{n,\lambda}$ — консервативное расширение M.

D8.2$_{n,\lambda}$ $B'_{n,\lambda} \not\perp^w q_{n,\lambda}$. Пусть $H(x)$ будет произвольной $L(B'_{n,\lambda})$-формулой, такой что $H(x)$ расщепляет $q_{n,\lambda}(N)$, то есть $H(N) < \neg H(N)$ и $H(N) \cap q_{n,\lambda}(N) \neq \emptyset$, $\neg H(N) \cap q_{n,\lambda}(N) \neq \emptyset$. Существование такой формулы $H(x)$ следует из определения неортогональности множества типу и Замечаний 2.2.2 и 1.2.4.

Пусть $\Gamma_{n,\lambda}(x) := q_{n,\lambda}(x) \cup \{\phi(N) < x < H(N)^+ | \phi(x)$ будет $L(B'_{n,\lambda})$-формулой, такой что $N \models \exists x(\phi(N) < x < H(N)^+)\}$. Заметим, что $\Gamma_{n,\lambda}(x)$ имеет единственное расширение до полного 1-типа $p_{n,\lambda}$ над $B'_{n,\lambda}$, который либо изолированный, либо квазирациональный вправо и, следовательно, в любом случае $p_{n,\lambda}(x)$ определим (Факт 1.2.5).

Покажем единственность $p_{n,\lambda}$. Возьмем произвольную $L(B(n,\lambda)')$-формулу $\Theta(x)$ и рассмотрим $(\Theta(N) \cap H(N))^+$. Положим, что $\Theta(x) \in p_{n,\lambda}$, если и только если $(\Theta(N) \cap H(N))^+ = H(N)^+$. Из определения $\Gamma_{n,\lambda}(x)$ следует, что $p_{n,\lambda}(N)^+ = H(N)^+$.

Возьмем произвольный элемент β из $p_{n,\lambda}(N)$ и обозначим его $\beta_{n,\lambda}$. Тогда по Замечанию 4.1.23, $B_{n,\lambda} = B'_{n,\lambda} \cup \{\beta_{n,\lambda}\}$ — консервативное расширение M, если $B'_{n,\lambda}$ — консервативное расширение M.

D9$_{n,m,\lambda}$ **Выбор** $e_{n,m,\lambda}$ **для** $n, m < \omega, \lambda < \mu_{n,m}$.

Обозначим $E'(n,m,\lambda) = \bigcup\limits_{\lambda'<\lambda} E(n,m,\lambda')$. Рассмотрим два случая:

D9.1$_{n,m,\lambda}$ Существует $L(E'(n,m,\lambda))$-формула $\theta(x)$ такая, что $N \models \forall x(\theta(x) \to \psi_{n,m,\lambda}(x))$, и $\theta(x)$ определяет некоторый изолированный 1-тип над $E'(n,m,\lambda)$. Тогда по Замечанию 4.1.23 для произвольного $e \in \theta(N)$ имеем, что $E'(n,m,\lambda) \cup \{e\}$ — консервативное расширение M, если $E'(n,m,\lambda)$ — консервативное расширение M. Таким образом, положим $e_{n,m,\lambda} = e$.

D9.2$_{n,m,\lambda}$ Существует $L(E'(n,m,\lambda))$-формула $\theta(x)$ такая, что $N \models \forall x(\theta(x) \to \psi_{n,m,\lambda}(x))$ и $\theta(x)$ определяет некоторый изолированный 1-тип над $E'(n,m,\lambda)$. Пусть $\psi^i_{n,m,\lambda}(x)$ будет выпуклой подформулой в разбиении $\psi_{n,m,\lambda}(x)$ (Факт 1.2.1) такой, что $\psi^i_{n,m,\lambda}(N)^+ = \psi_{n,m,\lambda}(N)^+$.

Рассмотрим $\Gamma_{n,m,\lambda}(x) := \{\phi(N) < x < \psi_{n,m,\lambda}(N)^+ | \phi(x)$ — выпуклая $E'(n,m,\lambda)$-определимая формула такая, что

$$\phi(N) \subset \psi^i_{n,m,\lambda}(N) \text{ и } N \models \exists x(\phi(N) < x < \psi_{n,m,\lambda}(N)^+)\}.$$

Заметим, что для каждой выпуклой $L(E'(n,m,\lambda))$-формулы $\phi(x)$ такой, что $\phi(N) \subset \psi^i_{n,m,\lambda}(N)$, верно:
$\models \exists x(\phi(N) < x < \psi_{n,m,\lambda}(N)^+) \vee \exists x((\psi^i_{n,m,\lambda}(x) \wedge \neg\phi(N)) < x < \psi_{n,m,\lambda}(N)^+)$. Действительно, в силу того, что $\phi(x)$ и $\psi^i_{n,m,\lambda}(x)$ выпуклые, если $\phi(N)^+ \neq \psi^i_{n,m,\lambda}(N)^+$, то $\psi^i_{n,m,\lambda}(N) \cap \neg\phi(N) < \phi(N)$. Покажем, что $\Gamma_{n,m,\lambda}(x)$ имеет единственный расширяющий его полный 1-тип $p_{n,m,\lambda}$ над $E'(n,m,\lambda)$, который к тому же является квазирациональным вправо. Возьмем произвольную $L(E'(n,m,\lambda))$-формулу $\Theta(x)$ и рассмотрим $(\Theta(N) \cap \psi^i_{n,m,\lambda}(N))^+$. Положим, что $\Theta(x) \in p_{n,m,\lambda}$, если и только если $(\Theta(N) \cap \psi^i_{n,m,\lambda}(N))^+ = \psi^i_{n,m,\lambda}(N)^+$. Если

$$(\Theta(N) \cap \psi^i_{n,m,\lambda}(N))^+ \neq \psi^i_{n,m,\lambda}(N))^+,$$

то для $K(x) := (\Theta(N) \cap \psi^i_{n,m,\lambda}(N)) < x < \psi^i_{n,m,\lambda}(N)^+$ мы имеем, что $K(x) \in \Gamma_{n,m,\lambda}(x)$. Это значит, что $\Gamma_{n,m,\lambda}(x) \cup \{\Theta(x)\}$ не совместно. Из определения $\Gamma_{n,m,\lambda}(x)$ следует, что $p_{n,m,\lambda}(N)^+ = \psi_{n,m,\lambda}(N)^+$.

Тогда для произвольного элемента $e_{n,m,\lambda} \in p_{n,m,\lambda}(N)$ верно, что $E(n,m,\lambda) := E'(n,m,\lambda) \cup \{e_{n,m,\lambda}\}$ является консервативным расширением M, если $E'(n,m,\lambda)$ — консервативное расширение M. Это завершает определение M_ω.

M_ω есть элементарное расширение M в силу **D6**$_{n,m}$, **D7**$_{n,m}$, **D9**$_{n,m,\lambda}$ и критерия Тарского-Вота ([22]; [61]).

Из конструкций (**D4**$_n$, **D5**$_n$, **D8**$_{n,\lambda}$) следует, что M_ω — D–ω-насыщенное консервативное расширение M. $\diamondsuit$

Заметим, что когда T о-минимальна, случай **D8.2** сводится к случаю

D9.1 потому, что в о-минимальной теории в силу Факта 3.1.1 верно, что

$$\forall A \subset N, \forall q \in S_1(A), \forall \bar{\alpha} \in N[\bar{\alpha} \not\perp^w q \to \exists \beta \in q(N) \cap acl(A \cup \bar{\alpha})].$$

Аналогично, случай **D9.2** сводится к случаю **D9.1**, потому что в о-минимальной теории для любой выпуклой $L(A)$-формулы $\phi(x)$, если существует $L(A)$-формула $\Theta(x)$, такая что $\phi(N) \cap \Theta(N) \neq \emptyset$ и $\phi(N) \cap \neg\Theta(N) \neq \emptyset$, то $\phi(N) \cap acl(A) \neq \emptyset$.

Вспомним, что для любых $\beta, \bar{\gamma} \in N \setminus A, A \subset N$ таких, что $q := tp(\beta|A)$ квазирациональный и $\bar{\gamma} \perp^w q$, тип β над $A \cup \bar{\gamma}$ квазирациональный (Факт 1.2.25) и, следовательно, определимый (Факт 1.2.5). Это позволяет модифицировать доказательство Теоремы 3.1.16(ii)$\Rightarrow$(i) с помощью сокращения условия AP для D-1-типов и реализации только квазирациональных 1-типов для построения для каждой модели (каждого множества) консервативного расширения . Таким образом, общая схема построения модели из Теоремы 3.1.16 позволяет, после изменения условия **D4**, с использованием Фактов 2.2.8(iii), 3.3.15 и 2.1.21, а также Замечания 3.1.25, строить консервативные расширения, опуская все иррациональные 1-типы (Следствие 3.1.21) и реализуя различные классы иррациональных определимых типов (Следствие 3.1.28).

Утверждение 3.1.20. *Пусть $A \subset B \subset C \subset N$. Если B — консервативное расширение A и C — консервативное расширение B, то C — консервативное расширение A.*

Заметим, что когда T о-минимальна, случай **D8.2** сводится к случаю **D9.1** потому, что в о-минимальной теории в силу Факта 3.1.1 верно, что

$$\forall A \subset N, \forall q \in S_1(A), \forall \bar{\alpha} \in N[\bar{\alpha} \not\perp^w q \to \exists \beta \in q(N) \cap acl(A \cup \bar{\alpha})].$$

Аналогично, случай **D9.2** сводится к случаю **D9.1**, потому что в о-минимальной теории для любой выпуклой $L(A)$-формулы $\phi(x)$, если существует $L(A)$-формула $\Theta(x)$, такая что $\phi(N) \cap \Theta(N) \neq \emptyset$ и $\phi(N) \cap \neg\Theta(N) \neq \emptyset$, то $\phi(N) \cap acl(A) \neq \emptyset$.

Следствие 3.1.21. (Опускание иррациональных 1-типов в консервативных расширениях) *Пусть $M \prec N$, где N — M^+-насыщенное элементарное расширение M, $\bar{\gamma} \in N \setminus M$, $tp(\bar{\gamma}|M)$ определимый. Тогда существует M' ($M \prec M' \prec N$), такая что $\bar{\alpha} \in M'$, (M, M') консервативная пара, и для любого иррационального $r \in S(M \cup \bar{\gamma})$ верно, что $r(N) \cap M' = \emptyset$.*

Тоже самое доказательство, как в Следствии 3.1.21, дает нам

Следствие 3.1.22. (Опускание иррациональных 1-типов над множеством) *Пусть A — подмножество $|A|^+$-насыщенной модели N слабо о-минимальной теории T. Тогда существует M — консервативное расширение для A ($A \subset M \prec N$), такое что любой иррациональный тип $r \in S_1(A)$ опускается в M.*

Утверждение 3.1.23. *Пусть $q \in S_1(A)$ — неизолированный.*

(i) Предположим, что q квазирациональный. Тогда q не строго определимый тогда и только тогда, когда q удовлетворяет PC, тогда и только тогда, когда q является CD-1-типом.

(ii) Предположим, что q иррациональный. Тогда q удовлетворяет PBC тогда и только тогда, когда q является CD-1-типом.

Замечание 3.1.24. *Пара моделей (M, N) будет CD–ω-насыщенной парой тогда и только тогда, когда для любого $\alpha \in N \backslash M$ любой квазирациональный не строго определимый 1-тип над $M \cup \bar{\alpha}$ и любой иррациональный 1-тип над $M \cup \bar{\alpha}$ удовлетворяющий PBC реализуются в N.*

Следующий факт является следствием Фактов 2.1.18(iii), 3.3.15 и 2.1.21.

Замечание 3.1.25. *Пусть $p, q \in S_1(A)$ и $p \not\perp^w q$. Тогда следующее верно:*

(i) p удовлетворяет PC тогда и только тогда, когда q удовлетворяет PC.

(ii) p удовлетворяет PBC тогда и только тогда, когда q удовлетворяет PBC.

Определение 3.1.26. Говорят, что теория T удовлетворяет *свойству совместного расширения (AP) для CD-1-типов*, если для любой пары моделей (M, N) теории T, $\forall \bar{\alpha}, \beta, \bar{\gamma} \in N \setminus M$, таких что типы $tp(\bar{\alpha}|M)$, $tp(\bar{\gamma}|M \cup \bar{\alpha})$ определимые, а тип $q := tp(\beta|M \cup \bar{\alpha})$ иррациональный и определимый, и $\bar{\gamma} \perp^w q$, верно следующее:

Если q есть CD-1-тип или, что эквивалентно, удовлетворяет PBC, то $tp(\beta|M \cup \bar{\alpha} \cup \bar{\gamma})$ определимый.

Так как, любой определимый CD-1-тип не является строго определимым, имеем

Замечание 3.1.27. *Если теория T удовлетворяет AP для D-1-типов, то T удовлетворяет AP для NSD-1-типов, а если T удовлетворяет AP для NSD-1-типов, то T удовлетворяет AP для CD-1-типов.*

Следствие 3.1.28. *Пусть M — модель слабо о-минимальной теории T. Тогда для M существуют:*

(i) NSD–ω-насыщенное консервативное расширение;

(ii) CD–ω-насыщенному консервативное расширение.

Замечание 3.1.29. *Д. Маркер в [3] доказал существование консервативного расширения для любой о-минимальной модели. Мы не знаем, что значит "дедекиндовы красивые пары"в статье Байсалова-Пуаза ([8], стр. 574), но в действительности, они доказали существование CD–ω-насыщенного консервативного расширения для любой о-минимальной модели. Будем говорить, по аналогии с [9], что пара моделей (M, N) есть консервативная D-красивая пара, если*
1) (M, N) есть консервативная пара,
2) M есть ω-насыщенная модель,
3) (M, N) — D–ω-насыщенная пара.

Мы не знаем, существует ли консервативная D-красивая пара для произвольной (слабо) о-минимальной теории.

В заключение подраздела приведем примеры D–ω-насыщенной, NSD–ω-насыщенной, CD–ω-насыщенной консервативных пар о-минимальной теории. Пусть $N = \{0, 1, 2 \ldots\}$ — множество натуральных чисел, Z — множество целых чисел, Q — рациональных. Обозначим $Q^{>0} := \{a \in Q | a > 0\}$, $I := \{\frac{1}{n+1} | n \in N\}$, $B_1 := \{0\} \times N$, $B_2 := B_1 \cup \{1\} \times Z$, $B_3 := B_1 \cup I \times Z$, $B_4 := B_1 \cup Q^{>0} \times Z$.

На моделях $M_i := (B_i; =, <), 1 \leq i \leq 4$, отношение $<$ есть лексикографическое упорядочение. Эти четыре модели являются моделями теории дискретного порядка с левым концом, но без правого. Эта теория о-минимальна [26]. Из определения следует, что

$$M_1 \prec M_2 \prec M_3 \prec M_4.$$

Говорят, что пара моделей (M, N) является *1-консервативной*, если для любого $\alpha \in N \setminus M$ верно, что $tp(\alpha|M)$ определим. Д. Маркер и Ч. Стейнхорн доказали, что любая 1-консервативная пара произвольной о-минимальной теории — консервативная [6]. (Заметим, что существует 1-консервативная неконсервативная пара моделей слабо о-минимальной теории [98]).

Так как существует только один неизолированный 1-тип над M_1, и этот тип рациональный (определимый), любое элементарное расширение для M_1 является 1-консервативным. Тогда по теореме Маркера-Стейнхорна пары моделей (M_1, M_2), (M_1, M_3), (M_1, M_4) консервативны. Мы оставляем читателям проверку следующих утверждений:

(M_1, M_2) — CD–ω-насыщенная, не NSD–ω-насыщенная консервативная пара;

(M_1, M_3) — NSD–ω-насыщенная, не D–ω-насыщенная консервативная пара;

(M_1, M_4) — D–ω-насыщенная консервативная пара.

3.2 Аксиоматизируемые классы консервативных пар

Пусть $L^* = L \cup \{P^1\}$. Обозначим, $\bar{z} \notin P := \wedge_i \neg P^1(z_i)$, $\bar{y} \in P := \wedge_i P^1(y_i)$.

Пусть (M, N) пара моделей слабо о-минимальной теории T. Через T_0^* обозначим множество всех предложений в L^*, которое говорит, что предикат P^1 выделяет M как элементарную подмодель для N. А. Пиллай (A. Pillay) заметил [7], что класс консервативных пар моделей слабо о-минимальной теории аксиоматизируем. В самом деле, любой определимый 1-тип над о-минимальной моделью рациональный [6] и следующая аксиома А. Пиллая выделяет класс всех 1-консервативных пар, который по Теореме Маркера-Стейнхорна совпадает с классом всех консервативных пар:

$\mathbf{Ax(P)} := \forall x(x \notin P \to (\exists y(y \in P \wedge x < y \wedge$
$\forall z(x < z < y \to z \notin P)) \vee \exists y(y \in P \wedge x > y \wedge \forall z(x > z > y \to z \notin P))))$.

В этом подразделе мы покажем, что класс CD–ω-насыщенных пар моделей произвольной слабо о-минимальной теории аксиоматизируем (Утверждение 3.2.1) в языке пар моделей и выделим два подкласса класса слабо о-минимальных теорий, содержащих класс о-минимальных теорий и имеющие следующие свойства:

1) Класс 1-консервативных пар моделей *конечно слабо о-минимальной теории* (Определение 3.2.2) аксиоматизируем в языке пар моделей;

2) Класс 1-консервативных пар *почти о-минимальной MS-теории* совпадает с классом консервативных пар моделей этой теории (Лемма 3.2.3).

Это позволяет выделить такие слабо о-минимальные теории, что класс их консервативных CD–ω-насыщенных пар моделей аксиоматизируем (Теорема 3.2.4). В заключительной части параграфа приведем примеры таких теорий (Теорема 3.2.5).

Пусть $\phi(x, \bar{y}, \bar{z})$ произвольная выпуклая по x L-формула. Для любой L-формулы $\Theta(\bar{y}, \bar{z}, \bar{u})$, любого $\bar{\alpha} \in (N \setminus M)^{l(\bar{z})}$, любого $\bar{b} \in M^{l(\bar{u})}$ определим множество $L(M \cup \bar{\alpha})$-1-формул

$$\Gamma_{\Theta,\phi}(\bar{\alpha}, \bar{b})(x) := \{\phi(x, \bar{a}, \bar{\alpha}) | N \models \Theta(\bar{a}, \bar{\alpha}, \bar{b}), \bar{a} \in M\}.$$

Заметим, 2-совместность семейства выпуклых формул влечет его n-совместность для любого $n < \omega$, и следовательно, для $L^*(\bar{\alpha} \cup \bar{b})$-формулы
$K_{\Theta,\phi}(\bar{\alpha}, \bar{b}) := \forall \bar{y}_1 \forall \bar{y}_2 [(\bigwedge_i \bar{y}_i \in P \wedge \bigwedge_i \Theta(\bar{y}_i, \bar{\alpha}, \bar{b})) \to \exists x(\neg P^1(x) \wedge \bigwedge_i \phi(x, \bar{y}_i, \bar{\alpha}))]$
следующее верно:

$$\Gamma_{\Theta,\phi}(\bar{\alpha}, \bar{b})(x) \text{ совместно } \iff (M, N) \models K_{\Theta,\phi}(\bar{\alpha}, \bar{b}).$$

Рассмотрим следующие L^*-формулы.

$$\mathbf{B}(\Theta,\phi)(\bar{z},\bar{u}) := K_{\Theta,\phi}(\bar{z},\bar{u}) \rightarrow \exists x[\neg P^1(x) \wedge \forall \bar{y}((\Theta(\bar{y},\bar{z},\bar{u}) \wedge \bar{y} \in P) \rightarrow \phi(x,\bar{y},\bar{z}))],$$

$$\mathbf{Ax}(\Theta,\phi) = \forall \bar{z} \forall \bar{u}(\mathbf{B}(\Theta,\phi)(\bar{z},\bar{u})).$$

Заметим,что для произвольной модели M и ее произвольного элементарного $|M|^+$-насыщенного расширения N, все формулы вида $\mathbf{Ax}$ истинны на (M,N) потому, что истинность на паре (M,N) таких формул означает, что каждый иррациональный 1-тип над объединением M и конечного множества, имеющий РВС, реализуется в N и каждый не строго определимый, квазирациональный 1-тип над объединением M и конечного множества реализуется в N. Таким образом, $T_1^* := T_0^* \cup \{\mathbf{Ax}(\Theta,\phi) | \Theta(\bar{y},\bar{z}), \phi(x,\bar{y},\bar{z})$ – L-формулы, $\phi(x,\bar{y},\bar{z})$ выпукло по x $\}$ совместно.

Утверждение 3.2.1. *Для любой пары моделей* (M,M') *теории* T *верно:*

$$(M,M') \models T_1^* \Longleftrightarrow (M,M') \text{ является } CD-\omega\text{-насыщенной парой.}$$

Доказательство Утверждения 3.2.1. ($\Rightarrow$) Это следует из Утверждения 3.1.23, Замечания 3.1.24 и определения $\mathbf{Ax}$.

($\Leftarrow$) Пусть (M,M') есть CD–ω-насыщенная пара моделей, $\phi(x,\bar{y},\bar{z})$, $\Theta(\bar{y},\bar{z},\bar{u})$ – L-формулы, ϕ выпуклая по x, такие что

$$(M,M') \models \neg \mathbf{Ax}(\Theta,\phi).$$

Тогда для некоторого $\bar{\alpha} \in (M' \setminus M)$ и некоторого $\bar{b} \in M$, $\Gamma_{\Theta,\phi}(\bar{\alpha},\bar{b})(x)$ совместно и не реализуется в M'. Тогда не существует неизолированного $q \in S_1(M \cup \bar{\alpha})$ такого, что $\Gamma_{\Theta,\phi}(\bar{\alpha},\bar{b})(x) \subset q(x)$ и q не реализуется в M'. Обозначим

$$H^1_\phi(x,\bar{y},\bar{\alpha}) := x < \phi(N,\bar{y},\bar{\alpha}),\ H^2_\phi(x,\bar{y},\bar{\alpha}) := \phi(N,\bar{y},\bar{\alpha}) < x,\ \Theta(\bar{y}) := \Theta(\bar{y},\bar{\alpha},\bar{b}).$$

Мы рассмотрим три различных случая и во всех случаях покажем, что q реализуется в M', что будет противоречить нашему предположению.

(i) q иррационален. Тогда $LC(H^1_\phi,\Theta,q), RC(H^2_\phi,\Theta,q),\ \neg RC(H^1_\phi,\Theta,q)$, $\neg LC(H^2_\phi,\Theta,q)$. Это означает, что q имеет РВС и, по Замечанию 3.1.24, q реализуется в M'.

(ii) q квазирационален вправо. Тогда существует $L(M \cup \bar{\alpha})$-формула U_q, такая что $q(M')^+ = U_q(M')^+$ и $LC(H^1_\phi,\Theta,q)$. Это означает, что q не строго определим и по Замечанию 3.1.24, q реализуется в M'.

(iii) q квазирационален влево. Тогда существует $L(M \cup \bar{\alpha})$-формула U_q, такая что $q(M')^- = U_q(M')^-$ и $RC(H^1_\phi,\Theta,q)$. Это означает, что q не строго определим и, по Замечанию 3.1.24, q реализуется в M'.

$\Diamond$

Определение 3.2.2. Пусть M — модель слабо о-минимальной теории, $\bar{b} \in M$, $\Psi(x, \bar{b})$ — $L(\bar{b})$-1-формула, N — большое $|M|^+$-насыщенное элементарное расширение M. Будем говорить, что $\Psi(x, \bar{b})$ конечно слабо о-минимальна в M, если существует конечное число L-формул $\{\phi_i(x, \bar{y}_i), \phi'_i(x, \bar{y}_i) : i < n\}$ таких, что для любого квазирационального $q \in S_1(M), \Psi(x, \bar{b}) \in q$ существуют $i < n$ и $\bar{a} \in M$, такие что

$$q(N)^+ = \phi_i(N, \bar{a})^+ \text{ or } q(N)^- = \phi'_i(N, \bar{a})^-.$$

Будем говорить, что модель M конечно слабо о-минимальна, если формула $x = x$ конечно слабо о-минимальна в M.

Отметим, если M конечно слабо о-минимальна, тогда для любой модели N такой что $N \equiv M$, N является также конечно слабо о-минимальной. Таким образом, слабо о-минимальная теория T *конечно слабо о-минимальна*, если для некоторой $M \models T$, M конечно о-минимальна. Каждая о-минимальная теория является конечно о-минимальной из-за формул

$$\{\phi_1(x, y) = x < y,\ \phi_2(x, y) = y < x\}$$

Обозначим в языке L^* для любой конечно слабо о-минимальной теории T следующее предложение.

$$\mathbf{Ax}(\mathbf{DP}) = \forall x(\neg P^1(x) \to \bigvee_{i<n} \exists \bar{y}_i[\bar{y}_i \in P \wedge$$
$$\forall z([x < z < \phi_i(N, \bar{y}_i)^+ \to \neg P^1(z)] \vee [\phi'_i(N, \bar{y}_i)^- < z < x \to \neg P^1(z)])]).$$

$T^* := T_1^* \cup \{\mathbf{Ax}(\mathbf{DP})\}$. Из Утверждения 3.2.1 следует, что любая модель T^* является CD–ω-насыщенной парой и, по $\mathbf{Ax}(\mathbf{DP})$, 1-консервативной парой. Когда T о-минимальна, T^* есть теория введенная А. Пиллаем ([7], стр. 1406), и в этом случае H^1_ϕ, H^2_ϕ являются графиками монотонных функций f_i, g_j. А. Пиллай доказал, что для о-минимальной теории, имеющей плотный линейный порядок, при условии совместности T^* ее полнота.

Пусть T — теория с линейным порядком, N — достаточно большая насыщенная модель для T, $A \subset N$, $p, q \in S_1(A)$. Мы говорим [85], [86], тип p *не почти ортогонален* q, ($p \not\perp^a q$), если существует $L(A)$-формула $\phi(x, y)$, такая что $\forall \alpha \in p(N), \exists \beta_1, \beta_2 \in q(N)$, что верно $\beta_1 < \phi(N, \alpha) < \beta_2, \emptyset \neq \phi(N, \alpha) \subset q(N)$. В случае иррационального q, тогда это условие можно ослабить до "$\phi(N, \alpha) \subset q(N)$".

Мы будем говорить, что множество $A \subset N \models T$ слабо о-минимальной теории T *почти о-минимально*, если для любого $p, q \in S_1(A)$ имеем

$$q \not\perp^w p \Longleftrightarrow q \not\perp^a p.$$

Скажем, слабо о-минимальная теория *почти о-минимальна*, если любое ее множество почти о-минимально. Из Факта 3.1.1 следует, что любая о-минимальная теория почти о-минимальна.

Для того, чтобы доказать совпадение класса 1-консервативных пар моделей и класса консервативных пар для любой о-минимальной теории T, Д. Маркер и Ч. Стейнхорн [6] показали, что для любых $M \prec N \models T$, для любого ht-определимого над M кортежа $\bar{\alpha} \in N \setminus M$ и для любого типа $q \in S_1(M \cup \bar{\alpha})$ верно:

(*) Если q неопределим, то существует $M\bar{\alpha}$-2-формула $H(x, y)$ такая, что $C(H(x, y), \Theta(y), q(x))$.

Мы будем говорить, что полная теория T есть *MS-теория*, если T удовлетворяет (*) для любых $M \prec N \models T$.

Лемма 3.2.3. *Любая (M, M') 1-консервативная пара почти о-минимальной MS-теории является консервативной парой.*

Доказательство Леммы 3.2.3. Пусть N — достаточно большая насыщенная модель теории T, такая что $M \prec M' \prec N$. Предположим, существует неопределимый тип, реализуемый в M'. Выберем такой тип с минимальной длиной кортежа. Рассмотрим $\bar{\alpha}, \beta \in M' \setminus M$, такие что $q := tp(\beta|M \cup \bar{\alpha})$ иррационален, $tp(\bar{\alpha}|M)$ определим, а $tp(\beta\bar{\alpha}|M)$ неопределим. Тогда q неопределим и следовательно, по Теореме 2.3.4 существуют $L(M \cup \bar{\alpha})$-формулы $H(x, \bar{y}, \bar{\alpha})$ и $\Theta(\bar{y}, \bar{\alpha})$, такие что $C(H, \Theta, q)$. Тогда в силу того, что T является MS-теорией, существуют $L(M \cup \bar{\alpha})$-2-формулы $H_1(x, y, \bar{\alpha})$ и $\Theta_1(y, \bar{\alpha})$, такие что $C(H_1, \Theta_1, q)$. Используя Факт 3.1.6, мы можем полагать, что $\Theta_1(y)$ есть M-формула. Далее мы будем полагать, что $\Theta = \Theta_1,\ H = H_1$.

Для любой выпуклой формулы $\phi(x, \bar{\alpha}) \in q$ определим $(M \cup \bar{\alpha})$-1-формулу

$$K_\phi(y, \bar{\alpha}) := \exists x_1 \exists x_2 (\Theta(y) \wedge H(x_1, y, \bar{\alpha}) \wedge \neg H(x_2, y, \bar{\alpha}) \wedge \phi(x_1, \bar{\alpha}) \wedge \phi(x_2, \bar{\alpha})).$$

Тогда $C(H, K_\phi, q)$. Рассмотрим следующее множество $(M \cup \bar{\alpha})$-1-формул

$$\Gamma(y, \bar{\alpha}) := \{K_\phi(y) | \phi \in q, \phi \text{ выпуклая формула }\}.$$

Так как для конечного множества формул $\phi_i \in q$ имеем $\wedge_i \phi_i \in q$ и

$$N \models \forall y (K_{\wedge_i \phi_i}(y) \rightarrow \wedge_i K_{\phi_i}(y)),$$

$\Gamma(y, \bar{\alpha})$ — совместное множество формул так же как и $\Gamma_0(y, \bar{\alpha})$, его замыкание относительно конечных конъюнкций. $\Gamma_0(y, \bar{\alpha})$ удовлетворяет следующему условию:

Для всех $\Psi \in \Gamma_0(y, \bar{\alpha})$ верно:

$$(*)\ \exists b \in M,\ N \models \Psi(b).$$

Из определения $\Gamma(y, \bar{\alpha})$ следует, что для любого $\gamma \in \Gamma_0(N, \bar{\alpha})$, формульное множество $H(N, \gamma, \bar{\alpha})$ делит $q(N)$. Тогда, так как $\Gamma_0(y, \bar{\alpha})$ совместно и замкнуто относительно конечных конъюнкций, существует конечно выполнимый в M (по $(*)$, [90], Fact 46) 1-тип $r \in S_1(M \cup \bar{\alpha}), \Gamma_0 \subset r$, такой что $r \not\perp^w q$. Из Факта 2.2.8(iii) следует, что r неопределим. Пусть $\gamma \in r(N)$ произвольная реализация r. Обозначим $r_0 := tp(\gamma|M)$. Покажем, что r_0 иррационален. Предположим, r_0 квазирационален, скажем, вправо. Так как r конечно выполним в M , для любой $L(M \cup \bar{\alpha})$-формулы $\varphi(x)$, такой что $\varphi(N) \subset r_0(N)$ или, что эквивалентно, $\varphi(N) \cap M = \emptyset$, имеем $\gamma \notin \varphi(N)$ или, что эквивалентно, $\varphi(x) \notin r$. Рассмотрим, $QV_{r_0}(\bar{\alpha}) := \{\delta \in r_0(N) |$ существует $L(M \cup \bar{\alpha})$-формула $\varphi(x)$ такая, что $\varphi(N) \subset r_0(N)\}$. Отметим, если $\varphi(N) \subset r_0(N)$, то $\psi(N) \subset r_0(N)$ для $\psi(x) := \varphi(N)^- < x < U_{r_0}(N)^+$.

Таким образом, $QV_{r_0}(\bar{\alpha})^+ = r_0(N)^+$, и для нашего γ имеем $\gamma < QV_{r_0}(\bar{\alpha})$. Это означает $LC(y < x, y = y, r(x))$ и $\neg RC(y < x, y = y, r(x))$. Тогда по Предложению 2.2.7, r определим. Противоречие. Таким образом, r_0 иррационален и по Факту 1.2.16(i) неопределим. Так как $\bar{\alpha}$ является ht-определимым над M, по Факту 2.2.8(ii) $\bar{\alpha} \perp^w r_0$. Таким образом, имеем $r(N) = r_0(N)$.

Вспомним, $q \not\perp^w r$ и T почти о-минимальная теория. Тогда $q \not\perp^a r_0$, и, следовательно, существует $(M \cup \bar{\alpha}\beta)$-формула $H(x)$, такая что $\emptyset \neq H(N) \subset r(N) = r_0(N)$.

Так как $M' \prec N, \bar{\alpha}, \beta \in M'$, $\exists \gamma' \in H(M')$. Это противоречит тому, что (M, M') 1-консервативная пара моделей, потому что мы получили, что $tp(\gamma'|M) = r_0$ неопределим. $\Diamond$

Теорема 3.2.4. *Пусть T конечно слабо о-минимальная, почти о-минимальная MS-теория. Тогда следующее верно:*

(i) T^* — совместное множество формул.

(ii) Пусть (M, N) пара моделей T.

Тогда $(M, N) \models T^*$, если и только, если (M, N) является CD–ω-насыщенной консервативной парой.

Доказательство Теоремы 3.2.4. (i) Из Утверждения 3.2.1 следует, что каждая CD–ω-насыщенная консервативная пара является моделью для T^*. Существование CD–ω-насыщенной консервативной пары следует из Следствия 3.1.28(ii).

(ii) Пусть (M, N) есть модель для T^*. Тогда по **Ax(DP)**, так как T конечно слабо о-минимальная теория, (M, N) является 1-консервативной парой. По Лемме 3.2.3, (M, N) — консервативная пара. Тогда из Утверждения 3.2.1 следует, что (M, N) есть $(CD) - \omega$-насыщенная консервативная пара. $\Diamond$

Вспомним, что обогащение модели слабо о-минимальной теории выпуклым одноместным предикатом является моделью слабо о-минимальной теории (Теорема3.3.30). В Теореме 3.2.5 мы представляем слабо о-минимальные теории вышеупомянутых подклассов, некоторые из них будут получены как обогащения выпуклыми предикатами, и мы будем использовать их слабо о-минимальность без специального упоминания. Фактически, мы будем использовать ее слабую версию, теорему об обогащении о-минимальной модели выпуклым одноместным предикатом [84], [9].

Теорема 3.2.5. *(i) Пусть $M_1 := \langle Q; =, < \rangle$ — счетная модель теории плотного порядка без концевых элементов, $M_1^* := \langle Q; =, <, P^1 \rangle$ произвольная слабо о-минимальное обогащение выпуклым одноместным предикатом P^1. Тогда M_1^* имеет почти о-минимальную, конечно слабо о-минимальную теорию.*

(ii) Пусть M_2 — абелева делимая упорядоченная группа с двумя архимедовыми классами и M_2^* обогащение M_2 одноместным выпуклым предикатом, такое что множество всех реализаций этого предиката есть малый архимедов класс.

Тогда M_2^* конечно слабо о-минимальная модель.

(iii) Пусть M_1 модель из (i), M_3 произвольная о-минимальная модель в языке L. Положим $M_3^* := (M_3 \times M_1; L^*)$, $L^* := L \cup \{\epsilon^2\}$ так, что отношение порядка «" $\in L^*$ есть отношение лексикографического порядка на M_3^* и другие предикаты из L определяются следующим способом:

Для любых $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n) \in M_3 \times M_1$ следующее верно:

$[M_3^* \models \epsilon^2((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \iff M_3 \models a_1 = a_2]$ *и для любого* $P^n \in L \setminus \{<\}$

$$[M_3^* \models P^n((a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)) \iff M_3 \models P^n(a_1, \dots, a_n)].$$

Тогда M_3^* конечно слабо о-минимальна, почти о-минимальна.

(iv) Пусть $Q \subset R$, R множество всех вещественных чисел, Q множество всех рациональных чисел, $M_4 := (Q; =, <, +) \prec R := (R; =, <, +)$ делимые архимедовы группы, $\gamma := \sqrt{2} \in R$, $M_4^* := (Q; =, <, +, P^1)$ такие, что

$$\forall a \in Q[M_4^* \models P^1(a) \iff R \models a < \sqrt{2}].$$

Тогда M_4^* не почти о-минимальна и не конечно слабо о-минимальна.

Доказательство Теоремы 3.2.5. (i) Так как теория M_1^* допускает элиминацию кванторов, его теория конечно слабо о-минимальна, и поэтому два различных 1-типа над любым множеством модели элементарной теории M_1^* ортогональны. Эта теория почти о-минимальна.

(ii) Заметим, что малый архимедов класс определяет формульную подгруппу в M_2^*, и каждый класс смежности по этой подгруппе есть выпуклое множество без максимального и минимального элементов. Каждый квазирациональный нерациональный 1-тип определяется $L^*(M)$-1-формулой. Граница (левая или правая) любой $L^*(M)$-1-формулы — либо элемент M, либо граница (левая или правая, внутренняя или внешняя) таких классов. Это означает, что эта модель конечно слабо о-минимальна.

