Министерство образования Республики Казахстан
Карагандинский государственный университет
им. Е.А.Букетова

Исследования в теории алгебраических систем

**Сборник научных трудов
(межвузовский)**

Караганда
1995

УДК 510.67

Исследования в теории алгебраических систем

Исследования в теории алгебраических систем. Сборник научных трудов (межвузовский). - Караганда: Изд. КарГУ, 1995. 110 с

ISBN 5-7667-1133-6

В сборнике представлены статьи по актуальным проблемам теории моделей, связанные с изучением йонсоновских и обобщенно-йонсоновских, хорновых теорий, элементарных пар, однородных моделей стабильных теорий, свойств полигонов, теорий унаров. Рассматриваются такие вопросы, как поведение теорий при расширении сигнатуры, выразительная сила некоторых программных логик, а также относящиеся к теоретико-модельной алгебре.

Большинство статей написаны по результатам работ, которые проводились под непосредственным научным руководством или под влиянием Т.Г.Мустафина, светлой памяти которого и посвящается данный сборник.

Список лит. - 62

Рецензент: канд. физ.-мат. наук М.И.Бекенов

Ответственный редактор: Нурмагамбетов Т.А.
Ответственный секретарь: Нурхайдаров Е.С.

Св. план 1995, поз. 6

ISBN 5-7667-1133-6

24 августа 1994 года в возрасте 52-х лет ушел из жизни крупный ученый-математик, доктор физико-математических наук, профессор, директор Института прикладной математики Национальной академии и Министерства образования Республики Казахстан Туленды Гарифович Мустафин

Воспитанник знаменитой Сибирской научной школы, он закончил Новосибирский университет в 1965 году, защитил кандидатскую (1971) и докторскую (1990) диссертации в Академгородке

После окончания НГУ трудовую деятельность он начал с ассистента Целиноградского педагогического института В 1972 году, работая уже заведующим кафедрой алгебры и геометрии, был приглашен в только что открывшийся Карагандинский государственный университет, где проработал до конца своей жизни (22 года): заведовал кафедрой, был деканом, проректором по учебной работе, в последний год жизни возглавлял Институт прикладной математики двойного подчинения

Туленды Гарифович был яркой личностью, настоящим ученым и педагогом. С первых лет работы в КарГУ, создавая научную школу, он ориентировал ее на мировой уровень, стремясь получить признание у зарубежных математиков. Еще в 1966 году (в возрасте 23 лет) он выступил с докладом на Международном конгрессе по математике в Москве - высшем форуме математиков всего мира На таком же форуме в 1994 году в Цюрихе (Швейцария) он был единственным представителем от Караганды

В 1987 году Т.Г Мустафин совместно с коллегами из Алматы и Сибири организует Международное научное сотрудничество университетов Караганды, Алматы, Новосибирска и Франции (Проект II-А-117).

В 1990 году в рамках этого сотрудничества (впервые на территории СССР) на базе КарГУ был успешно проведен Советско-французский коллоквиум по теории моделей, в котором приняли участие 17 ведущих ученых из Франции, США, Германии и Швейцарии. Всей деятельностью по организации и проведению этой конференции руководил Т.Г.Мустафин.

В этом же 1990 году он едет в Хельсинки на Логический коллоквиум в качестве приглашенного докладчика, что является высоким признанием его научного авторитета.

В 1992 году Туленды Гарифович два месяца находится в Париже, где читает лекции и проводит научную работу по Специальному гранту министерства науки и технологии Франции. Затем еще дважды выезжает во Францию по приглашению французских коллег.

За высокий уровень научных работ Туленды Гарифовичу был присужден Персональный грант Фонда Сороса, а его лаборатории теоретической и прикладной логики - Международный грант ИНТАС.

Т.Г Мустафин опубликовал свыше 75 научных работ, в основном в признанных журналах и сборниках - как отечественных, так и зарубежных. Он автор трех монографий, основатель нескольких новых направлений в математике, которые подхвачены и развиваются дальше специалистами из Франции, России, Казахстана и других стран Его работы обладают высоким индексом цитирования, что свидетельствует о больших научных заслугах в международной практике, а его теоремы, методы и понятия не подвластны времени

Туленды Гарифович основал научную школу по теории моделей в Караганде, которая получила мировую известность. Его ученики, большинство из которых кандидаты наук, продолжают начатое им дело - развитие алгебры и математической логики в Казахстане.

Где бы Туленды Гарифович ни работал и чем бы он ни занимался, он всегда показывал пример высокой ответственности за порученное дело, глубокого видения проблемы и широкого охвата решаемых вопросов. Какой бы пост он ни занимал и каких бы званий ни удостаивался, он всегда был открыт и доступен каждому. Окружающих поражали оптимизм и жизнелюбие ученого.

Туленды Гарифович Мустафин был не только крупным ученым с мировым именем, но и большим педагогом и организатором науки, человеком, которому были свойственны благородные черты патриота и гражданина.

УДК 510.67

В.С.Вайханов

РАСШИРЕНИЕ О-МИНИМАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ВЫПУКЛЫМИ УНАРНЫМИ ПРЕДИКАТАМИ*

В работе [1] была сформулирована следующая проблема: пусть M о-минимальна, M^* расширение M, полученное добавлением унарного предиката, выделяющего в M выпуклое подмножество, должна ли M^* быть слабо о-минимальной?

В данной статье доказывается теорема, которая является ее решением.

Определение 1 [2, 3]. Линейно упорядоченная структура D называется о-минимальной, если каждое формульное (определимое с параметрами) подмножество D есть конечное объединение точек и открытых интервалов $I=(a,b)$, $a \in D \cup \{-\infty\}$, $b \in D \cup \{\infty\}$.

Определение 2 [3]. Теория T называется о-минимальной, если любая модель теории T о-минимальна.

Определение 3. Подмножество $U \subset D$ линейно упорядоченной структуры D называется выпуклым, если для любых $a,b \in U$ верно $[a < b \longrightarrow \forall t\ (a < t < b \longrightarrow t \in U)]$

*Исследования проведены по Программе INTAS (Grant INTAS - 93 - 3547)

Определение 4 [4]. Линейно упорядоченная модель D называется слабо о-минимальной, если каждое формульное (определимое с константами) подмножество D есть конечное объединение выпуклых подмножеств.

Определение 5 [4]. Теория T называется слабо о-минимальной, если любая модель теории T слабо о-минимальна

Теорема 6 [5,6]. Теория любой о - минимальной модели о-минимальна

Заметим, что теория слабо о-минимальной модели не обязательно слабо о-минимальна.[1].

О-минимальная теория имеет приятные теоретико-модельные свойства.

Теорема 7 [3]. Для любого множества о-минимальной модели D существует простая атомная модель.

Теорема 8 [3]. Пусть D - о-минимальная структура, $a \in acl(A \cup \{b\}) \setminus acl(A)$, $A \cup \{a,b\} \subset D$. Тогда $b \in acl(A \cup \{a\}) \setminus acl(A)$.

Определение 9. Разбиение о-минимальной структуры на два выпуклых подмножества называется сечением Если сечение имеет наибольший элемент в нижнем подмножестве или наименьший элемент в верхнем подмножестве, то такое сечение называют рациональным [1]. В противном случае сечение называется иррациональным

Заметим, что наименьшим и наибольшим элементами могут быть $-\infty$ или ∞.

Мы будем отождествлять сечение с соответствующим бескванторным типом в сигнатуре { < }.

Теорема 10 [3]. Линейно упорядоченная модель D о-минимальна тогда и только тогда, когда любой 1-тип над D определяется сечением..

Заметим, что недавно Б.Кулпешов дал характеристику слабо о-минимальной модели в терминах типов и сечений.

Обозначение 11. Пусть D элементарная подмодель D_1 - о-минимальной модели Через D(A) будем обозначать простую атомную модель над $D \cup A$ в модели D_1. Если $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ то $D(A) = D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_3)$.