(iii) Фиксируем конечное множество параметров $\bar{\alpha} := \langle \alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{i,j} \ldots \rangle$ таких, что $\alpha_{i,j} < \alpha_{i,j+1} < \alpha_{i+1,1}$ и $M_3^* \models \epsilon(\alpha_{i,j}, \alpha_{k,s})$, если и только если $i = k$. Используя автоморфизмы M_3^*, мы можем понять, что для любого $\alpha_{i,1}$ существует только конечное множество различных $L(\bar{\alpha})$-формул в этом ϵ-классе, то есть для любой $L^*(\bar{\alpha})$-1-формулы $\phi(x, \bar{\alpha})$, $\phi(x, \bar{\alpha}) \wedge \epsilon(x, \alpha_{i,1})$ эквивалентна формуле следующего вида

$$(1)(\epsilon(x,\alpha_{i,1}) \wedge x < \alpha_{i,s}) \vee \bigvee_{n,j} (\alpha_{i,n} < x < \alpha_{i,j}) \vee \bigvee_{k} (x = \alpha_{i,k}) \vee (\epsilon(x,\alpha_{i,1}) \wedge \alpha_{i,r} < x).$$

Утверждение 3.2.6. *Пусть $\{\beta_{i,0}, \beta_{i,1}, \ldots\}$ — конечное множество параметров, такое что $M_3^* \models \epsilon(\alpha_{i,1}, \beta_{i,j}) \wedge (\beta_{i,0} < \alpha_{i,1} < \beta_{i,1} < \cdots < \alpha_{i,j} < \beta_{i,j} < \ldots)$. Тогда для любой $L^*(\alpha)$-формулы $H(y, \bar{z}, \bar{\alpha})$ верно:*
(i) $\exists y(\epsilon(y, \alpha_{i,1}) \wedge H(y, \bar{z}, \bar{\alpha})) \equiv \bigvee_j (H(\alpha_{i,j}, \bar{z}, \bar{\alpha}) \vee H(\beta_{i,j}, \bar{z}, \bar{\alpha})) \vee H(\beta_{i,0}, \bar{z}, \bar{\alpha})$
(ii) $\forall y(\epsilon(y, \alpha_{i,1}) \to H(y, \bar{z}, \bar{\alpha})) \equiv \bigwedge_j (H(\alpha_{i,j}, \bar{z}, \bar{\alpha}) \wedge H(\beta_{i,j}, \bar{z}, \bar{\alpha})) \wedge H(\beta_{i,0}, \bar{z}, \bar{\alpha})$

Доказательство Утверждения 3.2.6. Заметим, что по (1), для любого $\gamma \in M_3^*$, если $\alpha_{i,j} < \gamma < \alpha_{i,j+1}$, то $tp(\gamma|\bar{\alpha}) = tp(\beta_{i,j}|\bar{\alpha})$. $\diamondsuit$

Для любой $L^*(\alpha)$-формулы $H(y, \bar{z}, \bar{\alpha})$ обозначим
$\forall^b y H(y, \bar{z}, \bar{\alpha}) := \forall y[\bigwedge_i \neg\epsilon(y, \alpha_{i,1}) \to H(y, \bar{z}, \bar{\alpha})]$;
$\exists^b y H(y, \bar{z}, \bar{\alpha}) := \exists y[\bigwedge_i \neg\epsilon(y, \alpha_{i,1}) \wedge H(y, \bar{z}, \bar{\alpha})]$.

Тогда, из-за Утверждения 3.2.6 и потому, что $y = y \equiv \bigvee_i \epsilon(y, \alpha_{i,1}) \vee \bigwedge_i \neg\epsilon(y, \alpha_{i,1})$, для любой $L^*(\bar{\alpha})$-формулы $H(y, \bar{z}, \bar{\alpha})$ имеем

$$(2)\ \forall y H(y, \bar{z}, \bar{\alpha}) \equiv \bigwedge_i \bigwedge_j (H(\beta_{i,j}, \bar{z}, \bar{\alpha}) \wedge H(\alpha_{i,j}, \bar{z}, \bar{\alpha})) \wedge \forall^b y H(y, \bar{z}, \bar{\alpha});$$

$$(3)\ \exists y H(y, \bar{z}, \bar{\alpha}) \equiv \bigvee_i \bigvee_j (H(\beta_{i,j}, \bar{z}, \bar{\alpha}) \vee H(\alpha_{i,j}, \bar{z}, \bar{\alpha})) \vee \exists^b y H(y, \bar{z}, \bar{\alpha}).$$

Утверждение 3.2.7. *Для любой $L(\bar{\alpha})$-формулы $H(y, \bar{z}, \bar{\alpha})$ существуют $L(\bar{\alpha})$-формулы $H_1(y, \bar{z}, \bar{\alpha}), H_2(y, \bar{z}, \bar{\alpha})$, такие что в записи формул H_1, H_2 не присутствуют соответственно формулы вида $\epsilon(y, \alpha_{i,j})$,*
$\forall^b y H(y, \bar{z}, \bar{\alpha}) \equiv \forall^b y H_1(y, \bar{z}, \bar{\alpha})$ *and* $\exists^b y H(y, \bar{z}, \bar{\alpha}) \equiv \exists^b y H_2(y, \bar{z}, \bar{\alpha})$.

Доказательство Утверждения 3.2.7. Для получения H_1 необходимо преобразовать H в пренексную конъюнктивную нормальную форму H_1', а для получения H_2 необходимо преобразовать H в пренексную дизъюнктивную нормальную форму H_2'. Затем преобразуем эти формулы внесением $\bigvee_i \epsilon(y, \alpha_{i,1})$ и $\bigwedge_i \neg\epsilon(y, \alpha_{i,1})$ в бескванторные части формул H_1' and H_2', соответственно. Тогда после обычных элементарных преобразований формул мы получим результат. Мы будем называть формулы $\forall^b y H_1(y, \bar{z}, \bar{\alpha}), \exists^b y H_2(y, \bar{z}, \bar{\alpha})$ *ограниченными по* y и их кванторы *ограниченными кванторами.* $\diamondsuit$

Пусть $\phi(x, \bar{\alpha})$ произвольная $L^*(\bar{\alpha})$-1-формула. Имеем
$\phi(x, \bar{\alpha}) \equiv \bigvee_i(\phi(x, \bar{\alpha}) \wedge \epsilon(x, \alpha_{i,1})) \vee (\phi(x, \bar{\alpha}) \wedge \bigwedge_i \neg\epsilon(x, \alpha_{i,1})$. По (1), верно:

(4) $\bigvee_i(\phi(x, \bar{\alpha}) \wedge \epsilon(x, \bar{\alpha}_{i,1}))$ эквивалентна дизъюнкции выпуклых формул, и максимальное число выпуклых формул в такой дизъюнкции прямо зависит от $l(\bar{\alpha})$. Пусть $\beta \in M_3^*$ такая, что $M_3^* \models \bigwedge_i \neg\epsilon(\alpha_{i,1}, \beta)$. Тогда для любого $\gamma \in M_3^*$, такого что $M_3^* \models \epsilon(\gamma, \beta)$ существует $\bar{\alpha}$-автоморфизм f модели M_3^*, такой что $f(\gamma) = \beta, f(\alpha_i) = \alpha_i$. Это означает, что $tp(\gamma|\bar{\alpha}) = tp(\beta|\bar{\alpha})$ и множество реализаций формулы $\phi(x, \bar{\alpha}) \wedge \bigwedge_i \neg\epsilon(x, \alpha_{i,1})$ есть объединение некоторых ϵ-классов. Применяя (2), (3) и Утверждение 3.2.7 к пренексной форме $\phi(x, \bar{\alpha}) \wedge \bigwedge_i \neg\epsilon(x, \alpha_{i,1})$, получаем $L^*(\bar{\alpha}\bar{\beta})$-формулу $H(x, \bar{\alpha}\bar{\beta})$, имеющую только ограниченные кванторы (*ограниченная формула*). Обозначим $\bar{\alpha}' := \langle \alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \ldots, \alpha_{i,1}, \ldots \rangle$. Можно выбирать ограниченную $L(\bar{\alpha}')$-формулу $H'(x, \bar{\alpha}')$ так, чтобы $H(x, \bar{\alpha}\bar{\beta}) \equiv H'(x, \bar{\alpha}')$. Для этого мы удалим из каждой конъюнкции дизъюнктивной нормальной формы H формулы вида $\alpha_{i,j} < \alpha_{i,j+m}(\beta_{i,j+m})$ или удалим конечную конъюнкцию в случае, когда одна из следующих формул $\alpha_{i,j} = \alpha_{i,j+m}(\beta_{i,s}), \alpha_{i,j+m} < \alpha_{i,j}(\beta_{i,j})$ представлена как член этой конъюнкции. Тогда, принимая во внимание, что каждая $P^n \in L \setminus \{<\}$ устойчива на ϵ-классах, удалим все параметры за исключением параметров вида $\alpha_{i,1}$. Если мы заменим в написании формулы $H'(x, \bar{\alpha}')$ параметры $\alpha_{i,1} = (a_{i,1}, b_{i,1})$ на $a_{i,1}$, ограниченные кванторы на стандартные и опустим формулы $\bigwedge_i \neg\epsilon(x, \alpha_{i,1})$, мы получим $L(\bar{a}')$-формулу $K_\phi(x, \bar{a}')$ такую, что

$$\forall \alpha = (a, b) \in M_3^*[M_3^* \models \phi(\alpha, \bar{\alpha}) \wedge \bigwedge_i \neg\epsilon(\alpha, \alpha_{i,1}) \Longleftrightarrow M_3 \models K_\phi(a, \bar{a}')].$$

Тогда $\phi(x, \bar{\alpha}) \wedge \bigwedge_i \neg\epsilon(x, \alpha_{i,1})$ является конечной дизъюнкцией выпуклых формул, и число этих выпуклых формул равно числу выпуклых формул формулы K_ϕ. Это число зависит только от вида L-формулы $K_\phi(x, \bar{z})$ в о-минимальной теории. Это означает, по (4) и Факту 1.2.1, что M_3^* есть модель слабо о-минимальной теории.

Для любого $\alpha \in M_3^*$, $\epsilon(x, \alpha)$ является конечно слабо о-минимальной, и любой неизолированный 1-тип над M_3^*, содержащий формулу $\epsilon(x, \alpha)$ для некоторого $\alpha \in M_3^*$, слабо ортогонален любому другому 1-типу над M_3^*. Любой квазирациональный тип $p \in S_1(M_3^*)$ такой, что $\{\neg\epsilon(x,\alpha) | \alpha \in M_3^*\} \subset p$ определяет внешнею границу (левую или правую) ϵ-класса. Это означает конечно слабую о-минимальность M_3^*.

Любой (иррациональный) тип $p \in S_1(M_3^*)$, такой что $\{\neg\epsilon(x,\alpha) | \alpha \in M_3^*\} \subset p$ определяется соответствующим 1-типом над о-минимальной моделью $p_0 \in S_1(M_3)$, и если p не слабо ортогонален некоторому $r \in S_1(M_3^*)$, то по Факту 3.3.15, существует монотонная $L(M_3^*)$-2-формула $K(x,y)$, такая что для любого $\gamma \in p(N)(M_3^* \prec N)$, $K(N,\gamma)$ расщепляет $r(N)$. Так как любой 1-тип, содержащий $\epsilon(x,\gamma)$, слабо ортогонален всем другим 1-типам, $K(x,y)$ удовлетворяет следующему условию:

$$(*) M_3^* \models \forall xy[K(x,y) \to \forall x'y'((\epsilon(x,x') \to K(x,y)) \wedge (\epsilon(y,y') \to K(x,y')))].$$

Можно показать, что в качестве формулы $K(x,y)$, обеспечивающей неортогональность p' и r', можно выбрать $L(M_3)$-формульную функцию (мы оставляем это читателю). Это означает, что p и r не почти ортогональны и, следовательно, теория модели M_3^* почти о-минимальна.

(iv) Обозначим $L := \{=,<,+\}$, $L^* := L \cup \{P^1\}$. Индукцией по построению L^*-формул мы докажем, как в [84], [90], [2], что для любой $L^*(M_4)$–n-формулы $\phi(\bar{x})$ существует $L(M_4)$-$n+1$-формула $K_\phi(\bar{x},z)$ такая, что верно

$$(**)_\phi \ \forall \bar{a} \in M_4[M_4^* \models \phi(\bar{a}) \Longleftrightarrow R \models K_\phi(\bar{a},\gamma)].$$

Покажем это. Базисный шаг индукции. Для любой $L(M_4)-n$-формулы $\phi(\bar{x})$, положим $K_\phi(\bar{x}) := \phi(\bar{x})$. Для $P^1(x)$ положим $K_P(x,z) := x < z$.

Проверка индукции по построению формулы сводится к рассмотрению случая введения квантора. Таким образом, предположим $\phi(y,\bar{x})$ есть $L^*(M_4^*)$-формула, такая что существует $L(M_4)$-формула $K_\phi(y,\bar{x},z)$, такая что

$$\forall \bar{a}, b \in M_4[M_4^* \models \phi(b,\bar{a}) \Longleftrightarrow R \models K_\phi(b,\bar{a},\gamma)].$$

Обозначим $H_\phi(\bar{x},z,z_1,z_2) := \exists y[z \in (z_1,z_2) \wedge \phi(y,\bar{x},z) \wedge \forall t(t \in (z_1,z_2) \to \phi(y,\bar{x},t))]$.

$$K_{\exists y\phi(y,\bar{x})}(\bar{x},z) := \exists z_1 \exists z_2 H_\phi(\bar{x},z,z_1,z_2).$$

2-формула $H(x,y)$ называется *выпуклой вправо от* y [85], [86], если

$$\models \forall y \forall x[H(x,y) \to y < x \wedge \forall x'(y < x' < x \to H(x',y))]$$

и *выпуклой влево от* y, если

$$\models \forall y \forall x[H(x,y) \to y < x \wedge \forall x'(y < x' < x \to H(x',y))].$$

В частности, для любой формульной функции f, такой что $\models \forall y(f(y) > y)$, 2-формула $H_f(x, y) := y < x < f(y)$ выпукла вправо от y. Вспомним, ([69], Lemma 2.7, Proposition 2.8), что каждый иррациональный 1-тип над упорядоченной делимой архимедовой группой M одиночный (uniquely realizable) и для любой реализации $\gamma \in p(N)$ $(M \prec N)$ иррационального одиночного 1-типа $p \in S_1(M)$, для любой вправо от y, $L(M)$-2-формулы $H(x, y)$, если $N \models \exists x H(x, \gamma)$, то

$$(* * *)\ H(N, \gamma) \cap M \neq \emptyset.$$

Последнее верно и для выпуклой влево 2-формулы.

Покажем, что $\exists y \phi(y, \bar{x})$ и $K_{\exists y \phi(y,\bar{x})}(\bar{x}, z)$ удовлетворяют $(**)$. Пусть $\bar{a} \in M_4$. Предположим $R \models K_{\exists y \phi(y,\bar{x})}(\bar{a}, \gamma)$. Тогда, так как $\exists z_1 H_\phi(\bar{a}, z, z_1, z_2)$ выпуклая вправо от z, по $(* * *)$ существует $c_2 \in M_4$, такой что

$$R \models \exists z_1 H_\phi(\bar{a}, \gamma, z_1, c_2).$$

Тогда, так как $H_\phi(\bar{a}, z, z_1, c_2)$ выпукла влево от z, по $(* * *)$ существует $c_1 \in M_4$, такой что $R \models H_\phi(\bar{a}, \gamma, c_1, c_2)$ и, следовательно, $R \models \exists y \forall t[t \in (c_1, c_2) \to \phi(y, \bar{a}, t)]$. Так как $M_4 \prec R$, $M_4 \models \exists y \forall t[(t \in (c_1, c_2) \to \phi(y, \bar{a}, t)]$. Таким образом, существует $b \in M_4$, $M_4 \models \forall t(t \in (c_1, c_2) \to \phi(b, \bar{a}, t)$. Тогда, так как $M_4 \prec R$, $R \models \forall t(t \in (c_1, c_2) \to \phi(b, \bar{a}, t)$. Таким образом, так как $\gamma \in (c_1, c_2)$ имеем $R \models \phi(b, \bar{a}, \gamma)$.

Теперь предположим, $\exists b \in M_4, R \models \phi(b, \bar{a}, \gamma)$. Тогда $\phi(b, \bar{a}, z) \in tp(\gamma | M_4)$. Отсюда, так как этот 1-тип иррационален, по Факту 1.2.16 или [6], Lemma 2.3, существуют $c_1, c_2 \in M_4$, такие что

$$M_4 \models \forall t(t \in (c_1, c_2) \to \phi(b, \bar{a}, t)).$$

Это означает, что $R \models K_{\exists y \phi(y,\bar{x},z)}(\bar{a}, \gamma)$.

Обозначим $q := tp(\gamma | M_4)$. Тогда по определению M_4^* существуют расширения q к 1-типам над M_4^* в языке L^*, $q' := q \cup \{P^1(x)\}$, $q'' := q \cup \{\neg P^1(x)\}$. Для любого иррационального 1-типа $p \in S_1(M_4)$ обозначим $C_p := \{c \in M_4 | c < x \in p\}, D_p := \{d \in M_4 | x < d\}$. Из доказательства Утверждения 10 из [?] и $(**)$, следует, что для любого $p \in S_1(M_4)$, C_p формулен в M_4^* (и, следовательно, D_p формулен в M_4^*), если и только, если $p \not\perp^a q$. Пусть $\beta \in R$ неалгебраическое вещественное число, $\alpha := \sqrt{2} + \beta$, $p := tp(\beta | M_4)$, $r := tp(\alpha | M_4)$. Тогда $p \perp^w q$, $r \perp^w q$, $p \perp^w$ и, следовательно, $p' := tp^*(\beta | M_4^*)$, $r' := tp^*(\alpha | M_4^*)$ являются иррациональными 1-типами над M_4^* (здесь, tp^* означает тип в языке L^*). Заметим, что $p' \not\perp^w r'$. В самом деле, $(L^*(M_4^*) \cup \{\beta\})$-формула $H(x, \beta) := \exists y(P^1(y) \wedge x = \beta + y)$ расщепляет $r'(N^*)$ $(M_4^* \prec N^*$, N^* достаточно большое насыщенное элементарное расширение $M_4^*)$. Покажем, что $p' \perp^a r'$. Предположим, существует $L^*(M_4^* \cup \{\beta\})$-формула $S(x, \beta)$, такая что $\emptyset \neq S(N^*, \beta) \subset r'(N^*)$. Тогда для $L^*(M \cup \{\beta\})$-1-формулы $\Theta(y, \beta) := \exists x(S(x, \beta) \wedge y + \beta = x)$ имеем $\emptyset \neq \Theta(N^*, \beta) \subset q(N) = q'(N^*) \cup q''(N^*)$. Это означает, что $p' \not\perp^w q'$ или $p' \not\perp^w q''$. Противоречие, так как p' иррационален, а q', q'' квазирациональны (Факт 2.1.21). Таким образом, M_4^* не почти о-минимальна.

Покажем, что M_4 не конечно слабо о-минимальная. Рассмотрим семейство иррациональных типов над M_4, $\{q_n := tp(n\beta|M_4)|0 < n < \omega\}$. Для любого $0 < n < \omega$, $q_n \not\perp^a q$ и, следовательно, существуют два квазирациональных 1-типа q_n', q_n'' в языке L^* расширяющие q_n. В самом деле, q_n', q_n'' определяются L^*-1-формулами $U_n(x) := \exists y(P^1(y) \wedge x = y + \cdots + y)$. Так как $\forall a \in M_4, n\beta \neq \beta + a$, индукцией по построению L^*-формул получаем, что семейство $U_n(x)$ и отрицаний $U_n, n < \omega$ не равномерно представлено. $\diamondsuit$

Сделаем одно наблюдение.

Пусть $A \subset B$. Скажем, что B является *антиконсервативным расширением* A, если $\forall \bar{\alpha} \in B \backslash A$, для любого определимого 1-типа $r \in S_1(A)$, $\bar{\alpha} \perp^w r$. Пару моделей (M, N) назовем *антиконсервативной парой*, если N есть антиконсервативное расширение. Из Факта 3.1.1 следует, что в о-минимальной теории, пара (M, N) является антиконсервативной парой, если и только если для любого кортежа $\bar{\alpha} \in N \setminus M$, $tp(\bar{\alpha}|M)$ неопределим.

Пусть (M, N) — пара моделей о-минимальной теории и N' промежуточная модель ($M \prec N' \prec N$), такая что (N', N) есть консервативная пара, а (M, N') является антиконсервативной парой. Байсалов-Пуаза показали для любой пары моделей о-минимальной теории существование промежуточной модели N' с упомянутыми свойствами. Они спрашивали ([8], страница 574): Верно ли , что такая N' единственна с точностью до M-изоморфизма?

Замечание 3.2.8. *Существуют четыре модели M, N_1, N_2, N о-минимальной теории, такие что $M \prec N_1 \prec N$; $M \prec N_2 \prec N$; (N_1, N), (N_2, N) — консервативные пары, пары $(M, N_1), (M, N_2)$ — антиконсервативные пары и N_1, N_2 не являются M-изоморфными ($N_1 \not\cong_M N_2$).*

Доказательство Замечания 3.2.8. Пусть $M = (Q; =, <)$, $N_1 = (R; =, <)$, где Q есть множество всех рациональных чисел, R есть множество всех вещественных чисел. Пусть $N = (N; =, <)$ есть $|R|^+$-насыщенное элементарное расширение N_1. Возьмем произвольное нерациональное число $\delta \in R$. Элемент δ определяет иррациональное сечение (C_δ, D_δ) в O и иррациональный 1-тип p_δ над Q. Положим $N_2 := (R \cup p_\delta(N); =, <)$. Мы не будем различать модель и ее основное множество, то есть для нас $M = Q, N_1 = R, N_2 = R \cup p_\delta(N)$.

Теория этих моделей $\{M, N_1, N_2, N\}$ есть хорошо известная ω-категоричная, о-минимальная теория, которая допускает элиминацию кванторов.

Так как R не имеет иррационального сечения, каждый неизолированный 1-тип над R рационален и следовательно, $\forall\alpha \in N \setminus R$, α принадлежит множеству реализаций некоторого рационального сечения в R. Это же верно для любого элемента из $N \setminus (R \cup p_\delta(N))$. Это означает, согласно Теореме Маркера-Стейнхорна (или прямо следует из природы этих моделей), что (N_1, N), (N_2, N) консервативные пары. Заметим, что $\forall\beta \in (R \setminus Q) \cup p_\delta(N)$, $tp(\beta|Q)$ неопределим, так как он определяется иррациональным сечением в Q.

Возьмем $\bar{\beta} := \langle\beta_1, \ldots, \beta_n\rangle$, произвольный кортеж элементов из $N_1 \setminus Q$ или из $N_2 \setminus Q$. Тогда, так как в данной теории алгебраическое замыкание любого множества C равно C, $acl(Q \cup \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}) = Q \cup \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$. Таким образом, в силу Факта 3.1.1, для любого $r \in S_1(Q)$ верно:

$$\bar{\beta} \not\perp^w r \Longleftrightarrow \exists j \in \{1, \ldots, n\}, \beta_j \in r(N).$$

Предположим $r \in S_1(Q)$ определим и, следовательно, в силу Факта 1.2.16 и о-минимальности N, r рационален. Так как для любого $j \in \{1, \ldots, n\}$, $tp(\beta_j|Q)$ иррационален, $\bar{\beta} \perp^w r$. Это означает, что $(M, N_i), i = 1, 2$ антиконсервативные пары. Из определения моделей N_1 и N_2 следует, что они не являются M-изоморфными. $\diamondsuit$

3.3 Обогащение моделей слабо о-минимальных теорий

3.3.1 Подход Макфердсона-Маркера-Стейнхорна к слабо о-минимальности обогащения одноместным предикатом

Теорема 3.3.1. *Пусть M модель слабо о-минимальной теории, M^+ есть расширение модели M по семейству унарных предикатов такое что множество всех реализаций каждого предиката есть конечное число выпуклых подмножеств и M' элементарное расширение M такое что M' – $|M|^+$-насыщенная. Предположим что для любого $\forall\bar{\alpha} \in M' \setminus M$, $(*)\exists\bar{\gamma} \in M' \setminus M$ такое что для любой $(M \cup \bar{\alpha})$-определимой формулы $\phi(x, \bar{z}, \bar{\alpha})$ в L существует $(M' \cup \bar{\alpha}\bar{\cup}\bar{\gamma})$-определимая формула $(**)$ $K_\Phi(\bar{z}, \bar{\alpha}, \bar{\gamma})$ в L что следующее верно:*

$$(***)\ \forall\bar{a} \in M[\exists b \in M, M' \models \Phi(b, \bar{a}, \bar{\alpha}) \Longleftrightarrow M' \models K_\Phi(\bar{a}, \bar{\alpha}, \bar{\gamma})].$$

Тогда M^+ модель слабо о-минимальной теории.

Доказательство Теоремы 3.3.1 Пусть $M^+ = \langle M; Q^1_\lambda\rangle_{\lambda\in S}$, где $Q^1_\lambda(M')$ есть конечное обьедидение выпуклых $\neg Q^1_\lambda(M')$-отделимых множеств. Обозначим

$L^+ := L \cup \{Q^1_\lambda | \lambda \in S\}$. Для любого $\lambda \in S$ пусть $n_\lambda < \omega$ число выпуклых $\neg Q^1_\lambda(M')$-отделимых множеств и $(C_{\lambda,i}, D_{\lambda,i})$, есть иррациональное сечение $M(i < 2n_\lambda)$, которое определяется по $Q^1_\lambda(M')$. Заметим что любое выпуклое множество определяет два иррациональных сечения. Продположим что любой новый унарный предикат Q^1_λ определяет точно $2n_\lambda$ иррациональное сечение. Для любого $\lambda \in S, \forall i < 2n_\lambda$ найдем и фиксируем $\beta_{\lambda,i} \in (C_{\lambda,i}, D_{\lambda,i})$. Пусть
$B_1 := \{\beta \in M' \setminus M | \exists \lambda \in S, \exists i < 2n_\lambda, \beta = \beta_{\lambda,i} \in (C_{\lambda,i}, D_{\lambda,i})\}$,
$Z(B_1) := \{\mu \in M' \setminus M | \exists \bar{\alpha} \in B_1, \exists \bar{\gamma} \in M' \setminus M$, такой что $\mu \in \bar{\alpha} \cup \bar{\gamma}$, где $\bar{\gamma} \in M' \setminus M$ s chosen on $\bar{\alpha}$ by (*) $\}$. Обозначим $B_2 := Z(B_1)$,
$B_{m+1} := Z(B_m) = \{\mu \in M' \setminus M | \exists \bar{\alpha} \in B_m, \exists \bar{\gamma} \in M' \setminus M$, such that
$\mu \in \bar{\alpha} \cup \bar{\gamma}$, где $\bar{\gamma} \in M' \setminus M$ is chosen on $\bar{\alpha}$ by (*) $\}$. Let $B := \cup_{m<\omega} Z(B_m)$.

Утверждение 3.3.2. *Для любой без кванторной формулы $\theta(\bar{z})$ языка L^+ существует B-определимая формула $\Phi(\theta)(\bar{z}, \bar{\alpha})$ языка L такая что*

$$\forall \bar{b} \in M[M^+ \models \theta(\bar{b}) \Leftrightarrow M' \models \Phi(\theta)(\bar{b}, \bar{\alpha})]$$

Доказательство Замечания 3.3.2 Заменяем "$Q^1_\lambda(z)$" на " $\vee (\beta_{\lambda,2k-1} < z < \beta_{\lambda,2k})$". Заметим что мы имеем $\Phi(\neg\theta)(x, \bar{z}, \bar{\alpha}) = \neg\Phi(\theta)(x, \bar{z}, \bar{\alpha})$. $\diamondsuit$

Утверждение 3.3.3. *Если для формулы $\theta(x, \bar{z})$ языка L^+ существует $(M \cup B)$-определимая формула $\Phi(\theta)(x, \bar{z}, \bar{\alpha})$ языка L такая что*

$$\forall b, \bar{a} \in M[M^+ \models \theta(b, \bar{a}) \Leftrightarrow M' \models \Phi(\theta)(b, \bar{a}, \bar{\alpha})]$$

тогда для $(M \cup B)$-определимых формул $K_{\Phi(\theta)}(\bar{z}, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}), K_{\neg\Phi(\theta)}(\bar{z}, \bar{\alpha}, \bar{\gamma})$ языка L выбранных по (**) для $(M \cup B)$-определимых формул $\Phi(\theta)$, $\Phi(\neg\theta)$, слудующее верно:

(i) $\forall \bar{a} \in M[M^+ \models \exists x \theta(x, \bar{a}) \Leftrightarrow M' \models K_{\Phi(\theta)}(\bar{a}, \bar{\alpha}, \bar{\gamma})]$,
(ii) $\forall \bar{a} \in M[M^+ \models \forall x \theta(x, \bar{a}) \Leftrightarrow M' \models \neg K_{\neg\Phi(\theta)}(\bar{a}, \bar{\alpha}, \bar{\gamma})]$.

Доказательство Замечания 3.3.3 (i) Пусть $\bar{a} \in M$. Тогда мы имеем
$[M^+ \models \exists x \theta(x, \bar{a}) \Leftrightarrow \exists b \in M, M' \models \Phi(\theta)(b, \bar{a}, \bar{\alpha})$. По (***) следующее верно:
$\exists b \in M, M' \models \Phi(\theta)(b, \bar{a}, \bar{\alpha}) \Leftrightarrow M' \models K_{\Phi(\theta)}(\bar{a}, \bar{\alpha}, \bar{\gamma})$. (ii) Для формулы $\neg\theta(x, \bar{z})$ языка L^+ обозначим
$\Phi(\neg\theta)(x, \bar{z}, \bar{\alpha}) := \neg\Phi(\theta)(x, \bar{z}, \bar{\alpha})$.
Понятно что $\Phi(\neg\theta)(x, \bar{z}, \bar{\alpha})$ есть $(M \cup B)$-определимая формула и

$$\forall b, \bar{a} \in M[M^+ \models \neg\theta(b, \bar{a}) \Leftrightarrow M' \models \Phi(\neg\theta)(b, \bar{a}, \bar{\alpha})]$$

Тогда из (i) следует (ii). $\diamondsuit$
Пусть $\Phi(\exists x \theta(x, \bar{y}))(\bar{y}, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}) := K_{\Phi(\theta)}(\bar{z}, \bar{\alpha}, \bar{\gamma})$

$$\Phi(\forall x \theta(x, \bar{y}))(\bar{y}, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}) := \neg K_{\neg\Phi(\theta)}(\bar{z}, \bar{\alpha}, \bar{\gamma})$$

Утверждение 3.3.4. *Для любой формулы $\theta(\bar{y})$ языка L^+ существует $(M \cup B)$-определимая формула $\Phi_\theta(\bar{z}, \bar{\alpha})$ языка L такая что*

$$\forall \bar{a} \in M^{l(\bar{z})}[M^+ \models \theta(\bar{a}) \Leftrightarrow M' \models \Phi(\theta)(\bar{a}, \bar{\alpha})].$$

Доказательство Замечания 3.3.4 Следует из Замечания 3.3.2, Замечание 3.3.3 и из представление $\theta(\bar{z})$ в следующем виде:
$\theta(\bar{z}) \equiv R_1 x_1 \dots R_n x_n(\theta_1(x_1, \dots, x_n, \bar{z}))$, где $R_i \in \{\exists, \forall\}, \theta_1(x_1, \dots, x_n, \bar{z})$ без кванторная формула языка L^+. $\diamondsuit$

Утверждение 3.3.5. *M^+ модель слабо о-минимальной теории.*

Доказательство Замечания 3.3.5 Пусть $\theta(x, \bar{a})$ произвольная M-определимая формула с одной свободной переменный языка L^+. По Замечанию 3.3.4 существует $(M \cup B)$-определимая формула $\Phi(\theta)(x, \bar{z}, \bar{\alpha})$ такая что $b \in M$, any $\bar{a} \in M^{l(\bar{z})}$ следующее верно:

$$M^+ \models \theta(b, \bar{a}) \Leftrightarrow M' \models \Phi(\theta)(b, \bar{a}, \bar{\alpha})]$$

Рассмотрим формулу $\Phi(\theta)(x, \bar{a}, \bar{\alpha})$. По слабо о-минимальности M'
$\Phi(\theta)(M', \bar{a}, \bar{\alpha}) = \bigcup_{i=1}^{n} \Phi(\theta)_i(M', \bar{a}, \bar{\alpha})$, где $\Phi(\theta)_i(x, \bar{a}, \bar{\alpha})$ есть выпуклая и $n = n_{\Phi(\theta)}$ из Факт 1.2.1.

Пусть $a_1, a_2 \in \Phi(\theta)_i(M', \bar{a}, \bar{\alpha}) \bigcap M$. Тогда $(a_1, a_2)_{M'} \subseteq \Phi(\theta)_i(M', \bar{a}, \bar{\alpha})$ так как $\Phi(\theta)_i(M', \bar{a}, \bar{\alpha})$ выпуклая. Обозначим, $(a_1, a_2)_{M'} := \{\gamma \in M' | a_1 < \gamma < a_2\}$. Таким образом для любого $a \in (a_1, a_2)_{M'} \cap M$ мы имеем $a \in \Phi(\theta)_i(M', \bar{a}, \bar{\alpha})$. Итак, $\theta(M^+, \bar{a})$ — объединение конечного числа ($\leq n_{\Phi(\theta)}$) из $\neg\theta(M^+, \bar{a})$-отделимых выпуклых подмножеств из M. Это число не зависит от $\bar{a}$, зависит только от формулы $\Phi(\theta)(x, \bar{z}, \bar{\alpha})$ слабо о-минимальной теории (Факт 1.2.1). Таким образом, теория $Th(M^+)$ по Факту 1.2.1 является слабо о-минимальной. $\diamondsuit$

Таким образом, Теорема 3.3.1 следует из Замечание 3.3.5. $\diamondsuit$

Замечание 3.3.6. В статье [2] Теорема 3.3.1, Замечание 3.3.2, 3.3.3, 3.3.4, 3.3.5 представлены для случая когда $B_1 = B, M \preceq < R, <, +, \dots >$, R множество всех вещественных чисел и M о-минимальна.

Лемма 3.3.7. *Пусть $\bar{\alpha} \in M' \backslash M, \phi(x, \bar{a}, \bar{\alpha})$ есть $(M \cup \bar{\alpha})$-определимая такая что*
$\phi(M', \bar{a}, \bar{\alpha}) \cap M = \emptyset$. Тогда следующее верно:

*(i) $\forall r \in J_{\phi, \bar{a}}\ \exists m \in \{1, \dots, n\}$ такая что $r \in O_m, \phi(M', \bar{a}, \bar{\alpha}) \cap r(M') \subseteq QV_r(\bar{\alpha})$. (ii) $|J_{\phi, \bar{a}}| \leq 2n_\phi$, где n_ϕ натуральное число из Факта **??**.*

Теорема 3.3.8. *Пусть $M \prec M'$, $\bar{\alpha}, \bar{\gamma} \in M' \setminus M$, $\bar{\alpha} = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$,*
$\bar{\gamma}(n) \subseteq \bar{\gamma}(n-1) \subseteq \dots \subseteq \bar{\gamma}(1) = \bar{\gamma}$, $\phi(x, \bar{z}, \bar{\alpha})$ есть $(M \cup \bar{\alpha})$–определимая

$(l(\bar z)+1)$-формула. Предположим, для любого m $(1 \le m \le n)$ существует $(M \cup \bar\alpha_{m-1} \cup \bar\gamma_m)$–определимая $(n-m+1)$–формула $\Theta^\phi_m(\bar\alpha_{m-1}, \bar y^m, \bar\gamma(m))$ такая что

$(i)_m$ $\Theta^\phi_m(\bar\alpha_{m-1}, \bar y^m, \bar\gamma(m)) \in tp(\bar\alpha^m | M \cup \bar\alpha_{m-1} \cup \bar\gamma(m))$. $(ii)_m$ для любых $b, \bar a \in M$ верно, что

$$[M' \models \phi(b, \bar a, \bar\alpha) \Leftrightarrow M' \models \forall \bar y^m[\Theta^\phi_m(\bar y^m) \to \phi(b, \bar a, \bar\alpha_{m-1}, \bar y^m)]].$$

$(iii)_m$ $\forall r \in O_m(\bar\alpha), \forall \eta \in QV_r(\bar\alpha), \exists \bar\mu \in \Theta^\phi_m(\bar\alpha_{m-1}, (M')^{n-m+1}, \bar\gamma(m))$ такой что

$$tp(\bar\mu | M \cup \bar\alpha_{m-1} \cup \bar\gamma(m)) = tp(\bar\alpha^m | M \cup \bar\alpha_{m-1} \cup \bar\gamma(m)),\ \eta \notin QV_r(\bar\alpha_{m-1}, \bar\mu).$$

Тогда для $(M \cup \bar\gamma)$–определимой формулы $K_\phi(\bar z, \bar\gamma)$ следующее верно:

$$\forall \bar a \in M[M' \models K_\phi(\bar a, \bar\gamma) \Leftrightarrow \exists b \in M, M' \models \phi(b, \bar a, \bar\alpha)],$$

где

$$\begin{aligned} K_\phi(\bar z, \bar\gamma) &:= \exists x \forall \bar y[\Theta^\phi(\bar y, \bar\gamma(m)) \to \phi(x, \bar z, \bar y)]), \\ \Theta^\phi(\bar y, \bar\gamma) &:= \bigwedge_{1 \le m \le n} \Theta^\phi_m(\bar y_{m-1}, \bar y^m, \bar\gamma(m)) \end{aligned}$$

3.3.2 Квазиокрестность множества B в 1-типе $p \in S_1(A)$

Определение 3.3.9. *Пусть $A, B \subset M', p \in S_1(A)$ такой что M' $|B \cup A|^+$-насыщенная. Тогда квазиокрестностью множества B в типе p является следующее множество:*

$QV_p(B) := \{\gamma \in M' |$ существует $(A \cup B)$-формула $\psi(x)$ такая, что $\gamma \in \psi(M') \subset p(M')\}$.