Определение 12 [2]. 1-тип p o-минимальной модели D назовем одиночным, если для любого α, реализующего тип p в модели $D(\alpha)$, верно $\forall \beta \in D(\alpha)$, если β реализует p, то $\beta = \alpha$.

Очевидно, что одиночному типу соответствует иррациональное сечение.

Определение 13. Тип, определяемый рациональным сечением, назовем рациональным. Неодиночный, нерациональный 1-тип назовем социальным.

Теорема 14 [7, **лемма 7**]. Нерациональный тип p o-минимальной модели социален тогда и только тогда, когда существует унарная функция $h(x,\bar{d}), \bar{d} \in D$, что $\forall x\, [h(x,\bar{d}) > x]$ и для любого γ верно

$$[\ \gamma \text{ реализует } p \ \longleftrightarrow\ h(x,\bar{d}) \text{ реализует } p\ ].$$

Соглашение 15. Вместо формулы $x < z < y$ будем писать $z \in I$, где x,y символы переменных и $I=(x,y)$.

Часто вместо $\exists x \exists y\ (x < y)$ будем писать $\exists\ I$. Если $a<z<b$ и a,b элементы из D, то будем писать $z \in J$, $J = (a,b)$. Запись $J \subset D$ означает, что $a,b \in D$. Например, если $J \subset D$, $\alpha \in D_1 \setminus D$, то запись $\alpha \in J$ будет означать, что α лежит в D-определимом интервале J. Таким образом, I всегда неопределенный интервал, J всегда интервал с концевыми элементами, лежащими в определенной модели.

Определение 16(а). Пусть $p(x), q(y) \in S_1(D)$ – типы o-минимальной модели D. Скажем, что p ортогонален q, если для любого α, реализующего тип p, в модели $D(\alpha)$ не реализуется тип q.

Определение 16(б) Семейство типов $\{p_i \mid i \in K\} \subset S_1(D)$ называется ортогональным, если для любого $i \in K$, для любых α_j ($j \in K$, $j \neq i$, α_j реализует p_j) в модели $D(\{\alpha_j \mid j \in K \setminus \{i\}\})$ не реализуется тип p_i.

Определение 17 [5, 9]. Пусть M o – минимальная структура.

(а) Если $X = \{a\}$, где $a \in M$, то X клетка и $\dim X = 0$. Если X есть интервал (a,b) ($a,b \in M \cup \{-\infty, \infty\}$), то X клетка и $\dim X = 1$.

(б) Предположим $X \subset M^n$ есть клетка с $\dim X = k$. Мы определим два вида клеток в M^{n+1}, ассоциированных с X:

(1) Пусть $h: X \dashrightarrow M$ формульная и непрерывная функция. Тогда $X_1 = \mathrm{graph}\ (h) = \{ (x,h(\bar{x})) : \bar{x} \in X \}$ есть клетка в M^{n+1}, и мы полагаем $\dim X_1 = k$.

(2) Пусть f,g определимые непрерывные функции из X в $M \cup \cup \{-\infty,\infty\}$ с $f < g$ на X. Тогда $X_2 = (f,g)_{\bar{x}} = \{(\bar{x},y) : \bar{x} \in X,\ f(\bar{x}) < < y < g(\bar{x})\}$ есть клетка в M^{n+1}, и мы полагаем $\dim X_2 = k+1$.

Теорема 18 [5,9]. Если $X \subset M^n$ есть M-определимое формульное множество, то мы можем разбить X на конечное число клеток. Если X определимо с помощью констант только из A, то каждая клетка определима только при помощи констант из A.

В дальнейшем для лемм модели D, M всегда о-минимальны.

Лемма 1. Пусть $p,q \in S_1(D)$.

(а) [p ортогонален q <—> q не ортогонален p];

(б) Если p ортогонален q, то $p(x) \cup q(y)$ полный 2-тип из $S_2(D)$.

Доказательство. (б) следует из (а) и определения ортогональности.

(а) Пусть p не ортогонален q. Тогда в модели $D(\alpha)$ по определению 16(а) существует элемент $\beta \in D(\alpha)$, реализующий тип q. Тогда для β существует полная формула $\theta(y,\alpha,\bar{d}), \bar{d} \in D$, не делимая формулами над $D \cup \{\alpha\}$, что $D(\alpha) \models \theta(\beta,\alpha,\bar{d})$. Для любого $\gamma \in \theta(D(\alpha),\alpha,\bar{d})$ $tp(\gamma/D) = tp(\beta/D) = q$. Формула $\theta(y,\alpha,\bar{d})$ эквивалентна открытому интервалу или реализует один элемент. Если истинно, что $\exists! y\ \theta(y,\alpha,\bar{d})$, тогда $\beta \in dcl(\alpha,\bar{d})$ и по теореме 8 $\alpha \in dcl(\beta,\bar{d})$, что означает существование формулы $\psi(x,\beta,\bar{d})$ такой, что $D(\alpha) \models \exists! x\ \psi(x,\beta,\bar{d})\ \&\ \psi(\alpha,\beta,\bar{d})$. Тогда формула $\exists! x\ \psi(x,y,\bar{d}) \in q$. И тогда формула $\mu(x,y,\bar{d}) = =\psi(x,y,\bar{d})\ \&\ \theta(y,x,\bar{d})$ определяет биекцию. Пусть $g(y,\bar{d}) = x$ <-> <—> $\mu(x,y,\bar{d})$. Тогда $g(\beta,\bar{d}) = \alpha$. Формула $\exists\ x\ \mu(x,y,\bar{d})$ распадается на конечное число интервалов и точек. Рассмотрим открытый $\bar{d}$ – определимый интервал J_1, содержащий β. На этом интервале $g(y,\bar{d})$ монотонна [5,9]. $J_2 = \exists\ y\ (\mu(x,y,\bar{d})\ .\ \&\ y \in \in J_2)$. Тогда функция $g(y,\bar{d})$ монотонно отображает J_1 на J_2. Будем считать, что g возрастающая так, как α, $\bar{d} \in D$.

Утверждение. Для любого $J \subset D$, $\alpha \in J \subset J_2$ $\exists J' \subset D$, $\beta \in J' \subset J_1$, что $g(J,\bar{d}) = J$.

В качестве J' можно взять $g^{-1}(J,\bar{d})$.

Для любого β', реализующего тип q, в модели $D(\beta')$ реализуется тип p. В самом деле, элемент $g(\beta',\bar{d})$ из $D(\beta')$ должен реализовать $p(x)$. Если он не реализует тип $p(x)$, то в силу теоремы 10 существует $J \subset D$, $x \in J \in p(x)$, $g(\beta',\bar{d}) \notin J$. Но тогда $g^{-1}(g(\beta',\bar{d}))=\beta' \notin J'$. Но по утверждению формула $y \in J'$ принадлежит типу q, что противоречит выбору β'. Заметим, что если $\Theta(D(\alpha),\alpha,\bar{d}) = J_0 = (\delta_1,\delta_2)$, то $tp(\delta_1/D) = q$ или $tp(\delta_2/D) = q$. Если $\delta_1 \notin D$, то так как в интервале (δ_1,β) нет элементов из D, то $tp(\delta_1/D) = tp(\beta/D)$ по теореме 10. Отсюда мы имеем, что $\delta_1 \in dcl(D \cup \{\alpha\})$.

Если $\delta_1,\delta_2 \in D$, то в интервале J_0 существует элемент из D, что противоречит выбору $\theta(y,\alpha,\bar{d})$. Тогда для $\delta_1 \notin D$ можно провести аналогичное рассуждение, как и для β.

Лемма 2. Пусть $p,q \in S_1(D)$. p не ортогонален q. Тогда

а) p – рациональный $\Longleftrightarrow$ q – рациональный;

б) p – социальный $\Longleftrightarrow$ q – социальный;

в) p – одиночный $\Longleftrightarrow$ q – одиночный.

Доказательство. Из доказательства леммы 1(а) вытекает существование функции $g(y,\bar{d}),\bar{d} \in D$, переводящей любую реализацию типа q в реализацию типа p, и для любой реализации α типа p существует в $D(\alpha)$ элемент β, реализующий тип q, что $f(\beta,\bar{d}) = \alpha$. Заметим, что в модели $D(\alpha)$ множество реализаций типа p является выпуклым множеством R_p А так как между двумя выпуклыми множествами R_p и R_q, образуемыми типами p и q, существует биективное непрерывное отображение, то вид этих выпуклых множеств один и тот же. Выпуклое множество R_p одноэлементно тогда и только тогда, когда R_q одноэлементно. R_p имеет наименьшую верхнюю грань в D тогда и только тогда, когда R_q имеет наименьшую верхнюю грань из D или наибольшую нижнюю грань из D.

Лемма 3. (а) Пусть D элементарная подмодель о-минимальной модели M. Если M можно получить из D последовательной реализацией социальных и одиночных типов, то для любых

a, b_1, b_2 ($b_1 < a < b_2$, $a \in D$, $b_1, b_2 \in M \setminus D$) существуют c_1, c_2 из D, что выполняется $b_1 < c_1 < a < c_2 < b_2$.

(б) Пусть $Q = \{q_i \mid i \in S\}$ ортогональное семейство нерациональных 1-типов о-минимальной модели M, $B = \{ \beta_i \mid i \in S$ и β_i реализует $q_i \}$. Тогда для любого β_i, для любых γ_1, γ_2 из $M(B \setminus \{\beta_i\})$ ($\beta_i \in (\gamma_1, \gamma_2)$) существуют $c_1, c_2 \in M$, что

$$\gamma_1 < c_1 < \beta_i < c_2 < \gamma_2.$$

Доказательство. (б) следует из определения 16(б).

(а) Перепишем условие леммы.

Пусть D элементарная подмодель о-минимальной модели M. Пусть $M = \bigcup_{i<k} D_i$, где k – некоторый ординал, такой, что верно

1) $D = D_0$;

2) $D_i \prec D_j$, если $i < j < k$,

3) $D_{i+1} = D_i(\alpha_i+1)$, α_{i+1} реализует социальный или одиночный тип над D_i;

4) $D_j = \bigcup_{i<j} D_i$, если j – предельный ординал.

Тогда для любого $j<k$, для любых a, b_1, b_2 ($b_1 < a < b_2$, a из D, $b_1, b_2 \in D_j \setminus D$) существуют $c_1, c_2 \in D$, что выполняется $b_1 < c_1 < a < c_2 < b_2$.

Будем доказывать методом трансфинитной индукции.

Пусть $j=i+1$. Для любого $a \in D$ и любых $\beta_1, \beta_2 \in D_{i+1} \setminus D_i$ ($\beta_1 < a < \beta_2$) существуют $\gamma_1, \gamma_2 \in D_i$, что $\beta_1 < \gamma_1 < a < \gamma_2 < \beta_2$. Так как $tp(\beta_1 / D_i) \neq tp(\beta_2 / D_i)$, то по индукционному предположению в интервалах $J_1 = (\gamma_1, a)$, $J_2 = (a, \gamma_2)$ существуют элементы из D.

Пусть j-предельный ординал. $\beta_1, \beta_2 \in D_j$, $a \in D$, $\beta_1 < a < \beta_2$, тогда существует $i < j$, что $\beta_1, \beta_2 \in D_i$. Тогда по индукционному предположению в интервалах $J_1 = (\beta_1, a)$, $J_2 = (a, \beta_2)$ существуют элементы из D.

Следующая лемма является уточнением теоремы 14.

Лемма 4. Пусть $p(x) \in S_1(M)$ – социальный. Тогда для любого $\gamma \in M(\alpha)$ верно $[\ tp(\gamma / \bar{D}) = p(x)\ \&\ \alpha < \gamma \longrightarrow$ существует унарная функция $h(x, \bar{d})$, что $\gamma \leq h(\alpha, \bar{d})$, $tp(h(\alpha, \bar{d}) / M) = p(x)]$

Доказательство. Пусть $\gamma \in D(\alpha)$, $tp(\alpha / D) = p(x)$.

Если формула $\theta(x,\alpha,\bar{d})$ полная над $D \cup \{\alpha\}$, то она определяет открытый интервал или точку (в силу о-минимальности D).

Если $\theta(x,\alpha,\bar{d})$ определяет точку $\theta(\gamma,\alpha,\bar{d})$, то можно определить унарную функцию как в доказательстве леммы 1(а).

Если $\theta(x,\alpha,\bar{d})(D(\alpha)) = (\delta_1,\delta_2)$, то $\forall\ \gamma \in (\delta_1,\delta_2)$ $tp(\gamma / D) = p(x)$.

Если $tp(\delta_2 / D) \neq p(x)$, то $\delta_2 \in D$ и следовательно тип p рациональный. Следовательно, $tp(\delta_2 / D) = p(x)$. А так как $\delta_2 \in dcl(\bar{d},\alpha)$, то можно определить функцию $h(x,\bar{d})$, не выводящую за пределы выпуклого множества реализаций типа $p(x)$, как в лемме 1(а).

Лемма 5.(а) Пусть $p,q \in S_1(D)$, p – иррациональный тип, ортогональный одиночному типу q, α – реализация типа p. Тогда единственный тип $q' \in S_1(D(\alpha))$, расширяющий q, является одиночным.

(б) Пусть $p,q_1,q_2 \in S_1(D)$, p социальный, одиночный тип q_1 ортогонален одиночному типу q_2, α реализует тип p. Тогда одиночный тип q_1' ортогонален одиночному типу q_2' ($q_1 \subset q_1'$ из $S_1(D(\alpha))$, $q_2 \subset q_2' \in S_1(D(\alpha))$).

Доказательство. (а) Единственность типа q' следует из леммы 1(б). Пусть β реализует тип q. Рассмотрим модель $D(\alpha)(\beta)$. В модели $D(\alpha)(\beta)$ существует по крайней мере один элемент β_1 из $D(\alpha)(\beta) \setminus D(\alpha)$, что $tp(\beta_1 / D(\alpha)) = tp(\beta / D(\alpha))$.

Случай 1. $\beta < \beta_1$

Пусть $D(\beta)$ простая модель над $D \cup \{\beta\}$ в модели $D(\alpha)(\beta)$, $D(\beta) \prec D(\alpha)(\beta)$.

Из одиночности типа q следует, что $\beta_1 \notin D(\beta)$. Рассмотрим сечение $R_\beta(y) = \{ \beta < y < d \mid \beta < d, d \in D(\beta)$ (эквивалентно $d \in D$)$\}$. $R_\beta(y)$ определяет тип $r(y) \in S_1(D(\beta))$. Тип $r(y)$ рациональный и реализуется в модели $D(\beta)(\alpha)$. Следовательно, тип $r(y)$ не ортогонален типу $p'(x) \in S_1(D(\beta))$, $p \subset p'$ Из леммы 2(а) следует, что $p'(x)$ рациональный

Случай 2. $\beta > \beta_1$.

Рассматривается аналогично случаю 1. Вместо сечения $R_\beta(y)$ рассматривается сечение $L_{\bar\beta}(y) = \{ d < y < \beta \mid d < \beta,\ d \in D(\beta)\}$.

Следовательно, выпуклое множество реализаций типа $p'(x)$ в модели $D(\beta)$ должно быть ограничено сверху или снизу элементом из $D(\beta)$. Это не может быть элемент из $D(\beta) \setminus D$, в противном случае типы $p(x)$ и $q(y)$ не ортогональны. Следовательно, этот элемент должен быть из D, что означает, что $p(x)$ рациональный.