Факт 3.3.10. *Пусть $A, B \subset M', p \in S_1(A)$ такой что M' is $|B \cup A|^+$-насыщенная. Тогда следующее верно:*

(i) Если p изолированный тогда или $QV_p(B) = \emptyset$ или $QV_p(B) = p(M')$.

(ii) $QV_p(B)$ выпуклая.

(iii) (a) Пусть p квазирацинальный $QV_p(B) \neq \emptyset$. Тогда $V_p(B) \subset QV_p(B)$. (b) Пусть p не изолированный $QV_p(B) \neq \emptyset$. Тогда p квазирациональный вправо тогда и только тогда, когда $QV_p(B)^+ = p(M')^+$ и p квазирацинальный влево тогда и только тогда, когда $QV_p(B)^- = p(M')^-$.

(iv) Если p социальный, то $QV_p(B) = V_p(B)$.

Доказательство Факта 3.3.10 (i) Предположим что $QV_p(B) \neq \emptyset$. Пусть $F(x)$ есть A-формула из изолированного типа такая, что $F(M') = p(M')$. Пусть $\phi(x)$ есть $(A \cup B)$-формула такая, что $\phi(M') \subset F(M')$. Тогда по Факту 1.2.1

мы можем предположить что $\phi(M')$ есть выпуклая. Пусть $\alpha \in F(M')\backslash\phi(M')$. Предположим $\alpha > \phi(M')$. Пусть $D(x)$, $G(x)$ есть $(A\cup B)$-формула такая что $D(x) := \phi(M') < x < F(M')^+$, $G(x) := F(M')^- < x < D(M')$.
Тогда $D(M')$, $G(M') \subset QV_p(B)$ and $D(M')\cup G(M') = F(M')$.

(ii) Пусть p изолированный. Тогда (ii) следует из (i). Предположим что p не изолированный. Пусть $\alpha, \beta \in QV_p(B)$, $\gamma \in M'$, $\alpha < \gamma < \beta$. Тогда существует $(A\cup B)$-формулы $\phi_1(x), \phi_2(x)$ такая, что $\alpha \in \phi_1(M') \subset p(M')$, $\beta \in \phi_2(M') \subset p(M')$. Пусть $\phi(x) := \phi_1(M')^- < x < \phi_2(M')^+$. Тогда $\phi(M') \subseteq p(M')$ так как $\phi_1(M')^- = \phi(M')^-$, $\phi_2(M')^+ = \phi(M')^+$ и $p(M')$ выпуклая. Итак, по Утверждению 1.2.10, Утверждению 1.2.11 так как p не изолированный, мы имеем $\phi(M') \subset p(M')$. Так как $\phi(M')$ выпуклая и $\alpha, \beta \in \phi(M')$ мы имеем $\gamma \in \phi(M') \subset p(M')$. Это означает что $\gamma \in QV_p(B)$ так, как $\phi(x)$ есть $(A\cup B)$-формула.

(iii)(a) Предположим $V_p(B) \neq \emptyset$. Тогда по Теореме Компактности существуют $\mu_1, \mu_2 \in p(M')$ такией что

$$\mu_1 < V_p(B) < \mu_2.$$

Пусть p квазирациональное в право и $\phi(x)$ есть $(A\cup B)$-формула такая, что существует $\alpha, \beta \in p(M')$ что $\alpha < \phi(M') < \beta$. Рассмотрим следую $(A\cup B)$-формулу $\psi(x) := \phi(M')^- < x < U_p(M')^+$. Это означает, что $QV_p(B)^+ = p(M')^+$ так, как $\psi(M') \subseteq QV_p(B) \subset p(M')$ и
$\psi(M')^+ = U_p(M')^+ = p(M')^+$. Таким образом, $\mu_2 \in QV_p(B) \setminus V_p(B)$.

(b) Предположим p квазирациональный вправо и $\phi(x)$ есть $(A\cup B)$-формула такая, что $\emptyset \neq \phi(M') \subseteq QV_p(M') \subset p(M')$. Тогда для следующей $(A\cup B)$-формулы $\psi(x) := \phi(M') < x < U_p(M')^+$ имеем $\psi(M')^+ = p(M')^+$ и $\psi(M') \subseteq QV_p(M')$. Это означает что $QV_p(M')^+ = p(M')^+$.

Предположим p не квазирациональный вправо. Так как $QV_p(B) \subset p(M')$, $p(M')^- < QV_p(b) < p(M'^+)$ и следовательно для любой $(A\cup B)$-формулы $\phi(x)$ такой, что $\phi(M') \subset QV_p(B)$ имеем $\phi(M') < p(M')^+$. Тогда по Утверждению 1.2.11(ii)

$\Gamma(x) := \{\phi(M') < x < D(M') | \phi(x)$ есть $(A\cup B) -$ формула , $\phi(M') \subseteq QV_p(B)$, $D \in R(p)\}$ непротиворечивое множество $(A\cup B)$–формул. Пусть $\alpha \in M'$ реализует $\Gamma(x)$. Тогда из определения $\Gamma(x)$ имеем $QV_p(B) < \alpha$ и так как $p(M')^+ = \bigcup\limits_{D\in R(p)} D(M')$, имеем $\alpha < p(M')^+$. Таким образом, $QV_p(B) < \alpha < p(M')^+$. Это означает:

$$QV_p(B)^+ \neq p(M')^+.$$

(iv) Следует из Определения 2.2.1, а вторая часть из (iii)(b). $\diamondsuit$

Лемма 3.3.11. *Пусть $\bar{\alpha} \in M' \setminus M$, $\bar{\alpha} = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$, $\Theta(x)$ есть $(M \cup \bar{\alpha})$-формула такая, что $\Theta(M') \cap M = \emptyset$.. Тогда следующее верно:*

(i) Пусть r один тип над M такой что $\Theta(M') \cap r(M') \neq \emptyset$ тогда $r(M') \cap \Theta(M')$ есть $(M \cup \bar{\alpha})$-определимая и следовательно

$$r(M') \cap \Theta(M') \subset QV_r(\bar{\alpha}),\ i.e.\ \exists m \in \{1, \dots, n\},\ r \in O_m$$

(ii) Существует конечное число один типов $r_1, \dots, r_k \in S_1(M)$ таких что

$$\Theta(M') \cap r_i(M') \neq \emptyset, 1 \leq i \leq k.$$

Доказательство Леммы 3.3.11 (i) рассмотрим $\Theta(M')$. По Факту 1.2.1 существует $n < \omega$ семейство $\neg\Theta(M')$-отделимых выпуклых $(M \cup \bar{\alpha})$-определимых множеств $\{\Theta_i(M') | i < n\}$ таких что

$$\Theta(M') = \bigcup_{i < n(\Theta)} \Theta_i(M'),\ \Theta_0(M') < \Theta(M') < \cdots < \Theta_{i-1}(M').$$

Пусть $k < n$ натуральное минимальное число такое что

$\Theta_k(M') \cap r(M') \neq \emptyset$. Пусть $j < n$ максимальное натуральное число такое что $\Theta_j(M') \cap r(M') \neq \emptyset$. Тогда по Утверждению 1.2.13 мы имеем $\Theta_k(M') \subset (C_r, D_r)(M')$ and $\Theta_j(M') \subset (C_r, D_r)(M')$. Если $(C_r, D_r)(M') = r(M')$ тогда по Замечанию 1.2.2 для $(M \cup \bar{\alpha})$-определимой формулы

$$\Psi_{r,\Theta}(x) := \Theta(x) \wedge \Theta_k(M')^- < x < \Theta_j(M')^+$$

мы имеем $\Psi_{r,\Theta}(M') = \Theta(M') \cap r(M')$ и следовательно $\Psi_{r,\Theta}(M') \subseteq QV_r(\bar{\alpha})$.

Таким образом, по Замечанию 1.2.17 остается рассмотреть случай когда r квазирациональный не рациональный тип. Итак, предположим r квазирациональный в право и (C_r, D_r) не рациональное сечение. Тогда для $(M \cup \bar{\alpha})$-определимой формулы

$$\Psi_{r,\Theta}(x) := \Theta(x) \wedge \Theta_k(M')^- < x < U_r(M')^+$$

мы имеем что $\Psi_{r,\Theta}(M') = \Theta(M') \cap r(M')$ и следовательно $\Psi_{r,\Theta}(M') \subseteq QV_r(\bar{\alpha})$.

(ii) Следует из (i) , Факт 1.2.1, Утверждение 1.2.13, Утверждение 1.2.14(iii). $\diamondsuit$

Лемма 3.3.12. *Пусть $\bar{\alpha} \in M' \setminus M, \phi(x, \bar{a}, \bar{\alpha})$ есть $(M \cup \bar{\alpha})$-определимая такая что*

$\phi(M', \bar{a}, \bar{\alpha}) \cap M = \emptyset$. Тогда следующее верно:

(i) $\forall r \in J_{\phi,\bar{a}}\ \exists m \in \{1, \dots, n\}$ такая что $r \in O_m, \phi(M', \bar{a}, \bar{\alpha}) \cap r(M') \subseteq QV_r(\bar{\alpha})$.

(ii) $|J_{\phi,\bar{a}}| \leq 2n_\phi$, где n_ϕ натуральное число из Факта 1.2.1.

Доказательство Леммы 3.3.12 (i) следует из определения O_m и Леммы 3.3.11(i).

(ii) следует из Утверждения 1.2.14(iii), определения O_m и Леммы 3.3.11.$\diamondsuit$

Теорема 3.3.13. *Пусть* $M \prec M'$, $\bar{\alpha}, \bar{\gamma} \in M' \setminus M$, $\bar{\alpha} = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$, $\bar{\gamma}(n) \subseteq \bar{\gamma}(n-1) \subseteq \ldots \subseteq \bar{\gamma}(1) = \bar{\gamma}$, $\phi(x, \bar{z}, \bar{\alpha})$ *есть* $(M \cup \bar{\alpha})$*–определимая* $(l(\bar{z})+1)$*-формула. Предположим, для любого* m $(1 \leq m \leq n)$ *существует* $(M \cup \bar{\alpha}_{m-1} \cup \bar{\gamma}_m)$*–определимая* $(n-m+1)$*–формула* $\Theta_m^\phi(\bar{\alpha}_{m-1}, \bar{y}^m, \bar{\gamma}(m))$ *такая что*

$(i)_m$ $\Theta_m^\phi(\bar{\alpha}_{m-1}, \bar{y}^m, \bar{\gamma}(m)) \in tp(\bar{\alpha}^m | M \cup \bar{\alpha}_{m-1} \cup \bar{\gamma}(m))$.

$(ii)_m$ $\forall b, \bar{a} \in M[M' \models \phi(b, \bar{a}, \bar{\alpha}) \Leftrightarrow M' \models \forall \bar{y}^m[\Theta_m^\phi(\bar{y}^m) \to \phi(b, \bar{a}, \bar{\alpha}_{m-1}, \bar{y}^m)]]$.

$(iii)_m$ $\forall r \in O_m(\bar{\alpha}), \forall \eta \in QV_r(\bar{\alpha}), \exists \bar{\mu} \in \Theta_m^\phi(\bar{\alpha}_{m-1}, (M')^{n-m+1}, \bar{\gamma}(m))$ *такой что*

$$tp(\bar{\mu} | M \cup \bar{\alpha}_{m-1} \cup \bar{\gamma}(m)) = tp(\bar{\alpha}^m | M \cup \bar{\alpha}_{m-1} \cup \bar{\gamma}(m)),\ \eta \notin QV_r(\bar{\alpha}_{m-1}, \bar{\mu}).$$

Тогда для $(M \cup \bar{\gamma})$*–определимой формулы* $K_\phi(\bar{z}, \bar{\gamma})$ *следующее верно:*

$$\forall \bar{a} \in M[M' \models K_\phi(\bar{a}, \bar{\gamma}) \Leftrightarrow \exists b \in M, M' \models \phi(b, \bar{a}, \bar{\alpha})],$$

где

$$K_\phi(\bar{z}, \bar{\gamma}) := \exists x \forall \bar{y}[\Theta^\phi(\bar{y}, \bar{\gamma}(m)) \to \phi(x, \bar{z}, \bar{y})]),$$

$$\Theta^\phi(\bar{y}, \bar{\gamma}) := \bigwedge_{1 \leq m \leq n} \Theta_m^\phi(\bar{y}_{m-1}, \bar{y}^m, \bar{\gamma}(m))$$

Доказательство Теоремы 3.3.13 Пусть $M' \models K_\phi(\bar{a}, \bar{\gamma})$ и $\beta \in M'$ такая что

$$(*)\ M' \models \forall \bar{y}[\Theta^\phi(\bar{y}, \bar{\gamma}) \to \phi(\beta, \bar{a}, \bar{y})].$$

Заметим что из $(i)_m$ для любого $m (1 \leq m \leq n)$ следует $\Theta^\phi(\bar{y}, \bar{\gamma}) \in tp(\bar{\alpha} | M \cup \bar{\gamma})$. Тогда по (*) мы имеем $M' \models \phi(\beta, \bar{a}, \bar{\alpha})$. Предположим что $\phi(M', \bar{a}, \bar{\alpha}) \cap M = \emptyset$. По Лемме 3.3.12(i) $\exists m (1 \leq m \leq n), \exists r \in O_m$, такой что $\beta \in \phi(M', \bar{a}, \bar{\alpha}) \cap r(M') \subseteq QV_r(\bar{\alpha})$. Пусть $\bar{\mu}$ получена по $(iii)_m$ для $\beta \in QV_r(\bar{\alpha})$, в особенности

$$(**)\ \beta \notin QV_r(\bar{\alpha}_{m-1}, \bar{\mu}).$$

Так как $tp(\bar{\mu} | M \cup \bar{\alpha}_{m-1} \cup \bar{\gamma}(m)) = tp(\bar{\alpha}^m | M \cup \bar{\alpha}_{m-1} \cup \bar{\gamma}(m))$ by $(i)_m$ $M' \models \Theta_m^\phi(\alpha_{m-1}, \bar{\mu}, \bar{\gamma})$. Таким образом по $(*)$ мы имеем $M' \models \phi(\beta, \bar{a}, \bar{\alpha}_{m-1}, \bar{\mu})$. Заметим, что $tp(\bar{\alpha}_{m-1}\bar{\mu} | M) = tp(\bar{\alpha} | M)$, $\phi(M', \bar{a}, \bar{\alpha}) \cap M = \emptyset$ и по Замечанию 1.1.11(i) $\phi(M', \bar{a}, \bar{\alpha}_{m-1}, \bar{\mu}) \cap M = \emptyset$. Тогда по Лемме 3.3.12 и Замечанию 1.1.11(ii) мы имеем $\phi(M', \bar{a}, \bar{\alpha}_{m-1}, \bar{\mu}) \cap r(M') \subseteq QV_r(\bar{\alpha}_{m-1}, \bar{\mu})$. Это противоречит (**) так как $\beta \in QV_r(\bar{\alpha}) \subset r(M')$ и $M' \models \phi(\beta, \bar{\alpha}_{m-1}, \bar{\mu})$.

Пусть для некоторого $b \in M, M' \models \phi(b, \bar{a}, \bar{\alpha})$. Заметим что $M' \models \forall \bar{y}[\Theta^{\phi}(\bar{y}, \bar{\gamma}) \to \Theta_1^{\phi}(\bar{y}, \bar{\gamma})]$. Then by $(ii)_1$ мы имеем :

$$M' \models \forall \bar{y}[\Theta^{\phi}(\bar{y}) \to \phi(b, \bar{a}, \bar{y})]$$

и следовательно, $M' \models K_{\phi}(\bar{a}, \bar{\gamma})$. $\diamondsuit$

Замечание. Условия $(i)_m, (ii)_m$ из Теоремы 3.3.13 соответствует $\mathbf{A2.1}_m$ и $(iii)_m$ из Теоремы 3.3.13 соответствует **A2.3'**$_m$.

Определение 3.3.14. *Формула $K(x, y)$ монотонно возрастает по y на выпуклом множестве B если $\forall b_1, \forall b_2$ $[(b_1 \in B \wedge b_2 \in B \wedge b_1 < b_2) \to K(M', b_1) < K(M', b_2)^+]$*
и $K(x, y)$ монотонно убывает по y в выпуклом множестве B если $\forall b_1, \forall b_2$ $[(b_1 \in B \wedge b_2 \in B \wedge b_1 < b_2) \to K(M', b_2) < K(M', b_1)^+]$.
Мы говорим, что $K(x, y)$ монотонна по y на выпуклом множестве B, если или $K(x, y)$ монотонно возрастает по y на выпуклом множестве B или $K(x, y)$ монотонно убывает по y на выпуклом множестве B.

Теорема 3.3.15. [85] *Если $r \not\perp^w p$, тогда существует A-формула $K(x, y)$ такая, что $K(x, y)$ монотонна по y на некотором $\Theta(M')$, $\Theta(y) \in r$ и монотонно по x на некотором $\mu(M')$, $\mu(x) \in p$ и для любого $\beta \in r(M')$, любого $\delta \in p(M')$, $K(x, \beta)$ делит $p(M')$ и $K(\delta, y)$ делит $r(M')$.*

Доказательство Теоремы 3.3.15 Заметим что $K(M', b_1) < K(M', b_1)^+$ и следовательно, свойство монотонности $K(x, y)$ на некотором выпуклом формульном множестве, есть свойство первого порядка. Рассмотрим A-формулу $\Pi_{K(x,y)}(y_1, y_2) := y_1 < y_2 \to \forall y' \forall y"((y_1 < y' < y \ll y_2) \to$
$\to \forall x(\forall x"(K(x\, y") \to x \ll x) \to \forall x'(K(x', y') \to x' < x)))$.
Если A–формула $K(x, y)$ монотонна по y на $r(M')$, то по Факту 1.2.24(i) для некоторого выпуклого (Факт 1.2.1) $\Theta(y) \in r, K(x, y)$ монотонно по y в $\Theta(M')$. Если для этого $K(x, y)$ и для некоторого $\beta \in r(M')$ $K(x, \beta)$ делит $p(M')$ тогда по Факту 1.2.24(iii) для любого $\delta \in p(M')$, $K(\delta, y)$ делит $r(M')$ и $K(x, y)$ монотонная по x в $p(M')$ по основному принципу обратная монотонная функция является монотонной.

Пусть $\beta \in r(M'), \delta_1, \delta_2 \in p(M'), \phi(x, y)$ есть A–формула такая, что $M' \models \phi(\delta_1, \beta) \wedge \neg\phi(\delta_2, \beta)$. Рассмотрим разбиение $\phi(M', \beta)$ из Факта 1.2.1. Тогда $\phi(M', \beta) = \bigcup_{j \le n} \phi_j(M', \beta)$. Где, $\{\phi_j(M', \beta) | j \le n\}$ максимальное конечное семейство выпуклых $\neg\phi(M', \beta)$–отделимых $(A \cup \beta)$–определимых подмножеств таких что

$$\phi_1(M', \beta) < \phi_2(M', \beta) < \ldots < \phi_n(M', \beta).$$

Пусть $j \le n$ максимальное натуральное число такое что $(\phi_j(M',\beta)\cap p(M')) \neq \emptyset$. Тогда мы имеем или a) $(\phi_j(M',\beta)\cap p(M'))^+ = p(M')^+$ или
b) $(\phi_j(M',\beta)\cap p(M'))^+ \neq p(M')^+$. Предположим $H(x,\beta) := x < \phi_j(M',\beta)$ если a) верно и предположим

$H(x,\beta) := x < \phi_j(M',\beta)^+$ если b) верно. Заметим что в двух случаях $H(x,\beta), H(x,\beta)$ делит $p(M')$.
Рассмотрим $\psi(y,\beta) := y < \beta \wedge \exists z(H(M',y) < z < H(M',\beta)^+)$.
Если $\psi(M',\beta)\cap r(M') = \emptyset$, тогда $H(x,y)$ монотонно убывает по y в $r(M')$. Предположим $\psi(M',\beta)\cap r(M') \neq \emptyset$. Пусть $\psi(M',\beta) = \bigcup \psi_k(M',\beta)$ разбиение $\psi(M',\beta)$ из Факта 1.2.1. Где, $\{\psi_k(M',\beta) | k \le m\}$ семейство конечных выпуклых

$\neg\psi(M',\beta)$–отделимых $(A\bigcup\beta)$–определимых множеств таких что

$$\psi_m(M',\beta) < \psi_{m-1}(M',\beta) < \ldots < \psi_1(M',\beta) < \beta.$$

Предположим $\exists k \le m$ такой что $(\psi_k(M',\beta)\cap r(M'))^- = r(M')^-$. Тогда формула

$K(x,y) := \exists t(\psi_k(M',y) < t \le y \wedge H(x,t))$ монотонно возрастает по y в $r(M')$. Таким образом, предположим $(\psi(M',\beta)\cap r(M'))^- \neq r(M')^-$. Пусть $k \le m$ есть максимальное натуральное число

такое что $\psi_k(M',\beta) \subset r(M')$. Пусть
$K(x,\beta) := \exists t(\psi_k(M',\beta) < t \le \beta \wedge H(x,t))$, тогда $K(x,y)$ монотонно убывает по y в $r(M')$. Если не существует такого k тогда $K(x,y) := H(x,y)$ убывающая по y в $r(M')$.
Заметим что во всех случаях $K(x,y)$, $K(x,\beta)$ делит $p(M')$. Мы говорим что k есть *глубина формулы* $\phi(x,y)$ по y в $r(M')$. $\diamondsuit$

Следствие 3.3.16. *Пусть $r,p \in S_1(A)$, $r \not\perp^w p$, $K(x,y)$ монотонная A-определимая 2-формула из Теоремы 3.3.15. Тогда следующее верно:*

*(i) a) Пусть $K(x,y)$ монотонно возрастает тогда мы имеем:
r квазирационально вправо тогда и только тогда, когда p квазирационально вправо.*

*b) Пусть $K(x,y)$ монотонно убывает тогда мы имеем:
r квазирационально вправо тогда и только тогда, когда p квазирационально влево.*

(ii) r иррациональное тогда и только тогда, когда p квазирациональное.

(iii) $\not\perp^w$ есть эквивалентное отношение $S_1(A)$.

Предложение 3.3.17. *Пусть $p,r \in S_1(A)$ не изолированный, $A,B,C \subset M'$, M' $|A\cup B\cup C|^+$-насыщенная модель , $r \not\perp^w p$, $K(x,y)$ A-определимая формула из Теоремы 3.3.15, $QV_p(B) \neq \emptyset$, $QV_r(B) \neq \emptyset$. Тогда следующее верно:*

(i) Пусть $\beta \in r(M')$, в этом случае мы имеем:
(a) Если $\beta < QV_r(B)$, K монотонно возрастает, тогда $K(M', \beta) < QV_p(B)$.
(b) Если $\beta < QV_r(B)$, K монотонно убывает, тогда $QV_p(B) < \neg K(M', \beta)$.
(c) Если $QV_r(B) < \beta$, K монотонно возрастает, тогда $QV_p(B) < \neg K(M', \beta)$.
(d) Если $QV_r(B) < \beta$, K монотонно убывает, тогда $K(M', \beta) < QV_p(B)$.

(ii) Пусть p, r квазирациональное. Тогда условие (a) и (b) эквивалентны:
(a) $\exists \beta \in r(M') \setminus QV_r(B))$ такое что $\forall \delta \in QV_r(B)$ $[tp(\beta|A \cup C) = tp(\delta|A \cup C)]$
(b) $\exists \eta \in p(M') \setminus QV_p(B)$ такое что $\forall \mu \in QV_p(B)$ $[tp(\eta|A \cup C) = tp(\mu|A \cup C)]$

(iii) Пусть p, q иррационыльные. Тогда по Факту 3.3.10 $QV_r(B) = V_r(B)$, $QV_p(B) = V_p(B)$ и условие (a), (b) эквивалентны:
(a) $\exists \beta_1, \beta_2 \in r(M'), \beta_1 < V_r(B) < \beta_2$ такое что $[tp(\beta_1|A \cup C) = tp(\beta_2|A \cup C)]$
(b) $\exists \eta_1, \eta_2 \in p(M'), \eta_1 < V_p(B) < \eta_2$ такое что $[tp(\eta_1|A \cup C) = tp(\eta_2|A \cup C)]$.

Доказательство Утверждения 4.1.32 (i) (a) Следует из $\beta < QV_r(B)$ что r не квазирацииональнo влево. По Замечанию 4.3.8 p есть не квазирациональное влево. Предположим что $\exists \gamma \in K(M', \beta) \cap QV_p(B)$. Тогда существует $(A \cup B)$-определимая формула такая что $\gamma \in \phi(M') \subset p(M')$. Так как p не квазирациональное влево существует $\delta \in p(M')$ такая что $\delta < \phi(M')$, т.е. $\phi(M')^- \neq r(M')^-$ и $\delta < \gamma$. Тогда для любого $\delta \in p(M')$ существует $\beta_1 \in r(M')$ such that $K(M', \beta_1) < \delta$, такая что $K(x, \beta_1)$ делит $p(M')$. По монотонности $K(x, y)$ и $\delta < \gamma$ мы имеем β_1 не удовлетворяет $(A \cup B)$-определимой формуле $\Theta_\phi(y) := \exists x(K(x, y) \wedge \phi(x))$, но $\beta \in \Theta_\phi(M')$.

Пусть $\mu(y)$ есть $(A \cup B)$-определимая формула такая что $\mu(M') \subset QV_r(B)$. Тогда $\beta < \mu(M')^+$, так как $\beta \in QV_r(B)$. Таким образом, $(A \cup B)$-определимая формула $H(x) := \Theta_\phi(M')^- < x < \mu(M')^+$ удовлетворяющая двум условиям: $\beta \in H(M')$ и $H(M') \subset r(M')$ так как $\beta_1 < H(M')$. Таким образом, $\beta \in QV_r(B)$. Противоречие.

(b), (c), (d) доказываются аналогично.

(ii) Мы можем предположить что r и p квазирационально вправо. Тогда по Замечанию 4.3.8(i) и так как r, p не изолированные формула $K(x, y)$ возрастающая. Предположим: (a) верно.Таким образом, так как (Факт 3.3.10(iii)) $QV_r(B)^+ = r(M')^+$ имеем $\beta < QV_r(B)$ и следовательно, по Замечанию 1.2.2(ii) следующее верно:

$$\forall \gamma\ [\beta < \gamma < r(M')^+ \Rightarrow tp(\gamma|A \cup C) = tp(\beta|A \cup C)].$$

Докажем в два этапа: на первом этапе покажем что существует $(A \cup C)$-формула которая делит $QV_p(B)$; на втором этапе покажем, что если (b) ложно, то $QV_p(B)$ есть $(A \cup C)$-формульная, что дает противоречие.

Предположим, что существует $(A \cup C)$-формула $\Theta(x)$ которая делит $QV_p(B)$, т.е. $\exists \delta_1, \delta_2 \in QV_p(B)$, $\delta_1 < \delta_2$, $\delta_1 \in \Theta(M'), \delta_2 \in \neg\Theta(M')$, $\Theta(M') <$

$\neg\Theta(M')$. Таким образом, из предположения, что p квазирациональный вправо, по Замечанию 4.3.8 $K(x,y)$ монотонно возрастает и для $(A\cup C)$-формулы $S_{\neg\Theta}(y) := \exists x(K(x,y) \wedge \neg\Theta(x) \wedge x < U_p(M')^+ \wedge y < U_q(M')^+)$ следующее верно: $S_{\neg\Theta}(M') \subset r(M')$ и $S_{\neg\Theta}(M') \neq \emptyset$ так, как существует $\beta' \in r(M')$, что $\delta_2 \in K(M', \beta')$.

Пусть ϕ – $(A \cup B)$-формула такая, что $\delta_1 \in \phi(M') \subseteq QV_p(B)$. Тогда для $(A \cup B)$-формулы

$$S_\phi(y) := \exists y(K(x,y) \wedge \phi(M')^- < x < U_p(M')^+ \wedge y < U_r(M')),$$

$S_\phi(M') \subset r(M')$ and $\beta < S_\phi(M')$ так, как по (i)(a) $K(M',\beta) \cap QV_p(M') = \emptyset$ и имеем $\phi(M') \subset QV_p(M')$. Таким образом, $\beta < S_\phi(M')$ и
$\emptyset \neq S_{\neg\theta}(M') \subseteq S_\phi(M') \subseteq QV_r(B)$. Следовательно, существует $\beta' \in QV_r(B)$, $\beta' \in S_{\neg\theta}$, что означает $tp(\beta'|A \cup C) \neq tp(\beta|A \cup C)$. Противоречие.

Таким образом для любой $(A \cup C)$-формулы $\theta(x)$ следующее верно:

Если $\theta(M') \cap QV_p(B) \neq \emptyset$ тогда $QV_p(B) \subseteq \theta(M')$.

Если $QV_p(B)$ не определимая тогда по компактности и насыщенности (как в Факте 1.2.24(ii)) мы имеем $QV_p(B) \subset \theta(M')$, что дает (b). Таким образом, предположим что существует $(A \cup B)$-определимая формула $\mu(x)$ такая что $\mu(M') = QV_p(B)$. Если (b) ложно, то существует $(A\cup C)$-формула $\theta(x)$ такая, что $\theta(M') = \mu(M')$. Тогда по (i)(a) $(A \cup B)$-формула $R_\mu(x) := \exists x(K(x,y) \wedge \mu(x) \wedge y < U_q(M')^+)$ определяет $QV_p(B)$, т.е. $R_\mu(M') = QV_p(B)$. Тогда для $(A\cup C)$-определимой формулы $R_\theta(y) := \exists x(K(x,y) \wedge \theta(x) \wedge y < U_q(M')^+)$ мы имеем $R_\theta(M') = R_\mu(M') = QV_p(B)$. Это противоречит (a).

(iii) *Схема доказательства (iii) содержит два этапа, как и в (ii).* Не теряя общности, полагаем, что формула $K(x,y)$ монотонно возрастает по y в M' и $K(x,y)$ монотонно убывает по x в M'. Предположим, что (a) верно, $K(x,y)$ монотонно возрастает и некоторая $(A\cup C)$-формула $\theta(x)$ делит $V_p(B)$, т.е. $\theta(M') < \neg\theta(M'), \theta(M') \cap V_p(B) \neq \emptyset, \neg\theta(M') \cap V_p(B) \neq \emptyset$. Тогда существует некоторое B-определимое выпуклое множество, $\mu(M') \subseteq V_p(B)$ такое, что $\theta(x)$ делит $\mu(M')$. В самом деле, пусть $\delta_1 \in \theta(M') \cap V_p(B), \delta_2 \in \neg\theta(M') \cap V_p(B)$ и $\phi_1(x), \phi_2(x)$ есть $(A \cup B)$-формулы такие что $\delta_1 \in \phi_1(M') \subseteq V_p(B)$,
$\delta_2 \in \phi_2(M') \subseteq V_p(B)$. Обозначим $\mu(x) := \phi_1(M')^- < x < \phi_2(M')^+$.

Рассмотрим две $(A \cup B)$-формулы $H_1(y) := \exists x(K(x,y) \wedge \mu(x))$,
$H_2(y) := \exists x(K(x,y) \wedge \mu(M') < x)$. По (i)(a) и (i)(c) имеем $\beta_1 < H_1(M')$ и $\beta_2 \in H_1(M')$. Предположим $\beta_2 \notin H_2(M')$. Тогда $H_1(M') \backslash H_2(M')$ есть определимая и так, как p иррациональный, существует $\delta \in p(M') \setminus V_p(B), \mu(M') < \delta$. Для $\delta \in p(M')$ по Замечанию 4.3.8 существует $\beta \in r(M')$ такой, что $\delta \in K(M', \beta)$. Таким образом, $\beta \in H_2(M')$ и следовательно, $\beta > H_1(M') \setminus H_2(M')$. Это означает, что $H_1(M') \setminus H_2(M') \subset V_r(M')$.
Противоречие, так как $\beta_2 \in H_1(M') \setminus H_2(M')$. Таким образом, $\beta_2 \in H_2(M')$.

Рассмотрим $(A\cup C)$-формулу $H_\theta(y) := \exists x(K(x,y)\wedge\theta(M')<x)$. Ясно, что $H_2(M')\subseteq H_\theta(M')\subseteq H_1(M')$. Заметим, что $\beta_2\in H_2(M')$ и $\beta_1\notin H_1(M')$. Итак, мы имеем $\beta_2\in H_\theta(M')$ и $\beta_1\notin H_\theta(M')$. Таким образом, $tp(\beta_1|A\cup C)\neq tp(\beta_2|A\cup C)$, так как θ есть $(A\cup C)$-формула. Противоречие. Таким образом, для любой $(A\cup C)$-формулы $\theta(x)$ следующее верно:

(*) *Если $\theta(M')\cap V_p(B)\neq\emptyset$, то $V_p(B)\subseteq\theta(M')$.*

Лемма 3.3.18. *(i) (a) Если $V_p(B)^+$ есть не-$(A\cup B)$-определимая, то $V_p(B)^+$ есть не-$(A\cup C)$-определимая.*

*(b) Если $V_p(B)^-$ есть не-$(A\cup B)$-определимая,
то $V_p(B)^-$ есть не-$(A\cup C)$-определимая.*

(ii) (a)если $V_p(B)^+$ есть $(A\cup B)$-определимая тогда $V_p(B)^+$ есть не-$(A\cup C)$-определимая.

(b) Если $V_p(B)^-$ $(A\cup B)$-определимая тогда $V_p(B)^-$ не-$(A\cup C)$-определимая.

Доказательство Леммы 3.3.18 (i) Следует из Теоремы компактности. Рассмотрим (a). Предположим что $V_p(B)^+$ есть $(A\cup B)$-определимая и, следовательно, для некоторой $(A\cup B)$-формулы $R(x)$ мы имеем $R(M')=V_p(B)^+$. Тогда рассмотрим следующее множество $(A\cup B\cup C)$-формул $\Gamma(x) := \{\phi(M')<x<R(M')|\phi(x)\ \text{is}(A\cup B)-$ формула такая, что $\phi(M')\subset V_p(B)\}$. $\Gamma(x)$ непротиворечиво и для любой реализации $\gamma\in M'$ мы имеем $V_p(B)<\gamma<R(M')$. Противоречие.

(ii) (a) Покажем что $V_r(B)^+$ есть $(A\cup B)$-определимая. Действительно, пусть $\Theta(y)$ есть
an $(A\cup B)$-формула такая, что $\Theta(M')=V_p(B)^+$. Рассмотрим
$\mu_\Theta(y) := \exists x[K(x,y)\wedge\Theta(x)]$.

Утверждение 3.3.19. *$\mu_\Theta(M')\cap V_r(B)=\emptyset$ and $V_r(B)^+=\mu_\Theta(M')$.*

Доказательство Замечания 3.3.19. Предположим $\mu_\Theta(M')\cap V_r(B)\neq\emptyset$. Пусть $\beta\in\mu_\Theta(M')\cap V_r(B)$, тогда для β существует $\delta_0\in p(M')$ такая, что $M'\models K(\delta_0,\beta)\wedge\delta_0\in\Theta(M')$, т.е. $\delta_0>V_p(M')$.

Пусть $\phi(x)$ есть $(A\cup B)$-формула такая, что $\beta\in\phi(M')\subseteq V_r(B)$. Пусть $\beta'\in r(M')$ такой, что $V_r(B)<\beta'$ (Определение 2.2.1). Тогда для любого $\beta'\in r(M')$, так как $K(x,\beta')$ делит $p(M')$, $\exists\delta'\in p(M')$ такой, что $K(M',\beta)<\delta'<p(M')^+$. Итак, так как $\beta<\beta'$ имеем $K(M',\beta)<K(M',\beta')^+$, для $(A\cup B)$-формулы $R_\phi(x) := \exists y[K(x,y)\wedge\phi(y)]$ следующее верно:
$R_\phi(M')<\delta'<p(M')$. Тогда, так как $\delta_0\in R_\phi\cap\Theta(M')$ имеем $\emptyset\neq R_\phi(M')\cap\Theta(M')<\delta'$ и следовательно, $R(M')\cap\Theta(M')\subseteq V_p(B)$. Последнее, так как $\Theta(M')>V_p(M')$, противоречит $R_\phi(M')\cap\Theta(M')>V_p(B)$.