(б) Пусть α реализует тип p, β_1 реализует тип q_1. В модели $D(\beta_1)$ не реализуются типы p [лемма 2(б)] и q_2(по условию леммы). В модели $D(\beta_1)(\alpha)$ не реализуется q_2', так как q_2' одиночный (лемма 5(а)), а p'– социальный [теорема 14] (здесь $q_2 \subset q_2' \in S_1(D(\beta_1))$, $p \subset p' \in S_1(D(\alpha))$). Тогда в модели $D(\alpha)(\beta_1) \supseteq D(\beta_1)(\alpha)$ не реализуется тип q_2. Утверждение леммы 5(б) следует из произвольности выбора α, β_1.

Лемма 6. Пусть M о – минимальная структура, $Q = \{q_1,\dots,q_s \mid q_i \in S_1(M),\ 1 \le i \le s\}$ – ортогональное семейство типов над M, $B = \{ \beta_i \mid 1 \le i \le s,\ \beta_i$ реализует тип $q_i \}$. Тогда для любой формулы $\psi(y_1,\dots,y_s,d)$, $d \in M$, если $M(\beta_1,\dots,\beta_s) \models \psi(\beta_1,\dots,\beta_s,d)$, то существуют интервалы $J_1,\dots,J_s \subset M$ такие, что выполняется

1) $\beta_i \in J_i$, $1 \le i \le s$;

2) $M \models \forall y_1 \dots \forall y_s\ (\ \&\ (y_i \in J_i) \longrightarrow \psi(y_1,\dots,y_s,d))$.

Доказательство. Рассмотрим формулу $\psi(y,\beta_2,\dots,\beta_s,d)$ Реализация этой формулы должна быть бесконечной, в противном случае $\beta_1 \in M(\beta_2,\dots,\beta_s,d)$, что противоречит ортогональности семейства типов Q. Из о-минимальности следует существование $(\beta_2,\dots,\beta_s,d)$ – определимого интервала $J_1' \subset M(\beta_2,\dots,\beta_s)$, что $\beta_1 \in J_1$ и верно

$M(\beta_2,\dots,\beta_s) \models \forall y_1\ [\ y_1 \in J_1' \longrightarrow \psi(y_1,\beta_2,\dots,\beta_s,d)$. (1)

Очевидно для любого $J_1 \subset J_1'$ формула (1) будет выполняться

Из леммы 3(б) следует существование интервала $J_1' \subset M$, что $J_1 \subset J_1'$ и $\beta_1 \in J_1$.

Обозначим $\psi_1(\beta_2,\ldots,\beta_s,\bar{d}) := \forall y_1 [y_1 \in J_1 \longrightarrow$ $\longrightarrow \psi(y_1,\beta_2,\ldots,\beta_s,\bar{d})]$. Повторяя (s-1) раз рассуждения, получим искомые $J_2,\ldots,J_s \subset M$.

Лемма 7. Пусть D o-минимальная модель. $f(\bar{u},\bar{b})$ и $g(\bar{u},\bar{b})$ две функции ($\bar{b} \in D$) такие, что $D \models \forall \bar{u} [f(\bar{u},\bar{b}) < g(\bar{u},\bar{b})]$. Формула $\theta(\bar{u},\bar{d})$ такая, что $D \models \forall \bar{u}_1 \forall \bar{u}_2 [\theta(\bar{u}_1,\bar{d}) \,\&\, \theta(\bar{u}_2,\bar{d}) \longrightarrow$ $\longrightarrow f(\bar{u}_1,\bar{b}) < g(\bar{u}_2,\bar{b})$. Тогда верно

$D \models \exists x [\forall \bar{u} [\theta(\bar{u},\bar{d}) \longrightarrow [f(\bar{u},\bar{b}) \le x < g(\bar{u},\bar{b})]]]$ или

$D \models \exists x [\forall \bar{u} [\theta(\bar{u},\bar{d}) \longrightarrow [f(\bar{u},\bar{b}) < x \le g(\bar{u},\bar{b})]]]$.

Доказательство. Пусть $H(x,\bar{b},\bar{d}) := \forall \bar{u} [\theta(\bar{u},\bar{d}) \to f(\bar{u},\bar{b}) < x]$. Так как D o-минимальная модель, то $H(D,\bar{b},\bar{d})$ распадается на конечное число интервалов $\bar{b}\&\bar{d}$- определимых и $H(D,\bar{b},\bar{d}) \ne \emptyset$, так как любая $g(\bar{u},\bar{b})$ с условием $\theta(\bar{u},\bar{d})$ удовлетворяет $H(x,\bar{b},\bar{d})$. Следовательно, существует нижняя граничная точка. Пусть c нижняя грань $H(D,\bar{b},\bar{d})$, $c \in D$.

Случай 1. $c \notin H(D,\bar{b},\bar{d})$

В этом случае для любого $\bar{u}$, если $D \models \theta(\bar{u},\bar{d}) \longrightarrow f(\bar{u},\bar{b}) \le$ $\le c$ Отсюда $g(\bar{u},\bar{b}) > c$.

Случай 2. $c \in H(D,\bar{b},\bar{d})$

В этом случае для любого $\bar{u}$, если $D \models \theta(\bar{u},\bar{d}) \longrightarrow g(\bar{u},\bar{b})$ $\ge c$. Следовательно, $f(\bar{u},\bar{b}) < c$.

Отсюда следует заключение леммы 2.

Лемма 8. Пусть Y $\bar{b}$-определимая клетка в D, $\bar{b} \in D$, $K(\bar{b},D^l) = Y \subset D^l$. Тогда, если в некотором расширении D_1 модели D существуют $a_1,\ldots,a_l \in D_1 \setminus D$, что выполняется

1) $\langle a_1,\ldots,a_l \rangle \in K(\bar{b},D_1^l) = Y(D_1^l)$;

2) $\{a_1,\ldots,a_l\}$-алгебраически независимо над D, то dimY=l.

Доказательство. Индукцией по l.

$l = 1$. Очевидно, что $K(\bar{b},z) \equiv z \in I \subset D$, где I $\bar{b}$–определимый открытый интервал.

$l+1$. $D_l = K(\bar{b},a_1,\dots,a_l,a_{l+1})$. По определению клетки $\langle a_1,\dots,a_l \rangle$ лежит в $X(D_l^l)$, где X является клеткой размерности l. $a_{l+1} \in acl(D,a_1,\dots,a_l)$. Следовательно, $K(\bar{b},z_1,\dots,z_l,z_{l+1})$ определяет клетку размерности $l+1$.

Лемма 9. Для того, чтобы теория T сигнатуры Σ, содержащая аксиомы линейного порядка, имела только слабо о–минимальное расширение, необходимо и достаточно, чтобы для любой формулы $\phi(x,\bar{y})$ существовало натуральное число N_ϕ, что

$$\neg \exists \bar{y} \exists x_1 \dots \exists x_{N_\phi} \left(\mathop{\&\&}_{i \neq j} \neg \varepsilon_\phi (x_i,x_j,\bar{y})\right) \in T$$

$$(\varepsilon_\phi (x,z,\bar{y}) := (\phi(x,\bar{y}) \;\&\; \phi(z,\bar{y}) \;\&\; (z \neq x \dashrightarrow ((z < x \dashrightarrow$$
$$\dashrightarrow \forall t\, (z < t < x \dashrightarrow \phi(t,\bar{y}))) \;\&\; (x < z \dashrightarrow \forall t\, (x < t < z$$
$$\dashrightarrow \phi(t,\bar{y})))))).$$

Доказательство легко следует из определения слабой о–минимальности теории. Пусть D модель о–минимальной теории, Q – ортогональное семейство одиночных типов из $S_1(D)$, P семейство социальных типов из $S_1(D)$. Зафиксируем перечисление P. Будем считать, что D является элементарной подмоделью некоторой $|P \cup Q \cup D|^+$– насыщенной модели и все рассматриваемые элементы и модели находятся в этой фиксированной $|P \cup Q \cup D|^+$ -насыщенной модели.