Второе утверждение из Замечания легко доказывается. $\diamondsuit$

Таким образом, по Замечанию 3.3.19 $V_r(B)^+$ есть $(A \cup B)$-определимая окрестность, так как существует $(A \cup C)$-формула $Q(x)$ такая, что $V_p(B)^+ = \Theta(M') = Q(M')$. Тогда для $(A \cup C)$-формулы $\mu_Q(y) := \exists x[K(x,y) \wedge Q(x)]$ следующее верно: $\mu_Q(M') = \mu_\Theta(M') = V_r(B)^+$. Итак, $\beta_2 \in \mu_\Theta(M')$ и $\mu_\Theta(M') \cap V_p(B) = \emptyset$. Противоречит с Утверждением 4.1.32(iii)(a). итак $V_p(B)^+$ не-$(A \cup C)$-определимая. Доказательство Леммы 3.3.18(ii)(b) такое же как и доказательство Леммы 3.3.18(ii)(a). $\diamondsuit$

По лемме 3.3.18, $V_p(b)^+, V_p(B)^-$ не $(A \cup C)$-определимые. Утверждение 4.1.32(iii)(b) следует из (*). $\diamondsuit$

Следствие 3.3.20. *Условия* $\mathbf{A2.2}_m$ *и* $\mathbf{A2.3}_m$ *эквивалентны*

(**A2.2, A2.3** из **Ведение**, Секция 1) *Доказательство of Corollary 3.3.20* Пусть $\delta \in r \in O_m$. Обозначим $r' := tp(\delta | M \cup \bar{\alpha}_{m-1})$. Тогда $r(M') = r'(M')$ так как $\bar{\alpha}_{m-1} \perp^w r$ и $p_m \not\perp^w r'$ так как $\bar{\alpha}_m \not\perp^w r$. $QV_{r'}(\bar{\alpha}^m) \neq \emptyset$ следует из $QV_r(\bar{\alpha}) \neq \emptyset$. Если мы возьмем условие из Утверждения 4.1.32(ii),(iii) $A := M \cup \bar{\alpha}_{m-1}, B := \cup \bar{\alpha}^m, C := \cup \bar{\gamma}(m)$ тогда мы получим эквивалентность $\mathbf{A2{,}2}_m$ и $\mathbf{A2.3}_m$. $\diamondsuit$

Следствие 3.3.21. *Пусть* $p, r \in S_1(A), p \not\perp^w r, B \subset M'$. *Тогда* $V_p(B)$ – $(A \cup B)$*-формульная если и только, если* $V_r(B)$ – $(A \cup B)$*-формульная.*

Доказательство Следствия 3.3.21. Заметим, что $V_p(B)$ есть $(A \cup B)$-определимая тогда и только тогда, когда $V_p(B)^+$ и $V_p(B)^-$ $(A \cup B)$-определимая. Предположим $V_p(B)$ $(A \cup B)$-определимая. Тогда $(A \cup B)$-определимость $V_r(B)$ следует из Утверждения 3.3.19, которое верно для (не обязательно иррационального) 1-типа над A. $\diamondsuit$

Следствие 3.3.22. *Пусть* $A, B, C \subset M'$, $p, r \in S_1(A)$ *такие, что* M' *есть* $|A \cup B \cup C|^+$*-насыщенна,* $p \not\perp^w r$, $QV_r(B) \neq \emptyset$, $QV_r(C) \neq \emptyset$, $QV_p(B) \neq \emptyset$, $QV_p(C) \neq \emptyset$. *Тогда следующее верно:*

(i) Предположим, p, r *иррациональные. Тогда, если* $\exists \gamma \in p(M')$, $V_p(C) < \gamma < V_p(B)$ *тогда* $\exists \mu \in r(M')$ *такой, что или* $V_r(C) < \mu < V_r(B)$ *или* $V_r(B) < \mu < V_r(C)$.

(ii) Предположим, что p, r *квазирациональные. Тогда следующее верно:*

$$QV_r(C) \subset QV_r(B) \iff QV_p(C) \subset QV_p(B)$$

Доказательство Следствия 3.3.22 (i) По Определению 2.2.1 существует γ_1, $\gamma_2 \in p(M')$ такое что

$$\gamma_1 < V_p(C) < \gamma < V_p(B) < \gamma_2.$$

Тогда из определений $V_p(C),\ V_p(B)$ мы имеем что

$$tp(\gamma_1|A \cup B) = tp(\gamma|A \cup B),\ tp(\gamma|A \cup C) = tp(\gamma_2|A \cup C).$$

Итак, по Утверждению 4.1.32(iii) существует $\delta_1, \delta_2, \delta_1', \delta_2' \in r(M')$ такое что

$$\delta_1 < V_r(B) < \delta_2,\ tp(\delta_1|A \cup C) = tp(\delta_2|A \cup C),$$

$$\delta_1' < V_r(C) < \delta_2',\ tp(\delta_1'|A \cup B) = tp(\delta_2'|A \cup B).$$

Рассмотрение этих условий с монотонностью $K(x, y)$ из Теоремы 3.3.15 дает (i).

(ii) Мы можем предположить что p и r оба квазирациональные вправо и следовательно, из Следствия 4.3.8 монотонно возрастающая формула $K(x, y)$. Пусть $\beta \in QV_p(B) \setminus QV_p(C)$. Тогда $\beta < QV_p(C)$ и существует $(A \cup B)$-определимая $\phi(x)$ такая что

$\beta \in \phi(M') \subseteq QV_p(B)$. Итак, по Утверждению 4.1.32(i)(a) $K(M', \beta) < QV_r(C)$.

Рассмотрим $H(x, \beta) := K(M', \beta) < x < U_r(M')^+$. Тогда $\bigcup\limits_{\beta \in \phi(M')} H(M', \beta)$ $\subseteq QV_r(B)$. Покажем что $\bigcup\limits_{\beta \in \phi(M')} H(M', \beta) \setminus QV_r(C) \neq \emptyset$. Действительно, предположим что

$\bigcup\limits_{\beta \in \phi(M')} H(M', \beta) \setminus QV_r(C) = \emptyset$. Тогда по Факту 1.2.24(ii) существует $(A \cup C)$-формула $G(x)$ такая, что $G(M') = QV_r(C) = H(M', \beta)$. Рассмотрим $(A \cup C)$-формулу $Z(y) := \forall x(G(x) \leftrightarrow H(x, y))$. Пусть $Z_i(y)$ выпуклая подформула из $Z(y)$ (Факт 1.2.1) такая что $\beta \in Z_i(M')$. Тогда, так как $K(x, \beta)$ делит $p(M')$, по Теореме компактности существует $\beta_1 \in p(M')$ такой, что $M' \models \exists x(K(M', \beta_1) < x < K(M', \beta)^+)$. Тогда $\beta_1 \notin Z_i(M')$ и следовательно, $\beta_1 < Z_i(M')$. Рассмотрим $(A \cup C)$–формулу $Z'(y) := Z_i(M')^- < y < U_p(M')^+$. Имеем $\beta_1 \in p(M'),\ \beta_1 < Z'(M'), \beta \in Z'(M')$. Тогда $Z'(M') \subset p(M')$ и следовательно, $\beta \in QV_p(C)$. Противоречие. Итак, $QV_r(C) \subset QV_r(B)$. $\diamondsuit$

Лемма 3.3.23. *Пусть $\bar{\alpha} \in M' \setminus M, \phi(x, \bar{y}, \bar{\alpha})$ есть $(M \cup \bar{\alpha})$-определимая $(k+1)$-формула. Тогда следующее верно:*

Предположим что $\forall m(1 \leq m \leq n = l(\bar{\alpha}))$ p_m иррациональный. Тогда существует $\bar{\beta}(1), \ldots, \bar{\beta}(n) \in M' \setminus M$ такой что следующее верно:

(a) $\forall m(1 \leq m \leq n), \bar{\beta}(m) = \bar{\alpha}_{m-1}\bar{\beta}(m)^m$,

$$tp(\bar{\beta}(m)^m|A \cup \bar{\alpha}_{m-1}) = tp(\bar{\alpha}^m|A \cup \bar{\alpha}_{m-1}),\ V_{p_m}(\bar{\alpha}^m) \cap V_{p_m}(\bar{\beta}(m)^m) = \emptyset.$$

(b) $(M \cup \bar{\alpha} \cup \bigcup_{1 \leq m \leq n} \bar{\beta}(m))$-определимая формула

$$K_\phi(\bar{y}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}(1), \ldots, \bar{\beta}(n)) := \exists x(\phi(x, \bar{y}, \bar{\alpha}) \wedge \bigwedge_{1 \leq m \leq n} \phi(x, \bar{y}, \bar{\beta}(m)))$$

удовлетворяет условию (1) из **Проблема A***:*

$$\forall \bar{a} \in M^k \; [\exists b \in M, \; M' \models \phi(b, \bar{a}, \bar{\alpha}) \Longleftrightarrow M' \models K_\phi(\bar{a}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})]$$

Доказательство Леммы 3.3.23 (a) Заметим, что по Факту 3.3.10(iv) для любого иррационального один-типа r, $QV_r(B) = V_r(B)$. So, $QV_{p_m}(\bar{\alpha}^m) = V_{p_m}(\bar{\alpha}^m)$. Пусть $\delta_1, \delta_2 \in p_m(M')$ такой что $\delta_1 < V_{p_m}(\bar{\alpha}^m) < \delta_2$ (Определение 2.2.1). Пусть $q(\bar{y}^m, \delta_1) := tp(\bar{\alpha}^m | M \cup \bar{\alpha}_{m-1} \cup \{\delta_1\})$. Тогда $q(\bar{y}^m, \delta_2)$ непротиворечиво так как $tp(\delta_1 | M \cup \bar{\alpha}_{m-1}) = tp(\delta_2 | M \cup \bar{\alpha}_{m-1})$. Let $\bar{\beta}(m)^m \in (M')^{n-(m-1)}$ любая реализация $q(\bar{y}^m, \delta_2)$. Обозначим $\bar{\beta}(m) := \bar{\alpha}_{m-1}\bar{\beta}(m)^m$ Тогда по определению $q(\bar{y}^m, x)$ мы имеем что $tp(\bar{\beta}(m)^m | M \cup \bar{\alpha}_{m-1}) = tp(\bar{\alpha}^m | M \cup \bar{\alpha}_{m-1})$. Покажем что $\delta_2 < V_{p_m}(\bar{\beta}(m)^m)$. Пусть $\phi(x, \bar{\beta}(m)^m)$ произвольная $(M \cup \bar{\alpha}_{m-1} \cup \bar{\beta}(m)^m)$-определимая один-формула такая что $\phi(M', \bar{\beta}(m)^m) \subseteq V_{p_m}(\bar{\beta}(m)^m)$. Тогда, так как p_m есть тип над $M \cup \bar{\alpha}_{m-1}$, $\bar{\alpha}^m$ и $\bar{\beta}(m)^m$ имеето некоторый один тип над $M \cup \bar{\alpha}_{m-1}$, мы имеем по Утверждение 1.1.11(iii) что $\phi(M', \bar{\alpha}^m) \subseteq V_{p_m}(\bar{\alpha}^m)$. Тогда по нашему предположению $M' \models \delta_1 < \phi(M', \bar{\alpha}^m)$ и следовательно по определению $q(\bar{y}^m, \delta_1)$ мы имеем $M' \models \delta_2 < \phi(M', \bar{\beta}(m)^m)$. Это доказывает (a).

(b) Во первых докажем необходимость. Пусть $\bar{a} \in M^{l(\bar{y})}$ и предположим, что $\phi(M', \bar{a}, \bar{\alpha}) \cap M = \emptyset$. Пусть $\delta \in \phi(M', \bar{a}, \bar{\alpha})$. Тогда по Лемме 3.3.12 $\exists m \leq n, \exists r \in O_m$ такое, что $\delta \in \phi(M', \bar{a}, \bar{\alpha}) \cap r(M') \subseteq QV_r(\bar{\alpha})$.

Пусть μ произвольный элемент из $r(M')$. Так как $\bar{\alpha}_{m-1} \perp^w r$ мы имеем $r' := tp(\mu | M \cup \bar{\alpha}_{m-1}) = tp(\delta | M \cup \bar{\alpha}_{m-1}) \in S_1(M \cup \bar{\alpha}_{m-1})$, $r'(M') = r(M')$ и следовательно, $QV_r(\bar{\alpha}) = QV_{r'}(\bar{\alpha}^m)$. По Определению 2.2.1 $r' \not\perp^w p_m$. Тогда, так как p_m иррациональный, по Замечанию 4.3.8(ii) имеем что, r' иррациональный. Итак по Факту 3.3.10(iv) $QV_{r'}(\bar{\alpha}^m) = V_{r'}(\bar{\alpha}^m)$ и следовательно, по Определению 2.2.1 существует $\delta_1, \delta_2 \in r'(M')$ такой, что $\delta_1 < V_{r'}(\bar{\alpha}^m) < \delta_2$. Таким образом, для $\delta_1, \delta_2 \in r(M') = r'(M')$ имеем, что

$$\delta_1 < QV_r(\bar{\alpha}) = QV_{r'}(\bar{\alpha}^m) = V_{r'}(\bar{\alpha}^m) < \delta_2.$$

Это означает что r иррациональный и $QV_r(\bar{\alpha}) = V_r(\bar{\alpha})$. Заметим что $r \in O_m$, $\bar{\beta}(m) = \bar{\alpha}_{m-1}\bar{\beta}(m)^m$ и следовательно $V_{r'}(\bar{\beta}(m)^m) = V_r(\bar{\beta}(m))$ и $p_m \not\perp^w r'$. Таким образом, так как (a) $V_{p_m} < \delta_2 < V_{p_m}(\bar{\beta}(m)^m)$, мы имеем по Следствию 3.3.22(i) что

$$V_{r'}(\bar{\alpha}^m) \cap V_{r'}(\bar{\beta}(m)^m) = \emptyset \text{ or equivalently } V_r(\bar{\alpha}) \cap V_r(\bar{\beta}(m)) = \emptyset.$$

Таким образом $\delta \notin V_r(\bar{\beta}(m))$. Заметим, что по Утверждение 1.1.11(i) $\phi(M', \bar{a}, \bar{\beta}(m)) \cap M = \emptyset$ и по Утверждению 1.1.11(iii) $\phi(M', \bar{a}, \bar{\beta}(m)) \cap r(M') = \phi(M', \bar{a}, \bar{\beta}(m))$ и следовательно, $\phi(M', \bar{a}, \bar{\beta}(m)) \subseteq V_r(\bar{\beta}(m))$. Тогда $\delta \notin \phi(M', \bar{a}, \bar{\beta}(m))$.

Из выбранных отберем $\delta \in \phi(M', \bar{a}, \bar{\alpha})$ следует что

$$M' \models \neg K_\phi(\bar{a}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}(1), \ldots, \bar{\beta}(n)).$$

Докажем достаточность. Предположим, что существует $b \in \phi(M', \bar{a}, \bar{\alpha}) \cap M$. Тогда, так как $\forall m(1 \leq m \leq n)\ tp(\bar{\alpha}|M) = tp(\bar{\beta}(m)|M)$, из Утверждения 1.1.11(i) имеем $M' \models K_\phi(\bar{a}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}(1), \ldots, \bar{\beta}(n))$. $\diamondsuit$

Замечание 3.3.24. *Пусть $\phi(x, \bar{a}, \bar{\alpha})$ – выпуклая $(M \cup \bar{\alpha})$-формула такая, что $\phi(M', \bar{a}, \bar{\alpha}) \cap M = \emptyset$. Тогда существует сечение (C, D) из M такое, что $C < \phi(M', \bar{a}, \bar{\alpha}) < D$. По Замечанию 1.2.14, Факту 1.2.16, Note 1.2.17 мы имеем один из следующих случаев:*

(i) (C, D) иррациональный и $\exists r \in S_1(M)$, r иррациональный $(C_r, D_r) = (C, D)$.

(a) $\phi(M', \bar{a}, \bar{\alpha}) \subset V_r(\bar{\alpha})$ and $V_r(\bar{\alpha})$ не определимое.

(b) $\phi(M', \bar{a}, \bar{\alpha}) \subseteq V_r(\bar{\alpha})$ and $V_r(\bar{\alpha})$ определимое.

(ii) (C, D) рациональное и $\exists r \in S_1(M)$, $\phi(M', \bar{a}, \bar{\alpha}) \subseteq QV_r(\bar{\alpha}) \subset r(M') = (C_r, D_r)(M') = (C, D)(M')$.

(iii) (C, D) квазирациональное, не рациональное и

$$\exists r, p \in S_1(M), \phi(M', \bar{a}, \bar{\alpha}) \subseteq QV_r(\bar{\alpha}) \cup QV_p(\bar{\alpha}) = (C, D)(M'),$$

$$C = C_r = C_p,\ D = D_r = D_p.$$

3.3.3 Главная Теорема

Теорема 3.3.25. *Пусть M — модель слабо о-минимальной теории, M' — большое насыщенное элементарное расширение M, а $\bar{\alpha} \in M' \setminus M$. Тогда существует $\bar{\gamma} \in M' \setminus M$ такой что для любой $(M \cup \bar{\alpha})$-определимой формулы $\phi(x, \bar{y}, \bar{\alpha})$ существует $(M \cup \bar{\gamma})$-определимая формула $K_\phi(\bar{y}, \bar{\alpha}, \bar{\gamma})$, такая что*

$$\forall \bar{a} \in M[\exists b \in M, M' \models \phi(b, \bar{a}, \bar{\alpha}) \Longleftrightarrow M' \models K_\phi(\bar{a}, \bar{\gamma})].$$

Доказательство Теоремы 3.3.25 содержит два этапа:

I. Выбор $\bar{\gamma}$.

II. Построение Θ_m^ϕ и заключение.

I. Выбор $\bar{\gamma}$ Мы будем выбирать $\bar{\gamma}$ путем обратной индукции на $m := n, n-1, \ldots, 1$, такой что следующее истинно:

B1 $\bar{\gamma}(n) \subseteq \bar{\gamma}(n-1) \subseteq \cdots \subseteq \bar{\gamma}(1) = \bar{\gamma} \in M' \setminus M, \bar{\gamma}(m) \setminus \bar{\gamma}(m+1) = \bar{\gamma}'(m)$ Для любого i $(1 \le i \le m)$ пусть $q_{i,m} := tp(\alpha_i | M \cup \bar{\alpha}_{i-1} \cup \bar{\gamma}(m)), p_i := tp(\alpha_i | M \cup \bar{\alpha}_{i-1})$. Мы предположим, что $\bar{\gamma}(n+1) = \emptyset$, $q_{i,n+1} = p_i$

B2$_m$ Для любой формулы $\psi(\bar{z}, \bar{\alpha}_{m-1}, y_m, \bar{\gamma}(m+1))$, определимой над $(M \cup \bar{\alpha}_{m-1} \cup \bar{\gamma}(m+1))$, существует $(M \cup \bar{\alpha}_{m-1} \cup \bar{\gamma}(m))$-формула $F_\psi(\bar{\alpha}_{m-1}, y_m, \bar{\gamma}(m))$ такая, что формула $F_\psi(\bar{\alpha}_{m-1}, y_m, \bar{\gamma}(m))$ является строгим $(\psi, \bar{\gamma}'(m))$-определением $q_{m,m+1}$, то есть $F_\psi(\bar{\alpha}_{m-1}, y_m, \bar{\gamma}(m)) \in q_{m,m}$ и

$$\forall \bar{c} \in M[M' \models \exists y_m(\psi(\bar{c}, \bar{\alpha}_{m-1}, y_m, \bar{\gamma}(m+1)) \wedge$$

$$F_\psi(\bar{\alpha}_{m-1}, y_m, \bar{\gamma}(m))) \to \forall y_m(F_\psi(\bar{\alpha}_{m-1}, y_m, \bar{\gamma}(m)) \to \psi(\bar{c}, \bar{\alpha}_{m-1}, y_m, \bar{\gamma}(m+1))]$$

B3$_{i,m}$ $(1 \le i \le m)$ Если p_i является изолированным, то $q_{i,m}(M') = p_i(M')$. Если p_i является неизолированным, то $QV_{p_i}(\bar{\alpha}^i) \subset q_{i,m}(M')$, и если p_i является иррациональным, то существует $\delta_{i,m}, \delta'_{i,m} \in q_{i,m}(M')$ такой, что $\delta_{i,m} < V_{p_i}(\bar{\alpha}^i) < \delta'_{i,m}$.

Заметим, что для любых $m(1 \le m \le n)$ и $i(1 \le i \le m)$, если p_i является не изолированной и $QV_{p_i}(\bar{\alpha}^i) \subset q_{i,m}(M')$, тогда по Определению 3.3.9 $QV_{p_i}(\bar{\alpha}^i) \subseteq QV_{q_{i,m}}(\bar{\alpha}^i)$.

Шаг n Пусть $q_{n,n+1} := tp(\alpha_n | M \cup \bar{\alpha}_{n-1})$. Тогда, если $q_{n,n+1}$ является строго определимой, тогда положим $\bar{\gamma}'_n = \bar{\gamma}_n = \emptyset$. В этом случае $\forall i(1 \le i \le n)$ $p_i = q_{i,n}$ что означает **B2**$_n$, **B3**$_{i,n}$. Если $q_{n,n+1}$ не является строго определимой, тогда обозначим $A := M, \bar{\alpha}' := \bar{\alpha}_{n-1}, \bar{\beta} := \alpha_n$. Таким образом, согласно Теореме 2.1.26 $\exists \bar{\gamma}'_n = \bar{\gamma}_n \in M'$ такое что Условия **B2**$_n$, **B3**$_{i,n}$ $(1 \le i \le n)$ являются истинными.

Шаг m Если $q_{m,m+1}$ является строго определимой, тогда определяя $\bar{\gamma}'(m) = \emptyset, \bar{\gamma}(m) := \bar{\gamma}(m+1)$ и согласно Утверждению 1.1.8(ii) и Определению 1.1.7 **B2**$_m$ является истинным. По индукции предположение для любого $i(1 \le i \le m+1)$ Условия **B3**$_{i,m+1}$ являются истинными и так как в этом случае $q_{i,m}(M') = q_{i,m+1}(M')$ мы имеем **B3**$_{i,m}$.

Если $q_{m,m+1}$ является не строго определимой, тогда обозначим $A := M \cup \bar{\gamma}(m+1), \bar{\alpha}' := \bar{\alpha}_{m-1}, q := q_{m,m+1} = tp(\alpha_m | A \cup \bar{\alpha}_{m-1}), \bar{\beta} := \bar{\alpha}^m$. Таким образом, мы оказываемся в условиях Теоремы 2.1.26 и,следовательно, существует $\bar{\gamma}' \in M'$ такое что q является строго определимой над $(A \cup \bar{\alpha}' \cup \bar{\gamma}', \bar{\alpha}')$ для $\bar{\beta}$. Обозначим $\bar{\gamma}'(m) := \bar{\gamma}'$, $\bar{\gamma}(m) := \bar{\gamma}(m+1) \cup \bar{\gamma}'(m)$. Согласно Определению 2.1.24(ii), $\bar{\gamma}'(m)$ удовлетворяет **B2**$_m$. Покажем, что $\bar{\gamma}(m)$ удовлетворяет **B3**$_{i,m}$. Согласно Определению 2.1.24(iii),(iv) и так как $q_{m,m+1}$ является строго определимой над $((M \cup \bar{\gamma}(m+1)) \cup \bar{\alpha}_{m-1} \cup \bar{\gamma}'(m), \bar{\alpha}_{m-1})$ for $\bar{\alpha}^m$, следующее истинно:

E$_{i,m}$ $(1 \le i \le m)$ **(a)** $(i \ne m)$ Если $q_{i,m+1}$ является изолированным согласно $(M \cup \bar{\alpha}_{i-1} \cup \bar{\gamma}(m+1))$-определимая формула $F(y)$ тогда $q_{i,m}$ является изолированным согласно $F(y)$. Заметим, что $i \neq m$, потому что $q_{m,m+1}$ является не строго определимой.

(b) Если тип $q_{i,m+1}$ является квазирациональным, тогда существует $\eta_{i,m} \in q_{i,m+1}(M') \setminus QV_{q_{i,m+1}}(\bar{\alpha}^i)$, такой что для любого $\delta \in QV_{q_{i,m+1}}(\bar{\alpha}^i)$

$$tp(\eta_{i,m}|M' \cup \bar{\alpha}_{i-1} \cup \bar{\gamma}(m)) = tp(\delta|M' \cup \bar{\alpha}_{i-1} \cup \bar{\gamma}(m)).$$

(c) Если тип $q_{i,m+1}$ является иррациональным, тогда существуют элементы $\eta_{i,m}, \eta'_{i,m} \in q_{i,m+1}(M')$, такие что $\eta_{i,m} < V_{q_{i,m+1}}(\bar{\alpha}^i) < \eta'_{i,m}$; и если

$$tp(\eta_{i,m}|M' \cup \bar{\alpha}_{i-1} \cup \bar{\gamma}(m)) = tp(\eta'_{i,m}|M' \cup \bar{\alpha}_{i-1} \cup \bar{\gamma}(m)).$$

не является изолированным, тогда $QV_{q_{i,m+1}}(\bar{\alpha}) \subset q_{i,m}(M')$.

Фиксируем i, $(1 \leq i \leq m)$. Пусть p_i является изолированным и $F_i(y_i)$ be an $(M \cup \bar{\alpha}_{m-1})$-определимая формула, такая что $F_i(M') = p_i(M')$. Тогда $q_{i,m+1}$ является изолированным согласно одинаковой формуле F_i, так как согласно индукции предположение $q_{i,m+1}(M') = p_i(M') = F_i(M')$. Тогда согласно $\mathbf{E}_{i,m}$**(a)** $q_{i,m}(M') = q_{i,m+1}(M') = p_i(M') = F_i(M')$.

Пусть p_i является не изолированным. Тогда согласно индукции предположение $\mathbf{B3}_{i,m+1}$ для любого $i(1 \leq i \leq m+1)$ такое что p_i является не изолированным, $QV_{p_i}(\bar{\alpha}^i) \subset q_{i,m+1}(M')$. Для доказательства $QV_{p_i}(\bar{\alpha}^i) \subset q_{i,m}(M')$ рассмотрим случаи, порожденные $\mathbf{E}_{i,m}$:

(a1) Пусть $q_{i,m+1}$ является изолированным. Тогда согласно

$\mathbf{E}_{i,m}$**(a)**, $q_{i,m}(M') = q_{i,m+1}(M')$ и,следовательно, $QV_{p_i}(\bar{\alpha}^i) \subset q_{i,m}(M') = q_{i,m+1}(M')$.

(b1) Пусть тип $q_{i,m+1}$ является квазирациональным. Напомним, что $q_{i,m+1} = tp(\alpha_i|M \cup \bar{\alpha}_{i-1} \cup \bar{\gamma}(m+1))$ и, следовательно, $\alpha_i \in QV_{q_{i,m+1}}(\bar{\alpha}^i)$. Тогда согласно $\mathbf{E}_{i,m}$**(b)** имеет место соотношение $QV_{q_{i,m+1}}(\bar{\alpha}^i) \subset q_{i,m}(M')$, потому что $q_{i,m} = tp(\alpha_i|M \cup \bar{\alpha}_{i-1} \cup \bar{\gamma}(m))$. По Определению 3.3.9 и по индукционному предположению, $QV_{p_i}(\bar{\alpha}^i) \subseteq QV_{q_{i,m+1}}(\bar{\alpha}^i)$. Таким образом получаем, что $QV_{p_i}(\bar{\alpha}^i) \subset q_{i,m}(M')$.

(c1) Пусть тип $q_{i,m+1}$ является иррациональным. Тогда в силу Факта 3.3.10(iv) имеем место равенство $QV_{q_{i,m+1}}(\bar{\alpha}^i) = V_{q_{i,m+1}}(\bar{\alpha}^i)$. Как в (b1), так как $q_{i,m} = tp(\alpha_i|M \cup \bar{\alpha}_{i-1} \cup \bar{\gamma}(m))$, согласно Примечанию 1.2.2(ii) и согласно $\mathbf{E}_{i,m}$**(c)** здесь существуют $\eta_{i,m}, \eta'_{i,m} \in q_{i,m}(M')$, такие что

$$\eta_{i,m} < V_{q_{i,m+1}}(\bar{\alpha}^i) < \eta'_{i,m}.$$

Тогда согласно Примечанию 1.2.2(ii) верно включение $V_{q_{i,m+1}}(\bar{\alpha}^i) \subset q_{i,m}(M')$. А так как (Определение 3.3.9) $QV_{p_i}(\bar{\alpha}^i) \subseteq QV_{q_{i,m+1}}(\bar{\alpha}^i) = V_{q_{i,m+1}}(\bar{\alpha}^i)$, получаем, что $QV_{p_i}(\bar{\alpha}^i) \subset q_{i,m}(M')$.

Пусть p_i является иррациональным. Напомним тогда, что согласно Факту 3.3.10(iv) $QV_{p_i}(\bar{\alpha}^i) = V_{p_i}(\bar{\alpha}^i)$. По индукционному предположению существуют $\delta_{i,m+1}$, $\delta'_{i,m+1} \in q_{i,m+1}(M')$, такие что $\delta_{i,m+1} < V_{p_i}(\bar{\alpha}^i) < \delta'_{i,m+1}$ю

Рассмотрим случаи, порожденные $\mathbf{E}_{i,m}$ для доказательства

$$(*)\ \exists \delta_{i,m}, \delta'_{i,m} \in q_{i,m}(M') \text{ such that } \delta_{i,m} < V_{p_i}(\bar{\alpha}^i) < \delta'_{i,m}.$$

(a2) Пусть $q_{i,m+1}$ является изолированным. Тогда согласно $\mathbf{E}_{i,m}$**(a)**, $q_{i,m+1} = q_{i,m+1}$ и,следовательно, $\delta_{i,m+1}, \delta'_{i,m+1} \in q_{i,m}$. Это означает (*).

(b2) Пусть тип $q_{i,m+1}$ является квазирациональным. Без потери общности мы предположим, что $q_{i,m+1}$ является квазирациональным вправо и, следовательно, $QV_{q_{i,m+1}}(\bar{\alpha}^i)^+ = q_{i,m+1}(M')^+$. Так как в силу **(b1)** верно, что $V_{p_i}(\bar{\alpha}^i) \subseteq QV_{q_{i,m+1}}(\bar{\alpha}^i) \subset q_{i,m}(M')$ и согласно Примечанию 2.1.25(ii)(b) $q_{i,m}(M')^+ = q_{i,m}(M')^+$, мы имеем $\delta'_{i,m+1} \in QV_{i,m+1}(M')$ и, следовательно, $\delta'_{i,m+1} \in q_{i,m}(M')$. By $\mathbf{E}_{i,m}$**(b)** и так как $\alpha_i \in QV_{q_{i,m+1}}(\bar{\alpha}^i)$, то существует $\eta_{i,m} \in q_{i,m+1}(M') \setminus QV_{q_{i,m+1}}(\bar{\alpha}^i)$, такой что $tp(\eta_{i,m}|M' \cup \bar{\alpha}_{i-1} \cup \bar{\gamma}(m)) = tp(\alpha_i|M' \cup \bar{\alpha}_{i-1} \cup \bar{\gamma}(m)) = q_{i,m}$, то есть $\eta_{i,m} \in q_{i,m}(M')$.

Так как $QV_{q_{i,m+1}}(\bar{\alpha}^i)^+ = q_{i,m+1}(M')^+$, мы имеем $\eta_{i,m} < QV_{i,m+1}(\bar{\alpha}^i)$. Значит $\eta_{i,m} < V_{p_i}(\bar{\alpha}^i)$, так как $V_{p_i}(\bar{\alpha}^i) \subset QV_{q_{i,m+1}}(\bar{\alpha}^i)$. Таким образом, $\eta_{i,m} < V_{p_i}(\bar{\alpha}^i) < \delta'_{i,m+1}$, $\eta_{i,m}, \delta'_{i,m+1} \in q_{i,m}(M')$. Это означает (*).

(c2) Пусть $q_{i,m}$ является иррациональным. (*) следует из **(c1)** и Замечания 2.1.25(iii).

Итак, $\mathbf{B3}_{i,m}$ является истинным. Таким образом, выбранный $\bar{\gamma}$ удовлетворяет условиям **B1**-**B3** и подводя итоги, согласно Примечанию 2.1.25 мы имеем

Утверждение 3.3.26. $(i)_m$ *Если p_m является квазирациональным, тогда $QV_{p_m} \subset q_{m,m}(M')$,*
$[q_{m,m}(M')^+ = QV_{p_m}(\bar{\alpha})^+$ тогда и только тогда, когда p_m является квазирациональным вправо] и
$[q_{m,m}(M')^- = QV_{p_m}(\bar{\alpha})^-$ тогда и только тогда, когда p_m является квазирациональным влево].

$(ii)_m$ *Если p_m является иррациональным, тогда $\exists \delta_1, \delta_2 \in q_{m,m}(M')$ такое что $\delta_1 < V_{p_m}(\bar{\alpha}) < \delta_2$.*

$(iii)_m$ *Если p_m является изолированным, тогда $q_{m,m}(M') = p_m(M')$.*

II. Построение Θ^{ϕ}_m и заключение.

Обозначим по обратной индукцией
$m := n, n-1, \ldots, 1$ две последовательности формул
$\Phi := \langle \phi_m(x, \bar{z}, \bar{\alpha}_{m-1}, y_m, \bar{\gamma}(m+1)) \mid 1 \leq m \leq n,\ \phi_m$ есть $(l(\bar{z})+2)$-$(M \cup \bar{\alpha}_{m-1} \cup \bar{\gamma}(m+1))$-формула $\rangle$ и $\mathbf{F} := \langle F_m(\bar{\alpha}_{m-1}, y_m, \bar{\gamma}(m)) \mid 1 \leq m \leq n,\ F_m$ есть 1-$(M \cup \bar{\alpha}_{m-1} \cup \bar{\gamma}(m))$-формула $\rangle$ такая, что $\forall m\ (1 \leq m \leq n)$ следующее верно:

$\mathbf{C1}_{m\neq n}$ $\phi_m(x, \bar{z}, \bar{\alpha}_{m-1}, y_m, \bar{\gamma}(m+1)) :=$

$\forall y_{m+1}(F_{m+1}(\bar{\alpha}_{m-1}, y_m, y_{m+1}, \bar{\gamma}(m+1)) \to \phi_{m+1}(x, \bar{z}, \bar{\alpha}_{m-1}, y_m, y_{m+1}, \bar{\gamma}(m+1)))$

$\mathbf{C2}$ $_m$ $F_m(y_m)$ точно $(\phi_m, \bar{\gamma}'(m))$ определяется из $q_{m,m+1}$, то есть формула $F_m(y_m) \in tp(\alpha_m|M \cup \bar{\alpha}_{m-1} \cup \bar{\gamma}(m)) = q_{m,m}$ и для любых $b, \bar{a} \in M$ верно, что

$$\begin{aligned} M' \ \models \ & \exists y_m\big(\phi_m(b, \bar{a}, \bar{\alpha}_{m-1}, y_m, \bar{\gamma}(m+1)) \wedge F_m(\bar{\alpha}_{m-1}, y_m, \bar{\gamma}(m))\big) \to \\ & \to \forall y_m\big(F_m(\bar{\alpha}_{m-1}, y_m, \bar{\gamma}(m)) \to \phi_m(b, \bar{a}, \bar{\alpha}_{m-1}, y_m, \bar{\gamma}(m+1))\big) \end{aligned}$$

Шаг n $\phi_n(x, \bar{z}, \bar{\alpha}_{n-1}, y_n) := \phi(x, \bar{z}, \bar{\alpha}_{n-1}, y_n)$, $\bar{\gamma}_{n+1} := \emptyset$.

Если тип $q_{n,n+1} := p_n = tp(\alpha_n|M \cup \bar{\alpha}_{n-1})$ строго определим, тогда формула $F_n(\bar{\alpha}_{n-1}, y_n)$ строго ϕ-определяется из $q_{n,n+1}$. Ясно что $F_n(\bar{\alpha}_{n-1}, y_n)$ удовлетворяет $\mathbf{C2}_n$ по доказательству Утверждения 1.1.8 и из Определения 1.1.7. Если $q_{n,n+1}$ не строго определимо тогда по $\mathbf{B2}_n$ мы получим $(M \cup \bar{\alpha}_{n-1} \cup \gamma_n)$-определимую 1-формулу $F_n(\bar{\alpha}_{n-1}, y_n, \bar{\gamma}_n)$ которая удовлетворяет Условию $\mathbf{C2}_n$ для формулы $\phi(x, \bar{z}, \bar{\alpha}_{n-1}, y_n)$.

Шаг m. Рассмотрим тип $q_{m,m+1} := tp(\alpha_m|M \cup \bar{\alpha}_{m-1} \cup \bar{\gamma}(m+1))$ and $\phi_m(x, \bar{z}, \bar{\alpha}_{m-1}, y_m, \bar{\gamma}(m+1))$ получаем по Условию $\mathbf{C1}_m$. Если $q_{m,m+1}$ строго определимо тогда $F_m(\bar{\alpha}_{m-1}, y_m, \bar{\gamma}(m+1))$, которая строго ϕ_m-определяется из $q_{m,m+1}$, удовлетворяет Условию $\mathbf{C2}_m$. если $q_{m,m+1}$ не строго определимо тогда $\mathbf{B2}_m$ для формулы $\phi_m(x, \bar{z}, \bar{\alpha}_{m-1}, y_m, \bar{\gamma}(m+1))$ существует $(M \cup \bar{\alpha}_{m-1} \cup \bar{\gamma}(m))$-определимая 1-формула $F_m(\bar{\alpha}_{m-1}, y_m, \bar{\gamma}(m))$ такая, что она удовлетворяет $\mathbf{C2}_m$.

Утверждение 3.3.27. $(i)_m$ *Если тип* p_m *неизолированный, тогда верно, что* $QV_{p_m}(\bar{\alpha}^m) \subset F_m(\bar{\alpha}_{m-1}, M', \bar{\gamma}(m))$. *Если же тип* p_m *изолированный, тогда* $q_{m,m}(M') = p_m(M')$.

$(ii)_m$ $\forall b, \bar{a} \in M[M' \models \phi_m(b, \bar{a}, \bar{\alpha}_{m-1}, \alpha_m, \bar{\gamma}(m)) \Longleftrightarrow$

$$M' \models \forall y_m(F_m(\bar{\alpha}_{m-1}, y_m, \bar{\gamma}(m)) \to \phi_m(b, \bar{a}, \bar{\alpha}_{m-1}, y_m, \bar{\gamma}(m+1)))]$$

$(iii)_m$ $\forall b, \bar{a} \in M[M' \models \phi_m(b, \bar{a}, \bar{\alpha}_{m-1}, \alpha_m, \bar{\gamma}(m)) \Longleftrightarrow$

$$M' \models \phi_{m-1}(b, \bar{a}, \bar{\alpha}_{m-1}, \bar{\gamma}_{m-1})]$$

Доказательство Утверждения 3.3.27 $(i)_m$ Предположим, что p_m не изолированный. Тогда по $\mathbf{B3}_{m,m}$ мы имеем $QV_{p_m}(\bar{\alpha}^m) \subset q_{m,m}(M')$ и из $\mathbf{C2}_m$ следует $QV_{p_m}(\bar{\alpha}) \subset q_{m,m}(M') \subset F_m(\bar{\alpha}_{m-1}, M', \bar{\gamma}(m))$. Если p_m изолированный тогда $(i)_m$ верно по $\mathbf{E3}_{m,m}$.

$(ii)_m$ Так как $F_m(\bar{\alpha}_{m-1}, y_m, \bar{\gamma}(m)) \in q_{m,m}$, $(ii)_m$ следует из $\mathbf{C2}_m$.

$(iii)_m$ Следует из $(ii)_m$ и $\mathbf{C1}_{m-1}$.$\diamondsuit$

Обозначим: $\Theta^\phi_m(\bar\alpha_{m-1}, y_m, \dots, y_n, \bar\gamma(m)) := F_m(\bar\alpha_{m-1}, y_m, \bar\gamma(m)) \wedge$

$$F_{m+1}(\bar\alpha_{m-1}, y_m, y_{m+1}, \bar\gamma(m+1)) \wedge \dots \wedge F_n(\bar\alpha_{m-1}, y_m, \dots, y_n, \bar\gamma_n).$$

Ясно что $(*)_m\ \Theta^\phi_m(\bar\alpha_{m-1}, \bar y^m, \bar\gamma(m)) \in tp(\bar\alpha^m | M \cup \bar\alpha_{m-1} \cup \bar\gamma(m))$.

Заметим, что из Утверждения 3.3.27 $(ii)_m$, $(iii)_m$, $\mathbf{C2}_m$, $1 \le m \le n$ имеем, что

$(**)_m\ \forall b, \bar a \in M[M' \models \phi(b, \bar a, \bar\alpha) \Longleftrightarrow$

$$M' \models \forall \bar y^m(\Theta^\phi_m(\bar\alpha_{m-1}, \bar y^m, \bar\gamma(m)) \to \phi(b, \bar a, \bar\alpha_{m-1}, \bar y^m))]$$

Действительно, заметим что $\phi_{m-1}(b, \bar a, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, \bar\gamma(m)) =$ $\forall y_m(F_m(y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m, \bar\gamma(m)) \to \phi_m(b, \bar a, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m, \bar\gamma(m+1)))$ и для любых формул $A(x), A(x, y), C(x, y, z)$ следующее верно:

$$\forall x(A(x) \to \forall y(B(x, y) \to C(x, y, z))) \equiv \forall x \forall y((A(x) \wedge B(x, y)) \to C(x, y, z)).$$

Таким образом, $\phi_{m-1}(b, \bar a, \bar y_{m-1}) \equiv \forall \bar y^m(\Theta^\phi_m(\bar y_{m-1}, \bar y^m, \bar\gamma(m)) \to \phi(b, \bar a, \bar y))$.

Утверждение 3.3.28. *Пусть $r \in O_m$. Тогда $\exists \beta \in r(M') \setminus QV_r(\bar\alpha)$, $\forall \delta \in QV_r(\bar\alpha)$,*

$$[tp(\beta | M \cup \bar\alpha_{m-1} \cup \bar\gamma(m)) = tp(\delta | M \cup \bar\alpha_{m-1} \cup \bar\gamma(m))].$$

Доказательство Утверждения 3.3.28 Заметим, что если $r \in O_m$, то $\bar\alpha_{m-1} \perp^w r$, $\bar\alpha_m \not\perp^w r$ и
$QV_r(\bar\alpha) \neq \emptyset$. Пусть δ произвольный элемент из $r(M')$, $r' := tp(\delta | M \cup \bar\alpha_{m-1})$. Тогда, так как $\bar\alpha_{m-1} \perp^w r$ имеем $r(M') = r'(M')$ и следовательно, $QV_r(\bar\alpha) = QV_{r'}(\bar\alpha^m)$. Заметим что $\bar\alpha_m \not\perp^w r$ и следовательно $\alpha_m \not\perp^w r'$. Это означает, что $p_m \not\perp^w r'$. Так как $r \in O_m \subset S_1(M)$, r не алгебраический 1-тип над моделью. Тогда существует два случая:

Случай 1 r квазирациональный. **Случай 2** r иррациональный.

Случай 1 По Замечанию 1.2.9(iii) r' квазирациональный и по Следствию 4.3.8(i) p_m есть квазирациональный. Таким образом, по Утверждению 3.3.26(i) и Предложению 4.1.32(ii) $\exists \beta \in r'(M') \setminus QV_{r'}(\bar\alpha^m)$ такой что $\forall \delta \in QV_{r'}(\bar\alpha^m)$

$$[tp(\beta | M \cup \bar\alpha_{m-1} \cup \bar\gamma(m)) = tp(\delta | M \cup \bar\alpha_{m-1} \cup \bar\gamma(m))]$$

Случай 2 По Замечанию 1.2.9(ii) тип r' иррациональный. По Следствию 4.3.8(ii) тип p_m иррациональный. В силу Замечания 3.3.26(ii) и Предложения 4.1.32(iii) существуют $\beta_1, \beta_2 \in r'(M')$, такие, что $\beta_1 < V_{r'}(\bar\alpha^m) < \beta_2$ и $[tp(\beta_1 | M \cup \bar\alpha_{m-1} \cup \bar\gamma(m)) = tp(\beta_2 | M \cup \bar\alpha_{m-1} \cup \bar\gamma(m))]$. $\Diamond$

Утверждение 3.3.29. *Пусть $r \in O_m$, тогда для любого $\delta \in QV_r(\bar\alpha)$ существует $\bar\mu \in S^\phi_m$, такой что $tp(\bar\mu | M \cup \bar\alpha_{m-1} \cup \bar\gamma(m)) = tp(\bar\alpha^m | M \cup \bar\alpha_{m-1} \cup \bar\gamma(m))$ и $\delta \notin QV_r(\bar\alpha_{m-1}, \bar\mu)$. (Где, $S^\phi_m := \{\bar\mu' \in M' | M' \models \Theta^\phi_m(\bar\alpha_{m-1}, \bar\mu', \bar\gamma(m))\}$.)*

Доказательство Утверждения 3.3.29. Предположим $\delta \in QV_r(\bar{\alpha})$. По Утверждению 3.3.28 мы имеем, что существует $\delta_1 \in r(M') \setminus QV_r(\bar{\alpha})$, такой что $tp(\delta_1|M \cup \bar{\alpha}_{m-1} \cup \bar{\gamma}) = tp(\delta|M \cup \bar{\alpha}_{m-1} \cup \bar{\gamma})$. Обозначим $q(\bar{y}^m, \delta_1) := tp(\bar{\alpha}^m|M \cup \bar{\alpha}_{m-1} \cup \bar{\gamma}(m) \cup \{\delta_1\})$. Тогда $q(\bar{y}^m, \delta)$ непротиворечиво и следовательно, так как M' есть $|M|^+$-насыщенная существует $\bar{\mu} \in M'$ такая что $\models q(\bar{\mu}, \delta)$. Заметим, что из определения $q(\bar{y}^m, \delta_1)$ следует что $tp(\bar{\alpha}^m|M \cup \bar{\alpha}_{m-1} \cup \bar{\gamma}(m)) = tp(\bar{\mu}|M \cup \bar{\alpha}_{m-1} \cup \bar{\gamma}(m))$ и, следовательно, по $(*)_m$, $\bar{\mu} \in S_m^{\phi}$. Рассмотрим произвольную 1-$(M \cup \bar{\alpha}_{m-1} \cup \bar{\mu})$-формулу $\psi(x, \bar{\alpha}_{m-1}, \bar{\mu})$, такую что $\psi(M', \bar{\alpha}_{m-1}, \bar{\mu}) \subseteq QV_r(\bar{\alpha}_{m-1}, \bar{\mu})$. Тогда, так как $tp(\bar{\alpha}|M) = tp(\bar{\alpha}_{m-1}, \bar{\mu}|M)$, из Утверждения 1.1.11(iii) мы имеем $\psi(M', \bar{\alpha}_{m-1}, \bar{\alpha}^m) \subseteq QV_r(\bar{\alpha})$. Таким образом, так как $\delta_1 \notin QV_r(\bar{\alpha})$, имеем $M' \models \neg\psi(\delta_1, \bar{\alpha}_{m-1}, \bar{\alpha}^m)$. Это означает, что $\neg\psi(\delta_1, \bar{\alpha}_{m-1}, \bar{y}^m) \in tp(\bar{\alpha}^m|M \cup \bar{\alpha}_{m-1} \cup \gamma(m) \cup \{\delta_1\}) = q(\bar{y}^m, \delta_1)$. Значит, $\neg\psi(\delta, \bar{\alpha}_{m-1}, \bar{y}^m) \in q(\bar{y}^m, \delta)$ и следовательно, $\delta \notin \psi(M', \bar{\alpha}_{m-1}, \bar{\mu})$. Следовательно, произвольность выбора ψ означает, что $\delta \notin QV_r(\bar{\alpha}_{m-1}, \bar{\mu})$. $\diamondsuit$

Таким образом, по $(*)_m, (**)_m$, Замечание 3.3.29 мы оказываемся в условиях Теоремы 3.3.13. Это доказывает теорему 3.3.25.$\diamondsuit$

Таким образом, из Теоремы 3.3.25 и Теоремы 3.3.1 следует

Теорема 3.3.30. *Пусть M модель слабо о-минимальной теории, M^+ обогащение модели M семейством одноместных (унарных) предикатов. Тогда M^+ модель слабо о-минимальной теории тогда и только тогда, когда множество реализаций каждого предиката есть конечное число выпуклых подмножеств.*

3.4 О-минимальные обогащения и одноместные функции

Получен критерий существенности о-минимального обогащения моделей о-минимальных теорий с плотным линейным порядком, допускающих сокращение воображаемых элементов в терминах частичных одноместных функций (Теорема 3.3.13).

Определение 3.4.1. *[59] Модель M сигнатуры Σ упорядочено минимальная (о-минимальная), если некоторая формула сигнатуры Σ задает линейный порядок и ее любое формульное множество, определимое с параметрами из M, есть объединение конечного числа открытых интервалов и элементов.*

Всюду в подразделе предполагается, что формульный линейный порядок является плотным. Модель с формульным плотным линейным порядком будем называть плотной, а ее теорию плотной. Формульно определимые множества, отношения, функции модели $M =< M, \Sigma >$ будем называть M-определимыми или определимыми в M. Теория о-минимальная, если хотя бы одна из ее моделей о-минимальная. Теория строго о-минимальная, если все ее модели о-минимальные. Доказано [28], [27], классы о-минимальных и сильно о-минимальных теорий совпадают.

Определение 3.4.2. *(i) Говорят, $M^+ = \langle M, \Sigma^+\rangle$ есть обогащение M, если $M = \langle M, \Sigma\rangle$ и $\Sigma \subset \Sigma^+$. В этом случае, теорию $T^+ = Th(M^+)$ назовем обогащением теории $T = Th(M)$.*

(ii) Обогащение M^+ модели M существенно, если существует $P^n \in \Sigma^+ \setminus \Sigma$, что для любой формулы $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$, $l(\bar{x}) = n$ сигнатуры Σ, для любого кортежа элементов $\bar{a} \in M$ верно $P((M^+)^n) \neq \Phi(M^n, \bar{a})$.

Определение 3.4.3. [29] *Говорят, теория T сигнатуры Σ допускает сокращение воображаемых элементов, если для всех $M \in Mod(T)$, для любой формулы $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ сигнатуры Σ, для любого $\bar{a} \in M^{l(\bar{y})}$ существует $\bar{b} = \langle b_1, \ldots, b_n\rangle \in M^n$, что $\forall M' \succ M$, $\forall f \in Aut(M')$ верно:*

$$\forall \bar{c} \in M'[\phi(\bar{c}, \bar{a}) \Leftrightarrow \phi(f(\bar{c}), \bar{a})] \Longleftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} f(b_i) = b_i.$$

Теорема 3.4.4. *Пусть T о-минимальная плотная теория, допускающая сокращение воображаемых элементов, $M \in Mod(T)$, M^+ о-минимальное обогащение M. M^+ существенное обогащение M тогда и только тогда, когда существует элементарное расширение D^+ модели M^+, что класс всех D^+-определимых частичных одноместных функций не совпадает с классом всех D-определимых частичных одноместных функций.*

Доказательство. Достаточность следует из определения.

Необходимость.

Лемма 3.4.5. *Пусть D^+ ω-насыщенное элементарное расширение M^+. Если каждая одноместная D^+-определимая функция определима в D, то каждое D^+-определимое множество определимо в D.*

Доказательство. Покажем индукцией по n:
$(1)_n$ Каждое определимое множество в $(D^+)^n$ определимо в D.
$(2)_n$ Каждая частичная D^+-определимая функция $f : (D^+)^n \to D$ определима в D.

Для $n = 1$, $(2)_1$ условие Леммы, $(1)_1$ следует из $(2)_1$ и о-минимальности D^+.

$(1)_{n+1}$ Пусть $R \subset (D^+)^{n+1}$ определимое множество. Пусть S проекция R на $(D^+)^n$.

$$
\begin{aligned}
S &:= \{\bar{a} \in (D^+)^n : D^+ \models \exists y(R(\bar{a}, y))\} \\
S_\infty &:= \{\bar{a} \in S : D^+ \models \exists^\infty y(R(\bar{a}, y))\} \\
S_m &:= \{\bar{a} \in (D^+)^n : D^+ \models \exists^{!m} y(R(\bar{a}, y))\}
\end{aligned}
$$

S_∞ определимо в D^+ потому, что для плотной о-минимальной теории верна формульная определимость свойства бесконечности формульного множества, то есть для любой формулы $\phi(x, \bar{y})$ существует $n_\phi < \omega$, что если $\forall \bar{y} \exists^{>n_\phi} x \phi(x, \bar{y})$, то $\exists^\infty x \phi(x, \bar{y})$. В противном случае по теореме компактности А.И.Мальцева [61] приходим к существованию бесконечного, дискретно упорядоченного, определимого множества в о-минимальной модели с плотным линейным порядком. Противоречие с о-минимальностью. Положим, $l = n_R$

По индукционному предположению $(1)_n$ $S, S_1, ..., S_l, S_\infty$ определимы в D. Определим для m $(1 \leq m \leq l)$

$$
\begin{aligned}
R_{i,m} := \{(\bar{a}, b) \in R : \bar{a} \in S_m, 1 \leq i \leq m, b \ i\text{-ый элемент} \\
\text{принадлежащий } R(\bar{a}, D^+)\}
\end{aligned}
$$

Так как $R_{i,m}$ есть график определимой в D^+ функции, по индукционному предположению $(2)_n$, $R_{i,m}$ определим в D.

Рассмотрим $R' = S_\infty \times M - R$. R' определим в D^+.

Пусть

$$
\begin{aligned}
P_m &:= \{\bar{a} \in (D^+)^n : D^+ \models \exists^{!m} y(R'(\bar{a}, y))\} \\
P_\infty &= \{\bar{a} \in (D^+)^n : D^+ \models \exists^\infty y(R'(\bar{a}, y))\} \\
P_{i,m} &= \{(\bar{a}, b) : \bar{a} \in P_m, 1 \leq i \leq m, b \ i\text{-ый элемент} \\
&\qquad \text{принадлежащий } R'(\bar{a}, D^+)\}
\end{aligned}
$$

Пусть $N = n_{R'}$. Так как $P_{i,m}$ есть график определимой в D^+ функции, по индукционному предположению $(2)_n$, $P_{i,m}$ определим в D. Очевидно, $S_\infty = P_1 \dot\cup P_2 \dot\cup \ldots \dot\cup P_N \dot\cup P_\infty$.

Рассмотрим P_∞. Определяем формулу $\phi(\bar{x}, y)$ следующим образом: для любых $\bar{a}, b \in D^+$,

$$\models \phi(\bar{a}, b) \ \Leftrightarrow \models P_\infty(\bar{a}) \text{ и } b \text{ является граничной точкой } R(\bar{a}, D^+).$$

Число граничных точек для любого $\bar{a}$ не превышает $2k$, где $k = k_\phi < \omega$ максимальное число $\neg\phi(\bar{a}, D^+)$-отделимых интервалов и изолированных точек лежащих в множестве реализации $\phi(\bar{a}, D^+)$. Для любой формулы $\phi(\bar{y}, x)$

о-минимальной теории существование $k_\phi < \omega$ следует из теоремы компактности.

Рассмотрим функции $\phi_i,\ \psi_i,\ 0 \le i \le k-1$

$$\begin{array}{lcl} \phi_i(\bar a) = b & \Leftrightarrow & \bar a \in P_\infty \text{и } b \text{ есть начальная точка } i\text{-ого интервала или} \\ & & i\text{-ая изолированная точка в } R(\bar a, D^+); \\ \psi_i(\bar a) = b & \Leftrightarrow & \bar a \in P_\infty \text{ и } b \text{ есть концевая точка } i\text{-ого интервала или} \\ & & i\text{-ая изолированная точка в } R(\bar a, D^+). \end{array}$$

Очевидно, ϕ_i, ψ_i определимы в D^+ и, следовательно, определимы в D. Обозначим

$$\begin{array}{rcl} \theta_i(\bar x, y) & = & P_\infty(\bar x) \wedge (\phi_i(\bar x) < \psi_i(\bar x) \to \phi_i(\bar x) < y < \psi_i(\bar x)) \wedge \\ & & \wedge[(\phi_i(\bar x) < \psi_i(\bar x) \wedge R(\bar x, \phi_i(\bar x))) \to \phi_i(\bar x) \le y < \psi_i(\bar x)] \wedge \\ & & \wedge[(\phi_i(\bar x) < \psi_i(\bar x) \wedge R(\bar x, \psi_i(\bar x))) \to \psi_i(\bar x) < y \le \psi_i(\bar x)] \wedge \\ & & \wedge[(R(\bar x, \phi_i(\bar x)) \wedge R(\bar x, \psi_i(\bar x))) \to \phi_i(\bar x) \le y \le \psi_i(\bar x)]. \end{array}$$

Тогда

$$R(\bar x, y) = \bigcup_{1 \le m \le l,\ 1 \le i \le m} R_{i,m}(\bar x, y) \cup \bigcup_{i<k} \theta_i(\bar x, y) \cup \bigcup_{1 \le m \le N,\ 0 \le i \le m+1} Q_{i,m},$$

где

$$Q_{i,m}(\bar x, y) = P_m(\bar x) \wedge P_{i-1,m}(\bar x) < y < P_{i,m}(\bar x).$$

В нашем случае, $P_{0,m}(\bar x) = -\infty,\ P_{m+1,m}(\bar x) = \infty$.

Таким образом, множество R представляется в виде конечного объединения попарно не пересекающихся D-определимых множеств и следовательно, R есть D-определимое множество.

$(2)_{n+1}$ Пусть $f : (D^+)^{n+1} \to D^+$ частичная определимая функция в D^+. Обозначим $H(x) = \exists \bar z \exists y (f(\bar z, x) = y)$. По $(1)_1$ H является D-определимой формулой и по $(2)_n$ для любого $a \in H(D^+)$ функция

$$f_a : (D^+)^n \to D^+,\ f_a(\bar x) = f(\bar x, a)$$

является D-определимой при помощи функции $G_a(\bar c, \bar x),\ \bar c \in D^k,\ G_a(\bar y, \bar x)$ без параметров.

Утверждение 3.4.6. *Существует конечное число функций* $G_1(\bar x, \bar y_1), \ldots, G_m(\bar x, \bar y_m)$ *таких, что для любого* $a \in H(D^+)$ *существует* $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\exists \bar c_a \in D^{l(\bar y_i)}$, *что* $\forall \bar x[[G_i(\bar x, \bar c_i) = f(\bar x, a)] \wedge [G_i(\bar x, \bar c_i)$ *неопределена* $\Leftrightarrow f(\bar x, a)$ *неопределена*$]]$.

Доказательство. Предположим противное, то есть существует бесконечное число функций $\{G_i(\bar{x}, \bar{y}_i) : i \in J\}$, что для любого $a \in H(D^+)$ существует $G_j(\bar{x}, \bar{c}_a)$, что $G_i(\bar{x}, \bar{c}_a) = f(\bar{x}, a)$ и $\forall j \in J$ существует подходящая a_j, что $\forall j_1 \neq j,\ j_1 \in J$ верно

$$\models \forall \bar{y}[G_{j_1}(\bar{x}, \bar{y}) \neq f(\bar{x}, a_j)].$$

Тогда следующее множество локально совместно по отношению к $\mathrm{Th}(D^+, \bar{d})$, где $\bar{d} \in D^+$ кортеж элементов , участвующих в определении $f(\bar{x}, x)$

$$\{\forall y_j(G_j(\bar{x}, \bar{y}_j) \neq f(\bar{x}, x) : j \in J)\} \cup \{H(x)\}.$$

Так как D^+ является ω-насыщенной моделью, то существует $a \in D^+$, удовлетворяющий этому множеству формул. Последнее противоречит определению множества функций $G_i(\bar{x}, \bar{y}_i)$.$\diamondsuit$

Без потери общности можно считать, что существует только одна функция $G(\bar{y}, \bar{x})$ (без параметров) сигнатуры модели D, что для любого $a \in H(D^+)$ существует $\bar{c}_a \in D$, что $G(\bar{x}, \bar{c}_a) = f(\bar{x}, a)$. Определим $\bar{c} \sim \bar{c}',\ \bar{c}, \bar{c}' \in D^k \Leftrightarrow \forall \bar{x}(G(\bar{x}, \bar{c}) = G(\bar{x}, \bar{c}'))$.

Существование D-определимой функции $h : D^k \to D^j$ такой, что $\forall \bar{c}, \bar{c}' \in D$

$$[h(\bar{c}) = h(\bar{c}') \Leftrightarrow G'(\bar{x}, \bar{c}) = G(\bar{x}, \bar{c}')]$$

следует из условия Теоремы 3.3.13 о сокращении воображаемых элементов.

Пусть $h_1(\bar{y}), \ldots, h_j(\bar{y})$ функции такая, что

$$\forall \bar{c} \in D^k,\ h(\bar{c}) =< h_1(\bar{y}), \ldots, h_j(\bar{y}) > .$$

Определим графики D^+-определимых одноместных функций:

$$K_i(x, z) = H(x) \wedge \exists \bar{y}(\forall \bar{x}(G(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x}, x) \wedge h_i(\bar{y}) = z)),\ i \in \{1, \ldots, j\}.$$

$K_i(x, z)$ являются D-определимыми по условию Леммы. Пусть $d_i(x) = z \Leftrightarrow K_i(x, z)$. Тогда следующая формула определяет график D-определимой $(n+1)$-местной функции:

$$H(x) \wedge \exists \bar{y}(h(\bar{y}) =< d_1(x), \ldots, d_j(x) > \wedge G(\bar{x}, \bar{y}) = z),$$

которая совпадает с графиком f. Лемма доказана.$\diamondsuit$

Замечание. Аналогичная теорема была доказана Е. Хрушовским для любого сильно минимального обогащения алгебраически замкнутого поля [62]. Можно отметить, что его доказательство проходит и для любой сильно минимальной теории, допускающей сокращение воображаемых элементов. Наше доказательство базируется на схеме его доказательства, только для другого класса теорий. Отметим, В.В. Вербовский доказал [63], что сильно минимальная не локально модулярная теория, построенная Хрушовским, не допускает сокращение воображаемых элементов и построил [64] не локально модулярную сильно минимальную теорию бесконечной сигнатуры, в которой не интерпретируется алгебраически замкнутое поле и которая допускает сокращение воображаемых элементов. Принимая во внимание результаты Б.Пуаза [29], В.В. Вербовского [63]-[64], А. Пиллай [25], Тцубои [31], можно сформулировать:

Гипотеза. Пусть T сильно минимальная теория конечной сигнатуры. T допускает сокращение воображаемых элементов тогда и только тогда когда T есть обогащение теории алгебраически замкнутого поля. $\diamondsuit$

4 ОБОГАЩЕНИЕ МОДЕЛЕЙ СТАБИЛЬНЫХ ТЕОРИЙ

4.1 Пары моделей без свойства конечной покрываемости

Цель параграфа — описание моделей теории красивых пар [9] для теорий без свойства конечной покрываемости. В частности, мы доказываем, ее моделями являются NBAM-eq-пары и следовательно, теория красивых пар аксиоматизируется естественной системой аксиом.

Всюду в этом параграфе L предикатная сигнатура.

Скажем, что конечная модель $(A; L')$ сигнатуры $L' = L \cup \{<\}$ ($< \notin L$) есть (L, l)-модель ($l < \omega$), если

- $<$ есть отношение порядка на A
- $|A| = l$.

Обозначим (L, l)-модель $(A; L')$ следующим способом: $(A; L') := (\bar{a}; L)$, где $\bar{a} \in A^l$ такой, что

- $\bigcup \bar{a} := \{a_1, \dots, a_l\} = A$
- $\forall i, j (1 \leq i \neq j \leq l)\ [(A; L') \models a_i < a_j \Longleftrightarrow i < j]$.

Пусть $(\bar{a}; L)$ и $(\bar{b}; L)$ две (L, l)-модели, тогда они изоморфны $(\bar{a}; L) \cong (\bar{b}; L)$, если биекция $a_i \to b_i (1 \leq i \leq l)$ есть L'-изоморфизм моделей $(\bigcup \bar{a}; L')$ и $(\bigcup \bar{b}; L')$. Если M есть L-модель, $\bar{a} \in M^l$ то $M(\bar{a})$ есть модель сигнатуры $L(\bar{c}) := L \cup \bar{c} = L \cup \{c_1, \dots, c_l\}$. $\phi(\bar{x})$ обозначает формулу сигнатуры L, такую, что множество всех свободных этой формулы есть $\bigcup \bar{x}$. В этом случае говорим, что ϕ есть n-формула, где $n = l(\bar{x})$.

Мы будем использовать теорему Фраиссе [33], Эренфойхта [34], А.Д. Тайманова [35], [36] об элементарной эквивалентности двух моделей и которую мы представляем без доказательства (Теорема 4.1.4).

Пусть M_1, M_2 две модели одной конечной предикатной сигнатуры L, $l < \omega, n < \omega, \bar{a} \in M_1^l, \bar{b} \in M_2^l$, так, что $(\bar{a}; L) \cong (\bar{b}; L)$.

Определим игру $G_n(M_1(\bar{a}), M_2(\bar{b}), L)$ для двух игроков (I и II) в $n (n < \omega)$ ходов. В игре $G_n(M_1(\bar{a}), M_2(\bar{b}), L)$ каждый игрок делает n ходов. На $i-$ом шаге игры $(i \leq n)$, игрок I выбирает элемент либо из $c_i \in M_1$ либо из $d_i \in M_2$.

Если игрок I выбрал $c_i \in M_1$ ($d_i \in M_2$) игрок II отвечает в свою очередь на i-ом ходу элементом из $d_i \in M_2 (c_i \in M_1)$ так, чтобы

$$< \bar{a}, c_1, ..., c_i; L > \cong < \bar{b}, d_1, ..., d_i; L > .$$

Скажем, игрок II выигрывает игру $G_n(M_1(\bar{a}), M_2(\bar{b}), L)$, если он может ответить на каждом i-ом ходу ($i \leq n$). Игрок I выигрывает, если игрок II не выигрывает.

Факт 4.1.1. *Для любой конечной предикатной сигнатуры L, натуральных чисел $n,\ l < \omega$ существует конечное число формул сигнатуры L*

$$S_{n,l,L} = \{f_0^{n,l}(\bar{x}), \ldots, f_{s-1}^{n,l}\}, l(\bar{x}) = l,\ s := s(n,l,L) = |S_{n,l,L}| < \omega$$

такое, что для двух моделей M_1 и M_2 сигнатуры L, $\forall \bar{a} \in M_1^l,\ \forall \bar{b} \in M_2^l$ игрок II выигрывает $G_n(M_1(\bar{a}), M_2(\bar{b}), L)$ тогда и только тогда, когда

$$\exists j < s[M_1 \models f_j^{n,l}(\bar{a}) \wedge M_2 \models f_j^{n,l}(\bar{b})].$$

Доказательство Факта 4.1.1. Индукцией по $n (n < \omega)$ определим для каждого $l < n, l, L >$-Фраиссе формулу
$(< n, l > \neq < 0, 0 >)$.

$< 0, l, L >_{l \neq 0}$ Так как сигнатура L' конечна, существует натуральное число $s (s := s(0,l,L) < \omega)$ всех не-изоморфных (L, l)-моделей. Обозначим через $f_j^{0,l}(\bar{x}), j < s(0,l,L)$ полное безкванторное описание в сигнатуре $L(!)$ j-ый тип изоморфизма для (L, l)-моделей. Таким образом,

$A_{0,l}$ Для любых двух L-моделей $M_1, M_2, \forall \bar{a} \in M_1^l, \forall \bar{b} \in M_2^l$ имеем:
$(\bar{a}; L) \cong (\bar{b}; L)$ тогда и только тогда, когда

$$\exists j < s(0,l,L), M_1 \models f_j^{0,l}(\bar{a}), M_2 \models f_j^{0,l}(\bar{b}).$$

Обозначим $S_{0,l,L} := \{f_j^{0,l}(\bar{x}) | j < s(0,l,L)\}$.

$< n+1, l, L >$ Пусть

$$S_{n,l+1,L} := \{f_j^{n,l+1}(\bar{x}, y) | j < s(n, l+1, L), l(\bar{x}) = l\}$$

такое, что по индукционному предположению имеем:

$A_{n,l+1}$ Для любых двух моделей $M_1, M_2, \forall \bar{a} \in M_1^{l+1}, \forall \bar{b} \in M_2^{l+1}$ игрок II выигрывает $G_n(M_1(\bar{a}), M_2(\bar{b}))$ тогда и только тогда, когда

$$\exists j < s(n, l+1, L),\ M_1 \models f_j^{n,l+1}(\bar{a}),\ M_2 \models f_j^{n,l+1}(\bar{b}).$$

Пусть $\emptyset \neq J \subseteq \{0, 1 \ldots, s(n, l+1, L) - 1\}$. Скажем, J **допустимое множество** , если существует L-модель N, что $N \models \exists \bar{x} f_J^{n+1,l}(\bar{x})$, где

$$f_J^{n+1,l}(\bar{x}) := \bigwedge_{1 \leq i \neq j \leq l} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{i \in J} \exists y f_i^{n,l+1}(\bar{x}, y) \wedge$$

$$\wedge \forall y (\bigwedge_{1 \leq i \leq l} x_i \neq y \rightarrow \vee_{i \in J} f_i^{n,l+1}(\bar{x}, y)).$$

Положим $S_{n+1,l,L} :=$
$\{f_J^{n+1,l}(\bar{x}) | \emptyset \neq J \subseteq \{0,1,\ldots,s(l,n+1,L)-1\}, J$ допустимое $\}$.

Назовем $S_{n+1,l,L}$ множеством всех $< n+1, l, L >$-Фраиссе формул.

Обозначим $s(n+1,l,L) = |S_{n+1,l,L}|$. Ясно, $s(n+1,l,L) < \omega$. Зафиксируем перечисление $S_{n+1,l,L}$ ординалами меньшими, чем $s(n+1,l,L)$.

Из определения следует истинность $A_{n+1,l}$. $\diamondsuit$

Пусть $1 < m < \omega$. Обозначим
$E_m := \exists x_1 \ldots \exists x_m (\bigwedge_{1 \leq i \neq j \leq m} x_i \neq x_j)$.

Факт 4.1.2. *Пусть L конечная предикатная сигнатура, $n < \omega,\ 0 < l < \omega$. Следующее верно:*

$(i)_{n,l,j}$ $j < s(n,l,L)$

$$\models_L \forall \bar{x}(f_j^{n,l}(\bar{x}) \to \bigwedge_{1 \leq i \neq k \leq l} x_i \neq x_k)$$

$(ii)_{n,l}$ $\models_L E_{n+l} \to \forall x(\bigwedge_{1 \leq i \neq k \leq l} x_i \neq x_k \to \bigvee_{i < s(n,l,L)} f_i^{n,l}(\bar{x}))$

$(iii)_{n,l,j,k}$ $j \neq k < s(n,l,L)$

$$\models_L E_{n+l} \to \forall \bar{x}(f_j^{n,l}(\bar{x}) \to \neg f_k^{n,l}(\bar{x}))$$

$(iv)_{n,l}$ *Пусть $l_1 + l_2 = l, l_1 \neq 0, l_2 \neq 0$.*
Тогда $\forall n_1 \leq n, \forall n_2 \leq n$, для любой L-модели M, $\forall \bar{a} \in M^{l_1}$, $\forall \bar{b} \in M^{l_2}, \forall i < s(n,l,L), \forall j < s(n_1,l_1,L), \forall k < s(n_2,l_2,L)$ следующее верно:

Если $M \models f_i^{n,l}(\bar{a},\bar{b}) \wedge f_j^{n_1,l_1}(\bar{a}) \wedge f_k^{n_2,l_2}(\bar{b})$, то

$$\models_L \forall \bar{x} \forall \bar{y}(f_i^{n,l}(\bar{x},\bar{y}) \to (f_j^{n_1,l_1}(\bar{x}) \wedge f_k^{n_2,l_2}(\bar{y}))).$$

Доказательство Факта 4.1.2 следует из определения формулы Фраиссе (смотри Доказательство Факта 4.1.1). $\diamondsuit$

Пусть M есть L-модель, $n < \omega,\ l < \omega,;\ j < s(n,l,L), < n,l > \neq < 0,0 >$. Скажем, $f_j^{n,l}(\bar{x})$ есть M-допустимая, если $M \models \exists \bar{x} f_j^{n,l}(\bar{x})$. Обозначим

$$S_{n,l,L}(M) := \{f_j^{n,l}(\bar{x}) | f_j^{n,l}(\bar{x}) \text{M} - \text{допустимая}\}.$$

Заметим, $\forall n > 0$, для любой L-модели M, если $n \leq |M|$, то имеем $|S_{n,0,L}(M)| = 1$.