Определим индукцией по $\langle n,m \rangle$ $(n < k = |P|,\ m<\omega)$ следующие модели, элементы и типы:

$A_0 = \emptyset$, $D_0 = D$;

$A_n = \{ \alpha_{i,j} \mid i \leq n;\ j < \omega;\ \alpha_{i,j} < \alpha_{i,j+1}$ реализуют один тип $p \in P \}$;

$D_n = D\,(A_n)$;

$A_{n,m} = \bigcup_{i<n} A_i \cup \{ \alpha_{n,j} \mid j \leq m,\ \alpha_{n,1}$ реализует тип из P с наименьшим ординалом, не реализуемый в $D(\bigcup_{i<n} A_i)\}$

Замечание 1. $A_{n,m}$ – алгебраически независимое множество над D

Замечание 2. $tp(\bar\alpha_{n_1},\bar\alpha_{n_2},\ldots,\bar\alpha_{n_k}/D)=tp(\bar\alpha'_{n_1},\bar\alpha'_{n_2},\ldots,\bar\alpha'_{n_k}/D)$ для любых $\bar\alpha_{n_i},\bar\alpha'_{n_i}\in A_{n_i}\setminus\bigcup_{j<n_i}A_j$. одинаково упорядоченных последовательностей одинаковой длины.

Пусть $p=tp(\alpha_{n,1}/D)$. По построению p – социальный. Следовательно, сечение, определяемое p, состоит из двух непустых выпуклых подмножеств D. Обозначим через C_n верхнее выпуклое множество. Рассмотрим следующее множество бескванторных формул в сигнатуре $\Sigma_0=\{<\}$.

$R_{n,m+1}(x)=\{a<x<c \mid c\in C_n;\ a\in D_{n,m}$ такой, что $\forall c'\in C_n,\ a<c'\}$.

Утверждение 3. $R_{n,m+1}(x)$ определяет иррациональное сечение в $D_{n,m}$, а следовательно единственным способом расширяется до полного типа над $D_{n,m}$.

Доказательство. Совместность $R_{n,m+1}(x)$ следует из вида выпуклого множества C_n, определяемого социальным типом p. Предположим, $R_{n,m+1}(x)$ не определяет иррациональное сечение. Следовательно, существует $a\in D_{n,m}\setminus D$, что для любого $e\in D_{n,m}\setminus D$ верно $[a<e \Rightarrow \exists c\in C_n\ (a<c<e)]$ и тип $tp(a/D)=tp(\alpha_{n,1}/D)=p$.

Из теоремы 14 следует существование функции $h(x,\bar d)$, $\bar d\in D$, что $h(a,\bar d)>a$ и $tp(h(a,\bar d)/D)=p$. Но это противоречит выбору a, так как $h(a,\bar d)\in D_{n,m}$. Следовательно, $R_{n,m+1}(x)$ определяет иррациональное сечение, которое единственным способом дополняется до типа над $S_1(D_{n,m})$ и является социальным над $D_{n,m}$. Возьмем произвольную реализацию типа $R_{n,m+1}(x)$. Обозначим его через $\alpha_{n,m+1}$.

1) $A_{n,m+1}:=A_{n,m}\cup\{\alpha_{n,m+1}\}$ алгебраически независимо над D. По построению $\alpha_{n,m+1}\notin D(A_{n,m})$.

2) По индукционному предположению $tp(\bar\alpha_{n_1},\ldots,\bar\alpha_{n_k},\bar\alpha_n/D)=tp(\bar\alpha'_{n_1},\ldots,\bar\alpha'_{n_k},\bar\alpha'_n/D)$.

Рассмотрим типы $tp(\bar\alpha_{n_1},\ldots,\bar\alpha_{n_k},\bar\alpha_n,\alpha_{n,m+1}/D)$; (2)

$$tp(\bar\alpha'_{n_1},\ldots,\bar\alpha'_{n_k},\bar\alpha'_n,\alpha_{n,j}/D). \qquad (3)$$

В моделях $D(\bar\alpha_{n_1},\ldots,\bar\alpha_{n_k},\bar\alpha_n)$ и $D(\bar\alpha'_{n_1},\ldots,\bar\alpha'_{n_k},\bar\alpha'_n)$ элементы $\alpha_{n,m+1}$

и $\alpha'_{n,1}$ соответственно реализуют единственный социальный тип, определяемый выпуклым множеством C_n. Единственность будет следовать из леммы 4. Следовательно, типы (2) и (3) совпадают. Пусть $B = \{ \beta_m \mid \beta_m$ реализация типа $q_m \in Q\}$. Обозначим $D' := D(\bigcup_{n<k} A_n \cup B)$.

Утверждение 4. а) $\bigcup_{n<k} A_n \cup B$ – алгебраически независимое множество над D;

б) $tp(\beta_m / D(A \cup (B \setminus \{\beta_m\}))$ – одиночный тип и определяется сечением D;

в) $\forall \bar\alpha, \bar\alpha' \in A, \forall \beta \in B$

$[tp(\bar\alpha / D) = tp(\bar\alpha' / D) \Rightarrow tp(\bar\alpha,\beta / D) = tp(\bar\alpha',\beta / D)]$.

Доказательство. а) По построению и по лемме 5(б);

б) следует из а) и леммы 3(б);

в) следует из утверждения 4(а), леммы 1(б), леммы 5(б)

Теперь перейдем к доказательству основной теоремы.

Пусть D o-минимальная модель. $O = \{U_\lambda \mid \lambda \in K\}$ – семейство выпуклых подмножеств модели D. Каждое выпуклое подмножество определяет два полных 1-типа. Множество всех 1-типов, определяемых семейством O, разделяется на три множества: рациональных , одиночных и социальных типов. Для каждого рационального типа существует константа из D, определяющая этот тип. В множестве одиночных типов выберем максимальное ортогональное подсемейство, которое обозначим через Q. Остальные одиночные типы из этого множества определяются при помощи D – определимых функций и реализаций типов из Q (лемма 5(б)). Множество социальных типов обозначим P и зафиксируем перечисление типов ординалами. Рассмотрим модель D', построенную в предыдущем параграфе для P и Q.

$P_0 = \{p \in P \mid \exists \alpha_{n,1} \in A, \alpha_{n,1}$ реализует тип $p\}$

По построению для любого $p \in P \setminus P_0$ существует D-определимая функция $f(\bar u,d)$, $\exists \bar\alpha \in A$, что $tp(f(\bar\alpha,d) / D) = p$.

Рассмотрим модель $D^+ = \langle D, U'_\lambda \rangle_{\lambda\in K}$, в которой унарные предикаты U_λ определяются одноименными выпуклыми множествами из O.

Предложение 1 (плотный). Для любой формулы $\mu(\bar{x})$ сигнатуры модели D^+ существует формула $\psi_\mu(\bar{x},\bar{\alpha},\bar{\beta},d)$ модели D^*, ($\bar{\alpha} \in A$, $\bar{\beta} \in B$, $\bar{d} \in D$), что для любого $\bar{b} \in D$ верно

$$[\ D^+ \models \mu(\bar{b}) \Leftrightarrow D^* \models \psi_\mu(\bar{b},\bar{\alpha},\bar{\beta},d)].$$

Доказательство проводится индукцией по шагам построения формул как в [1].

Для унарного предиката $U_n(x)$ соответствующая формула будет конъюнкцией двух подходящих формул следующего вида:

$x \leq d$; $x < d$, $d < x$, $d \leq x$, $x < f(\bar{\alpha},d)$, $g(\bar{\alpha},d) < x$, $g(\bar{\beta},d) < x$, $x < g(\bar{\beta},d)$, $x < \alpha_{n,1}$, $\alpha_{n,1} < x$, $\beta_m < x$, $x < \beta_m$. Здесь $\bar{\alpha}$, $\alpha_{n,1} \in A$, $\bar{\beta}$, $\beta_m \in B$, $d, \bar{d} \in D$.