Замечание 4.1.3. *Пусть Q множество всех рациональных чисел. Тогда следующее верно:*

(i) Пусть $L = \{=\}$, $(M; L) = (Q; =)$, *тогда*

$$\forall l(0 < l < \omega),\ |S_{0,l,L}(M)| = 1$$

(ii) Пусть $L = \{=, <\}$, $(M; L) = (Q; =, <)$, $<$ *естественный порядок на множестве всех рациональных чисел. Тогда*

$$\forall l(0 < l < \omega),\ |S_{0,l,L}(M)| = l!$$

Теорема 4.1.4. *[33], [35], [36], [34] Пусть* M_1, M_2 *две* L*-модели, тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $M_1 \equiv M_2$

(ii) $\forall n < \omega(n \neq 0)$, $G_n(M_1, M_2)$ *выигрывается игроком II*

(iii) $\forall n < \omega(n \neq 0),\ \forall i < s(n, 0, L)$

$$[M_1 \models f_i^{n,0} \Longleftrightarrow M_2 \models f_i^{n,0}]$$

(iv) $\forall n < \omega,\ \forall l < \omega,\ < n, l > \neq < 0, 0 > [S_{n,l,L}(M_1) = S_{n,l,L}(M_2)]$.

Напомним,
для $\bar{a} =< a_1, \ldots, a_l >\in M^l$ имеем $a_i \neq a_j$, если $1 \leq i \neq j \leq l$. Будем использовать следующую версию Теоремы 4.1.4.

Теорема 4.1.5. *(i) Пусть* M_1, $M-2$ *две* L*-модели,* $l < \omega(l \neq 0)'\bar{a} \in M_1^l, \bar{b} \in M_2^l, L(\bar{c}) := L \cup \bar{c}$, *тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) $(M_1; \bar{a}) \equiv^{L(\bar{c})} (M_2; \bar{b})$

(b) $(\bar{a}; L) \cong (\bar{b}; L)$ *и* $\forall n < \omega\ (n \neq 0)$ *игрок II выигрывает* $G_n(M_1(\bar{a}), M_2(\bar{b}))$

(c) $\forall n < \omega, \forall i < s(n, l, L)$

$$[M_1 \models f_i^{n,l}(\bar{a}) \Longleftrightarrow M_2 \models f_i^{n,l}(\bar{b})]$$

(ii) Пусть $\phi(\bar{x})$ *является* l*-формулой сигнатуры* L *такой, что для некоторой* L*-модели* M*, для некоторого* $\bar{a} \in M^l$, $M \models \phi(\bar{a})$*. Тогда* $\exists n < \omega$, *что* $\forall n_1 > n, \forall j < s(n_1, l, L)$ *имеем:*

$$\textit{Если } M \models f_j^{n_1}(\bar{a}),\ \textit{то } M \models \forall \bar{x}(f_j^{n_1}(\bar{x}) \to \phi(\bar{x}))$$

(iii) Пусть M *есть* L*-модель,* $\bar{a} \in M^l, l < \omega, l \neq 0$*. Тогда*

$$\Gamma_{\bar{a}}(\bar{x}) := \{f_{j(n)}^{n,l}(\bar{x}) | M \models f_{j(n)}^{n,l}(\bar{a}),\ j(n) < s(n, l, L)\}$$

определяет $tp(\bar{a}|\emptyset)$*. (Говорят, множество* l*-формул* Γ *определяет некоторый тип* $p \in S(\emptyset)$*, если для любой формулы* $\phi \in p, \exists f \in \Gamma$*, что* $M \models \forall \bar{x}(f(\bar{x}) \to \phi(\bar{x}))$*.*

Соглашение Зафиксируем полную теорию (конечной) сигнатуры L. Из Теоремы 4.1.4(iv) следует совпадение множеств допустимых формул Фраиссе для всех моделей полной теории T, которые мы будем называть T-допустимыми. Для любых $n < \omega, l < \omega$ таких, что $((n,l) \neq (0,0))$, зафиксируем перечисление всех T-допустимых $< n, l, L >$-Фраиссе формул. $S(n,l,L)$ будет означать множество всех T-допустимых $< n, l, L >$-Фраиссе формул и $s(n,l,L)$ число формул в $S(n,l,L)$.

В этом параграфе основным источник ссылок будут первые две главы (I и II) книги Шелаха [1].

Факт 4.1.6. *Пусть p множество l-формул таких, что p совместно с $Th((N,a)_{a\in A}), A \subseteq N$, тогда $\Phi(\bar{x},\bar{d}), \bar{d} \in N$ такое, что $r_\Delta(p) = r_\Delta(p \cup \{\Phi(\bar{x},\bar{d})\}), Mlt_\Delta(p \cup \{\Phi(\bar{x},\bar{d})\}) = 1$. Здесь,*
$\Delta = \Delta(n,l,\bar{b},m,a) := \{f_i^n(\bar{x},\bar{b},\bar{z},\bar{a}) | i < s(n, l + l(\bar{b}) + m + l(\bar{a}), L)\}$

Факт 4.1.7. *Пусть p множество l-формул. Тогда для каждого конечного Δ^l существует конечный $q \subseteq p$, что*

$$r_\Delta(p) = r_\Delta(q), Mlt_\Delta(p) = Mlt_\Delta(q).$$

Факт 4.1.8. *Пусть $X, Y, Y_1, Y_2 \subset M^l$ формульные множества такие, что*
$r_\Delta(X) = \alpha, Mlt_\Delta(X) = 1$
$Y = Y_1 \cup Y_2, Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$
$r_\Delta(X \cap Y) = r_\Delta(X)$
Тогда либо $r_\Delta(X \cap Y_1) = r_\Delta(X)$, либо $r_\Delta(X \cap Y_2) = r_\Delta(X)$.

Факт 4.1.9. *Пусть N модель теории без свойства конечной покрываемости, $\Psi(\bar{x})$ - N-определимая l-формула $(1 \leq l < \omega)$, Δ^l конечное множество формул,*

$$r_\Delta(\Psi) = \alpha > 0, Mlt_\Delta(\Psi) = 1.$$

Тогда для любого β $(0 < \beta < \alpha)$ существует N-определимая l-формула Ψ_β, что

$$N \models \forall x(\Psi_\beta(\bar{x}) \to \Psi(\bar{x})),\ r_\Delta(\Psi_\beta) = \beta,\ Mlt_\Delta(\Psi_\beta) = 1.$$

Пусть T полная теория предикатной сигнатуры L. Обозначим $(M,N) = (N, L \cup \{P^1\})$, где $P(N) = M)$. Пусть

$$T' = \mathrm{Th}(\{(M,N) : M \prec N \models T, \}.$$

В общем случае T' не полная теория. (M,N) называется **парой моделей** теории T.

Определение 4.1.10. *Пусть* (M, N) *пара моделей теории* T. *Скажем, что* N*-определимая* L*-формула* $\Phi(x)$ *является ограниченно алгебраической над моделью* M *(BAM-формула), если существует* N*-определимая* L*-формула* $\psi(x, \bar{z})$ *и натуральное число* n $(0 < n < \omega)$ *такие, что для любого* $b \in \Phi(N)$ *существует* $\bar{a} \in M^{l(\bar{z})}$, *что верно*

$$N \models \exists^{\leq n} x(\psi(x, \bar{a}) \wedge \Phi(x)) \wedge \psi(b, \bar{a})).$$

Определение 4.1.11. *Если бесконечная* N*-определимая* L*-формула* $\Phi(x)$ *не является BAM-формулой в* (M, N), *то* $\Phi(x, \bar{d})$ *называется NBAM-формулой в* (M, N).

Замечание 4.1.12. *Если* $\Phi(x, \bar{d})$ *есть NBAM-формула в* (M, N), *то верно неравенство* $|\Phi(N \setminus M, \bar{d})| \geq \omega$.

Определение 4.1.13. *Скажем, пара моделей* (M, N) *NBAM-пара, если любая бесконечная* N*-определимая* L*-формула* $\Phi(x)$ *является NBAM-формулой.*

Дадим несколько простых фактов без доказательства.

Факт 4.1.14. *Для любой модели* M *теории* T *существует элементарное расширение* N $(M \prec N)$ *такое, что* (M, N) *NBAM-пара.*

Факт 4.1.15. *Пусть* (M, N) *красивая пара* T *[29], тогда* (M, N) *NBAM-пара.*

Факт 4.1.16. *Пусть* T' *полная теория. Тогда* T *не имеет пары Воота для любой* $\emptyset$*-определимой бесконечной формулы* $\Phi(x)$, $\Phi(x)$ *является NBAM-формулой в каждой паре моделей* T.

Факт 4.1.17. *Пусть* T' *полная теория,* (M, N) *пара моделей теории* T. *Если* $\varepsilon(\bar{x}, \bar{y})$ *является* $\emptyset$*-определимым отношением эквивалентности на* M^n *с бесконечным числом классов на кортежах длины* n, *то существует* $\bar{b} \in (N \setminus M)^n$, *что* $\varepsilon(N^n, \bar{b}) \cap M^n = \emptyset$.

Факт 4.1.18. *Пусть* T' *полная теория и* (M, N) *пара моделей* T. *Тогда*

(i) Если $\Phi(x, \bar{a})$ *формула сигнатуры* $L(N)^{eq}$ *с бесконечной реализацией в некотором сорте такая, что*

$$\Phi(N^{eq}, \bar{a}) \cap M^{eq} = \emptyset \ or \ \Phi(N^{eq}, \bar{a}) \cap (N^{eq} \setminus M^{eq}) \neq \emptyset,$$

то $\Phi(x, \bar{a})$ *является NBAM-формулой в* (N^{eq}, M^{eq}).

(ii) Пусть $\Phi(x, \bar{y})$ *формула сигнатуры* L^{eq}. *Если для любого натурального* n *существует* $\bar{a}_n \in M^{eq}$ *такой, что* $\Phi(M^{eq}, \bar{a}_n)$ *конечное множество и* $M^{eq} \models \exists^{\geq n} x \Phi(x, \bar{a}_n)$, *то существует* $\bar{a}' \in N^{eq} \setminus M^{eq}$, *что* $\Phi(x, \bar{a}')$ *есть бесконечная NBAM-формула в* (M^{eq}, N^{eq}).

Определение 4.1.19. *Скажем, теория T имеет определимое свойство бесконечности формул (DIF), если для любой формулы $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ существует $n = n_\Phi$ такое, что для любой модели $M \models T$, $\forall \bar{b} \in M$, $M \models \exists^{\geq n} \bar{x} \Phi(\bar{x}, \bar{b})$, то $\exists^{\infty} x \Phi(\bar{x}, \bar{b})$.*

Замечание 4.1.20. *(i) (Шелах) Пусть T стабильная теория. Тогда T имеет DIF тогда и только тогда, когда T без свойства конечной покрываемости (nfcp) [1].*

(ii) Пусть T слабо о-минимальная плотная теория. Тогда T имеет DIF.

Факт 4.1.21. *Пусть T имеет DIF и пусть T' полная. Тогда для любой пары (M, N) моделей T, (M^{eq}, N^{eq}) является NBAM-парой теории T^{eq}.*

Теорема 4.1.22. *Пусть T полная теория без свойства конечной покрываемости. Тогда T' полная тогда и только тогда, когда для любой пары моделей (M, N) моделей теории T, (M^{eq}, N^{eq}) является NBAM-парой.*

Proof. Будем считать, что сигнатура L конечная.

Определение 4.1.23. Пусть (M, N) пара моделей теории T, $\bar{a} \in M, \bar{b} \in N \setminus M$, $b \in N \setminus (M \cup \bar{b})$. Назовем (n, m, L)–Шелах-Фраиссе–тип элемента b над $M \cup \bar{b}$ следующее множество формул

$$SF_n tp(b/\bar{b}, M^m, \bar{a}) := \{f_i^n(x, \bar{b}, \bar{c}, \bar{a}) \mid N \models f_i^n(b, \bar{b}, \bar{c}, \bar{a}), \bar{c} \in M^m,$$

$1 \geq i \geq s(n, m + l(\bar{b}) + l(\bar{a}) + 1, L)$, где $f_i^n(x, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ есть i-ая формула Фраиссе конечной предикатной сигнатуры $L \subset L$, которое можно получить игрой Эренфойхта на n-шаге на начальной подструктуре $1 + l(\bar{y}) + l(\bar{z}) + l(\bar{t})$-элементов$\}$.

Будем обозначать $SF_n tp(b/\bar{b}, M^m, \bar{a})$ через $q_n(x/\bar{b}, M^m, \bar{a})$ и называть этот тип $(n, m, L, \bar{b}, \bar{a})$–Шелах-Фраиссе-тип.

Как в [1], Δ обозначает конечное множество формул $\{f_i(\bar{x}, \bar{y}) \mid i < s\}$, где $s < \omega$. $l(\bar{x})$-формула есть формула вида $f_i(\bar{x}, \bar{y})$ и мы (как Шелах) будем рассматривать $\bar{y}$ как последовательность переменных параметров, которую мы будем заменять некоторым кортежом элементов $\bar{b}$.

Пусть $\bar{b}, \bar{a} \in N$ такой, что $l(\bar{b}) + l(\bar{a}) < l(\bar{y})$. Положим $m = l(\bar{y}) - l(\bar{b}) - l(\bar{a})$. Тогда

$$\Delta(l(\bar{x}), \bar{b}, \bar{z}, m, \bar{a}) = \{f_i(\bar{x}, \bar{b}, \bar{z}, \bar{a}) \mid i < s,\ l(\bar{z}) = m\}.$$

В множестве формул $\Delta(l(\bar{x}), \bar{b}, \bar{z}, m, \bar{a})$, под $\bar{z}$ понимается последовательность переменных, вместо которой будем подставлять $\bar{c}$.

Лемма 4.1.24. *Пусть (M, N) пара моделей теории T без свойства конечной покрываемости такая, что (M^{eq}, N^{eq}) является NBAM-парой. Пусть $l, m < \omega$ и $\bar{c} \in N_1^l$, где*

$$M \prec N \prec N_1.$$

Тогда $q := q(\bar{x}/\bar{b}, M, \bar{a}) = SF^n tp(\bar{c}/\bar{b}, M, \bar{a})$ реализуется в N.

Доказательство Леммы 4.1.24. Предположим, q не реализуется в N.

Пусть $\Delta_n = \{f_i^n(\bar{x}, \bar{y}) \mid i < s(n, l(\bar{x}) + l(\bar{y}), L),\ l(\bar{z}) = l(\bar{c}),\ l(\bar{y}) = l(\bar{b}) + m + l(\bar{a})\}$. Зафиксируем $\Delta := \Delta(l(\bar{c}), \bar{b}, m, \bar{a})$. Пусть $l(\bar{c}) = l$, тогда обозначим

$$r_\Delta := R^l(q, \Delta, \omega);$$

$$Mlt_\Delta := Mlt^l(q, \Delta, \omega).$$

По Факту 4.1.6 существует N-определимая формула $\Phi(\bar{x})$, что

$$r_\Delta(q) = r_\Delta(q \cup \{\Phi(\bar{x})\}) \text{ and}$$

$$Mlt_\Delta(q \cup \{\Phi(\bar{x})\}) = 1.$$

Пусть $\Psi(\bar{x})$ конечная коньюнкция формул из $q \cup \{\Phi(\bar{x})\}$, что верно

$$r_\Delta(q) = r_\Delta(\Psi),\ Mlt_\Delta(\Psi) = 1.$$

Существование Ψ следует из Факта 4.1.7.

Рассмотрим $C = \{\Theta(\bar{x}) \mid \Theta(\bar{x})$ является N-определимой, $r_\Delta(\Theta) > 0,\ Mlt_\Delta(\Theta) = 1,$ для всех $f_i(\bar{x}, \bar{b}, \bar{e}, \bar{a}),$ где $\bar{e} \in M^m,$ имеем $f_i^n(\bar{x}, \bar{b}, \bar{e}, \bar{a}) \in q \Rightarrow r_\Delta(\Theta(\bar{x}) \wedge f_i^n(\bar{x}, \bar{b}, \bar{e}, \bar{a})) = r_\Delta(\Theta)\}$.

Заметим, $C \neq \emptyset$ так, как $\Psi(\bar{x}) \in C$.

Пусть $\Psi_0(\bar{x}) \in C$ и $\beta < \omega$ такие, что для любой формулы $\Theta \in C$ имеем $r_\Delta(\Psi_0) = \beta \leq r_\Delta(\Theta)$.

Рассмотрим

$$\begin{aligned} D \ := \ & \{f_i^n(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{a}) \mid \bar{c} \in M^m,\ r_\Delta(\Psi_0 \wedge f_i^n(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{a})) = \beta - 1, \\ & i < s(n, l + l(\bar{b}) + m + l(\bar{a}))\}. \end{aligned}$$

Утверждение 4.1.25. *D бесконечное множество.*

Доказательство Утверждения 4.1.25. Предположим D бесконечное множество. Пусть

$$K := \{\bar{c} \in M^m \mid \exists i < s(n, l + l(\bar{b}) + m + l(\bar{a})),\ f_i^n(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{a}) \in D\}.$$

Тогда K конечное множество.

По Факту 4.1.2(ii), (iii) и Факту 4.1.8 существует функция $h : M^m \to S$ такая, что для любого кортежа элементов $\bar{c} \in M^m$ имеем $h(\bar{c}) < s(n, l(\bar{x}) + l(\bar{b}) + m + l(\bar{a}), L)$ и $f^n_{h(\bar{c})}(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{a}) \in q$. Заметим, $D \cap q = \emptyset$.

Обозначим $\Psi(\bar{x}) := \Psi_0(\bar{x}) \wedge \bigwedge\limits_{\bar{c} \in K} f^n_{h(\bar{c})}(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{a})$. По определению $\Psi_0(\bar{x})$ и $h(\bar{c})$ имеем

$$r_\Delta(\Psi) = \beta,\ Mlt_\Delta(\Psi) = 1. \text{ So, } \Psi \in C.$$

Рассмотрим два случая: $\beta > 1$ и $\beta = 1$.

Случай I. $\beta > 1$. По Факту 4.1.9 существует N-определимая l-формула $\Psi_{\beta-1}(\bar{x})$, что

- $r_\Delta(\Psi_{\beta-1}(\bar{x})) = \beta - 1$, $Mlt_\Delta(\Psi_{\beta-1}(\bar{x})) = 1$.
- $N \models \forall \bar{x}(\Psi_{\beta-1}(\bar{x}) \to \Psi(\bar{x}))$.

Пусть $f^n_i(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{a}) \in q$, тогда для любого $k \neq i$, $k < s(n, l + l(\bar{b}) + m + l(\bar{a}))$ имеем $r_\Delta(\Psi(\bar{x}) \wedge f^n_k(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{a})) < \beta - 1$ и, следовательно, $r_\Delta(\Psi_{\beta-1}(\bar{x}) \wedge f^n_k(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{a})) < \beta - 1$. По Факту 4.1.2(ii)(iii) и Факту 4.1.8 имеем

$$r_\Delta(\Psi(\bar{x}) \wedge f^n_i(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{a})) < \beta - 1.$$

Это противоречит минимальности β.

Случай II. $\beta = 1$. Пусть $f^n_i(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{a}) \in q$, тогда для каждого $k \neq i$ и $k < s(n, l + l(\bar{b}) + m + l(\bar{a}))$ имеем

$$r_\Delta(\Psi(\bar{x}) \wedge f^n_k(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{a})) = -1.$$

Последнее означает

$$N \models \neg \exists \bar{x}(\Psi(\bar{x}) \wedge f^n_k(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{a})).$$

Таким образом, по Факту 4.1.2(ii)(iii) получаем

$$N \models \forall \bar{x}(\Psi(\bar{x}) \to f^n_i(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{a})).$$

Таким образом, так как $r(\Psi) = 1$, имеем $N \models \exists \bar{x} \Psi(\bar{x})$ и, следовательно, q реализуется в N. Противоречие. Значит, D бесконечное множество. $\diamondsuit$

Для любого $\alpha < \omega$ обозначим через $D(\alpha)$ множество формул

$$\{f^n_i(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{a}) \in D \mid \bar{c} \in M^m,\ i < s, Mlt_\Delta(\Psi_0(\bar{x}) \wedge f^n_i(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{a})) = \alpha\}.$$

Из Теоремы 4.4V [**?**] следует существование такого $\alpha_0 < \omega$, что $D = \bigcup\limits_{0 < \alpha < \alpha_0} D(\alpha)$.

Пусть $1 \leq \alpha_1, \alpha_2 < \alpha_0$ и $\tau \in^{\alpha_2} s$. Обозначим

$$D(l_1, l_2, \tau) := \{\Psi_0(\bar{x}) \wedge \bigwedge_{k<l_2} f^n_{\tau(k)}(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}_k, \bar{a}) \mid f^n_{\tau(k)}(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}_k, \bar{a}) \in D,$$

$$r_\Delta(\Psi_0(\bar{x}) \wedge \bigwedge_{k<l_2} f^n_{\tau(k)}(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}_k, \bar{a})) = \beta - 1,$$

$$Mlt_\Delta(\Psi_0(\bar{x}) \wedge \bigwedge_{k<l_2} f^n_{\tau(k)}(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}_k, \bar{a})) = l_1\}.$$

$\mu(\bar{x}, \bar{u}) := \Psi_0(\bar{x}) \wedge \bigwedge_{k<l_2} f^n_{\tau(k)}(\bar{x}, \bar{b}, \bar{u}_k, \bar{a})$, где $\bar{u} = \langle \bar{u}_0, \ldots, \bar{u}_k, \ldots \rangle_{k<l_2}$.

Пусть $\mu(\bar{x}, \bar{d}_1)$, $\mu(\bar{x}, \bar{d}_2) \in D(l_1, l_2, \tau)$, определим

$$[\mu(\bar{x}, \bar{d}_1) \sim \mu(\bar{x}, \bar{d}_2) \Leftrightarrow r_\Delta(\mu(\bar{x}, \bar{d}_1) \wedge \mu(\bar{x}, \bar{d}_2)) = \beta - 1,$$

$$Mlt_\Delta(\mu(\bar{x}, \bar{d}_1) \wedge \mu(\bar{x}, \bar{d}_2)) = l_2].$$

Очевидно, $\sim$ есть отношение эквивалентности на $D(l_1, l_2, \tau)$.

Утверждение 4.1.26. *Существует $\alpha' < \alpha_0$ и $k < s$ такие, что $|(D(\alpha', 1, \langle k \rangle)/\sim)| \geq \omega$.*

Доказательство Утверждения 4.1.33. Предположим для любых $\alpha' < \alpha_0$ и $k < s$ имеем $|(D(\alpha', 1, \langle k \rangle)/\sim)| < \omega$. Так как $|\{\langle \alpha', k \rangle \mid \alpha' < \alpha_0,\ k < s\}| < \omega$, имеем $|K'| < \omega$, где

$$K' := \{\langle \alpha', k \rangle \mid \alpha' < \alpha_0,\ k < s,\ D(\alpha', 1, \langle k \rangle) \neq \emptyset\}.$$

Для каждого $\langle \alpha', k \rangle \in K'$ обозначим

$$\gamma(\alpha', k) := |D(\alpha', 1, \langle k \rangle)/\sim|.$$

По нашему предположению $\gamma(\alpha', k) < \omega$. Пусть $\langle \alpha', k \rangle \in K'$, обозначим

$$U_{\alpha',k} := \{\bar{c}_i(\alpha', k) \in M^m \mid i < \gamma(\alpha', k)\}$$

так, что для $i, j < \gamma(\alpha', k)$ имеем

$$(r, Mlt)_\Delta((\Psi_0(\bar{x}) \wedge f^n_l(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}_i(\alpha', k), \bar{a}))\wedge$$

$$\wedge(\Psi_0(\bar{x}) \wedge f^n_k(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}_j(\alpha', k), \bar{a}))) < (\beta - 1, \alpha')).$$

Рассмотрим

$$\Psi_1(\bar{x}) := \Psi(\bar{x}) \wedge \bigwedge_{\langle \alpha', k \rangle \in K'} \bigwedge_{i<\gamma(\alpha', k)} f^n_{h(\bar{c}_i(\alpha', k))}(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}_i(\alpha', k), \bar{a}).$$

По определению функции $h : M^m \to s$ имеем

$$(r, Mlt)_\Delta(\Psi_1(\bar{x})) = (\beta, 1).$$

Таким образом, $\Psi_1 \in C$. Тогда для любой формулы $f_i^n(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{a}) \in q$, для любых $k \neq i$ и $k < s$ имеем

$$r_\Delta(\Psi_1(\bar{x}) \wedge f_k^n(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{a})) < \beta - 1,$$

так как

$$r_\Delta(\Psi_0(\bar{x}) \wedge \neg[\bigwedge_{\langle\alpha', k\rangle \in K'} \bigwedge_{i < \gamma(\alpha', k)} f^n_{h(\bar{c}_i(\alpha', k))}(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}_i(\alpha', k), \bar{a})]) = \beta - 1$$

и для любого кортежа элементов $\bar{e} \in M^m$, для любого $i < s$ имеем $r_\Delta(\Psi_0(\bar{x}) \wedge f_i^n(\bar{x}, \bar{b}, \bar{e}, \bar{a})) = \beta - 1$, что влечет существование $\alpha' < \alpha_0$ и $i < \gamma(\alpha', j)$ таких, что

$$(r, Mlt)_\Delta(\Psi_0(\bar{x}) \wedge f_j^n(\bar{x}, \bar{b}, \bar{e}, \bar{a}) \wedge F_j^n(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}_j(\alpha', \gamma), \bar{a})) = (\beta - 1, \alpha'),$$

и $f_j^n(\bar{x}, \bar{b}, \bar{e}, \bar{a}) \in D(\alpha', 1, \langle j \rangle)$.

Таким образом, как и в доказательстве Утверждения 4.1.25 мы можем выбирать N-определимую подформулу $\Psi_{1,\beta-1}(\bar{x})$ формулы $\Psi_1(\bar{x})$ такую, что $(r, Mlt)_\Delta(\Psi_{1,\beta-1}(\bar{x})) = (\beta - 1, 1)$.

Как в доказательстве Утверждения 4.1.25 получим противоречие либо с минимальностью β ($\beta > 1$) либо с предположением, что q не реализуется в N ($\beta = 1$).$\Diamond$

Пусть $\alpha_1 < \alpha_0$ наименьшее натуральное число, что существуют $\alpha_2 < \alpha_0$ и $\tau \in^{\alpha_2} s$ для которых имеем

$$|D(\alpha_1, \alpha_2, \tau)/\sim| \geq \omega.$$

Существование таких α_1, $\alpha_2 < \alpha_0$ следует из Утверждения 4.1.33. Зафиксируем α_1, $\alpha_2 < \alpha_0$ и $\tau \in^{\alpha_2} s$. Тогда для формулы

$$\mu(\bar{x}, \bar{u}) := \Psi_0(\bar{x}) \wedge \bigwedge_{1 \leq k \leq l} f^n_{\tau(k)}(\bar{x}, \bar{b}, \bar{u}_k, \bar{a})$$

отношение эквивалентности $E(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$

$$(r_\Delta(\mu(\bar{x}, \bar{u}_1) \wedge \mu(\bar{x}, \bar{u}_2)) = \beta - 1 = r_\Delta(\mu(\bar{x}, \bar{u}_1)) = r_\Delta(\mu(\bar{x}, \bar{u}_2))$$

$$Mlt_\Delta(\mu(\bar{x}, \bar{u}_1) \wedge \mu(\bar{x}, \bar{u}_2)) = \alpha_1 = Mlt_\Delta(\mu(\bar{x}, \bar{u}_1)) = Mlt_\Delta(\mu(\bar{x}, \bar{u}_2))).$$

Заметим, $E(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ является N-определимой по Факту 4.1.27.

Факт 4.1.27. *Пусть T полная теория без свойства конечной покрываемости. Тогда для любой формулы $\Psi(\bar{x}, \bar{y})$, для любого конечного $\Delta(\bar{x})$ и для любых (n_1, n_2) существует $\Theta_\Psi(\bar{y})$, что для любой модели $M \models T$ и для любого кортежа элементов $\bar{a} \in M^{l(\bar{y})}$ имеем*

$$[(r, Mlt)_\Delta(\Psi(\bar{x}, \bar{a})) = (n_1, n_2) \Longleftrightarrow M \models \Theta_\Psi(\bar{a})].$$

Определение 4.1.28. Пусть $\mu_1(\bar{u}, \bar{z}), \ldots, \mu_s(\bar{u}, \bar{z})$ формулы с условием:

(i) $T \vdash \forall \bar{u}\bar{z}[\vee \mu_i(\bar{u}, \bar{z})]$

(ii) $T \vdash \neg \exists \bar{u}\bar{z}[\mu_i(\bar{u}, \bar{z}) \wedge \mu_j(\bar{u}, \bar{z})], i \neq j, 1 \leq i, j \leq s.$

Пусть $l(\bar{z}) = m,\ \bar{d} \in M^{l(\bar{u})},\ \bar{d}' \in M_1^{l(\bar{u})}$. Определим игру с двумя игроками (I и II) в m-ходов:

$$G_m(\bar{d}, \bar{d}', \mu_1(\bar{u}, \bar{z}), \ldots, \mu_s(\bar{u}, \bar{z})$$

Скажем, игрок II выигрывает игру $G_m(\bar{d}, \bar{d}', \mu_1(\bar{u}, \bar{z}), \ldots, \mu_s(\bar{u}, \bar{z}))$, если после m-ходов получим такие $\bar{c} \in M^m$ и $\bar{e} \in M_1^m$, что верно:

(i)

$$\forall i : 1 \leq i \leq s[M \models \mu_i(\bar{d}, \bar{e}) \Leftrightarrow M_1 \models \mu_i(\bar{d}', \bar{e})]$$

(ii)

$$\forall j < m\ l(\bar{c}_j) = l(\bar{e}_j) = j,\ \bar{e}_j = \bar{e}|j\ \bar{c}_j = \bar{c}|j$$
$$\forall i < s[|\{\bar{c}' \in M^{m-j} : M \models \mu_i(\bar{d}, \bar{c}_j, \bar{c}')\}| =^\infty$$
$$=^\infty |\{\bar{e}' \in M_1^{m-j} : M_1 \models \mu_i(\bar{d}, \bar{c}_j, \bar{e}')\}|].$$

Здесь, $(|E| =^\infty |K|)$ тогда и только тогда, когда $|E|$ и $|K|$ бесконечные кардиналы, (если $|E|$ и $|K|$ конечные, то $|E| = |K|$).

Лемма 4.1.29. *Для любых двух моделей $M,\ M_1$ теории T без свойства конечной покрываемости игра*
$G_m(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \mu_1(\bar{u}, \bar{z}), \ldots, \mu_s(\bar{u}, \bar{z})$ *определяет на множестве*
$M^{l(\bar{u})} \cup M_1^{l(\bar{u})}$ *конечное формульное разбиение (отношение эквивалентности с конечным числом определимых классов), то есть существуют*
$\Phi_i(\bar{u}/\mu_1(\bar{u}, \bar{z}), \ldots, \mu_s(\bar{u}, \bar{z}))$*, такие что* $\forall \bar{d} \in M^{l(\bar{u})}, \forall \bar{d}' \in M_1^{l(\bar{u})}$ *игрок II выигрывает игру*
$G_m(\bar{d}, \bar{d}', \mu_1(\bar{u}, \bar{z}), \ldots, \mu_s(\bar{u}, \bar{z}))$ *тогда и только тогда, когда*

$$\exists i \leq s, M \models \Phi_i(\bar{d}),\ M_1 \models \Phi_i(\bar{d}').$$

Доказательство следует из определений.

Определение 4.1.30. Определим индукцией по m равенство (n, m, L)-Фраиссе типов.

Пусть (M, N), (M_1, N_1) пары моделей полной теории T, $\bar{b} \in N \setminus M, \bar{b}' \in N_1 \setminus M_1, \bar{a} \in N \setminus M, \bar{a}' \in N_1 \setminus M_1$.

$< n, 0 >$ Скажем, $< n, 0 >$-Фраиссе тип $\bar{b}$ над $(M, \bar{a})$ равен $< n, 0 >$-Фраиссе типу $\bar{b}'$ над $(M_1, \bar{a}')$, обозначив

$$f_n tp(\bar{b}/M^0, \bar{a}) = f_n tp(\bar{b}'/M^0, \bar{a}'),$$

если и только, если

$$N \models f_i^n(\bar{b}, \bar{a}) \Leftrightarrow N_1 \models f_i^n(\bar{b}', \bar{a}').$$

$< n, 1 >$ Скажем $< n, 1 >$-Фраиссе тип $\bar{b}$ над $(M, \bar{a})$ равен $< n, 1 >$-Фраиссе типу $\bar{b}'$ над $(M_1, \bar{a}')$, обозначив

$$f_n tp(\bar{b}/M^1, \bar{a}) = f_n tp(\bar{b}'/M^1, \bar{a}'),$$

если и только, если

(i) $r_\Delta(SF_n tp(\bar{b}/M^1, \bar{a}) = r_{\Delta_1}(SF_n tp(\bar{b}/M^1, \bar{a})$, где $r_\Delta(p) = R(p, \Delta, \omega)$, [1]
$\Delta = \{f_i^n(\bar{x}, \bar{y}, \bar{a}) : i < s(n, l(\bar{x}) + l(\bar{a}) + 1, L)$,
$\Delta_1 = \{f_i^n(\bar{x}, \bar{y}', \bar{a}') : i < s(n, l(\bar{x}) + l(\bar{a}') + 1, L)$.

(ii) $\forall i < s[|\{c \in M : N \models f_i^n(\bar{b}, \bar{a}, c)\}| =^\infty |\{c' \in M_1 : N_1 \models f_i^n(\bar{b}', \bar{a}', c')\}|]$

$< n, m+1 >$ Скажем, $< n, m+1 >$-Фраиссе тип $\bar{b}$ над $(M, \bar{a})$ равен $< n, m+1 >$-Фраиссе типу $\bar{b}'$ над $(M_1, \bar{a}')$,

$$f_n tp(\bar{b}/M^{m+1}, \bar{a}) = f_n tp(\bar{b}'/M_1^{m+1}, \bar{a}'),$$

если и только, если

(i) $r_\Delta(SF_n tp(\bar{b}/M^{m+1}, \bar{a}) = r_{\Delta_1}(SF_n tp(\bar{b}/M^{m+1}, \bar{a})$, где
$\Delta = \{f_i^n(\bar{x}, \bar{y}, \bar{a}) : l(\bar{y}) = m+1,\ i < s(n, l(\bar{x}) + l(\bar{a}) + m + 1, L)$,
$\Delta_1 = \{f_i^n(\bar{x}, \bar{y}', \bar{a}') : l(\bar{y}) = m+1,\ i < s(n, l(\bar{x}) + l(\bar{a}) + m + 1, L)$.

(ii) $\forall i < s[|\{c \in M : N \models f_i^n(\bar{b}, \bar{a}, c)\}| =^\infty |\{c' \in M_1 : N_1 \models f_i^n(\bar{b}', \bar{a}', c')\}|$

(iii) $\forall a \in M \exists a' \in M_1 (\forall a' \in M_1 \exists a \in M)$

$$f_n tp(\bar{b}/M^m, \bar{a}a) = f_n tp(\bar{b}'/M_1^m, \bar{a}'a')$$

Утверждение 4.1.31. *Если* $f_n tp(\bar{b}/M^m, \bar{a}) = f_n tp(\bar{b}'/M_1^m, \bar{a}')$, *то* $\forall k \leq n$ $\forall$ $l \leq m$

$$f_k tp(\bar{b}/M^l, \bar{a}) = f_k tp(\bar{b}'/M_1^l, \bar{a}')$$

Доказательство следует из определения.

Лемма 4.1.32. *Пусть T полная теория без свойства конечной покрываемости. Для любых натуральных чисел n, m, l_1, l_2 существуют натуральные числа n_1, m_1, что для любых пар моделей (M,N), (M_1,N_1) теории T таких, что (M^{eq}, N^{eq}),
(M_1^{eq}, N_1^{eq}) являются NBAM-парами, следующее верно:*

$$\forall \bar{b} \in N^{l_1}\ \forall \bar{b}' \in N_1^{l_1}\ \forall \bar{a} \in M^{l_2}\ \forall \bar{a}' \in M_1^{l_2},$$

$$[f_{n_1}tp(\bar{b}/M^{m_1}, \bar{a}) = f_{n_1}tp(\bar{b}'/M_1^{m_1}, \bar{a}') \Leftrightarrow \forall b \in N_M \exists b' \in N_1 - M_1$$
$$f_n tp(\bar{b}b/M^m, \bar{a}) = f_n tp(\bar{b}'b'/M_1^m, \bar{a}')]$$

Доказательство. Для произвольных (M,N), $\bar{b}b \in N^{l_1+1}$,
$\bar{a} \in M^{l_2}$ будем выбирать n_1, m_1 так, чтобы их выбор не зависел от выбора (M,N), $\bar{b}b$, $\bar{a}$

$$\text{Пусть} \quad \psi_1(x, \bar{b}, \bar{d}_1, \bar{a}) = \bigwedge_{j=1}^{r_1} f_i^n(x, \bar{b}, \bar{a}, \bar{c}_j)$$

коньюнкция формул из $SF_n tp(b/\bar{b}, M^m, \bar{a}) = q_1(x/\bar{b}, M^m, \bar{a})$ такая, что

$$r_\Delta(\psi_1(x, \bar{b}, \bar{d}_1, \bar{a}) = r_\Delta(q_1(x/\bar{b}, M^m, \bar{a}))$$

$$Mlt_\Delta(\psi_1(x, \bar{b}, \bar{d}_1, \bar{a}) = Mlt_\Delta(q_1(x/\bar{b}, M^m, \bar{a}))$$

По теореме Шелаха [[1],II], r_1 зависит от множества формул
$\Delta = \{f_i^n(x, \bar{b}, \bar{a}, \bar{z}) : i < s\}$.

$$\text{Пусть} \quad \psi_2(x, \bar{x}, \bar{d}_2, \bar{a}) = \bigwedge_{k=1}^{r_2} f_{i_k}^n(x, \bar{x}, \bar{a}, \bar{c}_k)$$

коньюнкция формул из $SF_n tp(b, \bar{b}/M^m, \bar{a}) = q_2(x, \bar{x}/M^m, \bar{a})$ такая, что

$$r_{\Delta_1}(\psi_2(x, \bar{x}/\bar{d}_2, \bar{a}) = r_{\Delta_1}(q_2(x, \bar{x}/M^m, \bar{a}))$$

$$Mlt_{\Delta_1}(\psi_2(x, \bar{x}, \bar{d}_2, \bar{a}) = Mlt_{\Delta_1}(q_2(x, \bar{x}/M^m, \bar{a})).$$

По теореме Шелаха [[1],II], r_2 зависит от множества формул $\{f_i^n(x, \bar{x}, \bar{a}, \bar{z}) : i < s\}$.

Для типа $q_1(x/\bar{b}, M^m, \bar{a})$ существуют формулы
$\theta_i^n(\bar{b}, \bar{a}, \bar{d}_1, \bar{z})$, $i \leq s$ такие, что

$$\forall \bar{c} \in M^m [N \models \theta_i^n(\bar{b}, \bar{a}, \bar{d}_1, \bar{c}) \Leftrightarrow f_i^n(x, \bar{b}, \bar{a}, \bar{c}) \in q_1]$$

Для типа $q_2(x,\bar{x}/M^m,\bar{a})$ существуют формулы
$\mu_i^n(\bar{a},\bar{d}_2,\bar{z}),\ i\le s$ такие, что

$$\forall\bar{c}\in M^m[N\models\mu_i^n(\bar{a},\bar{d}_2,\bar{c})\Leftrightarrow f_i^n(x,\bar{x},\bar{a},\bar{c})\in q_2].$$

Пусть

$$\psi(x,\bar{x},\bar{d},\bar{a})=\psi_1(x,\bar{x},\bar{d}_1,\bar{a})\wedge\psi_2(x,\bar{x},\bar{d}_2,\bar{a}).$$

Утверждение 4.1.33.

$$r_{\Delta_1}(\psi(x,\bar{b},\bar{d},\bar{a}))=r_{\Delta_1}(q_1)$$
$$Mlt_{\Delta_1}(\psi(x,\bar{b},\bar{d},\bar{a}))=Mlt_{\Delta_1}(q_1)$$
$$r_{\Delta_2}(\psi(x,\bar{b},\bar{d},\bar{a}))=r_{\Delta_2}(q_2)$$
$$Mlt_{\Delta_2}(\psi(x,\bar{b},\bar{d},\bar{a}))=Mlt_{\Delta_2}(q_2)=1$$

Доказательство Утверждения следует из определения.

Можем выбрать натуральное $r_0\gg r_1,\ r_0\gg r_2$ такое, что r_0 подходит для всех (N,M), $\bar{b}$, $\bar{a}$, $\Delta=\Delta(\bar{a},\bar{b})$.

Таким образом, существуют формулы
$\theta_i^n(\bar{b},\bar{a},\bar{d}_1,\bar{z}),\ \mu_i^n(\bar{a},\bar{d}_2,\bar{z}),\ i\le s$ такие, что

$$\forall\bar{c}\in M^m[N\models\theta_i^n(\bar{b},\bar{a},\bar{d}_1,\bar{c})\Leftrightarrow f_i^n(x,\bar{b},\bar{a},\bar{c})\in q_1\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow r_\Delta(\psi\wedge f_i^n(x,\bar{b},\bar{a},\bar{c}))=r_\Delta(\psi),$$
$$Mlt_\Delta(\psi\wedge f_i^n(x,\bar{b},\bar{a},\bar{c})=Mlt_\Delta(\psi)] \tag{1}$$
$$\forall\bar{c}\in M^m[N\models\mu_i^n(\bar{a},\bar{d},\bar{c})\Leftrightarrow f_i^n(x,\bar{x},\bar{a},\bar{c})\in q_2\leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r_{\Delta_1}(\psi(x,\bar{x},\bar{d},\bar{a})\wedge f_i^n(x,\bar{x},\bar{a},\bar{c}))=r_{\Delta_1}(\psi(x,\bar{x},\bar{d},\bar{a})].$$

Пусть $m_1=m(1+r_0),\ n_1$ достаточно большое натуральное число удовлетворяющее условиям (i), (ii).

Пусть $\bar{d}\in M^{m\times r_0}$. Тогда для любого кортежа элементов $\bar{c}\in M^m$, если $f_j^{n_1}(x,\bar{a},\bar{d},\bar{c})\in SF_{n_1}tp(\bar{b}/M^m,\bar{a},\bar{d})$ то:

(i) $\exists k<r\models\forall\bar{x}(f_j^{n_1}(x,\bar{a},\bar{d},\bar{c})\to\Phi_k^n(\bar{a},\bar{d}/\mu_i^n(\bar{u},\bar{z}),\dots,\mu_i^n(\bar{u},\bar{z}))$
Здесь, формулы $\Phi_k^n(\bar{a},\bar{d}/\mu_i^n(\bar{u},\bar{z}),\dots,\mu_i^n(\bar{u},\bar{z}))$ из Леммы 4.1.29.

(ii) $\models\forall\bar{x}(f_j^{n_1}(x,\bar{a},\bar{d},\bar{c})\to\bigwedge_{i<s}(\mu_i^n(\bar{a},\bar{d},\bar{c})\to\theta_i^n(\bar{x},\bar{a},\bar{d},\bar{c}))$.

Таким образом, для любых $\bar{b}\in N^{l_1},\bar{b}'\in N_1^{l_1},\bar{a}\in M^{l_2},\bar{a}'\in M_1^{l_2}$, если $f_{n_1}tp(\bar{b}/M^{m_1},\bar{a})=f_{n_1}tp(\bar{b}'/M_1^{m_1},\bar{a}')$, то для любого $b\in N$ можем выбрать подходящий кортеж элементов $\bar{d} \in M^{m \times r_0}$ такой, что обеспечивает выполнение условия $(*)$ и для подходящего $\bar{d}' \in M_1^{m \times r_0}$

$$f_{n_1} tp(\bar{b}/M^m, \bar{a}, \bar{d}) = f_{n_1} tp(\bar{b}'/M_1^m, \bar{a}', \bar{d}').$$

По выбору n_1 и условия (ii)имеем следующее:

формула $\psi(x, \bar{b}', \bar{d}', \bar{a}')$ по определению формулы $\theta_i^n(\bar{b}', \bar{a}', \bar{d}', \bar{z})$ определяет совместное множество формул $q_n(x/\bar{b}', M_1^m, \bar{a}')$.

По Лемме 4.1.24, $q_n(x/\bar{b}', M_1^m, \bar{a}')$ реализуется в N_1 элементом b'. По выбору n_1 и условию (i), имеем

$$f_n tp(\bar{b}b/M^m, \bar{a}) = f_n tp(\bar{b}'b'/M_1^m, \bar{a}').$$

Лемма 4.1.32 доказана. $\diamondsuit$

Рассмотрим игру с двумя игроками (I и II) для конечной сигнатуры $L(P) = L \bigcup \{P^1\}$ для k ходов, где $L_0 \subset L, L_0$ -конечная.

Для $n := 0, m := 1, l_1 := k+1, l_2 := k+1$ используя Лемму 4.1.32, можем выбрать n_1, m_1. Тогда для $n := n_1, m := m_1, l_1 := k, l_2 := k$ снова используя Лемму 4.1.32 получим n_2, m_2 и так далее. Зафиксируем n_{k+1}, m_{k+1}. Пусть b произвольный элемент из $N \backslash M$. Рассмотрим $SF_{n_{k+1}} tp(b/M^{m_{k+1}})$. По Лемме 4.1.24 существует $b' \in N_1 \backslash M_1$ такой, что

$$f_{n_{k+1}} tp(b/M^{m_{k+1}}) = f_{n_{k+1}} tp(b'/M^{m_{k+1}})$$

После определения элементов $b \in N \backslash M, b' \in N_1 \backslash M_1$ игрок II имеет выигрышную стратегию.

Игрок II использует Лемму 4.1.32, когда игрок I выбирает элемент из $N \backslash M (N_1 \backslash M_1)$ или он использует равенство (n, m)-Фраиссе типов, когда игрок I выбирает элемент из $M(M_1)$. Игрок II способен выбирать элемент из $N(N_1)$ или из $M(M_1)$ так, чтобы сохранить равенство Фраиссе-типов на всех k-ходах. Последнее означает [34], что $(M, N) \equiv^{L(p),k} (M_1, N_1)$ для любого конечного L и для любого $k < \omega$. Таким образом, [34], $(M, N) \equiv^{L(p)} (M_1, N_1)$

Следствие 4.1.34. *[32](А.Нуртазин). Пусть T сильно минимальная теория. T' полная тогда и только тогда, когда $x =_T x$ NBAM-формулой.*

Доказательство. Так как T сильно минимальная теория, то для любой (M, N)-пары моделей теории T, любой 1-Фраиссе-Шелах тир реализуется в N потому, что $R^1(p, \Delta, \omega) \leq 1$ для любого типа p.

Таким образом, для доказательств Лемм 4.1.24 и 4.1.32 мы нуждаемся только в условии: $x =^T x$ является NBAM формулой.

Следствие 4.1.35. *Пусть T сильно минимальная теория. Если $x =_T x$ является NBAM-формулой, то для любой (M, N)-пары моделей теории T, (M^{eq}, N^{eq}) является NBAM-парой моделей теории T^{eq}.*

Следствие 4.1.36. *[16] (У. Хрушовски). Пусть T сильно минимальная теория. Тогда, если T' неполная теория, то T локально модулярная.*

Доказательство. По Следствию 4.1.34, формула $x =_T x$ является BAM-формулой. То есть существуют пара моделей (M, N), формула $\phi(z, \bar{x}, \bar{y})$, $\bar{b} \in N$ и натуральное число $n < \omega$, что верно:

$$N = \cup_{\bar{a} \in M} \phi(M, \bar{a}, \bar{b}),\ \forall \bar{x} |\phi(N, \bar{x}, \bar{b})| \leq n.$$

$\diamondsuit$

4.2 Необходимые условия сохранения стабильности при обогащении моделей стабильных теорий

В этом параграфе рассматривается достаточное условие нестабильности A^* для модели (M, A). Приводятся примеры моделей с нестабильным обогащением одноместным предикатом, удовлетворяющие этому условию. В частности, для пары моделей суперстабильных теорий Е. Бускарен доказала эквивалентность данного условия свойству размерностного порядка (dop). Если ослабленное условие выполняется для стабильной модели, то является достаточным для теории.

Пусть $\Theta(\bar{y}, \bar{z}, \bar{t}), \phi(x, \bar{t})$ произвольная $L(M)$-формулы, $K^1(x)$ произвольная формула сигнатуры $L^* = L(P) = L \cup \{P^1\}$. $P(\bar{y})$ будет обозначать $\wedge_{i<l(\bar{y})} P(y_i)$, где $\bar{y} =< y_0, y_1, \cdots >$.

Рассмотрим три L^*-формулы, описывающие взаимодействие между Θ, ϕ и K:

$$\begin{aligned}
H^{(1)}_{\Theta,\phi,K}(\bar{y}, \bar{z}) &:= P(\bar{y}) \wedge P(\bar{z}) \wedge \forall \bar{t}[\Theta(\bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) \to \forall x(\phi(x, \bar{t}) \to K(x))], \\
H^{(2)}_{\Theta,\phi,K}(\bar{y}, \bar{z}) &:= P(\bar{y}) \wedge P(\bar{z}) \wedge \forall \bar{t}[\Theta(\bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) \to \forall x(\phi(x, \bar{t}) \to \neg K(x))], \\
H^{(3)}_{\Theta,\phi,K}(\bar{y}, \bar{z}) &:= P(\bar{y}) \wedge P(\bar{z}) \wedge \forall \bar{t}[\Theta(\bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) \to \\
&\quad \to \exists x_1 \exists x_2(\phi(x_1, \bar{t}) \wedge K(x_1) \wedge \phi(x_2, \bar{t}) \wedge \neg K(x_2))].
\end{aligned}$$

Условие $C_i(\Theta, \phi, K)$, $i \in \{1, 2, 3\}$. *$H^{(i)}_{\Theta,\phi,K}$ имеет свойство порядка.*

Рассмотрим три L^*-формулы.

$$\begin{aligned}
S^{(1)}_{\Theta,\phi,K}(\bar{y}, \bar{z}) &:= P(\bar{y}) \wedge P(\bar{z}) \wedge \exists \bar{t} \exists x[\Theta(\bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) \wedge \phi(x, \bar{t}) \wedge K(x)], \\
S^{(2)}_{\Theta,\phi,K}(\bar{y}, \bar{z}) &:= P(\bar{y}) \wedge P(\bar{z}) \wedge \exists \bar{t} \exists x[\Theta(\bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) \wedge \phi(x, \bar{t}) \wedge \neg K(x)], \\
S^{(3)}_{\Theta,\phi,K}(\bar{y}, \bar{z}) &:= P(\bar{y}) \wedge P(\bar{z}) \wedge \exists \bar{t} \exists x_1 \exists x_2[\Theta(\bar{y}, \bar{t}, \bar{t}) \wedge \phi(x_1, \bar{t}) \\
&\quad \wedge K(x_1) \wedge \phi(x_2, \bar{t}) \wedge \neg K(x_2)].
\end{aligned}$$

Заметим, если формула $\mu(\bar{x}, \bar{y})$ имеет свойство порядка, то $\neg\mu(\bar{x}, \bar{y})$ имеет также свойство порядка. Это вместе с определением формул $H^{(i)}_{\Theta,\phi,K}, S^{(i)}_{\Theta,\phi,K}$ дает

Наблюдение 4.2.1. *Для любых i, k, j таких, что $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ имеем:*

1. Истинность $C_i(\Theta, \phi, K)$ влечет, что $S^{(j)}_{\Theta,\phi,K}(\bar{y}, \bar{z}) \vee S^{(k)}_{\Theta,\phi,K}(\bar{y}, \bar{z})$ имеет свойство порядка.

2. Истинность условия $C_i(\Theta, \phi, K)$ влечет истинность $C_j(\Theta, \phi, K)$ или $C_k(\Theta, \phi, K)$.

Скажем, множество $\{(\bar{\alpha}_n, \bar{\beta}_m)|n, m < \omega\}$ является множеством свидетелей, обеспечивающее истинность $C_i(\Theta, \phi, K)$, если

$$\models H^{(i)}_{\Theta,\phi,K}(\bar{\alpha}_n, \bar{\beta}_m) \text{ iff } n < m$$

Факт 4.2.2. *Пусть (N, B) большое насыщенное расширение (M, A). Предположим $C_i(\Theta, \phi, K)$ верно, тогда для каждого множества $A_0 \subseteq A$, существует (сильный) тип $p(\bar{y}\bar{z})$ над A_0 такой, что существует счетное множество свидетелей $\{(\bar{a}_n, \bar{b}_m)|n, m < \omega;\ \bar{a}_n, \bar{b}_m \in B\}$, условия истинности $C_i(\Theta, \phi, K)$ и*
для всех $n, m < \omega$, $(s)tp(\bar{a}_n\bar{b}_m|A_0) = (s)tp(\bar{a}_0\bar{b}_0|A_0) = p(\bar{y}\bar{z})$.

Примеры

1) Пусть $M := (\mathbb{C}; +, \cdot, 0, 1)$ — поле всех комплексных чисел, A — множество всех вещественных чисел. Тогда в (M, A) формула $H^{(1)}_{\Theta,\phi,P}(y, z)$ имеет свойство порядка, где $\Theta(y, z, t) := z - y = t$ и $\phi(x, t) := x^2 = t$.

В самом деле, пусть $a_n := 2n + 1, b_n := 2n + 2, n < \omega, 2n + 1, 2n + 2 \in C$. Тогда

$$(M, A) \models H^{(1)}_{\Theta,\phi,P}(a_n, b_m) \Longleftrightarrow n < m.$$

2) Рассмотрим доказательство Факта 2.3 из [96]. Если вместо P будем рассматривать его отрицание $\neg P$, то $H^{(2)}_{\phi,x=t,P(x)}(y, z)$ имеет свойство порядка.

3) Рассмотрим доказательство Факта Fact 2.4 из [96]. Если рассмотрим вместо P его отрицание $\neg P$ and $|\phi(a, b, M)| > 1$, то $H^{(3)}_{\phi,t=x,P}$ имеет свойство порядка.

4) Пусть T суперстабильная теория без свойства размерностного порядка (NDOP). Анализ таких теорий, сделанный Елизабет Бускарен в ее докторской диссертации выделяет упомянутое условие [10]. Е.Бускарен доказала, что каждая пара суперстабильной теории T (суперстабильна) стабильная тогда и только тогда, когда T с NDOP.

4') Пример 0.2 из [96]. Так как новый предикат выделяет элементарную подмодель ω-стабильной Ранга 2, мы находимся в 4). Пусть $\Theta(y, z, t) \equiv z - y = t^2$, $\phi(x, t) \equiv E(x, t)$. Тогда $H^{(3)}_{\Theta,\phi,P}(y, z)$ имеет свойство порядка и $\{(a_n, b_m)|a_n = 2n + 1, b_m = 2n + 2,\ n \in N \subset C\}$ является множеством свидетелей для $C_3(\Theta, \phi, P)$.

Рассмотрим три Гипотезы, во всех трех случаях M является моделью стабильной теории. In first one, we suppose for ALL

Гипотеза 1 *Пусть M — модель стабильной теории (стабильная модель). Тогда A^* стабильная тогда и только тогда, когда для любых L-формул Θ, ϕ и любой L^*-1-формулы K, для любого $i \in \{1,2,3\}$, $H^{(i)}_{\Theta,\phi,K}$ не имеет свойство порядка.*

Следующая Гипотеза является сильной версией этой Гипотезы и более привлекательна для применения.

Гипотеза 2 *Если M стабильная модель , то A^* стабильная тогда и только тогда, когда для любых L-формул Θ, ϕ, для любого $i \in \{1,2,3\}$, $H^{(i)}_{\Theta,\phi,P}$ не имеет свойство порядка.*

Если применим Теорему 4.7 [96] к Гипотезе 2, получим другую форму.

Гипотеза 2' *Пусть M стабильная модель и (M, A) равномерно слабо приемлемая, то (M, A) стабильная тогда и только тогда, когда для любых L-формул Θ, ϕ, для любого $i \in \{1,2,3\}$, $H^{(i)}_{\Theta,\phi,P}$ не имеет свойство порядка.*

Факт 4.2.3. *Если Гипотеза 2 подтверждена, то для супестабильной M и неразличимого множества I в M, (M, I) суперстабильная.*

Гипотеза 3 *Если M стабильная модель и (M, A) является равномерно слабо приемлемой, то A^* является зависимой тогда и только тогда, когда (M, A) является зависимой.*

4.3 Стабильные Пары

Казанова и Циглер обобщили доказательства Пуазы, Бускарен, Болдуина и Бенедикта что показать „ограниченность" и A_{ind} стабильная влекут что структура пар является стабильной. Мы теперь покажем что условия „ограниченности" могут быть ослаблены до „равномерно слабо приемлемая" при усилении требования стабильности на A. Более точно, следующие несколько лемм комбинируют чтобы показать что если (M, A) равномерно слабо приемлемая и как M, так и $A^{\#}$, (смотрим следующий параграф) являются стабильными, то (M, A) стабильная.

Рассмотрим язык $L^{\#}$, основные предикаты которого являются отношениями, индуцированными на A в смысле Определения 1.3.1.3. Мы обозначаем через $A^{\#}$ обогащение A до $L^{\#}$-структуры. Легко показать индукцией по построению $L^{\#}$-формул, что для каждой $\phi^{\#}(\mathbf{x}) \in L^{\#}$, существует $L(P)$-формула $\phi^*(\mathbf{x})$ такая, что для каждого $\boldsymbol{a} \in A$ имеет место следующее:

$$A^{\#} \models \phi^{\#}(\boldsymbol{a}) \leftrightarrow (M, A) \models \phi^*(\boldsymbol{a}). \tag{2}$$

Предположим что $(M, A) \prec (N, B)$ и $\mathbf{b}, \mathbf{b}' \in B$. Немедленно следует, что если $\mathbf{b}$ и $\mathbf{b}'$ имеют один и тот же $L^{\#}$-тип над A, то $tp_*(\mathbf{b}|A) = tp_*(\mathbf{b}'|A)$. Выражение 2 вместе с Определением 1.3.1.3. означает что для каждого $\mathbf{b}, \mathbf{b}' \in B$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{b}'$ имеют один и тот же $L^{\#}$-тип над A (в смысле $B^{\#}$) если и только если они имеют один и тот же $L(P)$-тип над A (в смысле (N, B).

Обозначим через $FE(X)$ семейство всех L-конечных отношений эквивалентности над X, а через $FE^*(X)$ семейство всех L^*-конечных отношений эквивалентности над X. Мы будем писать $stp(\mathbf{b}|X) \equiv tp(\mathbf{b}|X)$, если для каждого $E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in FE(X)$ существует $\mathbf{m}_E \in X$ такой, что $\models E(\mathbf{b}, \mathbf{m}_E)$ и пишем $stp_*(\mathbf{b}|X) \equiv tp_*(\mathbf{b}|X)$ для аналогичного понятия для $*$-типов. В стабильном случае, $stp(\mathbf{b}|X) \equiv tp(\mathbf{b}|X)$ влечет что $tp(\mathbf{b}|X)$ является стационарным.

Лемма 4.3.1. *Если $(M, A) \prec (N, B)$, то*

(i) $M \downarrow_A B$ (как L-структуры)

(ii) $stp(\mathbf{b}|A) \equiv tp(\mathbf{b}|A)$.

(iii) $stp_*(\mathbf{b}|A) \equiv tp_*(\mathbf{b}|A)$.

Следовательно, для любых $\mathbf{b}, \mathbf{b}' \in B$ равенство $tp(\mathbf{b}|A) = tp(\mathbf{b}'|A)$ влечет $tp(\mathbf{b}|M) = tp(\mathbf{b}'|M)$.

Доказательство. Легко понять используя $(M, A) \prec (N, B)$ что любая формула $\phi(\mathbf{m}, \boldsymbol{a}, \mathbf{x})$, которая удовлетворяется элементом B, удовлетворяется элементом A. Это влечет что тип B над M не ответвляется над A. (Смотрим для примера [17, III.3.12].)

Мы докажем 3) и 2) является специальным случаем. Пусть $\mathbf{b} \in B$, $E^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in FE^*(A)$.

Тогда существует $\mathbf{m} \in M$ такой, что $(N, B) \models E^*(\mathbf{m}, \mathbf{b})$, так как $E^* \in FE^*(A)$ и каждый E^*-класс имеет представителя в модели (M, A). Тогда мы имеем $(N, B) \models E^*(\mathbf{m}, \mathbf{b}) \wedge P(\mathbf{b})$. Так как $(M, A) \prec (N, B)$, для некоторого $\boldsymbol{a} \in A$, $N \models E^*(\mathbf{m}, \boldsymbol{a})$ и в силу транзитивности E^*, $(N, B) \models E^*(\mathbf{b}, \boldsymbol{a})$. Поэтому, $E^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{a}) \in tp_*(\mathbf{b}|A)$.

„Следовательно” является немедленным из 1) и 2). $\square_{4.3.1}$

Мы будем говорить что f является *сильным частичным автоморфизмом над X*, если f сохраняет все сильные типы над X. Нам необходима следующая легкая лемма, которая не кажется чтобы бала отмечена.

Факт 4.3.2. *Предположим что $M = \bigcup_{\kappa<\lambda} A_\kappa$ является специальной моделью с $X \subset A_0$. Если $b, b' \in M$ реализуют один и тот же сильный тип над X, то существует автоморфизм M, который фиксирует X поточечно, сохраняет сильные типы над X, и отображает b в b'.*

Доказательство. Пусть $M = \bigcup_{\kappa<\lambda} A_\kappa$. Если f является сильным частичным автоморфизмом над X, область определения которого содержит X и содержится в некотором A_κ, тогда для любого $c \in M$ существует $d \in M$ такой, что $f \cup \langle c, d\rangle$ является сильным частичным автоморфизмом над X. (Только реализовали тип $\{E(v, f(a)) :\models E(c, a), a \in \operatorname{dom} f\}$, где E пробегает над всеми конечными отношениями эквивалентности с параметрами в X.) Теперь зафиксируем *осторожное перечисление* M как в Лемме 10.4.3 [41]. Копируя доказательство Теоремы 10.4.4 [41], но заменяя элементарную эквивалентность на условие что отправление a_i в d_i и b_i в c_i является сильным частичным автоморфизмом над X, мы получим результат. $\Box_{4.3.2}$

Мы пишем $S^*(X)$ для совокупности $L(P)$-1-типов над X. Нам также нужна некоторое вполне специальное обозначение. Пусть $S^*_P(X)$ обозначает множество $L(P) - 1$-типов $q(y)$ над X которое содержит формулу $P(y)$. Мы вначале расширяем из стабильности $A^\#$ до ограничения мощности $S^*_P(X)$, для произвольного X, не только подмножеств A.

Лемма 4.3.3. *Предположим что M и $A^\#$ стабильные в $|A|$, и (M, A) равномерно слабо приемлемая. Тогда, $|S^*_P(M)| \leq |A|$.*

Доказательство. Мы применяем Факт 4.3.2 беря A для X. Пусть (N, B) — элементарное расширение (M, A), которое является специальной моделью $(M, A, a)_{a\in A}$.

Дискуссия ниже Леммы 4.3.3 показывает что достаточно доказать следующее:

Утверждение 4.3.4. *Если $\mathbf{b}, \mathbf{b}' \in B$ реализуют один и тот же $L(P)$-тип над A, то они реализуют один и тот же $L(P)$-тип над M.*

Доказательство. Заметим что в силу 3) Леммы 4.3.1, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{b}'$ имеют один и тот же $L(P)$-сильный тип над A. Выбор (N, B) влечет в силу Факта 4.3.2 что существует $L(P)$-автоморфизм h (N, B), который фиксирует A поточечно, сохраняет все $L(P)$-сильные типы над A и переводит $\mathbf{b}'$ в $\mathbf{b}$. Если лемма не выполняется, то существует $L(P)$-формула $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $\mathbf{m} \in M$ такие, что

$$\phi(\mathbf{m}, \mathbf{b}) \wedge \neg\phi(\mathbf{m}, \mathbf{b}').$$

Поэтому

$$\phi(\mathbf{m}, \mathbf{b}) \wedge \neg\phi(h(\mathbf{m}), \mathbf{b}).$$

В силу Леммы 4.3.1, M независима от B над A. В частности, $\mathbf{m} \downarrow_A B$. Поэтому $h(\mathbf{m}) \downarrow_{h(A)} h(B)$, т.е. $h(\mathbf{m}) \downarrow_A B$. Так как h сохраняет $L(P)$-сильные типы над A и следовательно L-сильные типы над A, $stp(\mathbf{m}|A) = stp(h(\mathbf{m})|A)$. Поскольку сильные типы являются стационарными (смотри Предложение 4.34

[42]): $stp(h(\mathbf{m})|A) = stp(\mathbf{m}|A)$, $\mathbf{m} \downarrow_A B$ и $h(\mathbf{m}) \downarrow_A B$ влекут $stp(h(\mathbf{m})|B) = stp(\mathbf{m}|B)$. Так как (N, B) слабо приемлемая, мы заключаем $\mathbf{m}$ и $h(\mathbf{m})$ реализуют один и тот же $L(P)$-тип над B. Это противоречие дает заключение. $\square_{4.3.4}$

Ремарка 4.3.5. Мы требуем Факт 4.3.2 чтобы гарантировать что $\mathbf{m}$ и $h(\mathbf{m})$ реализуют один и тот же сильный тип над A. Гарантируя один и тот же $L(P)$-сильный тип не был существенным, но случилось когда мы вынудили h сохранить P. Мы не можем избежать Факт 4.3.2 используя Лемму 4.3.1, так как $m \notin P$.

Лемма 4.3.3 следует, поскольку стабильность $A^\#$ влечет что существует самое большее $|A|$ $L^\#$-типов над A и в силу Утверждения 4.3.4 мы имеем самое большее $|A|$ $L(P)$-типов над M, которые содержат формулу $P(x)$. $\square_{4.3.3}$

Как мы видели в Лемме 4.3.6, достаточно в Лемме 4.3.3 показать что $|S^*_P(M)| \leq |M|$. Так как B независима от M над A, мы получили бы более сильную границу $|S^*_P(M)| \leq |A|$, которая могла быть полезна в будущем. Теперь мы адаптируем доказательство Бускарен чтобы получит стабильность (M, A).

Лемма 4.3.6. *Пусть M стабильная, (M, A) равномерно слабо приемлемая, и $|S^*_P(M)| \leq |M|$. Тогда (M, A) стабильная.*

Доказательство. Мы предположим что $|M| = \lambda$ с $\lambda^{|L|} = \lambda$. Пусть (N, B) — $|M|^+$-насыщенное элементарное расширение (M, A), $[(M, A) \prec (N, B)]$. Рассмотрим любой $\boldsymbol{a} \in N - (B \cup M)$ и пусть $p := tp(\boldsymbol{a}/B \cup M)$. В силу того, что Бускарен называет Теоремой Слабой Определимости [10] [страница 214]; [60]) существует $C(\boldsymbol{a}) \subset B \cup M(|C(\boldsymbol{a}) \cup M| = \lambda)$ такой, что $tp(\boldsymbol{a}|C(\boldsymbol{a}) \cup M)$ имеет лишь неответвляемое расширение до типа над $B \cup M$ и им является p. Мы используем это обозначение для различных выборов $\boldsymbol{a}$ в следующем. Следующее утверждение есть Лемма 2.3 [10]; мы повторяем доказательство для полноты.

Утверждение 4.3.7. *Пусть $\mathbf{b} \in N \setminus M$, $C(\mathbf{b}) \subset (B \cup M)$ такие, что $tp(\boldsymbol{a}C(\boldsymbol{a})/M) = tp(\mathbf{b}C(\mathbf{b})/M))$ и $tp_*(C(\boldsymbol{a})/M) = tp_*(C(\mathbf{b})/M)$. Предположим далее что $stp(\mathbf{c}/MC(\mathbf{b})) = stp(\mathbf{b}/MC(\mathbf{b}))$, где $\mathbf{c} \in N$ является образом $\boldsymbol{a}$ относительно $L(P)$-автоморфизма h, фиксирующего M и переводящего $C(\boldsymbol{a})$ в $C(\mathbf{b})$. Тогда $tp_*(\boldsymbol{a}/M) = tp_*(\mathbf{b}/M)$.*

Доказательство. В силу выбора $\mathbf{c}$,

$$tp_*(\boldsymbol{a}C(\boldsymbol{a})/M) = tp_*(\mathbf{c}C(\mathbf{b})/M).$$

Так как h фиксировало B как множество, $tp(\mathbf{c}/M \cup B)$ является единственным неответвляемым расширением его ограничения до $C(\mathbf{b}) \cup M$. Теперь,

$$tp(\boldsymbol{a}C(\boldsymbol{a})/M) = tp(\mathbf{b}C(\mathbf{b})/M) = tp(\mathbf{c}C(\mathbf{b})/M).$$

Поскольку $C(\mathbf{b})$ выбрана как $C(\boldsymbol{a})$ была в первом параграфе, $tp(\mathbf{b}/B \cup M)$ является единственным неответвляемым расширение его ограничения до $C(\mathbf{b}) \cup M$. Так как $stp(\mathbf{c}/MC(\mathbf{b})) = stp(\mathbf{b}/MC(\mathbf{b})))$, $stp(\mathbf{b}/M \cup B) = stp(\mathbf{c}/M \cup B)$. Это легко влечет что для любого $\mathbf{d} \in M \setminus A$, $stp(\mathbf{bd}/B) = stp(\mathbf{cd}/B)$. Тогда, так как (N, B) слабо приемлемая, $tp_*(\mathbf{bd}/B) = tp_*(\mathbf{cd}/B)$. Последнее влечет что $tp_*(\mathbf{b}/M \cup B) = tp_*(\mathbf{c}/M \cup B)$. Тогда $tp_*(\boldsymbol{a}/M) = tp_*(\mathbf{b}/M)$, так как $tp_*(\mathbf{c}/M) = tp_*(\boldsymbol{a}/M)$. $\square_{4.3.7}$

Утверждение 4.3.7 влечет что $tp_*(\boldsymbol{a}/M)$ характеризуется тройкой типов: $tp(\boldsymbol{a}C(\boldsymbol{a})/M)$, $tp_*(C(\boldsymbol{a})/M)$, и $stp(\boldsymbol{a}/MC(\boldsymbol{a}))$. Заметим что $tp(\boldsymbol{a}C(\boldsymbol{a})/M) \in S(M)^{|L|}$ и $tp_*(C(\boldsymbol{a})/M) \in S_P^{**}(M)$, где $S_P^{**}(X)$ обозначает множество $L(P)$ – $|L|$-типов $q(\mathbf{y})$, содержащих $P(y_i)$ для каждого $i < |L|$. Для фиксированного $tp(\boldsymbol{a}/MC(\boldsymbol{a}))$, теорема конечного отношения эквивалентности показывает что существуют самое большее $2^{|L|}$ выборов для $stp(\boldsymbol{a}/MC(\boldsymbol{a}))$. Таким образом, существуют лишь λ выборов для $stp(\boldsymbol{a}/MC(\boldsymbol{a}))$. Так как $|S_P^*(M)| \leq |M|$ и $\lambda^{|L|} = \lambda$, $|S_P^{**}(M)| \leq |M| = \lambda$. Поэтому,

$$|S^*(M)| \leq |S(M)|^{|L|} \times |S_P^{**}(M)| \times \lambda \leq \lambda \tag{3}$$

и мы заканчиваем. $\square_{4.3.6}$

Комбинируя Лемму 4.3.3 и доказательство из Леммы 4.3.6, мы имеем:

Теорема 4.3.8. *Пусть M (супер) стабильная, (M, A) равномерно слабо приемлемая, и $A^{\#}$ (супер) стабильная. Тогда (M, A) является (супер) стабильной. И если L счетно и как M, так и $A^{\#}$, являются ω-стабильными, то таким же является и (M, A).*

Доказательство. Мы докажем ω-стабильный случай. Суперстабильность влечет, что каждое $C(\boldsymbol{a})$ конечно. Таким образом, в суперстабильном случае $S_P^{**}(X)$ сокращается до совокупности $L(P)$ k-типов для некоторого k и типы вида $tp(\boldsymbol{a}C(\boldsymbol{a})/M)$ также становятся конечными типами над M. Поэтому первые два фактора в Уравнении 3 становятся $|M|$. В ω-стабильном случае число сильных типов над множеством мощности X есть $|X|$. Таким образом, третий фактор в Уравнении 3 также является $|M|$ и мы заканчиваем.

Следующий пример иллюстрирует роль P^*.

Пример 4.3.9. Пусть M — рациональные числа относительно сложения и пусть $p_i : i < \omega$ — перечисление простых чисел. Пусть $a_0 = 1, b_0 = 1/2$ более обще $a_i = \frac{1}{p_{2i-1}}, b_i = \frac{1}{p_{2i}}$. Пусть $c_{ij} = a_i \cdot b_j$. Теперь если P подмножество c_{ij}, (M, P) является равномерно приемлемим (по Факту 1.3.5), но (M, P) нестабильная для P, выбранного как в Факте 1.3.7. По Теореме 4.3.8, для такого P, P^* нестабильная. Также легко понять непосредственно в этом случае что $(\forall x)[P(x \cdot a_0^{-1} \cdot v) \to P(x \cdot a_0^{-1} \cdot w)]$ линейно упорядочивает $\{c_{0i} : i < \omega\}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена вопросам обогащения моделей логики предикатов первого порядка. В работе получены следующие результаты:

— проведена классификация 1-типов над произвольным множеством слабо о-минимальной теорииимость 1-типов; исследованы слабая и почти ортогональность 1-типов;

— доказано, что обогащение модели слабо о-минимальной теории выпуклым одноместным предикатом сохраняет слабую о-минимальность элементарной теории;

— построен пример, демонстрирующий, что класс 1-консервативных расширений не совпадает с классом консервативных расширений моделей слабо о-минимальных теорий;

— исследованы и классифицированы разные типы консервативных расширений для моделей слабо о-минимальных теорий;

— полностью описаны группы формульных автоморфизмов, действующих на множестве реализаций 1-типа о-минимальной модели; доказано, что любое существенное о-минимальное обогащение о-минимальной модели, теория которой допускает сокращение воображаемых элементов, является также обогащением частичными функциями;

— дан критерий тривиальности сильно минимальной теории в терминах обогащения одноместным предикатом;

— доказано, что теория пар моделей стабильной теории без свойства конечной покрываемости является полной тогда и только, когда все формулы в T^{eq} являются неалгебраически ограниченными над моделями (NBAM);

— доказано, что обогащение модели стабильной теории неформульным слабо приемлемым множеством имеет стабильную теорию тогда и только тогда, когда её имеет ограничение обогащенной модели на это множество (аналогичное верно и для класса ω–стабильных и суперстабильных теорий).