Пусть $\mu(\bar{y}) = \exists x\, \phi(x,\bar{y})$ формула сигнатуры модели D^+. Тогда для формулы $\phi(x,\bar{y})$ по индукционному предположению существует формула $\psi_\phi(x,\bar{y},\bar{\alpha}_n,\bar{\alpha}_m,\ldots,\beta_m,\ldots,\bar{\beta}_r,d)$, $\bar{d} \in D$, что $\forall a,\bar{b} \in D\ [D^+ \models \phi(a,\bar{b}) \Leftrightarrow D^* \models \psi_\phi(a,\bar{b},\bar{\alpha}_n,\bar{\alpha}_m,\ldots,\bar{\beta}_m,\ldots,\bar{\beta}_r,d)]$.

Здесь $\bar{\alpha}_n = \langle\alpha_{n,i_1},\alpha_{n,i_2},\ldots,\alpha_{n,i_k}\rangle$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$;

$\bar{\alpha}_m = \langle\alpha_{m,j_1},\alpha_{m,j_2},\ldots,\alpha_{m,j_l}\rangle$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_l$.

По условию 2 и утверждению 4(в) мы можем заменить константы $\bar{\alpha}_n,\bar{\alpha}_m$ следующим образом:

$\alpha_{n,i_1} \dashrightarrow \alpha_{n,3}$; $\alpha_{m,j_1} \dashrightarrow \alpha_{m,3}$;

$\alpha_{n,i_2} \dashrightarrow \alpha_{n,6}$; $\alpha_{m,j_2} \dashrightarrow \alpha_{m,6}$;

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$\alpha_{n,i_k} \dashrightarrow \alpha_{n,3k}$; $\alpha_{m,j_l} \dashrightarrow \alpha_{m,3l}$.

Поэтому мы можем считать, что $\bar{\alpha}_n = \langle\alpha_{n,3},\ldots,\alpha_{n,3k}\rangle,\ldots,$ $\bar{\alpha}_m = \langle\alpha_{m,3},\ldots,\alpha_{m,3l}\rangle$.

По теореме 18 формула $\psi_\phi(x,\bar{y},\bar{z},t,d)$ распадается на конечное число формул (лемма 8), определяющих клетки. Поэтому можно считать, что формула $\psi_\phi(x,\bar{y},\bar{\alpha},\bar{\beta},d)$ эквивалентна дизъюнкции формул вида

$$x = h(\bar{y},\bar{\alpha},\bar{\beta},d); \tag{4}$$

$f(\bar{y},\bar{\alpha},\bar{\beta},d) < x < g(\bar{y},\bar{\alpha},\bar{\beta},d)$, где $h(\bar{y},\bar{z},t,d)$, $f(\bar{y},\bar{z},t,d)$, $g(\bar{y},\bar{z},t,\bar{d})$ – d – определимые функции. (5)

Мы утверждаем, что $\psi_\mu(\bar{y},\bar{\alpha}^{+*},\bar{\beta},d)$ является дизъюнкцией формул вида

$$\exists I_1 \ldots \exists I_r \, \exists x \, [\, \forall \bar{z}_n \ldots \forall \bar{z}_m \, \forall t_1 \ldots \forall t_r$$
$$[(((\&\&(\alpha_{n,3i-1} < z_{n,i} < \alpha_{n,3i+1}) \,\&\, (t_1 \in I_1 \,\&\ldots\&\, t_r \in I_r)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = h(\bar{y},\bar{z}_n,\ldots,\bar{z}_m,t_1,\ldots,t_r,d)) \,\&\, x = h(\bar{y},\bar{\alpha}_n,\ldots,\bar{\alpha}_m,\beta_1,\ldots,\beta_r,d)$$
$$\&\, \beta_1 \in I_1 \,\&\ldots\&\, \beta_r \in I_r \,\&\&\, (x = h(\bar{y},\bar{\alpha}'_n,\ldots,\bar{\alpha}'_m,t_1,\ldots,t_r,d))]; \quad (6)$$

$$\exists I_1 \ldots \exists I_r \, \exists x \, [\, \forall \bar{z}_n \ldots \forall \bar{z}_m \, \forall t_1 \ldots \forall t_r$$
$$[(((\&\&(\alpha_{n,3i-1} < z_{n,i} < \alpha_{n,3i+1}) \,\&\, (t_1 \in I_1 \,\&\ldots\&\, t_r \in I_r)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(\bar{y},\bar{z}_n,\ldots,\bar{z}_m,t_1,\ldots,t_r,d) < x < g(\bar{y},\bar{z}_n,\ldots,\bar{z}_m,t_1,\ldots,t_r,d)) \,\&$$
$$\&\beta_1 \in I_1 \,\&\ldots\&\, \beta_r \in I_r \,\&\, f(\bar{y},\bar{\alpha}_n,\ldots,\bar{\alpha}_m,\beta_1,\ldots,\beta_r) <$$
$$< x < g(\bar{y},\bar{\alpha}_n,\ldots,\bar{\alpha}_m,\beta_1,\ldots,\beta_r)) \,\&\&\, (f(\bar{y},\bar{\alpha}'_n,\ldots,\bar{\alpha}'_m,t_1,\ldots,t_r,d) <$$
$$< x < g(\bar{y},\bar{\alpha}'_n,\ldots,\bar{\alpha}'_m,t_1,\ldots,t_r,d))]. \quad (7)$$

Здесь $\bar{\alpha}_n := \langle \alpha_{n,3},\ldots,\alpha_{n,3k} \rangle$, $\bar{\alpha}_m := \langle \alpha_{m,3},\ldots,\alpha_{m,3l} \rangle$

$\bar{z}_n := \langle z_{n,1},\ldots,z_{n,k} \rangle$, $\bar{z}_m := \langle z_{m,1},\ldots,z_{m,l} \rangle$

$\bar{\alpha}'_n := \langle \alpha_{n,j_1},\alpha_{n,j_2},\ldots,\alpha_{n,j_k} \rangle$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$

$\bar{\alpha}'_m := \langle \alpha_{m,i_1},\alpha_{m,i_2},\ldots,\alpha_{m,i_l} \rangle$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_l$

$\bar{\alpha}''_n := \langle \alpha_{n,2},\alpha_{n,3},\ldots,\alpha_{n,3l-1},\alpha_{n,3l},\alpha_{n,3l+1} \rangle$

$\bar{\alpha}''_m := \langle \alpha_{m,2},\alpha_{m,3},\ldots,\alpha_{m,3l-1},\alpha_{m,3l},\alpha_{m,3l+1} \rangle$

$\bar{\alpha} := \langle \bar{\alpha}_n,\ldots,\bar{\alpha}_m \rangle$, $\bar{\alpha}' := \langle \bar{\alpha}'_n,\ldots,\bar{\alpha}'_m \rangle$.