Таким образом, поставленные в диссертации задачи решены. Полученные результаты имеют применение не только в теоретической математике, но и могут быть приложены к вопросам, касающихся языков спецификаций реагирующих информационных систем и к общей теории реляционных баз данных.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Shelah S. Classification Theory and the Number of Non-Isomorphic Models. — Amsterdam; New York; Oxford: North-Holland, 1978. — 685 p.

2 Macpherson D., Marker D., Steinhorn Ch. Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of The American Mathematical Society. — 2000. — Vol. 352. — P. 5435–5483.

3 Marker D. Omitting types in o-minimal theories // The Journal of Symbolic Logic. — 1986. — Vol. 51. — P. 63–74.

4 Mayer L. Vaught's conjecture for o-minimal theories // The Journal of Symbolic Logic. — 1988. — Vol. 53. — P. 146–159.

5 Van den Dries L. P. D. Tarski's problem and Pfaffian functions // Logic Colloquium'84 / J.B. Paris, A.J. Wilkie and G.M. Wilmers, editors. — Amsterdam: North-Holland, 1986. — P. 59–90.

6 Marker D., Steinhorn Ch. Definable types in o-minimal theories // The Journal of Symbolic Logic. — 1994. — Vol. 59. — P. 185–198.

7 Pillay A. Definability of types, and pairs of o-minimal structures // The Journal of Symbolic Logic. — 1994. — Vol. 59. — P. 1400–1409.

8 Baisalov E., Poizat B. Paires de structures o-minimales // The Journal of Symbolic Logic. — 1998. — Vol. 63. — P. 570–578.

9 Poizat B. Pairs de structure stables // The Journal of Symbolic Logic. — 1983. — Vol. 48. — P. 239–249.

10 Bouscaren E. Dimensional order property and pairs of models // Annals of Pure and Applied Logic. — 1989. — Vol. 41. — P. 205–231.

11 Baldwin J., Benedikt M. Stability theory, permutations of indiscernibles, and embedded finite models // Transactions of The American Mathematical Society. — 2000. — Vol. 352. — P. 4937–4969.

12 Casanova E., Ziegler M. Stable theories with a new predicate // The Journal of Symbolic Logic. — 2001. — Vol. 66. — P. 1127–1140.

13 Baldwin J.T., Holland K. Constructing ω-stable structures: Rank 2 fields // The Journal of Symbolic Logic. — 2000. — Vol. 65. — P. 371–391.

14 Кейслер Г., Чэн Ч.Ч. Теория моделей. — Москва: Мир, 1977. — 583 с.

15 Lachlan A. Dimension and totally transcendental theories of rank 2 // Set Theory and Hierarchy Theory / W. Marek, M. Srebrny and A. Zarach, editors. — New York: Springer-Verlag, 1976. — P. 153–183.

16 Buechler S. Pseudo-proective strongly minimal sets are locally projective // The Journal of Symbolic Logic. — 1991. — Vol. 56. — P. 1184–1194.

17 Baldwin J.T. Fundamentals of Stability Theory. — New York: Springer-Verlag, 1988. — 681 p.

18 Hodges W. Extending Beth's theorem // Proceedings 3rd Easter Model Theory Conference at Gross Koris. — Berlin, 1988. — P. 57–64.

19 Hodges W., Hodkinson I.M., Macpherson D. Omega-categoricity, relative categoricity and coordinatization / Preprint. — London, 1987. — P. 1–36.

20 Baldwin J.T., Lachlan A.H. On strongly minimal sets // The Journal of Symbolic Logic. — 1971. — Vol. 36. — P. 289–330.

21 Dickmann M. Elimination of quantifiers for ordered valution rings // Proceedings 3rd Easter Model Theory Conference at Gross Koris. — Berlin, 1985. — P. 56–77.

22 Hodges W. A Shorter Model Theory. — Cambridge: Cambridge University Press, 1997. — 589 p.

23 Hrushovski E. Expansion of ACF / Preprint. — Jerusalem, 1989. — 31 p.

24 Lascar D., Poizat B. An introduction to forking // The Journal of Symbolic Logic. — 1979. — Vol. 44. — P. 330–350.

25 Pillay A. Some remarks on modular regular types // The Journal of Symbolic Logic. — 1991. — Vol. 56. — P. 1003–1011.

26 Pillay A., Steinhorn Ch. Definable sets in ordered structures.1 // Transactions of The American Mathematical Society. — 1986. — Vol. 295. — P. 565–592.

27 Knight J., Pillay A., Steinhorn Ch. Definable sets in ordered structures II // Transactions of the American Mathematical Society. — 1986. — Vol. 295. — P. 593–605.

28 Pillay A., Steinhorn Ch. Definable sets in ordered structures III // Transactions of the American Mathematical Society. — 1988. — Vol. 300. — P. 469–476.

29 Poizat B. Une theorie de Galois imaginaire // The Journal of Symbolic Logic. — 1983. — Vol. 48. — P. 1151–1171.

30 Shelah S. Uniqueness and characterization of prime models over sets for totally transcendental first-order theories // The Journal of Symbolic Logic. — 1972. — Vol. 37. — P. 107–113.

31 Tsuboi A. Algebraic types and automorphism groups // The Journal of Symbolic Logic. — 1993. — Vol. 58. — P. 232–239.

32 Nurtazin A.T. About elementary pairs in the categorical theories // Proceedings of French-Soviet colloquim for Theory of Models. — Karaganda, 1990. — P. 126–146.

33 Fraisse R. Sur quelques classification des relations, basees sur des isomorphismes restreints / Publ. Sei. Univ. — Alger, 1955. — N 2. — P. 273–295.

34 Eurenfeucht A. An application of games to the compactness problem for formalized theories // Fund. Math. — 1961. — Vol. 49. — P. 128–141.

35 Тайманов А.Д. Характеризация аксиоматизируемых классов теорий I

// Известия АН СССР. Серия мат. — 1961. — Т. 25, №4. — С. 601–620.

36 Тайманов А.Д. Характеризация аксиоматизируемых классов теорий II // Известия АН СССР. Серия мат. — 1961. — Т. 25, №6. — С. 755–764.

37 Baldwin T.J., Lachlan A. On strongly minimal sets // The Journal of Symbolic Logic. — 1971. — Vol. 36. — P. 79–96.

38 Зильбер Б.И. Сильно минимальные счетно категоричные теории // Сибирский математический журнал. — 1980. — №21. — С. 219–230.

39 Зильбер Б.И. Сильно минимальные счетно категоричные теории II–III // Сибирский математический журнал. — 1984. — №25. — С. 396–412, 559–571.

40 Hrushovski E. A new strongly minimal set // Annals of Pure and Applied Logic. — 1993. — Vol 62. — P. 147–166.

41 Hodges W. Model Theory. — Cambridge: Cambridge University Press, 1993. — 899 p.

42 Pillay A. An introduction to stability theory. — Oxford: Clarendon Press, 1983. — 231 p.

43 Poizat B. Une théorie de Galois imaginaire // The Journal of Symbolic Logic. — 1983. — Vol. 48. — P. 1151–1170.

44 Pillay A. Some remarks on modular regular types // The Journal of Symbolic Logic. — 1991. — Vol 56. — P. 1003–1011.

45 Kuhlmann F.-V. Abelian groups with contraction I // Contemporary Mathematics. — 1994. — Vol. 171. — P. 217–241.

46 Kuhlmann F.-V. Abelian groups with contraction II: weak o-minimality / Preprint. — Brussels, 1995. — 36 p.

47 Belegradek O.V., Stolboushkin A.P., Taitslin M.A. Generic queries over quasi-o-minimal domains // Logical Foundations of Computer Science: Proc. 4th International Sypmosium LFCS'97, Ярослав, Россия, Июнь 1997 / ed.: S. Adian and A. Nerode / Lecture Notes in Computer Science. — 1997. — Vol. 1234. — P. 21–32.

48 Point F., Wagner F. Essentially periodic ordered groups // Communications in Algebra. — 2001. — Vol. 84. — P. 255–287.

49 Verbovskiy V.V. On formula depth of weakly o-minimal structures // Proceedings of 2-nd Summer International School «Border questions of model theory and universal algebra». — Novosibisk, 1997. — P. 209–224.

50 Tsuboi A. Algebraic types and automorphism groups // The Journal of Symbolic Logic. — 1993. — Vol. 58, N 1. — P. 355–377.

51 Baldwin J.T., Niandong Shi. Stable Generic Structures // Annals of Pure and Applied Logic. — 1996. — Vol. 79. — P. 1–35.

52 Belegradek O.V., Point F., Wagner F. A quasi-o-minimal group without

the exchange property / M.S.R.I. preprint series. — Quebec, 1998. — N 051. — 20 p.

53 Poizat B. Cours de théorie des modèles. — Lyon: Nur al-Mantiq Wal-Ma'rifah, 1985. — 677 p.

54 Wagner F.O. Relational structures and dimensions: section of Ph. D. thesis. — Oxford, 1988. — 88 p.

55 Кулпешов Б.Ш. Слабая о-минимальность линейно упорядоченной структуры // Исследования в теории алгебраических систем / ред. Т. Нурмагамбетов. — Караганда: Карагандинский государственный университет, 1995. — С. 61–67.

56 Weispfenning V. Elimination of quantifiers for certain ordered and lattice-ordered groups // Bull. So. Math. Belg., Ser. B. — 1981. — Vol. 33. — P. 131–155.

57 Pillay A. Some remarks on definable equivalence relation in o-minimal structures // The Journal of Symbolic Logic. — 1986. — Vol. 51. — P. 709–714.

58 Macpherson D., Steinhorn Ch. Extending partial orders on o-minimal structures to definable total orders / Preprint. — Leeds, 1997. — 13 p.

59 Van den Dries L. Remarks on Tarski's problem concerning $(R, +, *, exp)$ // Logic Colloquim '82 / ed.: G. Lolli, G. Longo, and A. Marcja. — Amsterdam: North-Holland, 1984. — P. 97–121.

60 Lascar D. Stability in Model Theory. — London: Longman, 1987. — 358 p.

61 Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. — Москва: Наука, 1979. — 255 с.

62 Hrushovski E. Strongly minimal expansions of algebraic closed fields // Israel Journal of Mathematics. — 1989. — Vol.79. — P. 129–151.

63 Вербовский В.В. Сильно минимальные теории, построенные Хрушовским, не допускают сокращения воображаемых элементов // 1-ый Съезд математиков Казахстана: Тезисы докладов. — Шымкент, 1996. — С. 178–179

64 Вербовский В.В. К вопросу о сокращении воображаемых элементов для сильно минимальных теорий Хрушовского, в которых не интерпретируется группа. — Алматы, 2002. — 25 с. — Деп. в КазгосИНТИ 15.03.2002. — №8909-Ка 02.

65 Ben-Yaacov I., Pilaly A., Vassiliev E. Lovely pairs of models / Preprint. — Notre Dam, 2002. — 19 p.

66 Гончаров С.С. Тотально трансцендентная разрешимая теория без конструктивизируемых однородных моделей // Алгебра и логика. — 1980. — Т. 19, №2. — С. 137–149.

67 Ершов Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. — Москва: Наука, 1980. — 568 с.

68 Urbanik R. A representation theorem for v^*-algebras // Fundamenta Mathematica. — 1963. — Vol. 53. — P. 291–317.

69 Lascovski M., Steinhorn Ch. On o-minimal expansions of archimedian ordered groups // The Journal of Symbolic Logic. — 1995. — Vol. 60. — P. 817–831.

70 Paliutin E.A. Number of models in complete varieties // Logic, Methodology and Philosophy of Sciences. — Amsterdam: North-Holland, 1980. — Vol. VI. — P. 203–217.

71 Hansen M.R., Chaochen Zh. Duration Calculus: Logical Foundations // Formal Aspects of Computing. — 199. — Vol. 9. — P. 283–330.

72 He Jifeng. From CSP to Hybrid Systems // In: A Classical Mind / ed.: A.W. Roscoe. — Amsterdam, 1993. — P. 171–190.

73 He J., Verbovskiy V. Integating DC and CSP: UNU/IIST report 248. — Macau, 2002. — 35 p.

74 Байжанов Б.С. Об одном свойстве борелевских множеств // Известия АН КазССР. — 1981. — №3. — С. 5–8.

75 Байжанов Б.С. ω-стабильные теории, имеющие связный тип // Тезисы докладов IX Всесоюзной конференции по математической логике. — Ленинград, 1988. — С. 68–69.

76 Байжанов Б.С. О двух гипотезах Ходжеса // Тезисы докладов Международной конференции по алгебре. — Новосибирск, 1989. — С. 56.

77 Байжанов Б.С. Связный тип и dop в тотально трансцендентных теориях // В сб.: Теоретико-модельная алгебра. — Алма-Ата: Изд-во КазГУ, 1989. — С. 3–11.

78 Байжанов Б.С. Относительно категоричные, естественные и некоординатизируемые модели // В сб.: Теоретико-модельная алгебра. — Алма-Ата: Изд-во КазГУ, 1989. — С. 12–19.

79 Байжанов Б.С. Группы автоморфизмов и координатизируемость // Доклады Советско-Французского коллоквиума по теории моделей. — Караганда, 1990. — С. 5–8.

80 Байжанов Б.С. Непрерывно естественные вложения групп автоморфизмов и некоординатизируемость // В сб.: Теория моделей. — Алма-Ата: Изд-во КазГУ, 1990. — С. 3–11.

81 Байжанов Б.С. Об одном свойстве ω-стабильной теории // Тезисы докладов X Всесоюзной конференции по математической логике. — Алма-Ата, 1990. — С. 15.

82 Байжанов Б.С. О свойстве RK порядка на формулах ω-стабильных теорий // Тезисы докладов III Международного коллоквиума по теории моделей, Италия. — Тренто, 1991. — С. 15–16.

83 Baizhanov B.S. The types in the weakly o-minimal theories // 1-ый съезд математиков Казахстана. — Шымкент, 1996. — С. 177.

84 Байжанов Б.С. Расширения о-минимальных структур выпуклыми унарными предикатами // Исследования в области алгебраических систем, Карагандинский университет. — Караганда, 1995. — С. 3–22.

85 Байжанов Б.С. Пары моделей и свойство NBAM // В кн.: Проблемы информатики и управления. — Алматы: Гылым, 1995. — С. 81–98.

86 Baizhanov B.S. One-types in weakly o-minimal theories // Proceedings of Informatics and Control Problems Institute. — Almaty, 1996. — P. 77–90.

87 Байжанов Б.С. О существенности о-миниального обогащения // Proceedings of Informatics and Control Problems Institute. — Алматы, 1996. — С. 71–76.

88 Байжанов Б.С. Определимость n-типов над моделями слабо о-минимальных теорий // Proceedings of Informatics and Control Problems Institute. — Алматы, 1998. — С. 47–66.

89 Baizhanov B.S. One-types in weakly o-minimal theories // Abstracts of Contributed Papers of Europpean Summer Meeting's of Association for Symbolic Logic, Logical Colloquium'1998, August 9-15. — Prague, 1998. — P. 31.

90 Baizhanov B.S. Orthogonality of one-types in weakly o-minimal theories // Algebra and Model Theory II / ed.: A.G. Pinus and K.N. Ponomaryov, Novosibirsk State Technical University. — Novosibirsk, 1999. — P. 3–28.

91 Baizhanov B.S. Generic Queries of Databases Embedded in a Weakly o-Minimal Universe // Proceedings of the Second International Scientific Conference in the Republic of Kazakhstan „The Informative Technologies and Control" (KazITCC'99), December 6–10, 1999. — Almaty, 1999. — P. 220–222.

92 Baizhanov B.S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // The Journal of Symbolic Logic. — 2001. — Vol. 66, N3. — P. 1382–1414.

93 Baizhanov B.S. Some remarks on theory without finite cover property // The Bulletin of Symbolic Logic. — 2001. — N7. — P. 161.

94 Baizhanov B.S., Erimbetov M.M. Extensions of countable models of stable theories // The Bulletin of Symbolic Logic. — 2001. — N7. — P. 162.

95 Baizhanov B.S. Axiomatizable Classes of Pairs of Models with Weakly O-Minimal Theory // Abstracts of Short Communications and Poster Sessions of International Congress of Mathematicians. — Beijing, 2002. — P. 1.

96 Baizhanov B.S., Baldwin J. Local Homogeneity // The Journal of Symbolic Logic. — 2004. — Vol. 69, N4. — P. 1243–1260.

97 Baizhanov B.S., Baldwin J., Shelah S. Subsets of Superstable Structures are weakly benign // The Journal of Symbolic Logic. — 2005. — Vol. 70, N1. —

P. 142–150.

98 Байжанов Б. С. Определимость 1-типов в слабо о-минимальных теориях // Математические труды. — 2005. — Т. 8, №2. — С. 3–38.

99 Baizhanov B.S. Explanation of general idea of the paper "Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by unary predicates" // Model Theory in Kazakhstan. — Алматы: Eco Study, 2006. — С. 325–346.

100 Baizhanov B.S., Kulpeshov B.Sh. On behaviour of 2-formulas in weakly o-minimal theories // Mathematical Logic in Asia, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference. — Novosibirsk, 2006. — С. 31–40.

101 Baizhanov B.S. Definability of 1-Types in Weakly o-Minimal Theories // Siberian advances in mathematics. — 2006. — Vol. 16, №2. — P. 1–33.

102 Baizhanov B.S., Baldwin J.T., Verbovskiy V.V. Cayley's theorem for ordered groups: o-minimality // Сибирские электронные математические известия. — 2007. — С. 278–281.

103 Байжанов Б.С. Асан Дабсович Тайманов в теории моделей // Материалы Международной научно-практической конференции "Таймановские чтения"посвященной 90-летию доктора физико-математических наук, академика А. Д. Тайманова и 75-летию ЗКГУ им. М. Утемисова. — Уральск, 2007. — С. 7–10.

104 Байжанов Б.С. Об одном свойстве определимых типов в о-минимальных теориях // Вестник КазНПУ. — 2007. — №2. — С. 34–36.

105 Байжанов Б.С. Обогащения о-минимальных моделей и одноместные функции // Математический журнал. — 2007. — №2. — С. 31–35.

106 Байжанов Б.С. Консервативные расширения моделей слабо о-минимальных теорий // Вестник НГУ. — 2007. — Т. 7, №3. — С. 13–44.

107 Байжанов Б. С. Об обогащении множеством неразличимых элементов модели суперстабильной теории // Тезисы докладов Международной конференции "Теория функций, алгебра и математической логики"посвященной 90-летию академика А.Д. Тайманова. — Алматы, 2007. — С. 59.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Shelah S. *Classification Theory and the Number of Non-Isomorphic Models* // North-Holland — Amsterdam · New York · Oxford, 1978.

[2] Macpherson D., Marker D., Steinhorn Ch. *Weakly o-minimal structures and real closed fields* // Transactions of The American Mathematical Society, vol. 352 (2000), С. 5435–5483.

[3] Marker D. *Omitting types in o-minimal theories* // The Journal of Symbolic Logic, vol. 51(1986), С. 63–74.

[4] Mayer L. *Vaught's conjecture for o-minimal theories* // The Journal of Symbolic Logic, vol. 53(1988), С. 146–159.

[5] Van den Dries L. P. D. *Tarski's problem and Pfaffian functions* // Logic Colloquium'84 (J.B. Paris, A.J. Wilkie and G.M. Wilmers, editors), North-Holland, Amsterdam, 1986, С. 59–90.

[6] Marker D., Steinhorn Ch. *Definable types in o-minimal theories* // The Journal of Symbolic Logic, vol. 59(1994), С. 185–198.

[7] Pillay A. *Definability of types, and pairs of o-minimal structures* // The Journal of Symbolic Logic, vol. 59(1994), С. 1400–1409.

[8] Baisalov E., Poizat B. *Paires de structures o-minimales* // The Journal of Symbolic Logic, vol. 63(1998), С. 570–578.

[9] Poizat B. *Pairs de structure stables* // The Journal of Symbolic Logic, vol. 48(1983), С. 239–249.

[10] Bouscaren E. *Dimensional order property and pairs of models* // Annals of Pure and Applied Logic, vol.41 (1989), С. 205–231.

[11] Baldwin J., Benedikt M. *Stability theory, permutations of indiscernibles, and embedded finite models* // Transactions of The American Mathematical Society, vol.352 (2000), С. 4937–4969.

[12] Casanova E., Ziegler M. *Stable theories with a new predicate* // The Journal of Symbolic Logic, vol. 66(2001), С. 1127–1140.

[13] Baldwin J.T., Holland K. Constructing ω-stable structures: Rank 2 fields // The Journal of Symbolic Logic, 65, 2000, С. 371–391.

[14] Кейслер Г., Чэн Ч.Ч. *Теория моделей* // Мир, Москва, 1977.

[15] Lachlan A. *Dimension and totally transcendental theories of rank 2* // Set Theory and Hierarchy Theory, (W. Marek, M. Srebrny and A. Zarach, editors), Springer-Verlag, 1976, C. 153–183.

[16] Buechler S. *Pseudo-proective strongly minimal sets are locally projective* // The Journal of Symbolic Logic, vol. 56 (1991), C. 1184–1194.

[17] Baldwin J.T. Fundamentals of Stability Theory // Springer-Verlag, New Jork Inc, 1988.

[18] Hodges W. *Extending Beth's theorem* // Proceedings 3rd Easter Model Theory Conference at Gross Koris, Berlin, 1988, C. 57-64.

[19] Hodges W., Hodkinson I.M., Macpherson D. *Omega-ctegoricity, relative categoricity and coordinatization* // Preprint, 24 September, 1987, C. 1-36.

[20] Baldwin J.T., Lachlan A.H. *On strongly minimal sets* // The Journal of Symbolic Logic, vol.36 (1971), C. 289–330.

[21] Dickmann M. *Elimination of quantifiers for ordered valution rings* // Proceedings 3rd Easter Model Theory Conference at Gross Koris, Berlin, 1985.

[22] Hodges W. A Shorter Model Theory // Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[23] Hrushovski E. *Expansion of ACF* // preprint, 1989.

[24] Lascar D., Poizat B. *An introduction to forking* // The Journal of Symbolic Logic, vol.44 (1979), C. 330–350.

[25] Pillay A. *Some remarks on modular regular types* // The Journal of Symbolic Logic, vol. 56 (1991), C. 1003–1011.

[26] Pillay A., Steinhorn Ch. *Definable sets in ordered structures.1* // Transactions of The American Mathematical Society, vol. 295(1986), C. 565–592.

[27] Knight J., Pillay A., Steinhorn Ch. *Definable sets in ordered structures II* // Transactions of the American Mathematical Society, 295 (1986), C. 593–605.

[28] Pillay A., Steinhorn Ch. *Definable sets in ordered structures III*, // Transactions of the American Mathematical Society, 300 (1988), C. 469–476.

[29] Poizat B. *Une theorie de Galois imaginaire* // The Journal of Symbolic Logic, vol. 48 (1983), C. 1151-1171.

[30] Shelah S. *Uniqueness and characterization of prime models over sets for totally transcendental first-order theories* // The Journal of Symbolic Logic, vol. 37(1972), C. 107–113.

[31] Tsuboi A. *Algebraic types and automorphism groups* // The Journal of Symbolic Logic, vol. 58 (1993), C. 232–239.

[32] Nurtazin A.T. About elementary pairs in the categorical theories // Proceedings of French-Soviet colloquim for Theory of Models, Karaganda, 1990, C. 126–146.

[33] Fraisse R. Sur quelques classification des relations, basees sur des isomorphismes restreints // Publ. Sei. Univ. 1955, Alger, 2, C. 273–295.

[34] Eurenfeucht A. An application of games to the compactness problem for formalized theories // Fund. Math., 49(1961), C. 128–141.

[35] Taimanov A.D. Charaterization of axiomatizable classes of models I // Izvestia AN USSR, Ser. math., v. 25(1961), №4, C. 601–620.

[36] Taimanov A.D. Charaterization of axiomatizable classes of models II // Izvestia AN USSR, Ser. math., v. 25(1961), №6, C. 755–764.

[37] Baldwin T.J., Lachlan A. *On strongly minimal sets* // The Journal of Symbolic Logic, Vol. 36, 1971, C. 79–96.

[38] Зильбер Б.И. *Сильно минимальные счетно категоричные теории* // Сибирский математический журнал, 21, 1980, C. 219–230.

[39] Зильбер Б.И. *Сильно минимальные счетно категоричные теории II–III* // Сибирский математический журнал, 25, 1984, C. 396–412, 559–571.

[40] Hrushovski E. *A new strongly minimal set* // Annals of Pure and Applied Logic, Vol 62, 1993, C. 147–166.

[41] Hodges W. Model Theory // Cambridge University Press, 1993.

[42] Pillay A. An introduction to stability theory // Clarendon Press, Oxford, 1983.

[43] Poizat B. *Une théorie de Galois imaginaire* // The Journal of Symbolic Logic, Vol. 48, 1983, C. 1151–1170.

[44] Pillay A. *Some remarks on modular regular types* // The Journal of Symbolic Logic, Vol 56, 1991, C. 1003–1011.

[45] Kuhlmann F.-V. *Abelian groups with contraction I* // Contemporary Mathematics, Vol. 171, 1994, C. 217–241.

[46] Kuhlmann F.-V. *Abelian groups with contraction II: weak o-minimality* // preprint.

[47] Belegradek O.V., Stolboushkin A.P., Taitslin M.A. *Generic queries over quasi-o-minimal domains* // Logical Foundations of Computer Science, (Proc. 4th International Sypmosium LFCS'97, Ярослав, Россия, Июнь 1997, редакторы S. Adian and A. Nerode), Lecture Notes in Computer Science 1234, Springer-Verlag, 1997, C. 21–32.

[48] Point F., Wagner F. *Essentially periodic ordered groups* // в печати в: Communications in Algebra.

[49] Verbovskiy V.V. *On formula depth of weakly o-minimal structures* // Proceedings of 2-nd Summer International School, Border questions of model theory and universal algebra, Новосибирск, 1997, C. 209–224.

[50] Tsuboi A. *Algebraic types and automorphism groups* // The Journal of Symbolic Logic, Vol. 58, number 1, March 1993.

[51] Baldwin J.T., Niandong Shi. *Stable Generic Structures* // Annals of Pure and Applied Logic, Vol. 79, 1996, C. 1–35.

[52] Belegradek O.V., Point F., Wagner F. *A quasi-o-minimal group without the exchange property* // M.S.R.I. preprint series, 1998–051.

[53] Poizat B. *Cours de théorie des modèles* // Nur al-Mantiq Wal-Ma'rifah, 1985.

[54] Wagner F.O. *Relational structures and dimensions* // section of Ph. D. thesis, Oxford, 1988.

[55] Кулпешов Б.Ш. *Слабая о-минимальность линейно упорядоченной структуры* // Исследования в теории алгебраических систем, (редактор Т. Нурмагамбетов), Карагандинский Государственный Университет, Караганда, 1995, C. 61–67.

[56] Weispfenning V. *Elimination of quantifiers for certain ordered and lattice-ordered groups* // Bull. So. Math. Belg., Ser. B, 33 (1981), C. 131–155.

[57] Pillay A. *Some remarks on definable equivalence relation in o-minimal structures* // The Journal of Symbolic Logic, vol. 51 (1986), C. 709–714.

[58] Macpherson D., Steinhorn Ch. *Extending partial orders on o-minimal structures to definable total orders* // preprint, 1997.

[59] Van den Dries L. *Remarks on Tarski's problem concerning* $(R, +, *, exp)$ // Logic Colloquim '82 (G. Lolli, G. Longo, and A. Marcja, editors), North-Holland, Amsterdam, 1984, C. 97–121.

[60] Lascar D. Stability in Model Theory. // Longman, 1987. originally published in French as Stabilité en Théorie des Modèles (1986).

[61] Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика // М., Наука, 1979

[62] Hrushovski E. Strongly minimal expansions of algebraic closed fields // Israel Journal of Mathematics, vol.79, C. 129–151.

[63] Verbovsky V.V. The strongly minimal sets were constructed by Hrushovski do not admit elimination of imaginaries // 1-ый Съезд математиков Казахстана, Тезисы докладов, Шымкент, 1996г., С. 178–179

[64] Вербовский В.В. К вопросу о сокращении воображаемых элементов для сильно минимальных теорий Хрушовского, в которых не интерпретируется группа // Депонирована в КазгосИНТИ 15 марта 2002 г., регистрационный номер 8909-Ка 02.

[65] Ben-Yaacov I., Pilaly A., Vassiliev E. *Lovely pairs of models* // preprint, 2002.

[66] Гончаров С.С. *Тотально трансцендентная разрешимая теория без конструктивизируемых однородных моделей* // Алгебра и логика, 19 (1980), N2, С. 137–149.

[67] Ершов Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели // Наука, Москва, 1980.

[68] Urbanik R. A representation theorem for v^*-algebras // Fundamenta Mathematica, 53:291-317, 1963.

[69] Lascovski M., Steinhorn Ch. *On o-minimal expansions of archimedian ordered groups* // The Journal of Symbolic Logic, vol. 60(1995), C. 817–831.

[70] Paliutin E.A. *Number of models in complete varieties* // Logic, Methodology and Philosophy of Sciences, vol. VI, North-Holland, Amsterdam, 1980, С. 203–217.

[71] Hansen M.R., Chaochen Zh. Duration Calculus: Logical Foundations // Formal Aspects of Computing (1997) 9, С. 283–330.

[72] He Jifeng. From CSP to Hybrid Systems // In A. W. Roscoe (ed): “A Classical Mind”, 1993, С. 171–190.

[73] He J., Verbovskiy V. Integating DC and CSP // UNU/IIST report 248 (2002), 35 С.

[74] Байжанов Б. С. Об одном свойстве борелевских множеств // Известия АН КазССР, №3, 1981, С. 5-8.

[75] Байжанов Б. С. ω-стабильные теории, имеющие связный тип // Тезисы докладов IX Всесоюзной конференции по математической логике, -Ленинград, 1988, - С. 68-69.

[76] Байжанов Б. С. О двух гипотезах Ходжеса // тезисы докладов Международной конференции по алгебре, - Новосибирск, 1989, - С. 56.

[77] Байжанов Б. С. Связный тип и dop в тотально трансцендентных теориях // В сборнике „Теоретико-модельная алгебра”, -Алма-Ата, изд-во КазГУ, 1989, - С. 3–11.

[78] Байжанов Б. С. Относительно категоричные, естественные и некоординатизируемые модели // В сборнике „Теоретико-модельная алгебра”, -Алма-Ата, изд-во КазГУ, 1989, - С. 12–19.

[79] Байжанов Б. С. Группы автоморфизмов и координатизируемость // Доклады Советско-Французского коллоквиума по теории моделей, - Караганда, 1990, - С. 5–8.

[80] Байжанов Б. С. Непрерывно естественные вложения групп автоморфизмов и некоординатизируемость // в сборнике „Теория моделей”, - Алма-Ата, изд-во КазГУ, 1990, - С. 3–11.

[81] Байжанов Б. С. Об одном свойстве ω-стабильной теории // Тезисы докладов X Всесоюзной конференции по математической логике, - Алма-Ата, 1990, - С. 15.

[82] Байжанов Б. С. О свойстве RK порядка на формулах ω-стабильных теорий // Тезисы докладов III Международного коллоквиума по теории моделей, Италия, - Тренто, 1991, - С. 15–16.

[83] Байжанов Б.С. The types in the weakly o-minimal theories // 1-ый съезд математиков Казахстана, - Шымкент, 1996, - С. 177.

[84] Байжанов Б.С. Расширения o-минимальных структур выпуклыми унарными предикатами // Исследования в области алгебраических систем, Карагандинский Университет, Караганда, 1995, С. 3–22.

[85] Байжанов Б.С. Пары моделей и свойство NBAM // в кн. „Проблемы информатики и управления", - Алматы, Издательство Гылым, 1995, - С. 81–98.

[86] Байжанов Б.С. One-types in weakly o-minimal theories // Proceedings of Informatics and Control Problems Institute, - Almaty, 1996, - С. 77–90.

[87] Байжанов Б.С. О существенности o-миниального обогащения // Proceedings of Informatics and Control Problems Institute, - Almaty, 1996, - С. 71–76.

[88] Байжанов Б.С. Определимость n-типов над моделями слабо o-минимальных теорий // Proceedings of Informatics and Control Problems Institute, - Almaty, 1998, - С. 47–66.

[89] Байжанов Б.С. One-types in weakly o-minimal theories // Abstracts of Contributed Papers of Europpean Summer Meeting's of Association for Symbolic Logic, Logical Colloquium'1998, August 9-15, - Prague, 1998, - P. 31.

[90] Baizhanov B. Orthogonality of one-types in weakly o-minimal theories // Algebra and Model Theory II (A.G. Pinus and K.N. Ponomaryov, editors), Novosibirsk State Technical University, - Novosibirsk 1999, - С. 3–28.

[91] Байжанов Б.С. Generic Queries of Databases Embedded in a Weakly o-Minimal Universe // Proceedings of the Second International Scientific Conference in the Republic of Kazakhstan „The Informative Technologies and Control" (KazITCC'99), December 6–10, 1999, - Almaty, Kazakhstan, - С. 220–222.

[92] Байжанов Б.С. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // The Journal of Symbolic Logic, V. 66, N.3, September 2001, С. 1382–1414.

[93] Байжанов Б.С. Some remarks on theory without finite cover property // The Bulletin of Symbolic Logic, 7, March 2001, С. 161.

[94] Байжанов Б.С., Еримбетов М.М. Extensions of countable models of stable theories // The Bulletin of Symbolic Logic, 7, March 2001, С. 162.

[95] Байжанов Б. С. Axiomatizable Classes of Pairs of Models with Weakly O-Minimal Theory // Abstracts of Short Communications and Poster Sessions of International Congress of Mathematicians, - Beijing 2002, August 20–28, - С. 1.

[96] Байжанов Б.С. Балдвин Дж. Local Homogeneity // The Journal of Symbolic Logic, V. 69, N. 4. Dec. 2004, С. 1243–1260.

[97] Байжанов Б.С. Балдвин Дж., Шелах С. Subsets of Superstable Structures are weakly benign // The Journal of Symbolic Logic, V. 70, N.1, March, 2005, С. 142–150.

[98] Байжанов Б. С. Определимость 1-типов в слабо о-минимальных теориях // Математические труды, 2005, Т. 8, №2, С. 3–38.

[99] Байжанов Б. С. Explanation of general idea of the paper "Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by unary predicates" // Model Theory in Kazakhstan, В сборнике статей под редакцией М.М. Еримбетова, - Алматы, Eco Study, 2006, - С. 325–346.

[100] Байжанов Б. С., Кулпешов Б. Ш. On behaviour of 2-formulas in weakly o-minimal theories // Mathematical Logic in Asia, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference, Novosibirsk, 2006, С. 31–40.

[101] Байжанов Б. С. Definability of 1-Types in Weakly o-Minimal Theories // Siberian advances in mathematics, 2006, V. 16, №2, С. 1-33.

[102] B. Baizhanov, J. T. Baldwin, V. Verbovskiy. Cayley's theorem for ordered groups: o-minimality // Сибирские электронные математические известия, 2007, С. 278–281.

[103] Байжанов Б. С. Асан Дабсович Тайманов в теории моделей // Материалы Международной научно-практической конференции "Таймановские чтения"посвященной 90-летию доктора физико-математических наук, академика А. Д. Тайманова и 75-летию ЗКГУ им. М. Утемисова. -Уральск, 2007. - С. 7-10.

[104] Байжанов Б.С. Об одном свойстве определимых типов в о-минимальных теориях // Вестник КазНПУ, 2007. С. 34-36.

[105] Байжанов Б.С. Обогащения о-минимальных моделей и одноместные функции // Математический журнал, №2, 2007, 31-35 С.

[106] Байжанов Б.С. Консервативные расширения моделей слабо о-минимальных теорий // Вестник НГУ, Т. 7, №3, 2007, С. 13-44.

[107] Байжанов Б. С. Об обогащении множеством неразличимых элементов модели суперстабильной теории // Тезисы докладов Международной конференции "Теория функций, алгебра и математической логики"посвященной 90-летию академика А. Д. Тайманова , - Алматы, 2007, - С. 59.