Утверждение 5. Для любого $b \in D$ верно

$$[\, D' \vdash \psi_\mu(b,\bar{\alpha}',\bar{\beta},d) \Rightarrow D^+ \vdash \mu(\bar{b})\,].$$

Доказательство. Так как в модели $D(\bar{\alpha}',\bar{\beta})$ выполняется формула (6) или (7), то существуют интервалы $J'_1,\ldots,J'_r \subset D(\bar{\alpha}^{+},\bar{\beta})$, что заменив этими интервалами неопределенные интервалы $I_1,\ldots,I_r$ формула (6) или (7) элиминирует кванторы $\exists I_1,\ldots,\exists I_r$. $\beta_1 \in J'_1,\ldots,\beta_r \in J'_r$; $J'_1 \subset D(\bar{\alpha}',\bar{\beta})$. Так как $\beta_1 \in D(\bar{\alpha}',\bar{\beta} \setminus \beta_1)$ и $tp(\beta_1 \,/\, D(\bar{\alpha}',\bar{\beta} \setminus \beta_1))$ – одиночный, который определяется сечением D (утверждение 4(б)), то существует $J_1 \subset J'_1$, что $J_1 \subset D$ и $\beta_1 \in J_1 \subset J'_1$. Следовательно, существуют интервалы $J_s,\dots,J_r \subset D$, ($\beta_s \in J_s,\dots,\beta_r \in J_r$), для которых выполняется формула (6) или (7). Таким образом, мы получили

$$D(\bar{\alpha}'') \vDash \exists x \forall \bar{z}_n \dots \forall \bar{z}_m \forall t_s \dots \forall t_r [((\&\&(\alpha_{n,3i-1} < z_{n,i} < \alpha_{n,3i+1}) \& t_s \in J_s \& \dots \& t_r \in J_r) \to x = h(b,\bar{z}_n,\dots,\bar{z}_m,t_s,\dots,t_r,d))]; \quad (8)$$

$$D(\bar{\alpha}'') \vDash \exists x \forall \bar{z}_n \dots \forall \bar{z}_m \forall t_s \dots \forall t_r [\&\&(\alpha_{n,3i-1} < z_{n,i} < \alpha_{n,3i+1}) \& t_s \in J_s \& \dots \& t_r \in J_r) \to f(b,\bar{z}_n,\dots,\bar{z}_m,t,d) < x < g(b,\bar{z}_n,\dots,\bar{z}_m,t,d)]. \quad (9)$$

Условия вида $\alpha_{n,3i-1} < z_{n,i} < \alpha_{n,3i+1}$ позволяют в рассуждениях переходить к типам, так как любые кортежи элементов из $D(\bar{\alpha}')$, удовлетворяющие посылке формул (8),(9), должны реализовывать один тип над D, что $\bar{\alpha}$ (теорема 7, теорема 10, лемма 4). Следовательно, из истинности формул (6),(7) следует истинность следующих утверждений (10), (11). Для любых $\bar{\gamma}_n,\dots,\bar{\gamma}_m,\delta_s,\dots,\delta_r,\bar{\gamma}'_n,\dots,\bar{\gamma}'_m,\delta'_s,\dots,\delta'_r \in D$ верно $\delta_r,\delta'_r \in J_r$, то $h(b,\bar{\gamma}_n,\dots,\bar{\gamma}_m,\bar{\delta}) = h(b,\bar{\gamma}'_n,\dots,\bar{\gamma}'_m,\bar{\delta}')$; (10)

$[f(b,\bar{\gamma}_n,\dots,\bar{\gamma}_m,\delta_s,\dots,\delta_r) < g(b,\bar{\gamma}'_n,\dots,\bar{\gamma}'_m,\delta'_s,\dots,\delta'_r)]$. (11)

По теореме компактности существует формула $\theta(\bar{z},d_1)\in tp(\bar{\alpha}/D)$, что верно

$$\forall \bar{z} \forall \bar{t} \forall \bar{z}' \forall \bar{t}' [\theta(\bar{z},d_1) \& \theta(\bar{z}',d_1) \& \bar{t} \in J_s \times \dots \times J_r \& \bar{t}' \in J_s \times \dots \times J_r \to h(b,\bar{z},\bar{t},d) = h(b,\bar{z}',\bar{t}',d)] \quad (12)$$

или $$[F(b,\bar{z},\bar{t},d) < g(b,\bar{z}',\bar{t}',d)]. \quad (13)$$

Формула (12) или (13) истинна в модели D', а следовательно в D, так как они содержат параметры только из D.

Случай 1. (12) истинна в D.

Возьмем произвольные $\bar{a}_n,\dots,\bar{a}_m,c_s,\dots,c_r \in D$, такие что $D \vDash \theta(\bar{a}_n,\dots,\bar{a}_m,d_1) \& c_s \in J_s \& \dots \& c_r \in J_r$.

Тогда из (12) следует $h(b,\bar{a},\bar{c},d)=h(b,\bar{\alpha},\bar{\beta},d)$. Отсюда следует, что $h(b,\bar{\alpha},\bar{\beta},d) \in D$ и следовательно существует $a \in D$: $h(b,\bar{\alpha},\bar{\beta},d) = a$. Отсюда следует истинность формулы $\psi_\Phi(a,b,\bar{\alpha},\bar{\beta},d)$.

Случай 2. (13) истинна в D.

Из леммы 7 следует существование $c \in D$, что

$D \models \forall \bar{z} \ \forall \bar{t} \ [\theta(\bar{z}, d_1) \ \& \ \bar{t} \in J_m \times \ldots \times J_r \Rightarrow f(b, \bar{z}, \bar{t}, \bar{d}) \leq c <$
$< g(b, \bar{z}, \bar{t}, \bar{d})]$ или

$D \models \forall \bar{z} \ \forall \bar{t} \ [\theta(\bar{z}, d_1) \ \& \ \bar{t} \in J_m \times \ldots \times J_r \Rightarrow f(b, \bar{z}, \bar{t}, \bar{d}) < c \leq$
$\leq g(b, \bar{z}, \bar{t}, \bar{d})]$.

Для определенности будем считать, что выполняется первая формула. Из того, что $\theta(\bar{z}, d_1) \in tp(\bar{\alpha} \ / \ D)$, $\bar{\beta} \in J_m \times \ldots \times J_r$, то $f(b, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{d}) \leq c < g(b, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{d})$.

Рассмотрим интервал $(c, g(b, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{d}))$. По лемме 3(a) существует $a \in D$, что $c < a < g(b, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{d})$.

Имеем $f(b, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{d}) < a < g(b, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{d})$.

Следовательно, $D' \models \psi_\phi(a, b, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{t}, \bar{d})$. (14)

(14) выполняется в случаях (1) и (2). По индукционному предположению для формулы ϕ верно $D^+ \models \phi(a, \bar{b})$. Отсюда $D^+ \models$ $\models \exists x \ \phi(x, \bar{b})$ Следовательно, $D^+ \models \mu(\bar{b})$.

Утверждение 6. Для любого $\bar{b} \in D$ верно

$$[D^+ \models \mu(\bar{b}) \Rightarrow D' \models \psi_\mu(b, \bar{\alpha}', \bar{\beta}, \bar{d})].$$

Доказательство. $D^+ \models \mu(\bar{b}) \Rightarrow D^+ \models \phi(a, \bar{b})$, $a \in D$.

По индукционному предположению $D' \models \psi_\phi(a, b, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{d})$. А так как формула ψ_ϕ эквивалентна дизъюнкции формул вида (4),(5), то верно

$D' \models a = h(b, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{d})$ (15)

или

$D' \models f(b, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{d}) < a < g(b, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{d})$; (16)

$M := D(\bar{\alpha})$. Тогда $M(\beta_1, \ldots, \beta_m) \models a = h(b, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{d})$ (17)

или

$M(\beta_1, \ldots, \beta_m) \models f(b, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{d}) < a < g(b, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{d})$. (18)

По лемме 6 существуют интервалы $J'_1, \ldots, J'_m \subset M$, что

1) $\beta_m \in J'_m, \ \ldots, \ \beta_r \in J'_r$;

2) $M \models \forall t_s, \ldots, \forall t_r\ (t_s \in J'_s \& \ldots \& t_r \in J'_r \to a = h(\bar{b}, \bar{\alpha}, \bar{t}, \bar{d}))$ (19)

или

$M \models \forall t_s, \ldots, \forall t_r\ (t_s \in J'_s \& \ldots \& t_r \in J'_r \to f(\bar{b}, \bar{\alpha}, \bar{t}, \bar{d}) < a < g(\bar{b}, \bar{\alpha}, \bar{t}, \bar{d})]$. (20)

Так как $\beta_s \in J'_s$, $J'_s \subset D(\bar{\alpha})$, в $D(\bar{\alpha})$ не реализуется $tp(\beta_s / D)$ и он является одиночным, то по лемме 3(б) существует $J_s \subset J'_s$, $J_s \subset D$, $\beta_s \in J_s$. Таким образом, $D(\bar{\alpha}) \models \forall t_s \ldots t_r\ ((t_s \in J_s \& \ldots \& t_r \in J_r) \to a = h(\bar{b}, \bar{\alpha}, \bar{t}, \bar{d}))$; (21)

$D(\bar{\alpha}) \models \forall t_s, \ldots, \forall t_r\ ((t_s \in J_s \& \ldots \& t_r \in J_r \to f(\bar{b}, \bar{\alpha}, \bar{t}, \bar{d}) < a < g(\bar{b}, \bar{\alpha}, \bar{t}, \bar{d}))$. (22)

Отсюда для любого $\bar{\gamma} \in D'$, если $tp(\bar{\gamma} / D) = tp(\bar{\alpha} / D)$, то

$D' \models \forall \bar{t}\ (\bar{t} \in J_s x \ldots x J_r \to a = h(\bar{b}, \bar{\gamma}, \bar{t}, \bar{d}))$; (23)

$D' \models \forall \bar{t}(\bar{t} \in J_s x \ldots x J_r \to (f(\bar{b}, \bar{\gamma}, \bar{t}, \bar{d}) < a < g(\bar{b}, \bar{\gamma}, \bar{t}, \bar{d})))$. (24)

Рассмотрим $\bar{\gamma} \in D(\bar{\alpha}')$, $\bar{\gamma} = \langle \bar{\gamma}_n, \ldots, \bar{\gamma}_m \rangle$, $\bar{\gamma}_n = \langle \gamma_{n,1}, \ldots, \gamma_{n,k} \rangle$

$- - - - - - - - - - -$

$\bar{\gamma}_m = \langle \gamma_{m,1}, \ldots, \gamma_{m,l} \rangle$

$\alpha_{n,2} < \gamma_{n,1} < \alpha_{n,4}$, $\alpha_{n,5} < \gamma_{n,2} < \alpha_{n,7}$, ...

$\alpha_{n,3i-1} < \gamma_{n,i} < \alpha_{n,3i+1}$

$- - - - - - - - - - - - - -$

$\alpha_{m,3j-1} < \gamma_{n,j} < \alpha_{n,3j+1}$.

Из теоремы 10 и леммы 4 следует, что $tp(\bar{\gamma} / D) = tp(\bar{\alpha} / D)$.

Отсюда $D(\bar{\alpha}'') \models \forall \bar{z}\ \forall \bar{t}\ ((\&\& \alpha_{n,3i-1} < z_{n,i} < \alpha_{n,3i+1} \& \bar{t} \in J_s x \ldots x J_r \to a = h(\bar{b}, \bar{z}, \bar{t}, \bar{d}))$ (25)

или

$D(\bar{\alpha}'') \models \forall \bar{z}\ \forall \bar{t}\ (\&\& \alpha_{n,3i-1} < z_{n,i} < \alpha_{n,3i+1} \& \bar{t} \in J_s x \ldots x J_r \Rightarrow$
$\to f(\bar{b}, \bar{z}, \bar{t}, \bar{d}) < a < g(\bar{b}, \bar{z}, \bar{t}, \bar{d}))$. (26)

Отсюда, заменив a на $\exists x$ и J_s на $\exists I_s$, получим что $\bar{b}$ удовлетворяет (6) или (7).

Таким образом, из утверждений 2, 3 следует предложение 1.

Теорема 19. Пусть D о-минимальная модель, $\{U_\lambda \mid \lambda \in K\}$ семейство выпуклых подмножеств D. Тогда теория $Th(\langle D, U_\lambda \rangle_{\lambda \in K})$ слабо о-минимальна.

Доказательство. Для D имеется три возможности :

а) D – плотная о-минимальная модель;

б) D – дискретная о-минимальная модель;

в) D – смешанная о-минимальная модель.

а) Пусть $\mu(z, \bar{b})$ произвольная формула с одной свободной переменной с параметрами из D^+. По предложению 1 существует формула $\psi_\mu(z, \bar{y}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, d)$ ($\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in D'$, $d \in D$), что для любого $a \in D$

$$[\, D^+ \models \mu(a, \bar{b}) \Leftrightarrow D' \models \psi_\mu(a, \bar{b}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, d) \,].$$

Рассмотрим формулу $\psi_\mu(z, \bar{b}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, d)$. По о-минимальности D' $\psi_\mu(D', \bar{b}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, d) = \cup I_i \cup \{\cup \{d_i\}\}$ –есть конечное объединение интервалов и одноэлементных множеств. Пусть $a_1, a_2 \in I_1 \cap D$. Тогда $[a_1, a_2] \subset I_1$ и следовательно для любого $d \in [a_1, a_2] \cap D$ $D' \models \psi_\mu(d, \bar{b}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, d)$ и по предложению 1 $D^+ \models \mu(d, \bar{b})$. Следовательно, реализация формулы $\mu(z, \bar{b})$ распадается на конечное число выпуклых множеств, так как число таких выпуклых множеств зависит от $\bar{b}$ и от формулы $\psi_\mu(z, \bar{y}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, d)$ о-минимальной модели D'. По теореме 6 для формулы $\psi_\mu(z, \bar{y}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, d)$ число выпуклых множеств должно быть ограничено и это число не зависит от $\bar{b}$. Следовательно, число выпуклых множеств для формул $\mu(z, \bar{y})$ ограничено. Следовательно, по лемме 9 теория модели D^+ слабо о-минимальна.

б) Заметим, что в дискретных о-минимальных моделях не существует одиночных типов [теорема 14]. Аналог предложения 1 для дискретных о-минимальных моделей вытекает из теоремы Пиллай – Стейнхорна и его доказательство (аналог) повторяет доказательство предложения 1 в более простой форме. Роль модели D' играет следующая модель $D'' = D(A)$, где $A = \{\, \delta \mid tp(\delta / D) \in P \,\}$. Для каждого $p \in P$ в A существует ровно два элемента, удовлетворяющих p. Здесь P –

максимальное ортогональное подмножество социальных (неглавных) типов над $S_1(D)$ из множества социальных типов, определяющих при помощи семейства выпуклых множеств. Первый шаг индукции использует только следующие формулы:
$\{ x \le d,\ d \le x,\ x < f(\delta),\ f(\delta) < x,\ x < \delta,\ \delta < x \mid d \in D, \delta \in A$, f – унарная строго монотонная $\varnothing$-определимая функция $\}$.

в) Смешанный случай вытекает из а), б) и из теоремы Пиллая-Стейнхорна [6], в которой доказано, что любая формула о-минимальной теории есть булева комбинация формул дискретных и плотных частей модели.

1. Macpherson D., Marker D., Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields / Preprint, 1993. P.1-40.

2 Van den Dries L. Remarks on Tarski's problem concerning (R,+,*,exp) // G. Lolli, G. Longo and A. Marcja, eds, Logic Colloqium 1982. - North-Holland, Amsterdam, 1984. P. 97-121.

3 Pillay A., Steinhorn C. Definable sets in ordered structures 1 // Trans.Amer.Math.Soc. 295(1986). P.565-592.

4 Dickmann M. Elimination of quantifiers for ordered valution rings: Proceedings 3rd Easter Model Theory Conference at Gross Koris. - Berlin, 1985.

5. Knight J., Pillay A.; Steinhorn C. Definable sets in ordered structures II // Trans.Amer.Math.Soc. 295 (1986), P. 593-605.

6. Pillay A., Steinhorn C. Definable sets in ordered structures.III // Trans.Amer.Math.Soc. 300(1988), P.469-476.

7. Laskowski M., Steinhorn C. On o-minimal expansions of archimedian ordered groups / Preprint, 1994 P.1-21.

8 Marker D., Steinhorn C. Definable types in o-minimal theories // Journal of Symbolic Logic,. 59(1994). P.185-198.

9. Pillay A., Steinhorn C. Discrete o-minimal structures // Ann.Pure App.Logic 34(1987). P.275-290